



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์

Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๕ ฉบับที่ ๗๐๐ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๓

Volume 65 Number 700 January – April 2020

บทความทั่วไป *General Article*

- คำคม คณิตศาสตร์ ปีแยร์ เดอ แฟร์มา : ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มา 1
Mathematician Quote Pierre de Fermat : Fermat's Last Theorem
จินดิษฐ์ ละออบภักษิณ และ รตินันท์ บุญเคลือบ

บทความวิชาการ *Academic Article*

- การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจสัน (1) 6
Evaluating Determinants by Jacobi's Method and Dodgson's Condensation Method (1)
พิสมัย กิตติภูมิ และ ปาริชาติ ศรีรัตน์
- การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต : โจทย์ปัญหา สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 22
และระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
Using Bar Model Method to Solve Algebraic Problems: Word Problems,
Linear Equations of One Variable and System of Linear Equations of Two Variables
ปรางใส เทียงตรง

บทความวิจัย *Research Article*

- การส่งไดกราฟกำลังสามของริงสลับที่จำกัด 41
The Cubic Mapping Digraphs of Finite Commutative Rings
อิทธิวัฒน์ โตเจริญนิติคัย
- การสร้างอัตราส่วนของในแผ่นจัตุรัสอย่างง่าย 53
A Simple Construction of Golden Ratio in Square Plate
อรรณพ แก้วขาว และ ลลิตา ตันวงศ์ษา



วารสารคณิตศาสตร์

ISSN 0858-4788

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา ๖๕ ฉบับที่ ๗๐๐ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๓

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand

Under The Patronage of His Majesty The King

Volume 65 Number 700 January - April 2020

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

พิมพ์ที่ สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร 0-2218-3562 ถึง 63

<http://www.cuprint.chula.ac.th>

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

สำหรับฉบับแรกของปี 2563 นี้ กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร ขอแสดงความยินดีกับผู้ที่ได้รางวัลจากการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี พ.ศ.2562 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ โดยมีพิธีมอบรางวัล ไปเมื่อวันที่ 9 กุมภาพันธ์ 2563 ณ ห้องประชุมประไพ วิริยะพันธุ์ บริษัท วิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) ทั้งนี้ ผู้เข้าสอบสามารถดูผลสอบของตนเองได้ที่ เว็บไซต์สมาคมคณิตศาสตร์ <https://www.mathassociation.net/>

อนึ่ง วารสารคณิตศาสตร์ได้รับการประเมินคุณภาพวารสารวิชาการ จากศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (TCI) ให้อยู่ในวารสารกลุ่มที่ 2 สาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ในฐานข้อมูล TCI โดยมีผลตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 2563 ถึง 31 ธันวาคม 2567 ทั้งนี้สำหรับบทความที่ส่งมาลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ และได้อีเมลตอบรับให้ลงตีพิมพ์ ก่อนวันที่ 31 ธันวาคม 2562 ถือว่า บทความดังกล่าวตีพิมพ์ในวารสารที่อยู่ในฐานข้อมูล TCI กลุ่มที่ 1 ทั้งนี้บทความที่เผยแพร่ทางวารสารคณิตศาสตร์ยังคงสอดคล้องตามประกาศ ก.พ.อ. เรื่องเกณฑ์การพิจารณาวารสารวิชาการ สำหรับการเผยแพร่ผลงานทางวิชาการ ลงวันที่ 16 มิถุนายน พ.ศ.2562

ในการนี้ เพื่อเป็นการป้องกันการแพร่ระบาดของเชื้อไวรัสโคโรนา 2019 (COVID-19) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ในพระบรมราชูปถัมภ์ ขอแจ้งงด 1) การอบรมครู ภาคฤดูร้อน 2) การประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ 3) การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี (AMM) และขอเลื่อนการประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี (UAMC) ทั้งนี้ หากมีความคืบหน้า ทางสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จะแจ้งให้ทราบอีกครั้ง และขอให้สมาชิกและผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน มีสุขภาพแข็งแรง ปลอดภัยจากเหตุการณ์ในครั้งนี้ เราจะร่วมผ่านเหตุการณ์ครั้งนี้ไปด้วยกัน

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ
รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล
ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ณัฐชัย สีนาวงค์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.นพพร แหยมแสง | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 4. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี |
| 5. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 6. รศ. ดร.อัมจิตร เต็มวุฒิพงษ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 7. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงค์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.ฤๅษณะ เนียมมณี | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 3. ศ. ดร.ไพศาล นาคมหาชาสินธุ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 4. รศ. ดร.กาญจน์ภา อมรชกุล | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 6. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 7. รศ. ดร.พิรุทธิ์ ขาญเศรษฐิกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 8. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |
| 9. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 10. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 11. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว | มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ |
| 12. ผศ. ดร.สุริย์พร ชาวแพรกน้อย | มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| 13. อ. ดร.มณจิรา ดวงสาพล | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 14. อ. ดร.เอื้ออารีย์ บุญเพิ่ม | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 15. นายพิเชฐ เจียรรมณีสวัสดิ์ | นายกสมาคมนักคณิตศาสตร์ประกันภัย |

รายชื่อคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี 2562 - 2563

1. ผศ.รจิต วัฒนสินธุ์	นายกสมาคม
2. อ. ดร.ฉวีวรรณ กิรติกร	อุปนายก
3. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	กรรมการและเลขาธิการ
4. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์	กรรมการและรองเลขาธิการ
5. ผศ.ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ	กรรมการและเหรัญญิก
6. รศ.สุรวิทย์ ต้นเต่งผล	กรรมการและผู้ช่วยเหรัญญิก
7. ผศ.ลออ ชนวิริยะ	กรรมการและผู้ช่วยเหรัญญิก
8. ผศ.वासना สุขกระสานติ	กรรมการและบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์
9. ว่าที่ ร.อ. ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์	กรรมการและประชาสัมพันธ์
10. อ. ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์	กรรมการและผู้ช่วยประชาสัมพันธ์
11. รศ.ภรณ์ เจริญภักตร์	กรรมการและปฏิคม
12. รศ. ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	กรรมการและฝ่ายดูแลเว็บไซต์
13. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	กรรมการ
14. รศ. ดร.ณัฐไชย์ สีนาวงศ์	กรรมการ
15. รศ. ดร.นพพร แหยมแสง	กรรมการ
16. รศ. ดร.พัชรา ไชยสุริยา	กรรมการ
17. รศ. ดร.วิชาญ ลีวศิริตฤกุล	กรรมการ
18. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
19. รศ. ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
20. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
21. รศ. ดร.อมร वासनावิจิตร	กรรมการ
22. รศ. ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์	กรรมการ
23. รศ.ศรีเสงี่ยม จักรใจ	กรรมการ
24. ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
25. อ.นวนน้อย เจริญผล	กรรมการ
26. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการ
27. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ ที่จัดทำขึ้นโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นภาษาไทยหรือภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณ และเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้นจึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของ บทความที่จะรับ ตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือ คณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น - วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี - เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย - บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน - วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่าง ถูกต้อง

การพิจารณา กลั่นกรองบทความ ของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจาก ผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้อง โดยผู้ทรงคุณวุฒิไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับ ผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จาก ผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่ง บทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่อยู่ ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตาม ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่าง เคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่ง กองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสาร คณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือ หน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือ กระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคม คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่
www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตาม
 ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้น
 อัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อม
 ไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความ
 MJMATH.docx) ขึ้นที่ระบบการส่งบทความ ที่ <https://www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการ
 ได้ที่อีเมล MathThaiOrg@gmail.com



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์

Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๕ ฉบับที่ ๗๐๐ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๓

Volume 65 Number 700 January – April 2020

บทความทั่วไป *General Article*

คำคม คณิตศาสตร์ ปีแยร์ เดอ แฟร์มา : ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มา

1

Mathematician Quote Pierre de Fermat : Fermat's Last Theorem

จินดิษฐ์ ละออบภักษิน และ รตินันท์ บุญเคลือบ

บทความวิชาการ *Academic Article*

การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน (1)

6

Evaluating Determinants by Jacobi's Method and Dodgson's Condensation Method (1)

พิสมัย กิตติภูมิ และ ปาริชาติ ศรีรัตน์

การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต : โจทย์ปัญหา สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

22

และระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

Using Bar Model Method to Solve Algebraic Problems: Word Problems,

Linear Equations of One Variable and System of Linear Equations of Two Variables

ปรางใส เทียงตรง

บทความวิจัย *Research Article*

การส่งไดกราฟกำลังสามของริงสลับที่จำกัด

41

The Cubic Mapping Digraphs of Finite Commutative Rings

อิทธิวัฒน์ โตเจริญนิติภัย

การสร้างอัตราส่วนของในแผ่นจัตุรัสอย่างง่าย

53

A Simple Construction of Golden Ratio in Square Plate

อรรณพ แก้วขาว และ ลลิตา ตันวงศ์ษา



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 65(700) มกราคม – เมษายน 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

คำคม คณิตศาสตร์

ปีแยร์ เดอ แฟร์มา : ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มา

Mathematician Quote

Pierre de Fermat : Fermat's Last Theorem

จินดิษฐ์ ละออปักสิน^{1,*} และ รตินันท์ บุญเคลือบ²

¹สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพมหานคร 10330

²ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพมหานคร 10330

Jinnadit Laorpaksin^{1,*} and Ratinan Boonklurb²

¹Division of Mathematics Education, Department of Curriculum and Instruction,
Faculty of Education, Chulalongkorn University, Bangkok 10330

²Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: ¹ljinnadit@hotmail.com ²ratinan.b@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 2 กรกฎาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 19 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 4 กันยายน 2562

* ผู้เขียนหลัก

บทคัดย่อ

บทความทั่วไปฉบับนี้นำเสนอเกร็ดชีวประวัติที่น่าสนใจของ ปีแยร์ เดอ แฟร์มา และคำคมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์จากทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มาที่แฟร์มาเคยบันทึกไว้

คำสำคัญ: แฟร์มา ชีวประวัติ คำคมคนคณิตศาสตร์

ABSTRACT

This general article presents an interesting part of Pierre de Fermat's biography and his mathematical quote from the Fermat's Last Theorem.

Keywords: Fermat, Biography, Mathematician quote

“มือสมัครเล่น” เป็นคำที่มีความหมายค่อนข้างลบเชิงว่า ขาดความรู้ ความสามารถ ความเชี่ยวชาญ [1] ไม่ใช่มืออาชีพ เมื่อชายคนหนึ่งศึกษาค้นคว้าคณิตศาสตร์เป็นงานอดิเรก เพื่อความเพลิดเพลินในยามว่าง เขาจึงนับเป็นเพียงมือสมัครเล่นทางคณิตศาสตร์ แต่ผลงานของเขากลับส่องแสงนำทางให้กับคณิตศาสตร์สาขาใหม่ ๆ ในอีกหลากหลายสาขา ทั้งแคลคูลัส ความน่าจะเป็น เรขาคณิตวิเคราะห์ และทฤษฎีจำนวน ชายผู้ยิ่งใหญ่ผู้นั้นคือ ปีแยร์ เดอ แฟร์มา (Pierre de Fermat : 1601 - 1665)



รูปที่ 1 ปีแยร์ เดอ แฟร์มา

แฟร์มา เกิดที่เมืองโบมอนต์เดอโลมาญจ์ ทางตอนใต้ของประเทศฝรั่งเศส ในปีแรกของคริสต์ศตวรรษที่ 17 ซึ่งเป็นอีกหนึ่งศตวรรษที่โดดเด่นในประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์ [4] เพราะครอบครัวร่ำรวยมีความพร้อม แฟร์มาผู้ชาญฉลาดจึงได้รับการศึกษาที่ดี โดยเฉพาะในด้านภาษาวรรณคดี และนิติศาสตร์ ซึ่งต่อมาเขาได้เลือกประกอบอาชีพทางด้านกฎหมาย และได้รับแต่งตั้งเป็นผู้พิพากษาและที่ปรึกษาด้านกฎหมายประจำสภาเมืองตุลุส ด้วยลักษณะงานเช่นนี้ทำให้เขามีเวลาว่างมาก แฟร์มาจึงมีงานอดิเรกที่โปรดปรานมากมาย ทั้งการเขียนกวีนิพนธ์ในภาษาละติน การเขียนบท

วิพากษ์ตำรากรีกโบราณในเชิงวิชาการ การอุทิศตนเพื่อศาสนาจักรโดยดูแลด้านกฎหมายและการเงิน แต่งานอดิเรกที่เขาหลงใหลและสร้างชื่อให้กับเขา จนยังเป็นที่กล่าวขานตราบนิจปัจจุบัน ก็คือ การคิดค้นผลงานทางคณิตศาสตร์ แม้จะไม่ได้ศึกษาคณิตศาสตร์มาโดยตรง แต่ความลุ่มลึกในวิชาการ กลับเป็นที่ประจักษ์ และได้รับการยอมรับจากนักคณิตศาสตร์ชื่อดังร่วมยุคหลายท่าน ซึ่งแฟร์มาได้ เคยพบปะพูดคุยและเขียนจดหมายติดต่อ เพื่อแลกเปลี่ยนทัศนะทางวิชาการคณิตศาสตร์ เช่น เดการ์ต (Rene Descartes : ค.ศ. 1596 - 1650) ปาสกาล (Blaise Pascal : ค.ศ. 1623 - 1662) ฮอยเกนส์ (Christiaan Huygens : ค.ศ. 1629 - 1695) เมอแซน (Marin Mersenne : ค.ศ. 1588 - 1648) และ วอลลิส (John Wallis : ค.ศ. 1616 - 1703) [3]

ผลงานคณิตศาสตร์ของแฟร์มามีอยู่มากมายหลายด้าน ในด้านแคลคูลัส เขาได้ศึกษาเกี่ยวกับการ หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้เส้นสัมผัสเส้นโค้ง ซึ่งนับว่าเป็นแนวทางใหม่ที่โดดเด่นมาก ในยุคนั้น โดยได้เผยแพร่ผลงานชิ้นนี้ตั้งแต่ก่อนที่นิวตันจะเกิด 13 ปี และก่อนที่ไลบ์นิทซ์จะเกิด 17 ปี [2] ในปัจจุบันจึงยกย่องกันว่า แฟร์มาเป็นหนึ่งในผู้วางรากฐานคนสำคัญของวิชาแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ ในด้านความน่าจะเป็น แฟร์มาได้ทำงานร่วมกันกับปาสกาล เพื่อนรักนักคณิตศาสตร์รุ่นน้อง เพื่อ อธิบายปัญหาเกี่ยวกับการพนันขั้นต่อในเชิงของคณิตศาสตร์อย่างรัดกุม ซึ่งปาสกาลถูกถามมาจาก เพื่อนนักพนันอีกทีหนึ่ง ผลแห่งการผลักดันส่งจดหมายเพื่อแลกเปลี่ยนความคิดนี้ ได้ก่อเกิดเป็นแขนง วิชาใหม่ทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า “ทฤษฎีความน่าจะเป็น”

ส่วนด้านเรขาคณิตวิเคราะห์ แม้ปัจจุบันโลกจะยกย่องให้เกียรติว่า เดการ์ต เป็นผู้คิดขึ้น หากแต่ก็มีหลักฐานว่าก่อนหน้าที่เขาจะเผยแพร่ผลงานถึง 7 ปี แฟร์มาได้มีผลงานวิชาการเกี่ยวกับเรขาคณิต วิเคราะห์ โดยได้นำเสนอเกี่ยวกับสมการเส้นตรง สมการวงกลม นอกจากนี้ยังกล่าวถึงสมการ ไฮเพอร์โบลา วงรี พาราโบลา และเส้นโค้งอื่นอีกหลายแบบในรูปสมการเชิงพีชคณิตมาก่อนแล้ว

ด้านทฤษฎีจำนวน แฟร์มามีผลงานที่น่าสนใจมากมาย ซึ่งหลายชิ้นมีชื่อของเขาเองกำกับอยู่ เช่น ทฤษฎีบทน้อยของแฟร์มา จำนวนแฟร์มา จำนวนเฉพาะแฟร์มา วิธีแยกตัวประกอบของแฟร์มา แต่ผลงานที่โดดเด่นและเป็นตำนานคู่กับเขาก็คือ ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มา ที่ว่า ไม่สามารถหา จำนวนนับที่จะมาแทน x, y และ z ในสมการ $x^n + y^n = z^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ $n > 2$ แล้วทำให้สมการเป็นจริงได้ จุดกำเนิดของตำนานอยู่ที่ แฟร์มา ได้เขียนข้อความลักษณะนี้เอาไว้ บริเวณขอบข้างของสำเนาหนังสือเลขคณิตของไดโอแฟนตัส (Diophantus's Arithmetica) เขียน เหมือนกับเป็นบันทึกส่วนตัวของตนเอง โดยระบุว่าข้อความนี้เป็นจริง แต่เพราะเนื้อที่ว่างที่ขอบ

หนังสือมีไม่เพียงพอ จึงไม่ได้เขียนบทพิสูจน์เอาไว้ ต่อมาภายหลังเมื่อแฟร์มาเสียชีวิตไปแล้ว ได้มีการค้นพบหนังสือเล่มนี้พร้อมกับข้อความดังกล่าว จึงเป็นประเด็นให้นักคณิตศาสตร์หันมาสนใจว่าบทพิสูจน์ของข้อความนี้คืออะไร แฟร์มามีบทพิสูจน์แล้วจริงหรือไม่ เพราะเมื่อได้ทดลองพิสูจน์ ก็พบว่าข้อความที่เข้าใจได้ง่ายและกลายเป็นภาคขยายของทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่รู้จักกันดีนี้ กลับซับซ้อนและยากเหลือประมาณ ความปั่นป่วนเกิดขึ้นนับตั้งแต่กลางคริสต์ศตวรรษที่ 17 เป็นต้นมา นักคณิตศาสตร์ชื่อดังมากมายทั่วโลก ต่างก็ไล่ล่าหาบทพิสูจน์ของข้อความนี้มาอย่างต่อเนื่องยาวนาน จวบจนผ่านมากกว่า 300 ปี ใน ค.ศ. 1994 ไวลส์ (Andrew Wiles : เกิด ค.ศ. 1953) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ก็สามารถมอบบทพิสูจน์ที่สมบูรณ์ให้กับโลกนี้ได้

ด้วยช่วงชีวิตประมาณ 64 ปี กับการศึกษาและทำงานคณิตศาสตร์เป็นเพียงงานอดิเรก มนุษย์ผู้นี้กลับสร้างคุณูปการให้กับวงการคณิตศาสตร์อย่างลุ่มลึก กว้างขวาง ทั้งในแนวดิ่งและแนวราบ คำว่า “มือสมัครเล่น” แม้ในทางหนึ่งดูจะเป็นคำเย้าแฟร์มา แต่ด้วยผลงานที่ประจักษ์ทั้งผองของเขาก็นำพาให้เราอดจินตนาการไม่ได้ว่า หาก “เจ้าชายแห่งเหล้ามือสมัครเล่น” [2] คนนี้ ได้ทำคณิตศาสตร์แบบ “มืออาชีพ” แล้ว เขาจะสร้างความสั่นสะเทือนให้กับวงการคณิตศาสตร์และโลกนี้ได้สักเพียงใด สำหรับแฟร์มาแล้ว คำคมของเขาคงไม่มีวลีใดที่สมควรจะจดจำได้เท่ากับข้อความที่เขียนพรรณนาไว้ที่ขอบข้างหนังสือ ที่ว่า

To divide a cube into two other cubes, a fourth power or in general any power
whatever into two powers of the same denomination above the second is
impossible, and I have assuredly found an admirable proof of this,
but the margin is too narrow to contain it. [5]

การย่อยทำ กำลังสาม จำนวนหนึ่ง	เป็นอีกสอง ของเลขซึ่ง กำลังสาม
แม้เปลี่ยนนำ กำลังสี่ แทนที่ตาม	ขยายข้าม กรณิ ที่ทั่วไป
คือเปลี่ยนเลข ขึ้นกำลัง ทั้งพิภพ	แล้วหวังสบ สองเลขซ้ำ กำลังได้
หากกำลัง ที่ทดลอง เกินสองไซ้	หามิไม่ ต้องอับจน สิ้นหนทาง
และตัวฉัน นั้นตระหนัก ประจักษ์จิต	ว่าพบแล้ว ในแนวคิด พิสูจน์สร้าง
แต่ไม่อาจ เขียนแนะนำ จำเว้นวาง	เพราะขอบข้าง หนังสือนี้ ที่น้อยเกิน

เอกสารอ้างอิง

- [1] ราชบัณฑิตยสถาน. (20 ธันวาคม 2552). *รู้ รัก ภาษาไทย ตอน สม่ัครเล่น-มือสม่ัครเล่น* [รายการวิทยุ]. กรุงเทพมหานคร: สถานีวิทยุกระจายเสียงแห่งประเทศไทย.
The Royal Society (2009, December 20). *Know Love Thai Language, Episode : Samaklen - Muesamaklen* [Radio Program]. Bangkok: Radio Station of Thailand.
- [2] Bell, E. T. (2014). *Men of Mathematics*. New York : Simon and Schuster.
- [3] Dunham, W. (1994). *The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey through the Great Proofs, Problems, and Personalities*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Eves, H. (1958). *An Introduction to the History of Mathematics* (4th ed.). New York: Rinehart and Company.
- [5] Mathematics 4 You. Retrieved June 28, 2019, from <https://www.mathematics4you.com /quotes.html>.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(700) มกราคม – เมษายน 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจสัน (1)

Evaluating Determinants by Jacobi's Method and

Dodgson's Condensation Method (1)

พิสมัย กิตติภูมิ^{1,*} และ ปาริชาติ ศรีรัตน์²

^{1,2}ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 90110

Pisamai Kittipoom^{1,*} and Parichat Srirat²

^{1,2}Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Prince of Songkla University,
Songkhla 90110

Email: ¹pisamai.k@psu.ac.th ²parichat74712@gmail.com

วันที่รับบทความ : 12 มิถุนายน 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 1 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 12 ธันวาคม 2562

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการศึกษาวิธีคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์โดยใช้วิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจสัน

คำสำคัญ: ตัวกำหนด โคแฟกเตอร์

ABSTRACT

This article demonstrates two methods for computing the determinant of a matrix: Jacobi method and Dodgson's condensation.

Keywords: Determinants, Cofactors

* ผู้เขียนหลัก

1. บทนำ

ตัวกำหนด (determinant) ของเมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด $n \times n$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนเวกเตอร์ตามหลัก $a_1, a_2, \dots, a_n$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $d(a_1, a_2, \dots, a_n)$ และสอดคล้องตามสัจพจน์สามข้อคือ การเป็นหนึ่งเดียวในแต่ละแถว (homogeneity in each row) การไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การบวกระหว่างแถว (invariance under row addition) และตัวกำหนดของเมทริกซ์เอกลักษณ์มีค่าเท่ากับ 1 (the determinant of the identity matrix is one)

ในระดับมัธยมศึกษา เรามีวิธีการที่ไม่ยุ่งยากและสูตรที่ง่ายในการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 แต่เมื่อเมทริกซ์มีขนาดใหญ่ขึ้น วิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดก็เริ่มซับซ้อนมากขึ้น โดยวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดที่นิยมใช้อย่างแพร่หลายและสามารถคำนวณได้กับเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ได้แก่ การหาตัวกำหนดโดยกระบวนการเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan process) และวิธีการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว (cofactor expansion)

ในบทความนี้ เรานำเสนอวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดที่นอกเหนือจากวิธีการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว วิธีที่หนึ่งเป็นผลงานของนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน คาร์ล กุสทาบ ยาโคบ ยาโคบี (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 - 1851) และวิธีที่สองเป็นผลงานชาวอังกฤษ ชาร์ล ลัตวิดจ์ ดอดจ์สัน (Charles Lutwidge Dodgson, 1832 - 1898) ซึ่งรู้จักกันในชื่อ วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน (Dodgson's condensation method) วิธีการนี้สามารถคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่ได้โดยง่ายและรวดเร็วกว่าวิธีการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยวและวิธีของยาโคบี นอกจากความสวยงามและไม่ซับซ้อนของวิธีการนี้แล้ว ประวัติและผลงานด้านอื่น ๆ ของดอดจ์สันยังสร้างความประทับใจให้คณะผู้เรียบเรียงไม่น้อย [1, 4] โดยผลงานที่มีชื่อเสียงของดอดจ์สันนั้นหาใช่ผลงานทางคณิตศาสตร์ หากเป็นผลงานการประพันธ์วรรณกรรมเยาวชน ที่ใช้นามปากกาว่า ลิววิซ แครโรล (Lewis Carroll) โดยผลงานที่ประสบความสำเร็จมากที่สุดและมีชื่อเสียงมาจนถึงปัจจุบันนี้ คือ อลิซในดินแดนมหัศจรรย์ (Alice in Wonderland)

ถึงแม้ในยุคปัจจุบันมีโปรแกรมสำเร็จรูปที่สามารถคำนวณค่าตัวกำหนดได้ในเสี้ยววินาที แต่เมื่อย้อนเวลาไปในคริสต์ศตวรรษที่ 19 ที่ไม่มีเครื่องคำนวณเหมือนในปัจจุบัน การคิดค้นวิธีการที่สามารถลดขั้นตอนในการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่จึงนับเป็นสิ่งที่ท้าทาย ซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาทฤษฎีและวิวัฒนาการในการคำนวณค่าตัวกำหนดได้จาก [2 - 5]

2. การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว

กำหนดให้ $A = [a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ $a_{i,j}$ เป็นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ตัวประกอบร่วมเกี่ยว หรือ โคแฟกเตอร์ ของ $a_{i,j}$ ของ A สำหรับ i, j ใด ๆ คือ $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$ โดยที่ $M_{i,j}$ เป็น ไมเนอร์ (minor) ของ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-1) \times (n-1)$ ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ในกรณีที่ไมเนอร์ i และ j จะเรียกว่า ตัวประกอบร่วมเกี่ยว หรือ โคแฟกเตอร์ ของ A

2.1 การกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว หรือการกระจายโคแฟกเตอร์ (cofactor expansion)

เป็นวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดของ A ผ่านผลบวกของโคแฟกเตอร์ของ A ซึ่งสามารถกระจายได้ในแต่ละแถว i ดังนี้

$$\det A = a_{i,1}C_{i,1} + a_{i,2}C_{i,2} + a_{i,3}C_{i,3} + \cdots + a_{i,n}C_{i,n}$$

หรือกระจายได้ในแต่ละหลัก j

$$\det A = a_{1,j}C_{1,j} + a_{2,j}C_{2,j} + a_{3,j}C_{3,j} + \cdots + a_{n,j}C_{n,j}$$

2.2 การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีของยาโคบี

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ $A = [a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

- $[a_{k:k+l, k:k+l}^*]$ เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีสมาชิกเป็น ส่วนที่ซ้ำ จากการตัดแถวและหลักที่สมมาตรคือ แถวและหลักที่ k ถึงแถวและหลักที่ $k+l$ โดยที่ $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $l \in \{0, 1, \dots, n-k\}$ ของเมทริกซ์ A เราเรียก $[a_{k:k+l, k:k+l}^*]$ ว่า ไมเนอร์ประกอบ (complementary minor) ของ A
- A' คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยว $[C_{i,j}]$ ของเมทริกซ์ A เราเรียก $A' = [C_{j,i}]$ ว่า แอดจูเกต (adjugate) ของ A
- $[a'_{k:k+l, k:k+l}]$ เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีสมาชิกเป็น ส่วนที่เหลือ จากการตัดแถวและหลักที่สมมาตรคือ แถวและหลักที่ k ถึงแถวและหลักที่ $k+l$ โดยที่ $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $l \in \{0, 1, \dots, n-k\}$ ของเมทริกซ์ A' เราเรียก $[a'_{k:k+l, k:k+l}]$ ว่า ไมเนอร์สอดคล้อง (corresponding minor) ของ A'

ตัวอย่าง 2.1 สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ แอดจูเกตของของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ คือ $\mathbf{A}' = [C_{j,i}] = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

เมื่อตัดแถวและหลักที่ 2 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่า

$$\text{ไมเนอร์ประกอบ } [a_{2,2}^*] = 2 \text{ และ ไมเนอร์สอดคล้อง } [a'_{2,2}] = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทยาโคบี) [5] ให้ $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ $n \geq 3$

ถ้า $[a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*]$ เป็น ไมเนอร์ประกอบขนาด $(n-m) \times (n-m)$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ โดยที่ $2 \leq m < n-1$ และ $[a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}]$ เป็น ไมเนอร์สอดคล้องขนาด $m \times m$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}'$ แล้ว

$$\det \mathbf{A} \det [a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}] = (\det \mathbf{A})^m \det [a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*] \quad (1)$$

ถ้า $\det \mathbf{A} \neq 0$ แล้ว

$$\det [a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}] = (\det \mathbf{A})^{m-1} \det [a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*] \quad (2)$$

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

เนื่องจากเวกเตอร์หลักของ $\mathbf{A}$ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น ตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$ จึงไม่เท่ากับศูนย์ และเนื่องจากขนาดของเมทริกซ์ $n=3$ ดังนั้นได้ค่า m ที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียวเท่านั้นคือ $m=2$ นั่นคือ จะต้องตัดแถวและหลักที่สมมาตรของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ได้จำนวน 1 แถว 1 หลัก เช่น ถ้าตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 2 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ดังในตัวอย่างที่ 2.1 จะได้ ไมเนอร์ประกอบ $[a_{2,2}^*] = 2$ และ ไมเนอร์สอดคล้อง $[a'_{2,2}] = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้นโดยสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ได้ว่า

$$\det [a'_{2,2}] = (\det \mathbf{A})^{2-1} \det [a_{2,2}^*]$$

นั่นคือ $\det \mathbf{A} = -12$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง การตัดแถวและหลักที่ไม่สมมาตรจะทำให้เราได้ค่าตัวกำหนดที่ไม่ถูกต้อง เช่น เมื่อตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ไมเนอร์ประกอบ $[a_{2,3}^*] = 1$ และ ไมเนอร์สอดคล้อง

$$[a'_{2,3}] = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } \frac{\det[a'_{2,3}]}{\det[a_{2,3}^*]} = \frac{36}{1} \neq \det \mathbf{A}$$

นอกจากนี้ การเลือกตัดแถวและหลักที่ไม่เหมาะสม เช่น การตัดแถวและหลักที่ 3 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ทำให้ได้ว่า ไมเนอร์ประกอบ $[a_{3,3}^*] = 0$ ซึ่งจะทำให้ไม่สามารถคำนวณค่า $\det \mathbf{A}$ โดยใช้สูตรของยาโคบีได้ ดังนั้น โดยวิธีของยาโคบี จำเป็นต้องเลือกตัดแถวและหลักที่ทำให้ได้ไมเนอร์ประกอบที่มีค่าตัวกำหนดไม่เท่ากับศูนย์ ในส่วนของไมเนอร์สอดคล้อง ที่ได้มาจากส่วนที่เหลือจากการตัดแถวและหลักของ $\mathbf{A}'$ ในทางปฏิบัติ ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่าสมาชิกทุกตัวใน $\mathbf{A}'$ โดยจะคำนวณค่าสมาชิกส่วนที่เหลือจากการตัดเท่านั้น

ตัวอย่าง 2.3 พิจารณาการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีที่ 1 โดยวิธีของยาโคบี เลือกตัดแถวที่ 3 และ 4 และหลักที่ 3 และ 4 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่า $m = 5 - 2 = 3$ ดังนั้น ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ

$$[a_{3:4,3:4}^*] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

และ ไมเนอร์สอดคล้องของ $\mathbf{A}'$ คือ

$$[a'_{3:4,3:4}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & C_{5,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & C_{5,2} \\ C_{1,5} & C_{2,5} & C_{5,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 16 & -6 \\ 39 & 12 & -6 \\ -23 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C_{j,i}$ คือ โคแฟกเตอร์ของ $\mathbf{A}$ ดังนั้น จากสูตร (2) ของทฤษฎียาโคบี ได้ว่า

$$\det[a'_{3:4,3:4}] = (\det \mathbf{A})^{3-1} \det[a_{3:4,3:4}^*]$$

เนื่องจาก $\det[a'_{3:4,3:4}] = 288$ และ $\det[a_{3:4,3:4}^*] = 2$ จะได้ว่า $(\det \mathbf{A})^2 = 144$

เนื่องจากค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์มีเพียงหนึ่งเดียว ดังนั้น การเลือกตัดแถวและหลักที่ทำให้ค่า m เป็นจำนวนเต็มบวกคือ และใช้สูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ในการหาค่าตัวกำหนด จึงเกิดปัญหาขึ้น ดังแสดงข้างต้น ด้วยเหตุนี้จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องแก้ปัญหานี้ โดยการเลือกตัวแถวและหลักที่ทำให้ค่า m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ดังจะแสดงในวิธีที่ 2

วิธีที่ 2 เลือกตัดแถวที่ 3 ถึง 5 และหลักที่ 3 ถึง 5 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่า $m = 5 - 3 = 2$

ดังนั้น ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ $[a_{3:5,3:5}^*] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ

$$\text{ไมเนอร์สอดคล้องของ } \mathbf{A} \text{ คือ } [a'_{3:5,3:5}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 16 \\ 39 & 12 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C_{j,i}$ คือ โคแฟกเตอร์ของ $\mathbf{A}$ ดังนั้น จากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ได้ว่า

$$\det[a'_{3:5,3:5}] = (\det \mathbf{A})^{2-1} \det[a_{3:5,3:5}^*]$$

$$\text{นั่นคือ } \det \mathbf{A} = \frac{\det[a'_{3:5,3:5}]}{\det[a_{3:5,3:5}^*]} = 12$$

นอกจากปัญหาค่าตัวกำหนดสองค่าที่เกิดจากการเลือกตัดแถวและหลัก ที่ทำให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกคือ แล้ววิธีของยาโคบียังล้มเหลวถ้าการเลือกตัดแถวและหลักทำให้ $\det[a_{k:k+n-m-1,k:k+n-m-1}^*] = 0$

3. การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีควบนั่นของดอดจ์สัน

วิธีควบนั่นเป็นการลดขนาดของเมทริกซ์ลงทีละหนึ่ง โดยผ่านการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่ได้จากสมาชิกในแถวที่ติดกันและหลักที่ติดกัน สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ขนาด $n \times n$ ให้ $\mathbf{B}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ควบนั่น ขนาด $(n-k) \times (n-k)$ ที่ได้จากการควบนั่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ในครั้งที่ k โดยที่ $k = 1, 2, \dots, n-1$ เช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ทำการควบนั่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะได้ เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(3)}$ ขนาด 3×3 ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(3)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 9 \\ 7 & -7 & -3 \\ -6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

ทั้งนี้สามารถควบแน่นเมทริกซ์ต่อไปจนได้เมทริกซ์ขนาด 1×1

ในวิธีการควบแน่น ไม่ว่าเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะมีขนาดเท่าใดก็ตาม การคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะมีขั้นตอนการคำนวณผ่านตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งเป็นการลดความยุ่งยากในการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีของยาโคบี

ในขั้นตอนของวิธีควบแน่นของดอดจ์สันที่จะกล่าวถึงต่อไป จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องรู้จัก $\text{int } \mathbf{A}$ ซึ่งเป็น เมทริกซ์ภายใน (interior matrix) ขนาด $(n-2) \times (n-2)$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่มีขนาด $n \times n$ โดยสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A}$ ได้มาจากการตัดแถวที่ 1 และ n และตัดหลักที่ 1 และ n ของ $\mathbf{A}$ เช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \quad \text{มีเมทริกซ์ภายใน คือ } \text{int } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

3.1 ขั้นตอนการคำนวณค่าตัวกำหนดโดยวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน [4]

ให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และสมาชิกของ $\text{int } \mathbf{A}^{(n-k)}$ ทุกตัวไม่เท่ากับศูนย์ การควบแน่นของดอดจ์สันมีขั้นตอนดังนี้

- 1) ให้ เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{A}^{(n)}$

ให้ $\mathbf{B}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-k) \times (n-k)$ ที่ได้จากการควบแน่นของเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(n-k+1)}$ ที่มีขนาด $(n-k+1) \times (n-k+1)$

- 2) การควบแน่นครั้งแรก ($k=1$) ให้ $\mathbf{A}^{(n-1)} = \mathbf{B}^{(n-1)}$ และ

สำหรับการควบแน่นครั้งที่ k โดยที่ $k=2, 3, \dots, n-1$ ให้ $\mathbf{A}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(n-k+1)}$ โดยที่สมาชิกในแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ดังกล่าวถูกหารด้วยสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A}^{(n-k+2)}$ ในตำแหน่งเดียวกัน เรียก $\mathbf{A}^{(n-k)}$ ว่า เมทริกซ์ควบแน่นครั้งที่ k ของ $\mathbf{A}$

- 3) ทำการควบแน่น $\mathbf{A}^{(n-k)}$ จนถึงครั้งที่ $k = n-1$ ซึ่งจะได้ $\mathbf{A}^{(1)}$ ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว ซึ่งโดยวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน จะได้ว่า สมาชิกตัวดังกล่าว คือ ค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

เริ่มต้นการควบแน่นครั้งที่ 1 ($k = 1$) โดยการควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(5)}$ ทำให้ได้ $\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \\ \hline \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ต่อมาทำการควบแน่นครั้งที่ 2 ($k = 2$) โดยควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(4)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(3)}$ ซึ่งใน

ขั้นตอนนี้จะมีการหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(3)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\text{int } \mathbf{A}^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ในตำแหน่ง

เดียวกัน ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(3)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ \hline -6 & 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 5 & -4 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -1 & 30 & 7 \\ -7 & -26 & 2 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{A}^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{4}{2} & \frac{0}{1} & \frac{-4}{-2} \\ \frac{-1}{-1} & \frac{30}{2} & \frac{7}{1} \\ \frac{-7}{1} & \frac{-26}{2} & \frac{2}{2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 15 & 7 \\ -7 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

ทำการควบนแน่นครั้งที่ 3 ($k=3$) โดยควบนแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(3)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(2)}$ และสามารถหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(2)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\text{int } \mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(2)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 15 & 15 & 7 \\ \hline 1 & 15 & 15 & 7 \\ -7 & -13 & -13 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 30 & -30 \\ 92 & 106 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -23 & 53 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนสุดท้าย ทำการควบนแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(2)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(1)}$ และสามารถหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(1)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\text{int } \mathbf{A}^{(3)} = 15$ ทำให้ได้เมทริกซ์ควบนแน่น $\mathbf{A}^{(1)}$ ซึ่งคือ ค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{\text{int } \mathbf{A}^{(3)}} \det \mathbf{A}^{(2)} = \frac{318-138}{15} = 12$$

3.2 ข้อจำกัดของวิธีควบนแน่นของคอจส์สัน

สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่มีสมาชิกบางตำแหน่งใน $\text{int } \mathbf{A}$ มีค่าเป็นศูนย์ จะทำให้เกิดปัญหาขึ้นในการควบนแน่นครั้งที่สอง ซึ่งในขั้นนี้ต้องมีการหารสมาชิกในเมทริกซ์ที่ได้ด้วยสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A}$

ในตำแหน่งเดียวกัน อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหานี้สามารถทำได้โดยการสลับแถวหรือสลับหลักของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จนได้เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีศูนย์ใน $\text{int } \mathbf{A}$ เช่น

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ซึ่งพบว่ามีศูนย์ในเมทริกซ์ภายใน

$\text{int } \mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และจะทำให้เกิดปัญหาในกระบวนการควมแน่น ดังนั้นในการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้จะดำเนินการโดยสลับแถวที่ 3 และ 4 ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ดังนี้

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า เมทริกซ์ภายในของเมทริกซ์ใหม่ คือ $\text{int } \tilde{\mathbf{A}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จากนั้นทำการควมแน่นเมทริกซ์

$\tilde{\mathbf{A}}^{(4)}$ ทำให้ได้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$ ขนาด 3×3 ดังนี้

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(3)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -7 & -7 & -3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

ต่อมาทำการควมแน่นเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$ และหารสมาชิกแต่ละตำแหน่งด้วย $\text{int } \tilde{\mathbf{A}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \\ \hline 3 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

ท้ายสุด ควบนแน่นเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}$ และหารสมาชิกแต่ละตำแหน่งด้วย $\text{int } \tilde{\mathbf{A}}^{(3)} = -7$ ทำให้ได้ค่าตัวกำหนดของ $\tilde{\mathbf{A}}$ คือ

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\text{int } \tilde{\mathbf{A}}^{(3)}} \det \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} = \frac{42}{-7} = -6$$

ดังนั้น $\det \mathbf{A} = -\det \tilde{\mathbf{A}} = 6$

อย่างไรก็ตาม วิธีการสลับแถวหรือหลัก เพื่อให้ได้เมทริกซ์ภายในที่ปราศจากค่าศูนย์นั้น อาจไม่

ประสบความสำเร็จสำหรับบางเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 ซึ่งไม่ว่าจะสลับแถวหรือ

หลักแบบใด ก็ยังคงมีศูนย์อยู่ในเมทริกซ์ภายใน ในตอนท้ายของหัวข้อถัดไป จะนำเสนอแนวทางการแก้ปัญหาของตัวอย่างนี้

4. เบื้องหลังความสำเร็จของวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน

พิจารณาเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ขนาด 4×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีของยาโคบี เลือกตัดแถวที่ 2 และ 3 และตัดหลักที่ 2 และ 3 จะได้ ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_{2,2}^* & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \text{int } \mathbf{A} \text{ และไมเนอร์สอดคล้องของ } \mathbf{A}' \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_{2,2,2,3}' \\ a_{2,3,2,3}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{4,1} \\ C_{1,4} & C_{4,4} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C_{j,i}$ คือ โคแฟกเตอร์ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยวิธีของยาโคบีอีกครั้ง โดยการตัดแถวและหลักที่บรรจุสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{M}_{j,i}$ จะได้ว่า

$$C_{1,1} = |\mathbf{A}_{2:4,2:4}| = \frac{1}{a_{3,3}} \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{3,3}} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{3,3}} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}$$

$$C_{4,1} = -|\mathbf{A}_{1:3,2:4}| = \frac{-1}{a_{2,3}} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{2,3}} \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{2,3}} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{2,3}} \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}$$

$$C_{1,4} = -|\mathbf{A}_{2:4,1:3}| = \frac{-1}{a_{3,2}} \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{3,2}} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{3,2}} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{3,2}} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}$$

และ

$$C_{4,4} = |\mathbf{A}_{1:4,1:4}| = \frac{1}{a_{2,2}} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{2,2}} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{2,2}} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{2,2}} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

จากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี จะได้ ตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ คือ

$$\det \mathbf{A} = \frac{\det \begin{bmatrix} a'_{2:3,2:3} \\ a^*_{2:3,2:3} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{4,1} \\ C_{1,4} & C_{4,4} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} C_{4,4} & -C_{4,1} \\ -C_{1,4} & C_{1,1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \\ a_{2,2} & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ a_{2,3} & \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ a_{3,2} & \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ a_{3,3} & \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad (3)$$

ทั้งนี้สามารถแจกแจงขั้นตอนการคำนวณในสมการ (3) ได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 คำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของ $\mathbf{A}$ และจัดเรียงเป็นเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

พบว่าเมทริกซ์ดังกล่าว คือ เมทริกซ์ควบนแน่น $\mathbf{A}^{(3)}$ ซึ่งได้จากการควบนแน่นครั้งที่ 1 ในวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน

ขั้นที่ 2 หาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ทุกตัวในเมทริกซ์ที่ได้จากขั้นที่ 1 และหารสมาชิกที่ได้ด้วยสมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน ซึ่งจะได้ค่าของสมาชิกทั้งหมด

ในสมการ (3)

จะพบว่า ขั้นตอนนี้ตรงกับกระบวนการควบนแน่นครั้งที่ 2 ในวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน และไมเนอร์สอดคล้อง $[a'_{2:3,2:3}]$ คือ เมทริกซ์ควบนแน่น $\mathbf{A}^{(2)}$

ขั้นที่ 3 หาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่ได้จากขั้นที่ 2 และหารด้วย $|\text{int } \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$ ซึ่งจะได้ว่า

ค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$ คือ การควบนแน่นครั้งสุดท้ายของวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน

จากการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4 ข้างต้น พบว่า วิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน ได้มาจากการแจกแจงขั้นตอนในวิธีของยาโคบินั่นเอง โดยเงื่อนไขที่ทำให้วิธีของดอดจ์สันประสบความสำเร็จ คือ ต้องไม่มีการหารด้วยศูนย์เกิดขึ้นในกระบวนการ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์วิธีควบนแน่นของดอดจ์สันสำหรับเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ใด ๆ จะแสดงรายละเอียดในบทความการคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน ตอนที่ 2 ในวารสารคณิตศาสตร์ฉบับถัดไป

ในกรณีที่มีสมาชิกบางตัวใน $\text{int } \mathbf{A}$ เป็นศูนย์ เช่น ในตัวอย่าง 3.2 เราสามารถแก้ปัญหาได้โดยการสลับแถวหรือสลับหลัก เพื่อให้ $\text{int } \mathbf{A}$ ที่ไม่มีสมาชิกภายในเป็นศูนย์ แต่ในบางกรณีพบว่าไม่สามารถแก้ปัญหาโดยการสลับแถวหรือหลักได้ ดังเช่นที่จะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1 พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

พบว่า ไม่สามารถสลับแถวหรือสลับหลัก เพื่อให้สมาชิกใน $\text{int } \mathbf{A}$ ทุกตัวไม่เป็นศูนย์ แต่กระบวนการควบแน่นของดอดจ์สัน ยังคงสามารถดำเนินการได้ เพียงแต่ต้องแก้ไขในบางขั้นตอน การควบแน่นครั้งที่ 1 สามารถดำเนินการได้โดยไม่มีปัญหา และได้ผลดังนี้

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

แต่ในการควบแน่นครั้งที่ 2 พบว่า

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากต้องทำการหารด้วยสมาชิกในตำแหน่งที่ (2,1) ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(2)}$ ด้วยสมาชิก $a_{3,2}$ ใน $\text{int } \mathbf{A}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ($a_{3,2} = 0$) แต่เมื่อย้อนกลับพิจารณาการหาค่ากำหนดจากในสมการ (3)

โดยวิธีของยาโคบี จะได้ว่า $\mathbf{A}^{(2)} = [a'_{2:3,2:3}]$ เนื่องจาก $[a'_{2:3,2:3}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{4,1} \\ C_{1,4} & C_{4,4} \end{bmatrix}$ ดังนั้น สมาชิก $a_{2,1}^{(2)}$ ใน $\mathbf{A}^{(2)}$ คือ

$$a_{2,1}^{(2)} = C_{1,4} = |\mathbf{A}_{2:4,1:3}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

เราสามารถแก้ปัญหาจากการควบแน่นครั้งที่ 2 ได้ โดยการหาค่ากำหนดของ $\mathbf{A}^{(2)}$ จากค่าของ $C_{1,4}$

ซึ่งสามารถทำได้โดยการสลับแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของ $\mathbf{A}_{2:4,1:3}$ จะได้ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

จากนั้นตัดแถวที่ 2 และตัดหลักที่ 2 ของ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}$ ทำให้ได้ ไมเนอร์ประกอบ คือ $[\tilde{a}_{2,2}^*] = 1$ และ

ไมเนอร์สอดคล้อง $[\tilde{a}'_{2,2}] = \begin{bmatrix} \tilde{C}'_{1,1} & \tilde{C}'_{3,1} \\ \tilde{C}'_{1,3} & \tilde{C}'_{3,3} \end{bmatrix}$ โดยที่ $\tilde{C}'_{k,l}$ คือ โคแฟกเตอร์ขนาด 2×2 ของ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}$

และจากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี จะได้ว่า

$$a_{2,1}^{(2)} = -|\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}| = -\frac{\begin{vmatrix} \tilde{C}'_{1,1} & \tilde{C}'_{3,1} \\ \tilde{C}'_{1,3} & \tilde{C}'_{3,3} \end{vmatrix}}{1} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

นั่นคือ เมทริกซ์ควบนแน่นครั้งที่ 2 คือ $\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

จากนั้นทำการควบนแน่น $\mathbf{A}^{(2)}$ และหารด้วย $\text{int } \mathbf{A}^{(3)} = 2$ จะได้

$$\det \mathbf{A} = \frac{4}{2} = 2$$

ซึ่งเป็นค่าของตัวกำหนดที่ถูกต้องของ $\mathbf{A}$

6. สรุป

ในการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่ด้วยมือ ผู้ดำเนินการหามักมีกำลังใจ เมื่อพบว่าเมทริกซ์ที่ต้องคำนวณนั้นเต็มไปด้วยศูนย์ ซึ่งสามารถเลือกใช้กระบวนการลดรูปแบบเกาส์-จอร์แดน หรือการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว ในการหาค่าตัวกำหนดได้โดยไม่ยุ่งยาก แต่ถ้าเมื่อใดต้องหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่เต็มไปด้วยจำนวนที่ไม่ใช่ศูนย์ กระบวนการควบนแน่นของดอดจ์สันก็เป็นอีกวิธีการหนึ่งที่น่าสนใจ เนื่องจากมีขั้นตอนที่เรียบง่ายและไม่ซับซ้อน แต่ในทางกลับกัน จากสองตัวอย่างสุดท้าย พบว่าวิธีควบนแน่นของดอดจ์สันมีปัญหา เมื่อต้องคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่มีศูนย์อยู่ในตำแหน่งที่สำคัญ สำหรับวิธีของยาโคบี มีการคำนวณหาค่าตัวกำหนดผ่านค่าตัวกำหนดของไมเนอร์ประกอบและไมเนอร์สอดคล้อง แต่มีความยุ่งยากในการหาไมเนอร์สอดคล้อง วิธีการนี้จึงไม่เป็นที่รู้จักในวงกว้าง แต่เมื่อดอดจ์สันได้แจกแจงขั้นตอนเกี่ยวกับสูตรที่ได้จากวิธีของยาโคบี เขาจึงได้กระบวนในวิธีควบนแน่นของดอดจ์สัน แต่อย่างไรก็ตามวิธีของยาโคบีสามารถช่วยแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในวิธีการควบนแน่นของดอดจ์สันในบางกรณีได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] สุทัศน์ ยกส้าน (2549). *Lewis Carroll นักประพันธ์และนักคณิตศาสตร์ (ผู้ชอบเด็ก)*. สืบค้นจาก <https://mgronline.com/science/detail/9490000149281>.
Yoksan, S. (2006, December 4). *Lewis Carroll: The Novelist and Mathematician (Lolita Lover)*. Retrieved from <https://mgronline.com/science/detail/9490000149281>
- [2] Abeles, F. F. (2008). Dodgson Condensation: The Historical and Mathematical Development of an Experimental Method. *Linear Algebra and its Applications*, 429, p. 429 - 438.
- [3] Dodgson, C. L. (1866). Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values. *Proceedings of the Royal Society of London*, 15, p. 150 - 155.
- [4] Leggett, D., Perry, J. and Torrence, E. (2011). Computing Determinants by Double-Crossing. *The College Mathematics Journal*, 42, p. 43 - 54.
- [5] Rise, A. and Torrence, E. (2007). “Shutting up like a telescope”: Lewis Carroll's “Curious” Condensation Method for Evaluating Determinants. *The College Mathematics Journal*. 38, p. 85 - 95.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(700) มกราคม – เมษายน 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหทางพีชคณิต:

โจทย์ปัญหา สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

Using Bar Model Method to Solve Algebraic Problems:

Word Problems, Linear Equations of One Variable and

System of Linear Equations of Two Variables

ปรางใส เทียงตรง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง กรุงเทพมหานคร 10240

Prangsai Tiangtrong

Department of Mathematics, Faculty of Science, Ramkhamhaeng University, Bangkok 10240

Email: prangsai.t@gmail.com

วันที่รับบทความ : 5 สิงหาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 21 ตุลาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 8 มกราคม 2563

บทคัดย่อ

วิธีบาร์โมเดลเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่บรรจุอยู่ในหลักสูตรการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาของประเทศไทยทั้งนี้ มีงานศึกษาวิจัยมากมายที่ศึกษาวิธีการใช้และ ผลสัมฤทธิ์จากการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีบาร์โมเดล ซึ่งงานวิจัยต่าง ๆ ให้ผลลัพธ์ตรงกันว่า วิธีบาร์โมเดลส่งผลให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ดีขึ้น อย่างไรก็ตามงานศึกษาวิจัย ในประเทศไทยส่วนใหญ่จะเน้นการนำวิธีบาร์โมเดลไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในระดับ ประถมศึกษาตอนต้น บทความฉบับนี้ผู้เขียนต้องการนำเสนอแนวทางและตัวอย่างการใช้วิธีบาร์- โมเดลในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ได้แก่ โจทย์ปัญหาทางพีชคณิตในระดับ

ประถมศึกษาตอนปลายจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนต้น การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้สมการเชิงเส้น ตัวแปรเดียวและระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ผู้เขียนหวังว่าบทความนี้จะเป็แนวทางในการนำวิธีบาร์โมเดลไปใช้แก้ปัญหาบทเรียนอื่นในคณิตศาสตร์ได้ต่อไป

คำสำคัญ: วิธีบาร์โมเดล การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โจทย์ปัญหา สมการเชิงเส้น ระบบสมการเชิงเส้น

ABSTRACT

Bar model method is a mathematical problem solving which is contained in Mathematics curriculum in primary education in Singapore. Many researchers have studied how to use and the achievements of using Bar model method to solve mathematical problems. The researches have the same results showing the improvement of students' achievements in Mathematics. However, almost researches in Thailand focused on the usages of Bar model to solve mathematical problems in lower elementary levels. In this article, the author wants to present guidelines and examples on how to use Bar model method to solve more complex mathematical problems which are word problems in Algebra from upper primary to lower secondary educations, to solve linear equations of one variable and to solve system of linear equations of two variables. The author hopes that this article can be a guideline in how to use Bar model method to solve other lessons in Mathematics afterward.

Keywords: Bar model method, Mathematical problem solving, Word problem, Linear equation, System of linear equations

1. บทนำ

ผู้เขียนเชื่อว่าหลายท่านรู้จักวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีชื่อว่า “วิธีบาร์โมเดล (Bar Model Method)” ซึ่งเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ถูกบรรจุอยู่ในหลักสูตรการเรียนคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาของประเทศสิงคโปร์ ตั้งแต่ปี ค.ศ.1983 จนถึงปัจจุบัน [13] วิธีบาร์โมเดลเป็นวิธีการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา โดยใช้แท่งบาร์แทนปริมาณต่าง ๆ ทั้งปริมาณที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า โดยรูปแบบการใช้วิธีบาร์โมเดลที่สำคัญมีอยู่ด้วยกัน 2 รูปแบบ ได้แก่ Part – Whole Bar Model ซึ่งเป็นการเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง

ปริมาณแต่ละส่วน กับปริมาณที่เป็นผลรวมของทุก ๆ ส่วนในโจทย์ปัญหา และ Comparison Bar Model ซึ่งเป็นการวาดแท่งบาร์เพื่อเปรียบเทียบปริมาณต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา ซึ่งจะมีตั้งแต่ 2 แท่งขึ้นไป วาดอยู่ในตำแหน่งแนวตั้งจากบนลงล่าง เพื่อให้การเปรียบเทียบทำได้โดยง่าย

จากผลการสอบ PISA 2015 (คะแนนสอบล่าสุดที่เปิดเผยอย่างเป็นทางการ) ของนักเรียนในประเทศสิงคโปร์ที่มีค่าเฉลี่ยคะแนนในหัวข้อ การรู้เรื่องคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) อยู่ที่ 564 คะแนน ซึ่งสูงเป็นอันดับที่หนึ่ง จากการเข้าร่วมทดสอบของนักเรียนอายุ 15 ปี กว่า 70 ประเทศทั่วโลก [16] เป็นหนึ่งในเหตุผลที่ทำให้หลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์ได้รับความสนใจจากนานาชาติ ทั้งนี้ความสามารถด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ต้องอาศัยทักษะหลายประการ ซึ่ง PISA ได้กำหนดกรอบการประเมินผลด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์จาก 8 สมรรถนะเหล่านี้ ได้แก่ การคิดและการใช้เหตุผล (Thinking and Reasoning) การสร้างข้อโต้แย้ง (Argumentation) การสื่อสาร (Communication) การสร้างตัวแบบ (Modeling) การตั้งและการแก้โจทย์ปัญหา (Problem Posing and Solving) สิ่งแทนความ (Representation) การใช้สัญลักษณ์ ภาษา และการดำเนินการ (Using symbol, language and operation) และการใช้ตัวช่วยและเครื่องมือ (Using aids and tools) [1] ประเด็นที่น่าสนใจคือ วิธีบาร์โมเดลอาจมีส่วนในการพัฒนาทักษะด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ของนักเรียนสิงคโปร์ อย่างไรก็ตามงานวิจัยหลายฉบับมีข้อสรุปตรงกันว่าการใช้วิธีบาร์โมเดลในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ส่งผลดีกับผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของผู้เรียน เช่น การศึกษาวิจัยของ Thirunavukkarasu และ Senthilnathan [18] พบว่า การสอนคณิตศาสตร์เรื่องการบวกและการลบระดับประถมศึกษาโดยใช้วิธีบาร์โมเดลมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีการสอนในรูปแบบเดิม อีกทั้ง Kaur [12] ยังได้ศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหาทางพีชคณิตในระบบจำนวนเต็ม พบว่าการกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาทำให้พวกเขาสามารถเห็นภาพความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบต่าง ๆ ที่อยู่ภายในโจทย์ปัญหาได้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้ผลวิจัยของ Gani Tengah และ Said [11] ซึ่งศึกษาการใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเปอร์เซ็นต์ จากการทดสอบนักเรียน จำนวน 45 คน ของโรงเรียนรัฐบาลแห่งหนึ่งในประเทศบรูไน ระดับเกรด 9 พบว่านักเรียนมีผลคะแนนสอบสูงขึ้น เมื่อนำวิธีบาร์โมเดลมาใช้ในการเรียนการสอน เป็นต้น

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษาการแก้โจทย์ปัญหาระดับประถมศึกษาตอนต้นโดยใช้วิธีบาร์โมเดลในประเทศไทยนั้น มีผู้ศึกษาและเผยแพร่ผลงานมากมาย เช่น ศรีนัย [3] ได้วิจัยในหัวข้อการพัฒนาชุดฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ด้วยทฤษฎีบาร์โมเดล สำหรับนักเรียนชั้น

ประถมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างชุดฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้ทฤษฎีบาร์โมเดล พร้อมทั้งศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีปกติกับการเรียนโดยใช้ชุดฝึกทักษะนี้ ซึ่งพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยชุดฝึกทักษะดีกว่าการเรียนด้วยวิธีปกติ รวมไปถึงงานวิจัยของนวลฤทัย [2] เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาพร้อมกับเทคนิคการวาดรูปบาร์โมเดลสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์ปัญหาการบวกและการลบระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ตามกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาพร้อมกับเทคนิคการวาดรูปบาร์โมเดล ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน อีกทั้งยังศึกษาผลประเมินความพึงพอใจของผู้เรียนต่อการเรียนรู้ด้วยวิธีดังกล่าวด้วย ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนคิดเป็นร้อยละสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียน อีกทั้งนักเรียนมีระดับความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีดังกล่าวในด้านครูผู้สอน เนื้อหา กิจกรรมการเรียนรู้ และการวัดและประเมินผล อยู่ในระดับมากทุกด้าน

บทความฉบับนี้ ผู้เขียนต้องการนำเสนอแนวทางในการใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาทางพีชคณิตเบื้องต้น การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ในระดับประถมศึกษาตอนปลายจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

2. การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

โจทย์ปัญหาพีชคณิตในระดับประถมศึกษาตอนปลายจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่สามารถนำวิธีบาร์โมเดลไปใช้แก้ปัญหามีหลายเรื่อง เช่น การบวก การลบ การคูณ และการหาร เศษส่วน อัตราส่วน ร้อยละ เป็นต้น ในหัวข้อนี้ผู้เขียนจะยกตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ได้แก่ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วน และโจทย์ปัญหาการบวกและการลบ สำหรับบทเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้เขียนขอเสนอการใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญห้อัตราส่วน ทั้งนี้ผู้เขียนจะนำเสนอแนวทางการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้วิธีบาร์โมเดล ประกอบกับการสร้างประโยคสัญลักษณ์และการกำหนดตัวแปรและสร้างสมการเพื่อหาคำตอบด้วย

ตัวอย่าง 2.1

โจทย์ปัญหา : ฉันมีเงินอยู่ 8,000 บาท นำไปซื้อของเล่น $\frac{1}{10}$ ของเงินที่มีอยู่ และซื้อตัวรถไฟ $\frac{1}{2}$ ของเงินที่มีอยู่เดิม ฉันเหลือเงินกี่บาท

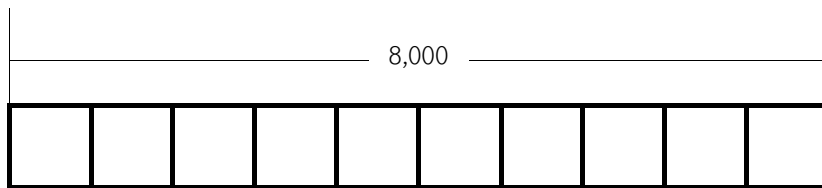
ประโยคสัญลักษณ์ จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ สามารถสร้างประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$8,000 - \left[\left(\frac{1}{10} \times 8,000 \right) + \left(\frac{1}{2} \times 8,000 \right) \right] = \square$$

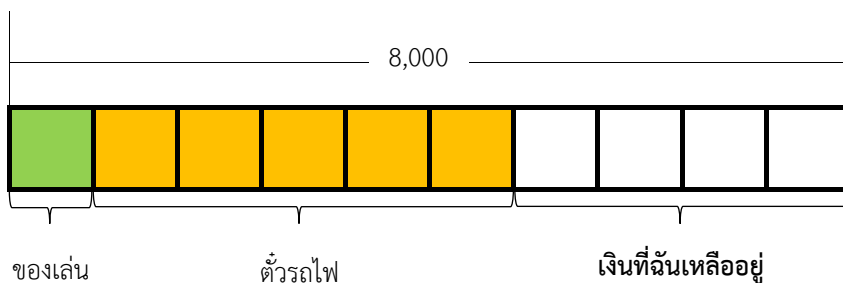
วิธีบาร์โมเดล

วิเคราะห์โจทย์

จากข้อมูลในโจทย์ปัญหาพบว่า ฉันนำเงินจำนวน 8,000 บาท ไปซื้อของ 2 สิ่ง ได้แก่ ของเล่น และ ตัวรถไฟ เนื่องจากข้อมูลที่โจทย์ให้มาอยู่ในรูปเศษส่วน โดยมูลค่าของสิ่งของทั้งสองขึ้นเป็น *เศษส่วนของเงิน* จำนวน 8,000 บาท ดังนั้น การแปลงเศษส่วนทั้งสองให้มีตัวส่วนเท่ากัน คือ 10 ทำให้สามารถแบ่งเงินของฉันทั้งหมดออกเป็น 10 ส่วน เท่า ๆ กัน ได้ดังนี้



และเราสามารถแก้ปัญหาโดยใช้วิธีบาร์โมเดลดังวิธีการต่อไปนี้



จากแบบจำลอง จะได้ว่า

$$10 \times \square = 8,000$$

$$1 \times \square = 800$$

ดังนั้น ฉันเหลือเงิน เท่ากับ $4 \times \boxed{} = 4 \times 800 = 3,200$ บาท

จากตัวอย่างนี้ หากผู้เรียนสามารถสร้างประโยคสัญลักษณ์ได้ จะนำไปสู่การหาคำตอบได้ในที่สุด แต่ทว่า มีผู้เรียนเพียงบางส่วนที่สามารถตีความโจทย์ปัญหาและสามารถสร้างประโยคสัญลักษณ์ที่สอดคล้องกับโจทย์ปัญหาได้ ต่อไปขอให้ผู้อ่านพิจารณาโจทย์ปัญหาต่อไปนี้ซึ่งมีความซับซ้อนมากขึ้นกว่าเดิม

ตัวอย่าง 2.2

โจทย์ปัญหา : ฉันมีเงินอยู่จำนวนหนึ่ง แบ่งเงินให้น้องคนแรก $\frac{1}{6}$ ของเงินที่มีอยู่ ต่อมาแบ่งเงินให้น้องคนที่สอง $\frac{2}{5}$ ของเงินที่เหลือ ทำให้เหลือเงินอยู่จำนวนหนึ่ง จึงนำเงินไปซื้อขนม $\frac{1}{6}$ ของเงินจำนวนนั้น พบว่าหลังจากซื้อขนมแล้ว ฉันเหลือเงินอยู่เพียง 50 บาท อยากทราบว่าเดิมทีฉันมีเงินกี่บาท

การแก้ปัญหาโดยวิธีกำหนดตัวแปรและสร้างสมการ

กำหนดให้ x แทน จำนวนเงินที่ฉันมีอยู่เดิม

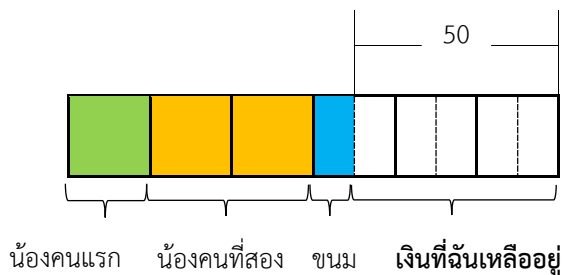
จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ สามารถสร้างสมการได้ดังนี้

$$\frac{5}{6} \left[\frac{3}{5} \left(\frac{5x}{6} \right) \right] = 50$$

วิธีบาร์โมเดล

วิเคราะห์โจทย์

จากข้อมูลในโจทย์ปัญหานี้ เริ่มต้นฉันแบ่งเงินออกเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วแบ่งเงิน 1 ส่วนให้น้องคนแรก ทำให้เหลือเงินอยู่ 5 ส่วน จากเงินที่เหลืออยู่นี้ น้องคนที่สองได้รับเงิน 2 ส่วนจาก 5 ส่วน ทำให้ฉันเหลือเงินเพียง 3 ส่วน โจทย์บอกว่า ฉันนำเงินไปซื้อขนม 1 ใน 6 ส่วนของเงินที่เหลือ แสดงว่า เราต้องแบ่งเงินที่เหลือออกเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กันก่อน แล้วจึงเปรียบเทียบ 5 ใน 6 ส่วนที่เหลือเทียบกับ 50 บาท นั่นเอง โดยเราสามารถแก้ปัญหาโดยใช้วิธีบาร์โมเดล ดังวิธีการต่อไปนี้



จากแบบจำลอง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 5 \times \boxed{} &= 50 \\ 1 \times \boxed{} &= 10 \end{aligned}$$

$$\text{แต่ } 2 \times \boxed{} = 1 \times \boxed{ \mid } = 20$$

$$\text{ดังนั้น เดิมฉันมีเงิน เท่ากับ } (3 \times \boxed{}) + (6 \times \boxed{}) = (3 \times 20) + (6 \times 10) = 120 \text{ บาท}$$

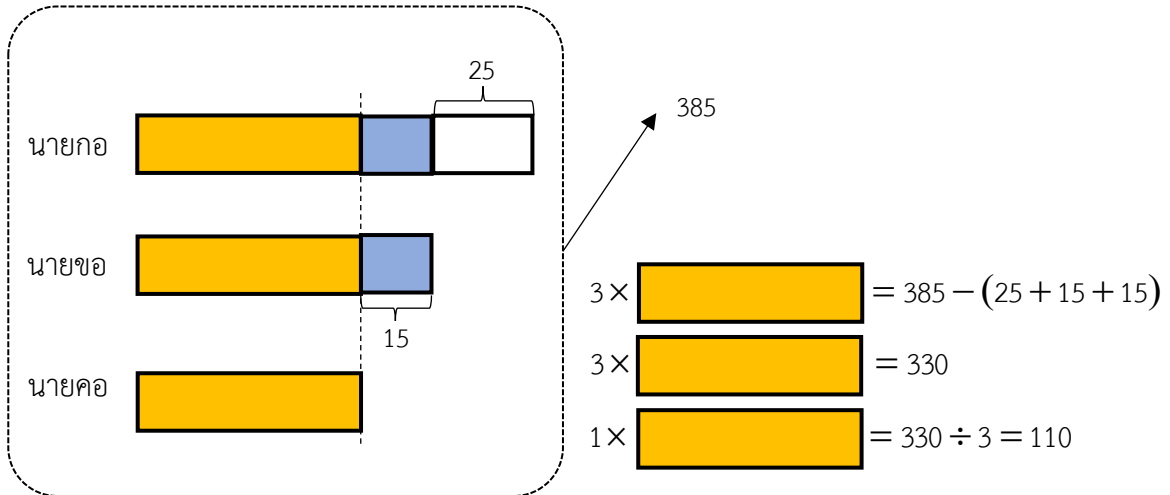
วิธีกำหนดตัวแปรและสร้างสมการ เป็นอีกหนึ่งวิธีในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาข้อนี้ ปัญหาที่พบยังคงเป็นเรื่องความสามารถในการตีความโจทย์ปัญหาของผู้เรียนและวิธีการกำหนดความหมายของตัวแปร ทั้งนี้การกำหนดความหมายของตัวแปรที่ต่างกัน จะทำให้ได้สมการที่แตกต่างกันออกไป อย่างไรก็ตาม มีผู้เรียนบางส่วนเท่านั้นที่สามารถกำหนดตัวแปรและสร้างสมการได้อย่างถูกต้อง

จากทั้งสองตัวอย่าง จะเห็นว่าผู้เขียนได้นำเสนอวิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาประกอบกันไปด้วย ซึ่งวิธีการนี้เป็นการพยายามตีความหมายของโจทย์ปัญหาให้ออกมาเป็นรูปภาพ วิธีการนี้ส่งผลให้ผู้เรียนสามารถเปรียบเทียบปริมาณต่าง ๆ ได้เป็นรูปธรรมมากขึ้น อันที่จริงแล้วโจทย์ปัญหาทั้งสองข้อนี้แต่งขึ้นจากแนวคิดของโจทย์ปัญหาในระดับเกรด 4 ของหลักสูตรของประเทศสิงคโปร์ (ซึ่งเท่ากับระดับประถมศึกษาปีที่ 4 ในประเทศไทย) ในหนังสือ How to Improve Your Mathematics: Primary 4 เขียนโดย Er [10]

นอกจากโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนแล้ว วิธีบาร์โมเดลยังนิยมใช้ในการแก้ปัญหเกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละอีกด้วย รวมถึงโจทย์ปัญหาระคนที่มีหลายการดำเนินการอยู่ในข้อเดียว ในบทความนี้ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างแผนภาพแสดงการแก้โจทย์ปัญหาโดยวิธีบาร์โมเดลเพิ่มเติม ดังนี้

ตัวอย่าง 2.3

โจทย์ปัญหา : นายกอ นายขอ และนายคอ มีเงินรวมกัน 385 บาท โดยนายกอมีเงินมากกว่านายขออยู่ 25 บาท และนายขอมีเงินมากกว่านายคอ อยู่ 15 บาท อยากทราบว่า นายคอมีเงินกี่บาท

วิเคราะห์โจทย์

ดังนั้น นายคอ มีเงิน 110 บาท

ในลำดับต่อไป ผู้เขียนจะนำเสนอการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วนซึ่งอยู่ในระดับประถมศึกษาตอนปลายและมัธยมศึกษาตอนต้นตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) [4 - 5] ซึ่งมีวิธีการทางพีชคณิตในการหาคำตอบหลากหลายวิธี และหนึ่งในวิธีที่นิยมใช้กันมาก คือ การกำหนดตัวแปรและสร้างสมการ ทั้งนี้ผู้เขียนจะนำเสนอการแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวและการใช้วิธีบาร์โมเดลประกอบกัน ดังนี้

ตัวอย่าง 2.4

โจทย์ปัญหา : ในการสอบก่อนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกเป็น 3 : 7 หลังจากทีนักเรียนได้เรียนบทเรียนคณิตศาสตร์นี้แล้ว คุณครูจึงจัดให้มีการทดสอบหลังเรียนขึ้น พบว่าอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกกลายเป็น 3 : 2 เพราะมีนักเรียนที่เคยสอบตกในการสอบก่อนเรียน จำนวน 12 คน ทำคะแนนสอบได้ดีขึ้นจนสอบผ่านในการสอบหลังเรียนนั่นเอง อยากทราบว่าห้องเรียนนี้มีนักเรียนทั้งหมดกี่คน

วิเคราะห์โจทย์

เนื่องจากในการทดสอบก่อนเรียน อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกเป็น 3 : 7 จะได้ว่า มีนักเรียนที่สอบผ่านอยู่ $3x$ คน และมีนักเรียนที่สอบตกอยู่ $7x$ คน

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ หลังจากทีนักเรียนได้เรียนบทเรียนคณิตศาสตร์แล้ว คุณครูได้จัดการทดสอบหลังเรียนขึ้น พบว่าอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกกลายเป็น $3:2$ เพราะมีนักเรียนที่เคยสอบตกในการสอบก่อนเรียน จำนวน 12 คน ทำคะแนนสอบได้ดีขึ้นจนสอบผ่าน ดังนั้น ในการทดสอบหลังเรียน อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตก จะกลายเป็น $3x + 12 : 7x - 12$

จากข้อมูลข้างต้น เราสามารถสร้างสมการได้ดังนี้

$$\frac{3x + 12}{7x - 12} = \frac{3}{2}$$

แก้สมการ จะได้

$$2(3x + 12) = 3(7x - 12)$$

$$6x + 24 = 21x - 36$$

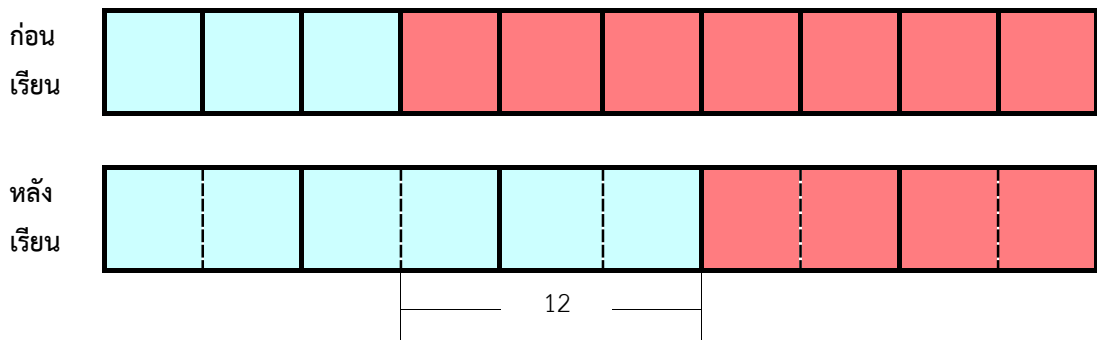
$$60 = 15x$$

$$x = 4$$

เนื่องจาก ห้องเรียนนี้มีนักเรียนทั้งหมด $3x + 7x = 10x$ คน

ดังนั้น ห้องเรียนนี้มีนักเรียนทั้งหมด $10 \times 4 = 40$ คน

อย่างไรก็ตาม เราสามารถนำวิธีบาร์โมเดลมาประยุกต์ใช้ในการหาคำตอบในข้อนี้ได้เช่นกัน จากผลการทดสอบก่อนเรียนที่ว่า จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกคิดเป็นอัตราส่วน $3:7$ ทำให้เราสามารถแบ่งจำนวนนักเรียนในห้องนี้เป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กันได้ โดย 3 ส่วนเป็นจำนวนนักเรียนที่สอบผ่าน (สีฟ้า) และ อีก 7 ส่วนเป็นจำนวนนักเรียนที่สอบตก (สีแดง) ในเวลาต่อมาครูจัดทดสอบหลังเรียน พบว่าอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกกลายเป็น $3:2$ ทำให้เราสามารถเขียนแท่งบาร์แทนสถานการณ์ดังกล่าวได้ ดังนี้



จากแบบจำลอง แท่งบาร์ทั้งสองต้องมีความยาวเท่ากัน เนื่องจากจำนวนนักเรียนทั้งหมดในห้องนี้มีค่าเท่าเดิม เราแบ่งแท่งบาร์ออกเป็น 5 ส่วนเท่า ๆ กัน โดย 3 ส่วนเป็นจำนวนนักเรียนที่สอบผ่าน (สีฟ้า) และ อีก 2 ส่วนเป็นจำนวนนักเรียนที่สอบตก (สีแดง) การแบ่งแท่งบาร์ในลักษณะนี้ทำให้เห็นว่า 1 ส่วนของแท่งบาร์ด้านล่าง (หลังเรียน) เท่ากับ 2 ส่วนของแท่งบาร์ด้านบน (ก่อนเรียน) และเนื่องจากมีนักเรียนที่เคยสอบตกในการสอบก่อนเรียน จำนวน 12 คน ทำคะแนนสอบได้ดีขึ้นจนสอบผ่าน จากแบบจำลอง จะได้ว่า

$$\begin{array}{l} 3 \times \boxed{} = 12 \\ 1 \times \boxed{} = 4 \end{array}$$

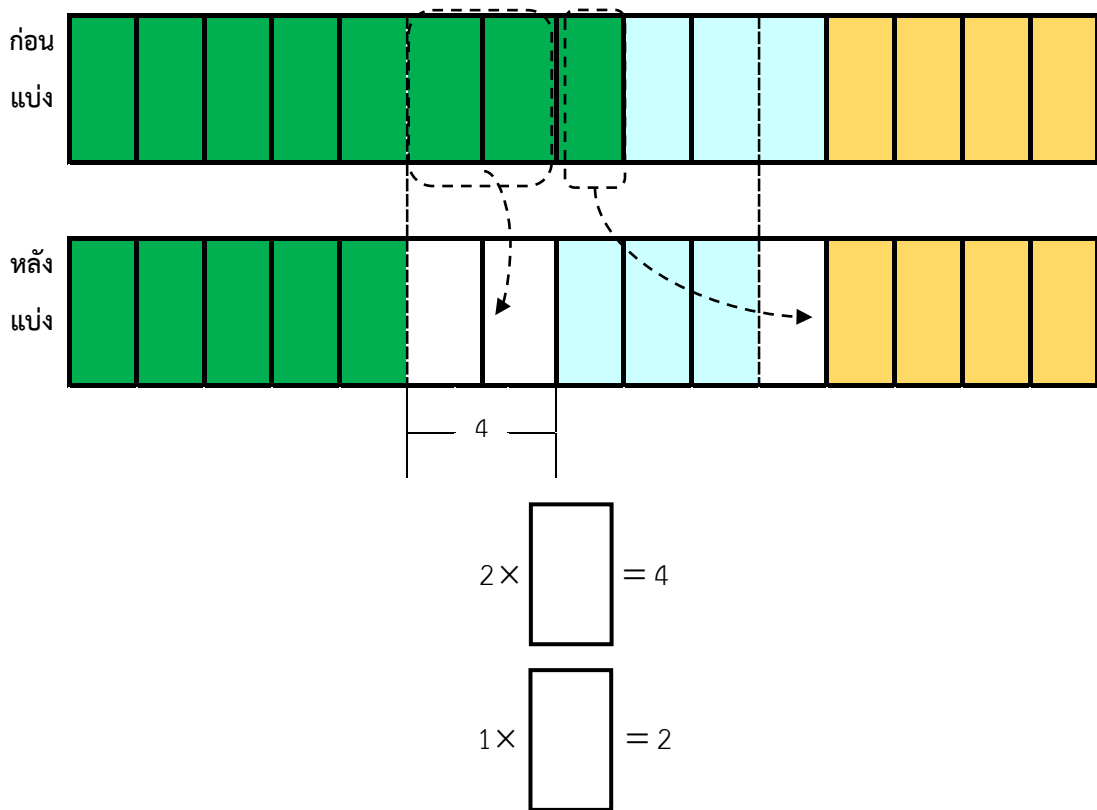
ดังนั้น ห้องเรียนนี้มีนักเรียนทั้งหมด $10 \times 4 = 40$ คน

ตัวอย่าง 2.5

โจทย์ปัญหา : แม่ค้าซื้อผลไม้มา 3 กอง อัตราส่วนของจำนวนผลไม้ในกองแรกต่อกองที่สองต่อกองที่สาม มีค่าเท่ากับ $8:3:4$ ต่อมาแม่ค้าต้องการแบ่งผลไม้ออกเป็นสามกอง โดยแต่ละกองมีผลไม้จำนวนเท่า ๆ กัน เธอจึงนำผลไม้ในกองแรกบางส่วนแบ่งใส่กองที่สองและกองที่สาม ถ้าแม่ค้าแบ่งผลไม้ใส่กองที่สอง 4 ผล อยากทราบว่า แม่ค้ามีผลไม้ทั้งหมดกี่ผล

วิเคราะห์โจทย์

เนื่องจากก่อนแบ่งผลไม้ อัตราส่วนของจำนวนผลไม้ในกองแรกต่อกองที่สองต่อกองที่สาม มีค่าเท่ากับ $8:3:4$ นั่นคือ มีผลไม้ทั้งหมด $8+3+4=15$ ส่วน ให้กองแรก กองที่สอง และกองที่สาม แทนด้วยสีเขียวย สีส้ม และสีเหลือง ตามลำดับ ต่อมาแม่ค้าต้องการแบ่งผลไม้ในกองแรกให้กองที่สองและกองที่สามเพื่อให้แต่ละกองมีผลไม้จำนวนเท่า ๆ กัน และเนื่องจากแม่ค้าแบ่งผลไม้ใส่กองที่สอง 4 ผล ทำให้เราสามารถเขียนแท่งบาร์แทนสถานการณ์ดังกล่าวได้ ดังนี้



ดังนั้น แม่ค้ามีผลไม้ทั้งหมด $15 \times 2 = 30$ ผล

อันที่จริงแล้ว วิธีแก้ปัญหาโดยใช้วิธีบาร์โมเดล นอกจากจะทำให้ผู้เรียนสามารถแปลความหมายของโจทย์ปัญหาให้เป็นภาพได้แล้ว ยังส่งผลให้ผู้เรียนเข้าใจโจทย์ปัญหาอย่างลึกซึ้งมากขึ้นอีกด้วย มีงานวิจัยที่แสดงให้เห็นว่าการที่ผู้เรียนสามารถตีความจากโจทย์ปัญหาเป็นภาพได้จะส่งผลให้ประสิทธิภาพในการแก้ปัญหามีสูงขึ้น ทั้งการพัฒนาความสามารถด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และการทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา นอกจากนี้วิธีบาร์โมเดลยังสอดคล้องแนวคิดเกี่ยวกับเรื่องตัวแปรและพีชคณิตไว้ โดยแท่งบาร์เปรียบเสมือนตัวแปรที่ไม่ทราบค่านั้นเอง [6, 8, 9, 14, 17, 19] ทำให้การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหาทางพีชคณิตมีส่วนช่วยเตรียมความพร้อมให้กับผู้เรียนสำหรับการเรียนพีชคณิตที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นได้ [7] ยกตัวอย่างหนึ่งในบทเรียนที่สามารถนำวิธีบาร์โมเดลไปใช้ในการแก้ปัญหา คือ การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (Linear Equations in One Variable) ซึ่งเป็นบทเรียนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) [5]
พิจารณาตัวอย่างการเขียนแทนสมการด้วยบาร์โมเดลในหัวข้อที่ 3

3. การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

หากเปรียบเทียบแท่งบาร์เสมือนกับตัวแปรที่เราไม่ทราบค่า เราจะสามารถนำวิธีบาร์โมเดลมาประยุกต์ใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ตัวอย่างต่อไปนี้ ผู้เขียนนำเสนอวิธีแก้สมการ 2 วิธี ได้แก่ การแก้สมการโดยใช้สมบัติการเท่ากัน (Properties of Equalities) และ การแก้สมการโดยใช้วิธีบาร์โมเดล โดยมีรายละเอียดดังนี้

ตัวอย่าง 3.1 การใช้สมบัติการเท่ากันและวิธีบาร์โมเดล ในการหาคำตอบของสมการ $3x + 5 = 38$

โดยปกติเราจะใช้สมบัติการเท่ากันมาช่วยในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กล่าวคือ

จากสมการ $3x + 5 = 38$ ใช้สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน กล่าวคือ บวกทอมที่อยู่ทั้งสองข้างของสมการด้วย -5 จะได้

$$3x + 5 + (-5) = 38 + (-5)$$

$$3x = 33$$

ใช้สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน กล่าวคือ คูณทอมที่อยู่ทั้งสองข้างของสมการด้วย $\frac{1}{3}$ จะได้

$$\frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 33$$

$$x = 11$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 11$

ทั้งนี้ เราสามารถประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลมาหาคำตอบของสมการได้เช่นกัน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

แนวคิด จากสมการ ตัวแปร x จะถูกแทนที่ด้วยแท่งบาร์

x

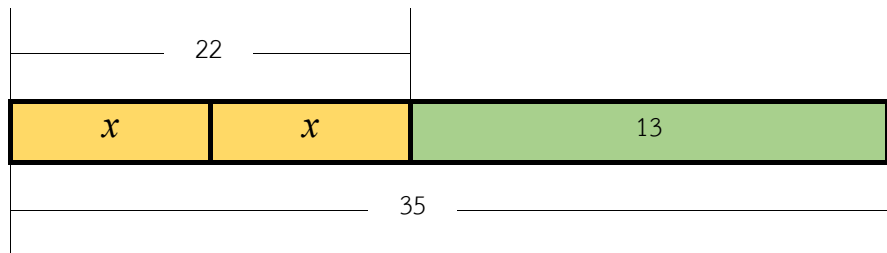
เนื่องจาก $3x = x + x + x$ และจากสมการ $3x + 5 = 38$ เราจึงได้แผนภาพด้านล่างนี้

33			
x	x	x	5
38			

จากแบบจำลอง ความยาวทั้งหมดของแท่งบาร์รวมกันได้ 38 นั่นคือ แท่งบาร์ x
 ทั้ง 3 แท่ง รวมกันได้ 33 หรือ แท่งบาร์ x แต่ละแท่งมีค่าเท่ากับ 11 นั่นเอง
 ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 11$

ทั้งนี้ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างแผนภาพแสดงการประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้สมการเพิ่มเติม
 ดังต่อไปนี้

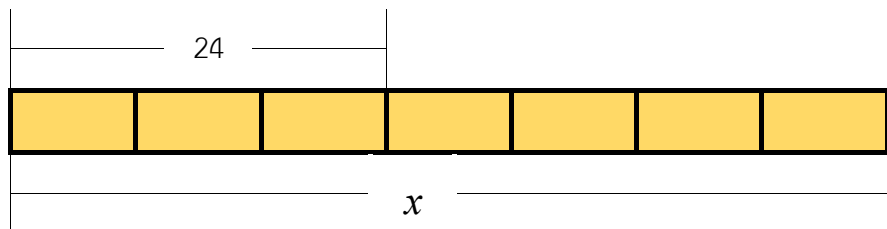
ตัวอย่าง 3.2 แผนภาพแสดงการประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของสมการ $35 - 2x = 13$



จากแบบจำลองนี้ คำตอบของสมการ คือ $x = 11$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.3 แผนภาพแสดงการประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของสมการ $\frac{3x}{7} = 24$

แนวคิด สำหรับข้อนี้ x แทน แท่งบาร์ ซึ่งถูกแบ่งออกเป็น 7 ส่วนเท่า ๆ กัน โดย 3 ส่วนจากทั้งหมด 7 ส่วน มีค่าเท่ากับ 24 ดังภาพ

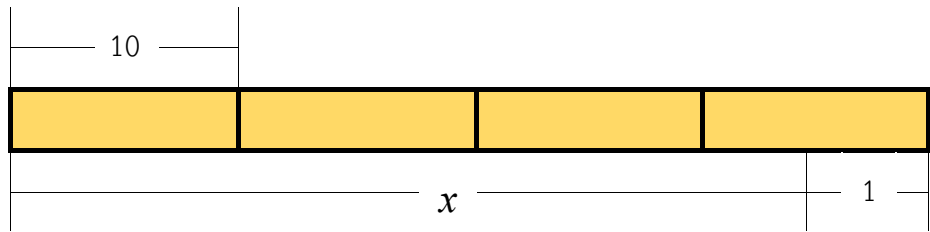


จากแบบจำลอง จะได้ $3 \times \text{[box]} = 24$ นั่นคือ $1 \times \text{[box]} = 8$

ดังนั้น $x = 7 \times \text{[box]} = 56$

ตัวอย่าง 3.4 แผนภาพแสดงการประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของสมการ $\frac{x+1}{4} = 10$

แนวคิด สำหรับข้อนี้ แท่งบาร์ขนาด $x + 1$ ถูกออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน โดยที่แต่ละส่วนมีขนาด 10 หน่วย



จากแบบจำลองนี้ จะได้ $x + 1 = 4 \times 10 = 40$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 39$

4. การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

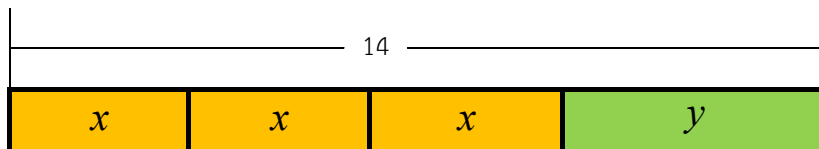
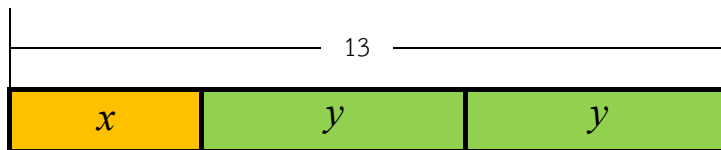
จากการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยใช้วิธีบาร์โมเดลข้างต้น เราสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้แนวคิดเดียวกันได้ พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1 การประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

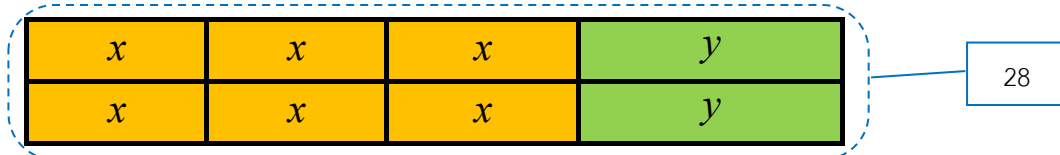
$$x + 2y = 13$$

$$3x + y = 14$$

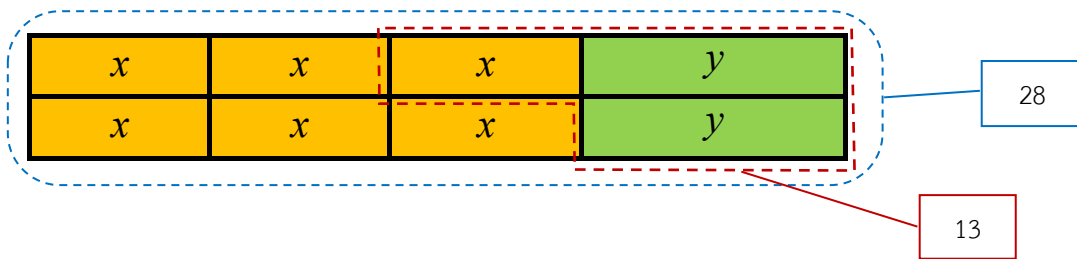
ตัวอย่างการวาดแบบจำลองสำหรับระบบสมการนี้



นำสมการ $3x + y = 14$ จำนวน 2 สมการมารวมกัน จะได้แบบจำลองดังนี้



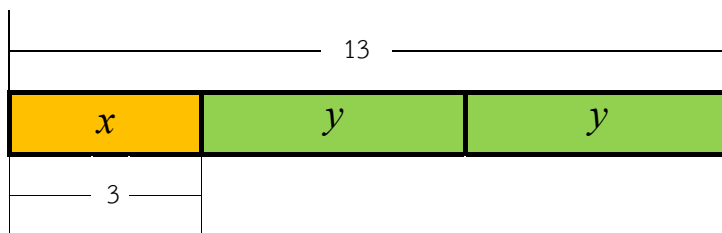
และจากแบบจำลองของสมการ $x + 2y = 13$ จะได้แบบจำลองด้านล่างนี้



นั่นคือ $5 \times x = 28 - 13 = 15$

ดังนั้น $1 \times x = 3$

และเมื่อพิจารณาแบบจำลองด้านล่างนี้



จะได้ว่า $2 \times y = 13 - 3 = 10$

ดังนั้น $1 \times y = 5$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ และ $y = 5$ เป็นคำตอบของระบบสมการนี้

เนื่องจากการแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีบาร์โมเดลดังตัวอย่างในบทความนี้ มีวิธีการที่ไม่ซับซ้อน ทำให้ผู้เรียนเห็นภาพได้ง่าย เมื่อใช้แท่งบาร์แทนตัวแปร ซึ่งเป็นการใช้รูปภาพแก้ปัญหาแทนการใช้วิธีการทางพีชคณิตแบบทั่วไป จึงมีความเป็นไปได้ที่การใช้วิธีบาร์โมเดลจะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจวิธีการแก้ระบบสมการได้ง่ายยิ่งขึ้น (ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของ สสวท. ระบบสมการ อยู่ในหลักสูตรการศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) [5])

อันที่จริงแล้วการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้วิธีบาร์โมเดลนั้น สอดคล้องกับการใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการ (วิธีการในปัจจุบันที่ผู้เรียนใช้ในการหาคำตอบหรือหาค่าของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการนั้น ๆ) หากลองพิจารณาดูอย่างละเอียด ผู้อ่านจะเห็นว่า การแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีบาร์โมเดลสอดคล้องกับวิธีการแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีการทางพีชคณิตแบบทั่วไปที่ใช้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ไม่ว่าจะเป็นการแก้ระบบสมการโดย

วิธีการแทนค่า (Substitution Method) หรือจะเป็นการแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีการกำจัดตัวแปร (Elimination Method) แน่แน่นอนว่าหากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในระบบสมการมีค่ามาก การใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของระบบสมการอาจจะไม่เหมาะสม เพราะใช้เวลาในการวาดภาพมากเกินไป ถึงอย่างไรก็ตาม ผู้เขียนเชื่อว่าหากผู้เรียนมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้งในวิธีการแก้ระบบสมการที่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีค่าน้อยก่อน จะส่งผลให้ผู้เรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่ามาก หรือเป็นเศษส่วน หรือเป็นทศนิยม ได้ บนพื้นฐานวิธีคิดแบบเดียวกัน ซึ่งสมมติฐานของผู้เขียนนี้สอดคล้องกับผลวิจัยของ Ng และ Lee [15] ทั้งนี้พื้นฐานความเข้าใจที่ดี การมองวิธีการแก้ปัญหาอย่างเป็นรูปธรรม จะช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจที่ดียิ่งขึ้น ซึ่งจะช่วยสนับสนุนความสามารถในการเรียนรู้ของผู้เรียนเมื่อต้องเผชิญกับโจทย์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้นได้

5. สรุป

ถึงแม้ว่าประเทศไทยได้เริ่มต้นนำวิธีบาร์โมเดลมาใช้ในการเรียนการสอนแล้ว แต่การนำไปใช้อย่างถูกต้องจะมีบทบาทสำคัญต่อความเข้าใจของผู้เรียน ผู้เขียนเชื่อว่าวิธีบาร์โมเดลสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้บทเรียนอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์ได้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าบทความนี้จะเป็แนวทางให้แก่ผู้อ่านสำหรับการสร้างสรรค์วิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ เพื่อให้เกิดประโยชน์ต่อการศีกษาของประเทศไทยต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] โครงการ PISA ประเทศไทย สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2552). *ตัวอย่างการประเมินผลนานาชาติ PISA: คณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: อรุณการพิมพ์.
PISA Thailand, The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (IPST). (2009). *PISA International Assessment Example: Mathematics*. Bangkok: Aroonprinting.
- [2] นวลฤทัย ลาพาแว. (2559). การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาพร้อมกับเทคนิคการวาดรูปบาร์โมเดลสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2. *วารสารการวิจัยกาสะลองคำ*, 10 (2), น. 55 – 64.

- Lapawae, N. (2016). Organizing Learning Activity for Problem Solving Development by Polyas Problem Solving Processes Co-operate with Bar Model for Second Grade Students. *Kasalongkham Research Journal*, 10 (2), p. 55 – 64.
- [3] ศรีนัย เปรมปรีดา. (2559). การพัฒนาชุดฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ด้วยทฤษฎีบาร์โมเดล สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3. (ปริญญาานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี).
- Prempreeda, S. (2016). *Development of Learning Package on Solving Mathematical Problems using Bar Model Theory for Grade 3 Students*. (Master's Thesis, Dhonburi Rajabhat University).
- [4] สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *คู่มือการใช้หลักสูตร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ระดับประถมศึกษา*. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2018). *Course manual of Mathematics (2017 Revised version) Primary level*. Bangkok: The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology.
- [5] สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *คู่มือการใช้หลักสูตร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2018). *Course manual of Mathematics (2017 Revised version) Lower-secondary level*. Bangkok: The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology.
- [6] Bruner, J. S. (1973). *Beyond the Information Given: Studies in the Psychology of Knowing*. Oxford England: W. W. Norton.
- [7] Choo, M. (2017). The Model Method – A Bridge to Introducing Algebra. Retrieved August 1, 2019, from <https://www.mceducation.com/social-media-page-sharing/spark/2017/06/05/the-model-method-a-bridge-to-introducing-algebra>.

- [8] Clark, A. (2013). Singapore Math: A Visual Approach to Word Problems. *Math in Focus: Singapore Math by Marshall Cavendish*. p. 1 – 7.
- [9] Dienes, Z. P. (1971). *The Elements of Mathematics*. New York: Herder and Herder.
- [10] Er, A. (2016). *How to Improve Your Mathematics: Primary 4*. Singapore: Educational Publishing House Pte.
- [11] Gani, M. A., Tengah, K. A. and Said, H. (2019). Bar Model as Intervention in Solving Word Problem Involving Percentage. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 3 (1), p. 69 – 76.
- [12] Kaur, B. (2019). The Why, What and How of the ‘Model’ Method: a Tool for Representing and Visualising Relationships When Solving Whole Number Arithmetic Word Problems. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 51 (1), p. 151 – 168.
- [13] Kho, T. H., Yeo, S. M., & Lim, J. (2009). *The Singapore Model Method for Learning Mathematics*. Singapore: EPB Pan Pacific.
- [14] Kintsch, W. and Greeno, J. G. (1985). Understanding and Solving Word Arithmetic Problems. *Psychological Review*, 92 (1), p. 109-129.
- [15] Ng, S. F. and Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (3), p. 282 – 313.
- [16] OECD. (2018) *PISA 2015 Results in Focus*. Retrieved from the OECD website: <http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf>.
- [17] Spencer, R. and Fielding, H. (2015). Using the Singapore Bar Model to Support the Interpretation and Understanding of Word Problems in Key Stage 2. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 35 (3), p. 114 – 119.

- [18] Thirunavukkarasu, M. and Senthilnathan, S. (2014). Effectiveness of Bar Model in Enhancing the Learning of Mathematics at Primary Level. *International Journal of Teacher Educational Research (IJTER)*, 3 (1), p. 15 – 22.
- [19] Yeap, B. H. (2010). *Bar Modeling: A Problem-Solving Tool*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

หมายเหตุ ท่านสามารถอ่านบทความที่มีภาพประกอบเป็นภาพสีได้ที่

<https://www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/article/view/207663> หรือ





วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 65(700) มกราคม – เมษายน 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การส่งไดกราฟกำลังสามของริงสลับที่จำกัด

The Cubic Mapping Digraphs of Finite Commutative Rings

อิทธิวัฒน์ โตเจริญนิรัตติสัย

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี กรุงเทพฯ 10600

Ittiwat Tocharoenirattisai

Division of Mathematics, Faculty of Education, Dhonburi Rajaphat Univercity, Bangkok 10600

Email: mathglass@hotmail.com

วันที่รับบทความ : 5 กันยายน 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 21 ตุลาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 12 ธันวาคม 2562

บทคัดย่อ

ให้ R เป็นริงสลับที่จำกัดพร้อมเอกลักษณ์ เราศึกษาการส่งไดกราฟกำลังสาม $G(R)$ ซึ่งใช้จุดยอดใน R และมีทิศทางจาก a ไป b ก็ต่อเมื่อ $a^3 = b$ เราได้ศึกษาโครงสร้างของไดกราฟและได้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึง วัฏจักรความยาวที่ และความเป็นเซมิเรกูลาร์ นอกเหนือจากนั้น เราได้ศึกษาโครงสร้างของไดกราฟสำหรับสองและสามคอมโพเน้น

คำสำคัญ: ริงเฉพาะที่ วัฏจักรความยาวที่ เซมิเรกูลาร์

ABSTRACT

Let R be a finite commutative ring with identity. We study the cubic mapping digraphs $G(R)$ whose vertex set is R and there is a directed edge from a to b if and only if $a^3 = b$. We investigate the structure of digraph and establish theorems about

fixed points, t -cycles and semiregularity. In addition, we work on the structure of digraphs for 2 and 3 components.

Keywords: Local rings, t -cycles, Semiregular

1. Introduction

A local ring is a commutative ring with identity which has a unique maximal ideal. The exponent of a finite group G , denoted by $\exp G$ is the least positive integer n such that $g^n = e$ for all $g \in G$. It is easy to see that $\exp G$ divides $|G|$. In particular, $\exp G = \text{lcm}\{o(a) : a \in G\}$, where $o(a)$ is the order of a in G . Moreover, if $G = G_1 \cup G_2$, then $\exp G = \text{lcm}\{\exp G_1, \exp G_2\}$. The exponent of a finite commutative ring R with identity is defined to be the exponent of the unit group $R^\times$ of R . We write $\lambda(R)$ for the exponent of R , that is, $\lambda(R) = \exp R^\times$. The order of k modulo d is the least positive integer t such that $d \mid k^t - 1$, denoted by $\text{ord}_d k$.

This research is motivated by Tocharoenirattisai and Meemark [4] who used $\lambda(R) = \exp R^\times$ to study the digraph $G^{(k)}(R)$, where R is a local extension of the Galois ring and Su, Tang and Wei [6] who studied the square mapping graphs of finite commutative rings.

Now, we study the cubic mapping digraphs over the finite commutative ring with identity and recall some definitions of structure of digraphs. Let R be a finite commutative ring with identity 1. For $k \geq 2$, the k^{th} power mapping digraph over R , denoted by $G^{(k)}(R)$, is the graph whose vertex set is R and there is a directed edge from a to b if and only if $a^k = b$.

A component of a digraph is a subdigraph which is a maximal connected subgraph of the associated nondirected graph. We consider two disjoint subdigraphs $G_1^{(k)}(R)$ and $G_2^{(k)}(R)$ of $G^{(k)}(R)$ induced on the set of vertices which are in the unit group $R^\times$ and induced on the remaining vertices which are not invertible, respectively. They are called the unit subdigraph and the zero divisor subdigraph, respectively. Observe that

there are no edges between $G_1^{(k)}(R)$ and $G_2^{(k)}(R)$, that is, $G^{(k)}(R) = G_1^{(k)}(R) \dot{\cup} G_2^{(k)}(R)$.

A cycle of length $t \geq 1$ is said to be a t -cycle and we assume that all cycles are oriented counterclockwise. We call a cycle of length one a fixed point. The distance from a vertex $g \in R$ to a cycle is the length of the directed path from g to a vertex in the cycle.

The indegree (respectively, outdegree) of a vertex $a \in R$ of $G^{(k)}(R)$, is the number of directed edges entering (respectively, leaving) to a , and denoted by $\text{indeg}^{(k)}a$ (respectively, $\text{outdeg}^{(k)}a$). The definition of $G^{(k)}(R)$ implies that the outdegree of each vertex is equal to 1. For any fixed point such that its indegree is equal to 1, it is called an isolated fixed point. Moreover, the definition of $G^{(k)}(R)$ implies that each component of the digraph $G^{(k)}(R)$ has exactly one cycle, that is the number of components and the number of its cycles are equal.

For convenience, we use the notation $G(R)$ for $G^{(3)}(R)$. In this paper, we discover some theorems about fixed points in $G(R)$, existence of t -cycles in $G^{(k)}(R)$ which better [2] and the number of t -cycles in Section 2. The semiregularity is investigated in Section 3. Finally, we establish some theorems on the digraph $G(R)$ for 2 and 3 components in the last section.

2. The Structure of $G(R)$

In this section, we study the fixed points, t -cycles and the number of t -cycles which are the important structures of $G(R)$.

Let R be a finite commutative ring with identity. It is well-known that R is a finite direct product of finite local rings, that is,

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_s, \quad (1)$$

for some $s \in \mathbb{Z}^+$, where R_i is a finite local ring for any $1 \leq i \leq s$.

The following theorem on finite local rings is needed for this research.

Theorem 2.1. (Theorem 6.1.2 in [1]) Let R be a finite local ring with the unique maximal ideal M . Then $|R| = p^{nr}$, $|M| = p^{(n-1)r}$, $M^n = \{0\}$ and $\text{char } R = p^k$ for some prime p and some positive integers n, r, k ($1 \leq k \leq n$).

Lemma 2.2. Let R be as in (1). Then the following statements hold.

- (1) There are 3^s fixed points in $G(R)$.
- (2) If $s=1$ then $G_2(R)$ has the tree attached to 0 .
- (3) $G_2(R)$ has exactly one component if and only if $s=1$.
- (4) Let $a, b \in R^\times$. If a and b are in the same cycle in $G_1(R)$, then $o(a) = o(b)$.

Proof. (1) For any fixed point a in $G(R_i)$, $a^3 = a$, so $a = 0, 1, -1$. Then $G(R_i)$ has 3 fixed points. Hence $G(R)$ has 3^s fixed points.

(2) For $s=1$, we have R is a finite local ring with unique maximal ideal, so we are done.

(3) Assume that $G_2(R)$ has exactly one component. Since $0^3 = 0$, so any vertex in $G_2(R)$ is attached to the 0 . Consider the set $M = \{a \in R \setminus R^\times \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^{3^n} = 0\}$. It is not difficult to show that M is an ideal of R . This means that the set of all nonunit of R forms an ideal. This implies that R is a local ring, that is $s=1$. The converse is clear by (2).

(4) Let $a, b \in R^\times$ and let $o(a) = l, o(b) = l'$. Without loss of generality, we let $l' \leq l$. Since a and b are in the same cycle, so $b^{3^j} = a$ for some $j \geq 1$. Since $1 = (b^{3^j})^{l'} = a^{l'}$, so $l \mid l'$. This forces that $l = l'$. □

Theorem 2.3. Let R be as in (1). The element 0 is an isolated fixed point in $G_2(R)$ if and only if R_i is a field.

Proof. Suppose that $s=1$. If R is a field, then it is clear that 0 is an isolated fixed point. Conversely, by Lemma 2.2(2), the unique maximal ideal of R is $\{0\}$. Thus R is a field. Now assume that $s > 1$. Suppose that 0 is an isolated fixed point. If R_i is not a field for some i , then there is $0 \neq \alpha_i \in R_i$ such that $\alpha_i^3 = 0$.

Let $\alpha = (0, \dots, \alpha_i, \dots, 0) \in R$. Then $\alpha^3 = 0$ which is a contradiction since 0 is an isolated fixed point. Hence, each R_i is a field for all i . Conversely, if every R_i is a field, then it is clear that 0 is an isolated fixed point. $\square$

Lemma 2.4. Let R be as in (1). If a nonidentity b is a vertex of a t -cycle ($t > 1$) in $G_1(R)$, then $\gcd(o(b), 3) = 1$.

Proof. Let a nonidentity b be a vertex of a t -cycle ($t > 1$) in $G_1(R)$. Then t is the least positive integer such that $b^{3^t} = b$. Since $b \in R^\times$, $b^{3^t-1} = 1$. Thus $o(b) \mid 3^t - 1$ and $\gcd(o(b), 3) = 1$. $\square$

Lemma 2.5. Let R be as in (1). If a nonidentity $b \in R^\times$, $o(b) \neq 2$ and $\gcd(o(b), 3) = 1$, then b is a vertex of a t -cycle ($t > 1$) in $G_1(R)$.

Proof. Let $o(b) = l \neq 2$ and $\gcd(l, 3) = 1$. Then there is the least positive integer t such that $l \mid 3^t - 1$. Since $l \neq 2$, we have $t \neq 1$, that is, $t > 1$. Says, $lk = 3^t - 1$. Then $b^{lk} = b^{3^t-1} = 1$, that is, t is the least positive integer such that $b^{3^t} = b$. Thus b is a vertex of a t -cycle ($t > 1$) in $G_1(R)$. $\square$

Next, we display the existence of a t -cycle with $t \geq 1$ in $G^{(k)}(R)$, such that these results are better [6] which displayed a t -cycle on $G_1^{(k)}(R)$. For a finite commutative ring R with identity, we set $\lambda(R) = uv$, where u is the largest divisor of $\lambda(R)$ relatively prime to k .

Theorem 2.6. Let R be as in (1). Let t be a positive integer, and $k \geq 2$.

The following statements are equivalent.

- (1) There exists a t -cycle in $G^{(k)}(R)$.
- (2) There exists $b \in R^\times$ where t is the least positive integer such that $o(b) \mid k^t - 1$.
- (3) $t = \text{ord}_d k$ for some divisor d of u .

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). Let a be a vertex of a t -cycle. Then t is the least positive integer such that $a^{k^t} = a$, so $a(a^{k^t-1} - 1) = 0$. If $a \in R^\times$, then $a^{k^t-1} - 1 = 0$. Thus t is the least positive integer such that $a^{k^t-1} = 1$, and in this case, we are done by setting $b = a$. Next,

suppose that $a \notin R^\times$. Let $A = (a)$, $B = \text{Ann}(a)$, the annihilator of a in R . Then $AB = \{0\}$ and $a^{k^t-1} - 1 \in B$. Since $a^{k^t-1} - (a^{k^t-1} - 1) = 1$, so $A + B = R$ and then $A \cap B = AB = \{0\}$. Define the ring isomorphism φ by $\varphi: R \rightarrow R/A \times R/B$ such that $\varphi(r) = (r + A, r + B)$ for any $r \in R$. Taking $b = 1 + a - a^{k^t-1}$. Then $\varphi(b) = (1 + A, a + B)$.

Thus

$$\varphi(b^{k^t-1}) = (1 + A, a^{k^t-1} + B) = (1 + A, 1 + B).$$

Since φ is a ring isomorphism, $b^{k^t-1} = 1$, that is, t is the least positive integer such that $b^{k^t-1} = 1$. Hence, we have (2) as required.

(2) $\Rightarrow$ (3). Suppose there exists $b \in R^\times$ such that $o(b) \mid k^t - 1$, but $o(b) \nmid k^l - 1$, for all $1 \leq l < t$. Then t is the least positive integer such that $b^{k^t-1} = 1$, and $\gcd(o(b), k) = 1$, so $o(b) \mid u$. Set $d = o(b)$. Thus $t = \text{ord}_d k$ for some divisor d of u .

(3) $\Rightarrow$ (1). Suppose $t = \text{ord}_d k$ for some divisor d of u . Since $R^\times$ is abelian, there exists $a \in R^\times$ such that $o(a) = \lambda(R)$. Set $b = a^{\frac{\lambda(R)}{d}}$. Since $t = \text{ord}_d k$, t is the least positive integer such that $b^{k^t-1} = a^{\frac{(k^t-1)\lambda(R)}{d}} = 1$. This means that $b^{k^t-1} = b$. Therefore, there exists a t -cycle in $G^{(k)}(R)$, where $t \geq 1$. $\square$

For the number of t -cycles in $G^{(k)}(R)$ is denoted by $A_t(G^{(k)}(R))$. Next, we investigate the number of t -cycles in $G(R)$.

Theorem 2.7. Let R be as in (1). Then the following statements hold.

- (1) $A_1(G_1(R)) = 2^s$ and $A_1(G_2(R)) = 3^s - 2^s$.
- (2) For $t > 1$, if $A_t(G_2(R)) \geq 1$, then $A_t(G_1(R)) \geq 1$.

Proof. Apply Lemma 2.2(1), we have that (1) is done.

Let $t > 1$. Suppose that $A_t(G_2(R)) \geq 1$. Let a be a vertex of a t -cycle in $G_2(R)$. Then we set $b = 1 + a - a^{3^t-1}$. By the proof of Theorem 2.6, $b \in R^\times$ and t is the least

positive integer such that $b^{3^t-1} = 1$, that is, $b^{3^t} = b$, so b is a vertex of a t -cycle in $G_1(R)$. Hence $A_t(G_1(R)) \geq 1$. $\square$

Lemma 2.8. Let R be as in (1) and q be an odd prime. Then $|R^\times| = q^m$ ($m \geq 0$) if and only if R is a direct product of the rings where every direct product is isomorphic to $F_{q^{m+1}}$.

Proof. First, suppose that R is local. By Theorem 2.1, $|R^\times| = q^{(n-1)r}(p^r - 1) = q^m$. If $p > 2$, then $p^r - 1 = 1$, this forces that $p = 2$ which is a contradiction. Thus $p = 2$. Then $(n-1)r = 0$, that is, $n = 1$ and $p^r - 1 = q^m$. Hence $R \cong F_{q^{m+1}}$. The converse is clear. Secondary, we suppose that R is not local. Since $|R^\times| = q^m$, so $|R_i^\times| = q^{m_i}$ for all $1 \leq i \leq s$. Then by above, the proof is completed. Again, the converse is clear. $\square$

Theorem 2.9. Let R be as in (1).

- (1) If $A_t(G_1(R)) = 0$ for any $t > 1$, then $|R^\times| = 2^l 3^m$ ($l, m \geq 0$).
- (2) If $|R^\times| = 3^m$ ($m \geq 0$), then $A_t(G_1(R)) = 0$ for any $t > 1$.
- (3) If $A_t(G_2(R)) = 0$ for any $t > 1$, then $|R^\times| = 2^l 3^m$ ($l, m \geq 0$) or R is local.
- (4) If $|R^\times| = 3^m$ ($m \geq 0$) or R is local, then $A_t(G_2(R)) = 0$ for any $t > 1$.

Proof. (1) Suppose that $A_t(G_1(R)) = 0$ for any $t > 1$. Assume that there is a prime $p > 3$ such that $p \mid |R^\times|$. Since $R^\times$ is abelian, there is an element $b \in R^\times$ such that $o(b) = p$. And since $p \neq 2$ and $\gcd(p, 3) = 1$, by Lemma 2.5, $A_t(G_1(R)) \neq 0$ ($t > 1$). This is a contradiction. Hence $|R^\times| = 2^l 3^m$ ($l, m \geq 0$).

(2) Suppose that $|R^\times| = 3^m$ ($m \geq 0$). Then any nonidentity element $g \in R^\times$, $o(g) = 3^i$ for some $1 \leq i \leq m$. Since $\gcd(3^i, 3^t - 1) = 1$ for any $t > 1$, by Theorem 2.6, $A_t(G_1(R)) = 0$ for any $t > 1$.

(3) Suppose that $A_t(G_2(R)) = 0$ for any $t > 1$. Assume that R is not local. If there is a prime $p > 3$ such that $p \mid |R^\times|$, then since $R^\times$ is abelian, there is an element $g \in R^\times$ such that $o(g) = p$. Since $\gcd(p, 3) = 1$, there is the least positive integer t

such that $p \mid 3^t - 1$, says $pk = 3^t - 1$. Let $\alpha = (g, 0, 0, \dots, 0)$. Then $0 \neq \alpha \notin R^\times$, that is, α is a zero divisor of R and $\alpha^{3^t-1} = \alpha^{pk} = (g^{pk}, 0, 0, \dots, 0) = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Thus $\alpha^{3^t} = \alpha$, that is, α is a vertex of a t -cycle in $G_2(R)$ which is a contradiction. Hence $|R^\times| = 2^l 3^m$ ($l, m \geq 0$). For another way, if we assume that $|R^\times| \neq 2^l 3^m$ for any $l, m \geq 0$, then there is a prime $p > 3$ such that $p \mid |R^\times|$. Above discussion forces that R is local.

(4) Suppose that $|R^\times| = 3^m$ ($m \geq 0$). By (2), $A_t(G_1(R)) = 0$ for any $t > 1$. If $t > 1$, $A_t(G_2(R)) \geq 1$, then by Theorem 2.7(2), $A_t(G_1(R)) \geq 1$ which is a contradiction. Thus $A_t(G_2(R)) = 0$ for any $t > 1$. Another one for local ring R is obvious. $\square$

3. Semiregularity of $G^{(k)}(R)$

In this section, we study the semiregularity of $G^{(k)}(R)$, where R is a finite commutative ring with identity as in (1). Now, we recall the definition of semiregular. The digraph $G^{(k)}(R)$ is called semiregular if there is a positive integer d such that for each vertex $g \in R$, $\text{inde } g^{(k)} = 0$ or $\text{inde } g^{(k)} = d$.

Theorem 3.1. Let R be as in (1). Then $G_1^{(k)}(R)$ is semiregular.

Proof. We want to show that for any $g \in R^\times$, if $\text{inde } g^{(k)} \neq 0$, then $\text{inde } g^{(k)} = \text{inde } g^{(k)} 1$. Suppose that $\text{inde } g^{(k)} \neq 0$. Then there is $h \in R^\times$ such that $h^k = g$. Since, for any $s \in R^\times$, $s^k = g$ if and only if $(h^{-1}s)^k = 1$. Thus $\text{inde } g^{(k)} = \text{inde } g^{(k)} 1$. $\square$

It is clear to see that the digraph $G_1(R)$ is semiregular by taking $k = 3$ in Theorem 3.1 which is shown below.

Corollary 3.2. Let R be as in (1). Then $G_1(R)$ is semiregular.

Theorem 3.3. Let R be a finite local ring with unique maximal ideal M . If $M^k = 0$, then $G_2^{(k)}(R)$ is semiregular.

Proof. Suppose that $M^k = 0$. Then it is clear that any element in M is a vertex in $G_2^{(k)}(R)$ attaching to a fixed point 0 . Thus $G_2^{(k)}(R)$ is semiregular. $\square$

Again, it is clear that the digraph $G_2(R)$ is semiregular by taking $k = 3$ in Theorem 3.3 which is shown below.

Corollary 3.4. Let R be a finite local ring with the unique maximal ideal M . If $M^3 = 0$, then $G_2(R)$ is semiregular.

4. The Digraphs $G(R)$ with Two and Three Components

In last section, we work on the structure of digraphs $G(R)$ with two and three components. First of all, we will talk about some theorems on the digraph over a finite cyclic group in [3].

Lemma 4.1. Let C_n be a finite cyclic group of order n and $k \geq 2$.

$$(1) \text{ If } \gcd(n, k) = 1, \text{ then } G^{(k)}(C_n) = \bigcup_{d|n} \underbrace{(\sigma(\text{ord}_d k) \cup \dots \cup \sigma(\text{ord}_d k))}_{\frac{\varphi(d)}{\text{ord}_d k} \text{ terms}},$$

where $\sigma(l)$ is an l -cycle and φ is the Euler φ -function.

$$(2) \text{ If } \gcd(n, 3) = 1, \text{ then } A_t(G(C_n)) = \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{\text{ord}_d 3} \text{ for } t \geq 1 \text{ and}$$

$$A_t(G(C_n)) = \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1, 2}} \frac{\varphi(d)}{\text{ord}_d 3} \text{ for } t > 1.$$

Proof. The proof of (1) can be seen in Proposition 4.2 (1) in [3].

For (2), we apply (1) by taking $k = 3$. Then we have that $A_t(G(C_n)) = \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{\text{ord}_d 3}$ for $t \geq 1$. Since $\text{ord}_d 3 = 1$ if and only if $d = 1, 2$, so $A_t(G(C_n)) = \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1, 2}} \frac{\varphi(d)}{\text{ord}_d 3}$ for $t > 1$. $\square$

Theorem 4.2. Let R be as in (1). If $G(R)$ has exactly two components, then R is local, $\text{char } R = 2$ and $|R^\times| = 2^l 3^m$ ($l, m \geq 0$).

Proof. Suppose that $G(R)$ has exactly two components. Since $0, 1, -1$ are fixed points of $G(R)$, it follows that $A_t(G(R)) = 0$ for any $t > 1$ and $l = -1$, that is,

$\text{char } R = 2$. Since $A_t(G_2(R)) = 0$ for any $t > 1$, by Lemma 2.2(3) and by Theorem 2.9(3), R is local and $|R^\times| = 2^l 3^m$ ($l, m \geq 0$). $\square$

Theorem 4.3. Let R be as in (1). If R is local, $\text{char } R = 2$ and $|R^\times| = 3^m$ ($m \geq 0$), then $G(R)$ has exactly two components.

Proof. It is obvious by Theorem 2.9. $\square$

Theorem 4.4. Let R be as in (1). If $G(R)$ has exactly three components, then R satisfies one of the following statements.

- (1) R is local, $\text{char } R \neq 2$ and $|R^\times| = 2^l 3^m$ ($l, m \geq 0$).
- (2) R is local, $\text{char } R = 2$ and $|R| = 2^n = 2|M|$.
- (3) $R \cong F_{q+1}$, where q is a prime that $q > 3$, $\text{char } R = 2$ and 3 is a primitive root modulo q .
- (4) R is local, $\text{char } R = 2$ with $|R^\times| = 2^i 3^m q^j$ ($m \neq 0, i, j \geq 1$) or $(i = 0, m, j \geq 1)$ or $(j = 0, i, m \geq 1)$.

Proof. Suppose that $G(R)$ has exactly three components. Since $0, 1, -1$ are fixed points of $G(R)$, if $\text{char } R \neq 2$, then $1 \neq -1$, we have $A_t(G(R)) = 0$ for any $t > 1$. Thus R is local and by Theorem 2.9, we have $|R^\times| = 2^l 3^m$ ($l, m \geq 0$). Now, we consider if $\text{char } R = 2$, then $1 = -1$. For $s > 1$, we have that $G(R)$ contains 2^s fixed points, that is, $G(R)$ contains 2^s components such that $2^s > 3$ which is a contradiction. Thus $s = 1$, that is, R is local and $G(R)$ contains only two fixed points and only one t -cycle for some $t > 1$ in $G_1(R)$. By Lemma 2.5, there is a nonidentity $b \in R^\times$, $o(b) \neq 2$, and $\gcd(o(b), 3) = 1$. Now we will investigate the order of $|R^\times|$. Suppose that there are distinct primes $p, q > 3$ such that $p, q \mid |R^\times|$. Since $|R^\times|$ is abelian, there are elements $b, c \in R^\times$ such that $o(b) = p$ and $o(c) = q$. By Lemma 2.2(4), b, c are in different t -cycles for some $t > 1$ in $G_1(R)$ which is a contradiction. Thus no distinct primes $p, q > 3$ such that $p, q \mid |R^\times|$. By Lemma 2.4, it is clear that $|R^\times| \neq 3^m$ for any $m \geq 0$. Now, we consider the other cases of $|R^\times|$.

Case 1 If $|R^\times| = 2^{i+1}$ ($i \geq 1$), then since $|R^\times| = 2^{(n-1)r}(2^r - 1) = 2^{i+1}$, it follows that $r = 1$ and $|R^\times| = 2^{(n-1)} = |M|$. Hence $|R| = 2^n = 2|M|$.

Case 2 If $|R^\times| = q^j$ ($j \geq 1$), where q is a prime that $q > 3$, then since $|R^\times| = 2^{(n-1)r}(2^r - 1) = q^j$, we have $(n-1)r = 0$, that is, $n = 1$ and $2^r - 1 = q^j$. Since $A_t(G_1(R)) = 0$ ($t > 1$) and $R^\times \cong F_{q^{j+1}}^\times = C_{q^j}$, by Lemma 4.1 (2), $1 = A_t(G(C_{q^j})) = \sum_{\substack{d|q^j \\ d \neq 1, 2}} \frac{\varphi(d)}{\text{ord}_d 3}$. This forces that $j = 1$, $d = q$, and $\varphi(d) = \text{ord}_d 3$, that is, 3 is a primitive root modulo q . Thus $R \cong F_{q+1}$.

Case 3 $|R^\times| = 2^i q^j$ ($i, j \geq 1$). Since $|R^\times| = 2^{(n-1)r}(2^r - 1) = 2^i q^j$, says $R^\times \cong Q_1 \times Q_2$, where Q_1 is an abelian of order 2^i and Q_2 is a cyclic of order q^j . Since $q \mid |R^\times|$, there is $b \in R^\times$ such that $o(b) = q$. By Lemma 2.5, b is a vertex of a t -cycle ($t > 1$) in $G_1(R)$. If there is $c \in R^\times$ such that $o(c) = 2^l$ ($l \geq 2$), then by Lemma 2.5, c is a vertex of a t -cycle ($t > 1$) in $G_1(R)$. Since $o(b) \neq o(c)$, by Lemma 2.2(4), b, c are in different t -cycles ($t > 1$) in $G_1(R)$ which is a contradiction. If there is $c \in R^\times$ such that $o(c) = q^l$ ($l \geq 2$) or $o(c) = 2^i q^j$ ($i, j \geq 1$), then we have a contradiction again by above discussion. Thus $|R^\times| \neq 2^i q^j$ for any $i, j \geq 1$. Hence, we have $|R^\times| = 2^i 3^m q^j$ ($m \neq 0, i, j \geq 1$) or ($i = 0, m, j \geq 1$) or ($j = 0, i, m \geq 1$). $\square$

Theorem 4.5. Let R be as in (1). If $R \cong F_{q+1}$, where q is a prime that $q > 3$, $\text{char } R = 2$, and 3 is a primitive root modulo q , then $G(R)$ has exactly three components.

Proof. It is immediate from Lemma 2.5 and Lemma 4.1(2) $\square$

Acknowledgment

I wish to thank my family and Dhonburi Rajabhat University for inspiration and encouragement to accomplish this paper. Also, I wish to thank Science Achievement Scholarship of Thailand, SAST, which support me since I am Graduate school of

Chulalongkorn University until to present. Finally, I express my gratitude to the referees for their valuable suggestions.

References

- [1] Bini, G., and Flamini, F. (2002). *Finite Commutative Rings and Their Applications*. New York: Kluwer Accademic Publishers.
- [2] Su, HD. Tang, GH., and Wei, YJ. (2012). The Square Mapping Graphs of Finite Commutative rings. *Algebra Colloquium*, 19, p. 569 - 580.
- [3] Tang, GH., and Wei, YJ. (2015). The Iteration Digraphs of Finite Commutative Rings. *Turkish Journal of Mathematics*, 39, p. 872 - 883.
- [4] Tocharoenirattisai, I., & Meemark, Y. (2017). Exponent of Local Ring Extensions of Galois Rings and Digraphs of the k^{th} Power Mapping. *Turkish Journal of Mathematics*, 41, p. 223 - 234.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(700) มกราคม – เมษายน 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การสร้างอัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัสอย่างง่าย

A Simple Construction of Golden Ratio in Square Plate

อรรณพ แก้วขาว^{1,*} และ ลลิตา ตันวงศ์ษา²

^{1,2}ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี 20131

Annop Kaewkhao^{1,*} and Lalita Tanwongsa²

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, Chonburi 20131

Email: ¹tor_idin@buu.ac.th

วันที่รับบทความ : 18 สิงหาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 3 ตุลาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 23 ธันวาคม 2562

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการสร้างอัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัส โดยใช้เพียงสันตรง และวงเวียน

คำสำคัญ: อัตราส่วนทอง ภาคตัดทอง แผ่นจัตุรัส สันตรง วงเวียน

ABSTRACT

In this research, we construct the golden ratio in square plate by using ruler and compass.

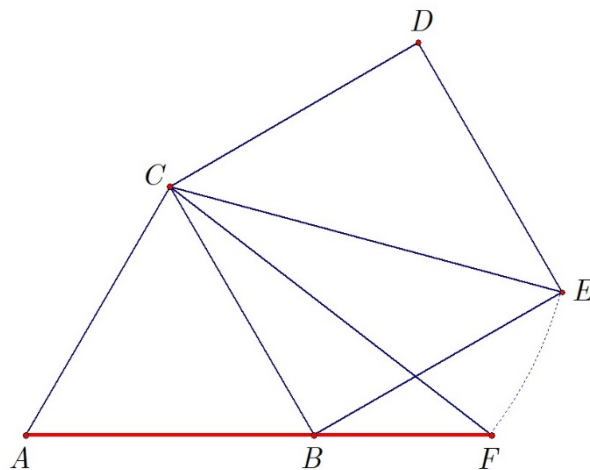
Keywords: Golden ratio, Golden section, Square plate, Ruler, Compass

* ผู้เขียนหลัก

1. บทนำ

“อัตราส่วนทอง” เป็นค่าคงตัว ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ นักคณิตศาสตร์หลายสาขาให้ความสนใจ โดยนักคณิตศาสตร์ผู้หลงใหลในเรขาคณิตพยายามศึกษาวิธีการต่าง ๆ ในการสร้างอัตราส่วนทอง การแบ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดออกเป็นอัตราส่วนทอง และการค้นหาอัตราส่วนทองจากรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ ซึ่งผู้อ่านที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากงานเขียนเรื่อง การสร้างอัตราส่วนทอง และการเกิดอัตราส่วนทองจากการซ้อนทับกันของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท [1] อีกทั้งยังมีงานวิจัยในต่างประเทศ อีกมากมายที่เกี่ยวข้องกับอัตราส่วนทอง [2 - 8] ซึ่งอาจมีทั้งวิธีการสร้างและพิสูจน์ที่ซับซ้อน ตลอดจนวิธีการสร้างโดยใช้เพียงเส้นตรงและวงเวียน ซึ่งจะเรียกว่า “การสร้างแบบคลาสสิก” (Classical construction) และพิสูจน์โดยใช้เพียงความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตที่เรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาซึ่งจะเรียกว่า “การพิสูจน์แบบคลาสสิก” (Classical proof)

ในปี ค.ศ.2011 Michel [7] ได้สร้างอัตราส่วนทองจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูปที่ 1.1 และพิสูจน์ให้เห็นว่า จุด B แบ่ง $\overline{AF}$ ออกเป็นอัตราส่วนทอง โดยใช้เพียงความรู้พื้นฐานเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการพิสูจน์ ซึ่งเป็นที่น่าสนใจว่า เราสามารถสร้างอัตราส่วนทองในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพียงรูปเดียวได้หรือไม่



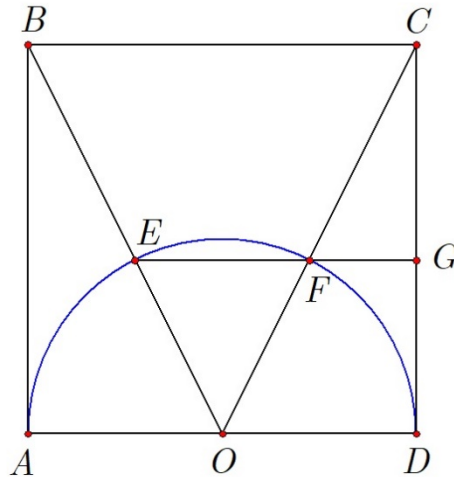
รูปที่ 1.1 การสร้างอัตราส่วนทองของ Michel

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยนำเสนอการการสร้างอัตราส่วนทองแบบคลาสสิกในแผ่นจัตุรัส พร้อมทั้งใช้การพิสูจน์แบบคลาสสิก

2. อัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัส

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการสร้างอัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัส ดังนี้

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นแผ่นจัตุรัส มี O เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD สร้างครึ่งวงกลมจุดศูนย์กลาง O รัศมี $\overrightarrow{OA}$ ตัด $\overline{BO}$ และ $\overline{CO}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ ถ้า $\overline{EF}$ ตัด $\overline{CD}$ ที่จุด G ดังรูปที่ 2.1 จะได้ว่า จุด F แบ่ง $\overline{EG}$ ออกเป็นอัตราส่วนทอง



รูปที่ 2.1 การสร้างอัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัส

เพื่อให้บทพิสูจน์เป็นไปอย่างสมบูรณ์และกระชับ จะนำเสนอบทตั้งดังต่อไปนี้

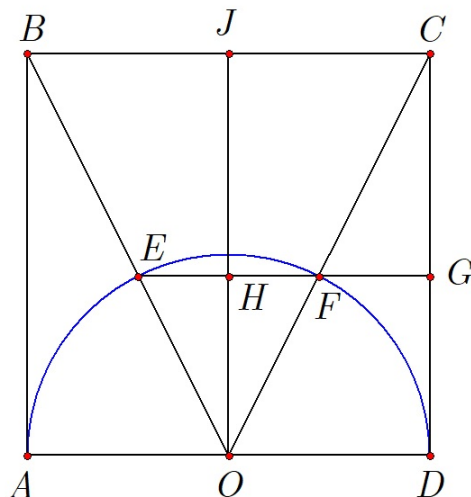
บทตั้ง กำหนดให้ A และ B เป็นจุดบนวงกลม X เป็นจุดภายนอกวงกลม ถ้า $\overline{XA}$ ตัดวงกลมอีกครั้งที่จุด C และ $\overline{XB}$ สัมผัสวงกลม แล้ว $XB^2 = AX \cdot XC$

บทพิสูจน์บทตั้ง โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ C อยู่ระหว่าง X และ A ลาก $\overline{BC}$ และ $\overline{BA}$

จะได้ว่า $\angle CBX = \angle CAB = \angle XAB$ ดังนั้น $\triangle XBC \sim \triangle XAB$ จะได้ว่า $\frac{XB}{XA} = \frac{XC}{XB}$

นั่นคือ $XB^2 = AX \cdot XC$

บทพิสูจน์ ให้ J เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overline{BC}$ และ H เป็นจุดตัดของ $\overline{JO}$ และ $\overline{EF}$ ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงประกอบบทพิสูจน์

จะได้ว่า $\triangle JCO \sim \triangle HFO$ และ $\triangle OCD \sim \triangle FCG$ นั่นคือ $\frac{HF}{JC} = \frac{OF}{OC}$ และ $\frac{OF}{OC} = \frac{DG}{DC}$

ดังนั้น $\frac{HF}{JC} = \frac{DG}{DC}$

เนื่องจาก $DC = 2JC$ จะได้ว่า $2HF = DG$

และจาก $\overline{OH}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด $\overline{EF}$ ที่จุด H จะได้ว่า $EF = DG$

เนื่องจาก DG สัมผัสวงกลม โดยบทตั้ง จะได้ว่า $DG^2 = FG \cdot GE$ ดังนั้น $EF^2 = FG \cdot GE$

เพราะฉะนั้น

$$EF^2 - FG \cdot (EF + FG) = 0$$

$$EF^2 - FG \cdot EF - FG^2 = 0$$

$$\left(\frac{EF}{FG}\right)^2 - \frac{EF}{FG} - 1 = 0$$

ดังนั้น $\frac{EF}{FG} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

นั่นคือ จุด F แบ่ง EG ออกเป็นอัตราส่วนทอง □

ข้อสังเกต

1. จะเห็นได้ว่าขั้นตอนการสร้างอัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัสนี้ เราใช้วงเวียนภายใน 2 ขั้นตอน คือ การหาจุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overline{AD}$ และการสร้างครึ่งวงกลมที่มีด้าน $\overline{AD}$ เป็นเส้นผ่าน

ศูนย์กลาง จากนั้นใช้สันตรงในการสร้างส่วนของเส้นตรง $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ และ $\overline{EG}$ ก็จะสามารถสร้างอัตราส่วนของในแผ่นจัตุรัสขึ้นมาได้โดยง่าย

2. จะพบว่าการพิสูจน์ข้างต้นเราใช้เพียงความรู้พื้นฐานในเรื่องของความคล้าย ถือว่าเป็นการพิสูจน์ที่ค่อนข้างง่ายไม่ซับซ้อนซึ่งนับเป็นศิลปะแบบหนึ่งของการพิสูจน์

หมายเหตุ บทตั้งข้างต้นเป็นเพียงกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทกำลังของจุด (Power of point Theorem) ซึ่งกล่าวถึงความสัมพันธ์ของผลคูณของระยะของจุดที่คอร์ดสองคอร์ดตัดกัน โดยบทตั้งนี้เป็นกรณีตัดกันภายนอกวงกลมของคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลม

3. ข้อเสนอแนะ

การนำเสนองานวิจัยเกี่ยวกับอัตราส่วนทองนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าจะช่วยจุดประกายความคิดของนักเรียน นักศึกษา ตลอดจนครูอาจารย์ เพื่อที่จะหาวิธีการของตนเองในการสร้างอัตราส่วนทองบนรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ เช่น บนแผ่นวงกลม บนแผ่นสามเหลี่ยม หรือ บนแผ่นจัตุรัส ซึ่งอาจช่วยให้นักออกแบบนำไปสร้างตราสัญลักษณ์ต่าง ๆ ให้ออกมาสวยงามมากยิ่งขึ้น และหากเป็นไปได้ควรหาวิธีการสร้างและพิสูจน์ด้วยวิธีการแบบคลาสสิก เพื่อให้นักเรียน หรือบุคคลทั่วไป ที่พอมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์สามารถอ่านแล้วเข้าใจโดยง่าย อันจะเป็นการลดความหวาดกลัวต่อวิชาคณิตศาสตร์ และลดช่องว่างทางความคิดที่มีต่องานวิจัยทางคณิตศาสตร์

เอกสารอ้างอิง

- [1] อรรณพ แก้วขาว และ ลลิตา ตันวงศ์ษา. (2019) การสร้างอัตราส่วนทอง และ การเกิดอัตราส่วนทองจากการซ้อนทับกันของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท. *วารสารคณิตศาสตร์*, 64 (697), น. 1 - 12.
Kaewkhao, A. and Tanwongsa, L. (2019) A Construction of Golden Ratio and the Existence of The Golden Ratio from Overlapping of 25 Satang and 5 Bath Coins. *Mathematical Journal*, 64 (697), p. 1 - 12.
- [2] Hofstetter, K. (2002). A Simple Construction of the Golden Section. *Forum Geometricorum*, 2, p. 65 – 66.
- [3] Hofstetter, K. (2003). A 5-Step Division of a Segment in the Golden Section. *Forum Geometricorum*, 3, p. 205 – 206.

- [4] Hofstetter, K. (2005). Divison of a Segment in the Golden Section with Ruler and Rusty Compass. *Forum Geometricorum*, 5, p. 135 – 136.
- [5] Hung, T. Q. (2015). The Golden Section in the Inscribed Square of an Isosceles Right Triangle. *Forum Geometricorum*, 15, p. 91– 92.
- [6] Michel, B. (2011). Another Simple Construction of the Golden Section, *Forum Geometricorum*, 11, p. 55.
- [7] Nniemeyer, J. (2011). A Simple Construction of the Golden Section, *Forum Geometricorum*, 11, p. 53.
- [8] Odom, G., and Van de Craats, J. (1986). E3007. *The American Mathematical Monthly*, 93 (7), p. 572 - 572.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้ ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ สรุป เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1

2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาต ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ เป็นภาพวาดคำ และลายเส้นต่าง ๆ ให้ใช้เส้นสีดำ ทั้งนี้ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับได้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป” เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ “ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกของนามสกุลที่ปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทย ก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

ประเภทของสมาชิก

สมาชิกมี 3 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ สมาชิกสามัญ และสมาชิกวารสาร

● สมาชิกสามัญ สำหรับผู้ที่มีความสนใจ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ
2. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

● สมาชิกวารสาร สำหรับบุคคลหรือหน่วยงานที่มีความสนใจวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ เป็นประจำ

สิทธิของสมาชิกวารสาร

1. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
2. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นอันเป็นประโยชน์ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
3. มีสิทธิได้รับความช่วยเหลือในทางการศึกษาคณิตศาสตร์ หรือความช่วยเหลือในประการอื่นใด เท่าที่คณะกรรมการบริหารสมาคมฯ จะจัดทำได้

ค่าสมัครสมาชิก ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท

ค่าสมาชิกสามัญ		ค่าสมาชิกวารสาร	วาระการเป็นสมาชิก (สามัญรายปี และวารสาร) เริ่มในวันที่ 1 พฤษภาคม ของทุกปี และสิ้นสุดในวันที่ 30 เมษายน ของปีต่อไป
ตลอดชีพ	3,000 บาท	250 บาทต่อปี	
รายปี	250 บาท		

ดาวน์โหลด ใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

<http://www.mathassociation.net> หัวข้อ “สมัคร”

ใบสมัครสมาชิก

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

☐ สมาชิกใหม่

☐ ต่ออายุ เลขที่สมาชิกเดิม.....

วันที่ เดือน พ.ศ.

ข้าพเจ้า (ชื่อ-นามสกุล) อาชีพ

เบอร์โทรศัพท์ อีเมล

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท)

☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)

☐ สมาชิกวารสาร (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน - 30 - บาท

รวมเป็นเงิน บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์ เลขที่บัญชี 162-0-25671-1

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับจัดส่งวารสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ซอย หมู่ที่

ถนน ตำบล อำเภอ

จังหวัด รหัสไปรษณีย์

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....

รับเงินค่าสมาชิกจำนวน

วันที่

ลงนาม..... ผู้สมัคร

(.....)

ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน มาที่

(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตูป.ณ. 2022 ปณ.พ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332

หรือ (ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบ

การสอบสมาคมคณิตศาสตร์ ประจำปี พ.ศ.2562



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้จัดสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ระดับประเทศ หรือมักเรียกกันว่า “การสอบสมาคมคณิตศาสตร์” โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดการสอบนี้มาอย่างต่อเนื่องและยาวนาน ในการสอบมีด้วยกันสามระดับ คือ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และแบ่งการสอบออกเป็น 2 ประเภท คือ ประเภทบุคคล และประเภททีมสามคน ในปี พ.ศ.2562 นี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดให้มีการสอบใน 9 สนามสอบทั่วประเทศ คือ กรุงเทพฯ (ณ มหาวิทยาลัยรามคำแหง) นครปฐม ขอนแก่น นครราชสีมา อุบลราชธานี เชียงใหม่ พิษณุโลก สงขลา และสุราษฎร์ธานี โดยจัดการสอบในวันอาทิตย์ที่ 24 พฤศจิกายน พ.ศ.2562 ที่ผ่านมามีจำนวนผู้สมัครสอบในแต่ละระดับดังนี้

ระดับประถมศึกษา	จำนวน 4,213 คน
ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น	จำนวน 5,966 คน
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	จำนวน 2,722 คน

ทั้งนี้เมื่อวันที่ 3 กุมภาพันธ์ พ.ศ.2563 ที่ผ่านมามีสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ประกาศผลการสอบสมาคมคณิตศาสตร์ ประจำปี พ.ศ.2562 ผ่านทางเว็บไซต์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ (<https://www.mathassociation.net>) นับเป็นครั้งแรกของการประกาศผลการสอบผ่าน

ช่องทางนี้ และมีพิธีมอบรางวัลต่าง ๆ เมื่อวันอาทิตย์ที่ 9 กุมภาพันธ์ พ.ศ.2563 ณ ห้องประชุมประไพ
วิริยะพันธ์ บริษัท วิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน)

ผลการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี พ.ศ.2562 ระดับประถมศึกษา

รางวัลระดับประเทศ

ประเภทบุคคล

- รางวัลที่ 1 ได้รับโล่พระราชทานสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์
เหรียญทอง พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 15,000 บาท ได้แก่
ด.ช.ปณณ เจนกุลประสูตร โรงเรียนสาธิตสาสนวิเทศศึกษา จ.สมุทรปราการ
- รางวัลที่ 2 ได้รับเหรียญเงิน พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 10,000 บาท ได้แก่
ด.ช.พิชณุตม์ ไข่ทอง โรงเรียนวัดดอนไก่เตี้ย จ.เพชรบุรี
- รางวัลที่ 3 ได้รับเหรียญทองแดง พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่
ด.ญ.กัลยกร วงศ์วิชัยภรณ์ โรงเรียนอนุบาลสุธีธร จ.นครปฐม

ประเภททีม

- รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนอนุบาลสุธีธร จ.นครปฐม
สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.ธราเทพ ดันธนวิกรัย
ด.ช.ณรงศ์ฤทธิ์ อาจณรงค์ฤทธิ์
ด.ญ.กัลยกร วงศ์วิชัยภรณ์
- รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนวัดดอนไก่เตี้ย จ.เพชรบุรี
สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.เดชัส เวียงวีระ
ด.ช.นิติธร ปริดิศรีพิพัฒน์
ด.ช.พิชณุตม์ ไข่ทอง

รางวัลระดับภูมิภาค

กรุงเทพมหานคร

ประเภทบุคคล

- รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่
ด.ช.พีรวิทย์ อธิประยูร โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร
- รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่
ด.ช.เกียรติภูมิ สีเจริญ โรงเรียนเซนต์คาเบรียล กรุงเทพมหานคร

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

ด.ช.ณัฐกร คุ่มมัน

โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายประถม

กรุงเทพมหานคร

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายประถม กรุงเทพมหานคร

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ช.ณัฐกร คุ่มมัน

ด.ช.วรัท เมฆาสุวรรณดำรง

ด.ช.เอกกวิน วิศิษฐ์เกียรติชัย

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนเซนต์คาเบรียล กรุงเทพมหานคร

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ช.เกียรติภูมิ สีเจริญ

ด.ช.อนพัช เอื้อศรีวัฒนากุล

ด.ช.จิระพัชร พุฒิ

ภาคกลาง

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

ด.ช.ปณณ เจนกุลประสูตร โรงเรียนสารสาสน์วิเทศศึกษา จ.สมุทรปราการ

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

ด.ช.พิชญุตม์ ไขทอง

โรงเรียนวัดดอนไก่เตี้ย จ.เพชรบุรี

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

ด.ญ.กัลยกร วงศ์วิชาภรณ์ โรงเรียนอนุบาลสุธีธร จ.นครปฐม

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนอนุบาลสุธีธร จ.นครปฐม

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ช.ธราเทพ ดันธนวิกรัย

ด.ช.ณรงค์ฤทธิ์ อาจนรงค์ฤทธิ์

ด.ญ.กัลยกร วงศ์วิชาภรณ์

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนวัดดอนไก่เตี้ย จ.เพชรบุรี

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ช.เดชัส เวียงวีระ

ด.ช.นิติธร ปริติศรีพิพัฒน์

ด.ช.พิชญุตม์ ไขทอง

ภาคเหนือ

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

ด.ญ.ณัฏฐกานต์ ศรีสุวรรณกุล โรงเรียนอนุบาลนครสวรรค์ จ.นครสวรรค์

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท

มีผู้ได้รับรางวัล 2 คน ได้แก่

ด.ช.ณัฏฐก คณใจเชื้อ

โรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย แผนกประถม จ.เชียงใหม่

ด.ญ.ณัฏฐา ดีจักรวาล

โรงเรียนยุวพัฒน์นครสวรรค์ จ.นครสวรรค์

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนยุวพัฒน์นครสวรรค์ จ.นครสวรรค์

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ญ.ณัฏฐา ดีจักรวาล

ด.ช.นิพัชฌน์ ดีจักรวาล

ด.ช.พลิชฐ์ โภครุ่ง

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนยุวพัฒน์นครสวรรค์ จ.นครสวรรค์

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.ธนภุต อัครรัตน์

ด.ช.ธราเทพ คงทวีเลิศ

ด.ช.ภูธณัฐ กรพิทักษ์

ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

ด.ช.ภัทรภณ ธนพิทักษ์

โรงเรียนดอนบอสโกวิทยา จ.อุดรธานี

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท

มีผู้ได้รับรางวัล 2 คน ได้แก่

ด.ช.ภัทรภูมิ สุกใส

โรงเรียนเมืองร้อยเอ็ด จ.ร้อยเอ็ด

ด.ญ.ปริยวรา วัฒนสุนทรสกุล

โรงเรียนอนุบาลนครราชสีมา จ.นครราชสีมา

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนอนุบาลนครราชสีมา จ.นครราชสีมา

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ญ.มิยูกิ ซาโต้

ด.ญ.ปริยวรา วัฒนสุนทรกุล

ด.ช.ธนภัทร วุฒิวิจินดา

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนดอนบอสโกวิทยา จ.อุดรธานี

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

- ด.ช.ภัทรภณ ธนพิทักษ์
- ด.ช.ณพงศ์ภพ เอ็งอุทัยวัฒน์
- ด.ช.จิรวัดน์ ชื่นคำ

ภาคใต้

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

ด.ญ.กัญญ์ณพัชร ลาภณรงค์ชัย โรงเรียนสุวรรณวงศ์ จ.สงขลา

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

ด.ช.กศิเดช วิสัยชนม์ โรงเรียนแสงทองวิทยา จ.สงขลา

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

ด.ช.สฐิภพ วงศ์วัชรานนท์ โรงเรียนศรีสว่างวงศ์ จ.สงขลา

ประเภทที่ ๓

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนบูรณะรำลึก จ.ตรัง

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ช.วายุ กล่อมพงษ์
ด.ช.สุวรรณภูมิ จันทร์คง
ด.ช.นนทพัทธ์ โอทอง

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนสุวรรณวงศ์ จ.สงขลา

สมาชิกของทีมรับภัตตประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ญ.กัญญณ์พัชร์ ลาภณรงค์ชัย
ด.ช.เตชินทรีย์ การจนารัตน์
ด.ญ.กัญตภา เพ็ชรรัตน์

ผลการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี พ.ศ.2562 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

รางวัลระดับประเทศ

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับโล่พระราชทานสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์
เหรียญทอง พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 15,000 บาท ได้แก่
ด.ช.ศุภวิชญ์ ดอนศรีแก้ว โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน
กรุงเทพมหานคร

รางวัลที่ 2 ได้รับเหรียญเงิน พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 10,000 บาท ได้แก่
ด.ช.กายสิทธิ์ อุทัยรังษี โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จ.สงขลา

รางวัลที่ 3 ได้รับเหรียญทองแดง พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่
นายเจ้าพระยา บรรจงการ โรงเรียนเบญจมราชูทิศ จ.จันทบุรี

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ปทุมธานี จ.ปทุมธานี
สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.พีระณัฐ ก้องกิจพิพัฒน์
ด.ช.ฐิติวัชร จันทรณภาพพัฒน์
ด.ช.ภูวนิช วาณิชวิวัฒน์

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร
สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.วรวิทย์ วิริยะประสิทธิ์ชัย
ด.ช.สรวิชญ์ เสงสุวนิช
ด.ช.วสวัตดี ระวีวงศ์

รางวัลระดับภูมิภาค

กรุงเทพมหานคร

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่
ด.ช.ศุภวิชญ์ ดอนศรีแก้ว โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน
กรุงเทพมหานคร

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่
ด.ช.ภูติศ ชนกุลไกรฤทธิ โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่
ด.ช.วสวัตต์ ะระวังวงศ์ โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร
สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.วรวิทย์ วิริยะประสิทธิ์ชัย
ด.ช.สรวิชัย เฮงสุวนิช
ด.ช.วสวัตต์ ะระวังวงศ์

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร
สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.สิริวิทย์ เฮงสุวนิช
ด.ช.ภูติศ ชนกุลไกรฤทธิ
ด.ช.ศิทธา ตันติกุล

ภาคกลาง

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่
นายเจ้าพระยา บรรจงการ โรงเรียนเบญจมราชูทิศ จ.จันทบุรี

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่
ด.ช.กษภาส ไพศาลนันท์ โรงเรียนเบญจมราชูทิศ จ.ราชบุรี

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่
ด.ช.พีระณัฐ ก้องกิจพิพัฒน์ โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬารณราชวิทยาลัย ปทุมธานี จ.ปทุมธานี

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬารณราชวิทยาลัย ปทุมธานี จ.ปทุมธานี
สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.พีระณัฐ ก้องกิจพิพัฒน์
ด.ช.ฐิติวัชร จันทรรณพัฒน์
ด.ช.ภูวนิช วาณิชวิวัฒน์

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนเบญจมราชูทิศ ราชบุรี จ.ราชบุรี
สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.กษภาส ไพศาลนันท์
ด.ช.ธนยศ องค์พิสุทธิ์
ด.ช.นิพัทธ์พงษ์ สังข์ทอง

ภาคเหนือ

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

ด.ช.รัชนนท์พศ ธนานนทสวัสดิ์ โรงเรียนนครสวรรค์ จ.นครสวรรค์

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

ด.ช.วิภาส ภาณุเจต โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยนเรศวร จ.พิษณุโลก

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

ด.ช.โกไคย โภคาทรัพย์ โรงเรียนอุตรดิตถ์ จ.อุตรดิตถ์

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนนครสวรรค์ จ.นครสวรรค์

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ญ.ชญาดา ภาควัฒนิกมลเลิศ

ด.ช.ชนาธิป สัจสันตินุกูล

ด.ญ.ณิชาธิ์ ดีจักรวาล

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนปิ่นสรวงแยลสวิทยาลัย จ.เชียงใหม่

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ ด.ช.กรณ์ณัฐนัย นามสาธิตาพร

ด.ช.ต่อลาภ อินกองงาม

นายวรวิษฐ์ เชื้อสะอาด

ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

ด.ช.ศิษฎา นาคเลื่อน โรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย จ.นครราชสีมา

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

ด.ช.ภูมิพิรัช พันธ์นิจ โรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย จ.นครราชสีมา

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท

มีผู้ได้รับรางวัล 2 คน ได้แก่

ด.ญ.นรินธนา อึ้งอุตรภักดี โรงเรียนนารีนุกูล จ.อุบลราชธานี

ด.ช.พัสกร อู่กาญจกิตติ โรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย จ.นครราชสีมา

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย จ.นครราชสีมา

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ช.ศิษฏา	นาคเลื่อน
ด.ช.พิสิษฐ์	เดชะพรอนันต์
ด.ช.ณัฏฐ์	อินทรกำแหง

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย จ.นครราชสีมา

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ช.พัสกร	อุกฤษฎ์กิตติ
ด.ช.ธีรวัฒน์	สันติสินนท์
ด.ช.ณัฐพัชร์	พัฒนพีระเดช

ภาคใต้

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

ด.ช.กายสิทธิ์ อุทัยรังษี โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จ.สงขลา

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

ด.ช.พิพิชชญา ศรีดำ โรงเรียนแสงทองวิทยา จ.สงขลา

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

ด.ช.ธนกฤต ร่มพฤกษ์ โรงเรียนแสงทองวิทยา จ.สงขลา

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนแสงทองวิทยา จ.สงขลา

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

ด.ช.คณิศร	กิริติพงษ์วุฒิ
ด.ช.ธนกฤต	ร่มพฤกษ์
ด.ช.พิพิชชญา	ศรีดำ

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนภูเก็ตวิทยาลัย จ.ภูเก็ต

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่

นายณัฐกัณฑ์	ต้นทวณิช
ด.ช.กันตภณ	ตราหยก
ด.ช.คณพศ	ถิ่นหนองจิก

ผลการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี พ.ศ.2562 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

รางวัลระดับประเทศ

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับโล่พระราชทานสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์
เหรียญทอง พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 15,000 บาท ได้แก่

นายปพน ละเภท โรงเรียนมหิตลวิทยานุสรณ์ จ.นครปฐม

รางวัลที่ 2 ได้รับเหรียญเงิน พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 10,000 บาท ได้แก่

นายปรมัตต์ สมุทรสินธุ์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร

รางวัลที่ 3 ได้รับเหรียญทองแดง พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

นายมุทิตราช ลักษณะวิศิษฐ์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนมหิตลวิทยานุสรณ์ จ.นครปฐม

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายชยพล เขาวีระประสิทธิ์

นายปพน ละเภท

นายกฤติน ปรีชาชัยสุรัตน์

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายนรบดี วัชรปรีชานนท์

นายพร้อม เกิดโคกทรัพย์

นายปรมัตต์ สมุทรสินธุ์

รางวัลระดับภูมิภาค

กรุงเทพมหานคร

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

นายปพน ละเภท โรงเรียนมหิตลวิทยานุสรณ์ จ.นครปฐม

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

นายปรมัตต์ สมุทรสินธุ์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

นายมุทิตราช ลักษณะวิศิษฐ์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนมหิตลวิทยานุสรณ์ จ.นครปฐม

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายชยพล เขาวีระประสิทธิ์

นายปพน ละเกท

นายกฤติน ปรีชาชัยสุรัตน์

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายนรบดี วัชรปรีชานนท์

นายพร้อม เกิดโศภทรัพย์

นายปรมัตถ์ สมุทรสินธุ์

ภาคกลาง

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

นายวรชัญญ์ พาลพ่าย โรงเรียนเบญจมราชรังสฤษฎิ์ จ.ฉะเชิงเทรา

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

นายณัฐศักดิ์ ประหยัด โรงเรียนพิบูลวิทยาลัย จ.ลพบุรี

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

นายปวัน กันแจ่ม โรงเรียนชลราษฎรอำรุง จ.ชลบุรี

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนเบญจมราชรังสฤษฎิ์ จ.ฉะเชิงเทรา

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายวรชัญญ์ พาลพ่าย

นายกิตติพงษ์ รวมทรัพย์

นายธีรโชติ รัตนศิริดำริ

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนชลราษฎรอำรุง จ.ชลบุรี

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายปวัน กันแจ่ม

นายพุฒิพงษ์ สมงาม

นางสาวนันท์ชพร นพรัตน์

ภาคเหนือ

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

นายธนช พงษ์เลาหพันธ์ โรงเรียนบุญวาทย์วิทยาลัย จ.ลำปาง

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

นางสาวณิชา สกุลวงศ์ธนา โรงเรียนสามัคคีวิทยาคม จ.เชียงราย

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

นายเกียรติ สุธีรยงประเสริฐ โรงเรียนสุโขทัยวิทยาคม จ.สุโขทัย

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนบุญวาทย์วิทยาลัย จ.ลำปาง

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายธนซ์ พงษ์เลาหพันธ์

นายปาล์ม ศิลพรกรกุล

นายณัฐชนน อินตาทิพย์

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนสามัคคีวิทยาคม จ.เชียงราย

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นางสาวณิชา สกุลวงศ์ธนา

นางสาวมนัสนันท์ ปัญญาสุ

นายศรัณย์ วันไชยธนวงศ์

ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

นายพงศวิทย์ ศิริรักษ์ โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จ.ร้อยเอ็ด

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

นายวัฒนบุลย์ เชื้อรอด โรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย จ.นครราชสีมา

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท ได้แก่

นายเต็มชนน พันธ์แสน โรงเรียนบุรีรัมย์พิทยาคม จ.บุรีรัมย์

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนบุรีรัมย์พิทยาคม จ.บุรีรัมย์

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายเต็มชนน พันธ์แสน

นายวิษณุพล ปรีพัฒน์ศักดิ์

นายปฐวี สุทธิวงศ์

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จ.ร้อยเอ็ด

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายสิริวิทย์ สุ่มมาตย์

นายพงศวิทย์ ศิริรักษ์

นายพีรวิทย์ เพ็ญสุวรรณ

ภาคใต้

ประเภทบุคคล

รางวัลที่ 1 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 5,000 บาท ได้แก่

นายสิริวิทย์ เหลืองอักษร โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จ.สงขลา

รางวัลที่ 2 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 4,000 บาท ได้แก่

นายณภัทร เณลิมวัย โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จ.สงขลา

รางวัลที่ 3 ได้รับเกียรติบัตร พร้อมเงินรางวัลจากบริษัทวิริยะประกันภัย จำกัด (มหาชน) 3,000 บาท

มีผู้ได้รับรางวัล 2 คน ได้แก่

นายณัฐสิทธิ์ สืบถวิลกุล โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จ.สงขลา

นายไกรสิทธิ์ ถาวรสุข โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จ.สงขลา

ประเภททีม

รางวัลชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จ.สงขลา

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นายจิรพัส บุญชุมณี

นายสิริวิทย์ เหลืองอักษร

นายณภัทร เณลิมวัย

รางวัลรองชนะเลิศ ได้รับโล่ ได้แก่ โรงเรียนธิดานุเคราะห์ จ.สงขลา

สมาชิกของทีมรับบัตรประกาศเกียรติคุณ ได้แก่ นางสาวนภัสวรรณ แก้วอุบล

นางสาวศิรดา ตันเจริญ

นางสาวรินรดา ไชยวาณิชย์

ประกาศ !!!

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตามที่ได้มีมาตรการเฝ้าระวัง และป้องกันการแพร่ระบาดของของไวรัสโคโรนา 2019 (COVID-19) นั้น สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ จึงของดและเลื่อนกิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ และกิจกรรมในภาคีเครือข่าย ดังนี้

ประกาศ งดกิจกรรม

- ♣️ **อบรมครูคณิตศาสตร์ ภาคฤดูร้อน ประจำปี พ.ศ.2563**
- ♣️ **ประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี (AMM) ครั้งที่ 25**
ประจำปี พ.ศ.2563
เจ้าภาพ : คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
- ♣️ **ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา**

ประกาศ เลื่อนกิจกรรม (อย่างไม่มีกำหนด)

- ♠️ **ประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี**
สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 9 (UAMC) พ.ศ.2563
เจ้าภาพ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

ทั้งนี้ สามารถสอบถามข้อมูลเพิ่มเติมได้ที่ โทร 0 252 7980 หรือ อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

ผลการประเมินคุณภาพ วารสารคณิตศาสตร์ ในฐานะข้อมูล TCI

ตามที่ศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai-Journal Citation Index Center- TCI) ได้ทำการประเมินคุณภาพวารสารวิชาการ ผลปรากฏว่า วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ มีคุณภาพอยู่ใน **วารสารกลุ่มที่ 2** สาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ในฐานะข้อมูล TCI ระหว่าง พ.ศ.2563 – 2567

 ศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย Thai-Journal Citation Index Centre						
เกี่ยวกับ TCI ▼ ฐานข้อมูล TCI ▼ สืบค้นข้อมูลวารสาร ค่า T-JIF เกณฑ์คุณภาพวารสาร ▼ ThaiJO ▼ Fast-track Indexing System FAQ TH EN						
ผลการประเมินคุณภาพวารสารที่อยู่ในฐานข้อมูล TCI รอบที่ 4 พ.ศ. 2563-2567 และวารสารใหม่ที่ต้องการเข้าสู่ฐานข้อมูล TCI พ.ศ. 2562						
No.	Journal Name English	Journal Name Local	ISSN	E-ISSN	TCI Tier	Date for next submission
535	Mathematical Journal by the Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King	วารสารคณิตศาสตร์ โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์	0858-4788	-	2	ไม่ก่อนวันที่ 1 ม.ค. 2564

โดยเหตุผลหลักในการถูกปรับลดอันดับลงจากวารสารกลุ่มที่ 1 สาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เนื่องจาก รูปแบบการตีพิมพ์บทความในส่วนของข้อมูลพื้นฐาน (ชื่อบทความ ชื่อและสังกัดผู้พิมพ์ บทคัดย่อ และคำสำคัญ) ไม่ถูกต้อง โดยที่ข้อมูลสังกัดของผู้พิมพ์บทความจะต้องมีทั้งรูปแบบภาษาไทยและภาษาอังกฤษ ประกอบกัน แต่ที่ผ่านมาทางวารสารคณิตศาสตร์ได้ระบุข้อมูลสังกัดของผู้พิมพ์บทความในรูปแบบภาษาอังกฤษเพียงอย่างเดียว

ในการนี้ วารสารคณิตศาสตร์ จึงมีความจำเป็นต้องปรับปรุงรูปแบบการระบุข้อมูลพื้นฐานของบทความ เพื่อให้เป็นไปตามเกณฑ์การประเมินคุณภาพวารสารของทาง TCI และจะส่งข้อมูลเพื่อขอรับการประเมินคุณภาพวารสารใหม่อีกครั้งในเดือนมกราคม พ.ศ.2564

วารสารคณิตศาสตร์ ขอชี้แจงแนวทางการอ้างอิงกลุ่มคุณภาพของบทความในวารสารคณิตศาสตร์ ตามข้อกำหนดของ TCI ดังนี้

- บทความที่ได้รับการตอบรับ (Final accept) ให้ลงตีพิมพ์ในวารสาร **ก่อนวันที่ 31 ธันวาคม พ.ศ.2562 ถือว่าบทความดังกล่าวเป็นบทความในวารสารกลุ่มที่ 1** ถึงแม้ว่าบทความจะไปปรากฏในเล่มของวารสารที่ตีพิมพ์หลังจากปี พ.ศ.2562 ก็ตาม
- บทความที่ได้รับการตอบรับ (Final accept) ให้ลงตีพิมพ์ในวารสาร **ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม พ.ศ.2563 เป็นต้นไป ถือว่าบทความดังกล่าวเป็นบทความในวารสารกลุ่มที่ 2**

อย่างไรก็ตามประกาศ ก.พ.อ. เรื่องเกณฑ์การพิจารณาวารสารวิชาการ สำหรับการเผยแพร่ผลงานทางวิชาการ ลงวันที่ 16 มิถุนายน พ.ศ.2562 กำหนดฐานข้อมูลระดับชาติที่ยอมรับเพื่อเผยแพร่ผลงานทางวิชาการ ได้แก่ ฐานข้อมูลของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai-Journal Citation Index Center- TCI) เฉพาะวารสารที่มีชื่ออยู่ในกลุ่มที่ 1 และ กลุ่มที่ 2 (http://www.ratchakitcha.soc.go.th/DATA/PDF/2562/E/151/T_0013.PDF)

กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2563

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมเพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารและหนังสือวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่มที่ 2) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
 - Thai Journal of Mathematics (Scopus, SJR) จำนวน 4 ฉบับต่อปี
2. อบรมครูคณิตศาสตร์ ภาคฤดูร้อน ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา
 - งดการอบรม ประจำปี พ.ศ.2563 --
3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย ช่วงเดือนพฤศจิกายน 2563
4. ประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี (AMM) ครั้งที่ 25 ประจำปี พ.ศ.2563
โดย ศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ซึ่งมี คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เป็นเจ้าภาพ
 - งดการประชุม ประจำปี พ.ศ.2563 --
5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทย เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
 - งดประกวดโครงงาน ประจำปี พ.ศ.2563 --
 - ประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 9 (The 9th Undergraduate in Applied Mathematics Conference (UAMC)) โดยมี ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เป็นเจ้าภาพ
 - เลื่อนการประชุม อย่างไม่มีกำหนด --

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาชิรฐานิศา คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ และโทรสาร 02-252-7980



www.mathassociation.net



MathThaiOrg@gmail.com