



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์ *Mathematical Journal*

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๕ ฉบับที่ ๗๐๑ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๓

Volume 65 Number 701 May – August 2020

บทความทั่วไป *General Article*

ปัญหาที่นำไปสู่จุดเริ่มต้นของทฤษฎีความน่าจะเป็น

1

Problems Leading to the Origin of Probability Theory

เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

บทความวิชาการ *Academic Article*

การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจสัน (2)

10

Evaluating Determinants by Jacobi's Method and Dodgson's Condensation Method (2)

พิสมัย กิตติภูมิ และ ปรินาติ ศรีรัตน์

บทความวิจัย *Research Article*

การเปรียบเทียบตัวแบบพยากรณ์ราคาอ้อย

30

A Comparison of Forecasting Methods for Sugarcane Prices

วรางคณา เรียนสุทธิ

การเดินของม้าหมากรุกปิดแบบ $(1, 2, 2)$ บนกระดานหมากรุกขนาด $3r \times 4s \times 4t$

49

เมื่อ $r \geq 1$ และ $s, t \geq 2$

A Closed $(1, 2, 2)$ -Knight's Tour on the $3r \times 4s \times 4t$ Chessboard,

where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$

ศิริรัตน์ สิงห์ตัน อรรถสิทธิ์ สีนาวา และ พิระพงษ์ เย็นทรง

จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล

65

The Numbers on a Pascal-Like Triangle

วรเชษฐ สมมะณี



วารสารคณิตศาสตร์

ISSN 0858-4788

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา ๖๕ ฉบับที่ ๗๐๑ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๓

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand

Under The Patronage of His Majesty The King

Volume 65 Number 701 May - August 2020

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาชิรณทิต

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

พิมพ์ที่ สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร 0-2218-3562 ถึง 63

<http://www.cuprint.chula.ac.th>

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

ด้วยสถานการณ์การแพร่ระบาดของโรคติดเชื้อไวรัสโคโรนา 2019 “COVID-19” ในหลายประเทศ รวมถึงประเทศไทยในขณะนี้ ได้ส่งผลกระทบโดยตรงต่อสุขภาพและวิถีชีวิตความเป็นอยู่ของทุกท่าน ทั้งยังไม่ทราบว่าจะสิ้นสุดเมื่อใด สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ตระหนักถึงความสำคัญของเรื่องดังกล่าวเป็นอย่างยิ่ง เพื่อให้ความร่วมมือกับภาครัฐ และปฏิบัติตามคำแนะนำของกระทรวงสาธารณสุขอย่างเคร่งครัด คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จึงมีมติให้งดการจัดกิจกรรมดังต่อไปนี้

- (1) การอบรมครูคณิตศาสตร์ภาคฤดูร้อน ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา
- (2) การสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2563 และ
- (3) การประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2563 ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา ซึ่งร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

นอกจากนี้ ศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ก็ได้งดการจัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี (AMM) ครั้งที่ 25 ประจำปี พ.ศ. 2563 อีกด้วย

ทั้งนี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ไม่ได้ปิดทำการสำนักงานสมาคมฯ และยังคงมุ่งมั่นพัฒนางานด้านคณิตศาสตร์ให้ก้าวหน้าต่อไป ท่านสามารถติดตามข่าวสารของทางสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ทางเว็บไซต์ของสมาคมฯ และเฟสบุ๊กของวารสารคณิตศาสตร์ หากท่านมีข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการดำเนินงานของสมาคมฯ หรือวารสารคณิตศาสตร์ ท่านสามารถติดต่อได้ที่อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหารมีความหวังใจสมาชิกทุกท่านเป็นอย่างยิ่ง ดังนั้นขอให้ท่านสมาชิกดูแลตนเองอย่างดีที่สุด และสุดท้ายนี้ขอเป็นกำลังใจให้ทุกท่านว่าเราจะก้าวผ่านสถานการณ์นี้ไปด้วยกัน

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ
รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล
ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ณัฐชัย ลีนาวงศ์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.นพพร แหยมแสง | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 4. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี |
| 5. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 6. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 7. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงค์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 3. ศ. ดร.ไพศาล นาคมหาชาสินธุ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 4. รศ. ดร.กาญจน์ภา อมรัชกุล | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 6. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 7. รศ. ดร.พิรยุทธ์ ชาญเศรษฐีกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 8. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |
| 9. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 10. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสม | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 11. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว | มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ |
| 12. ผศ. ดร.สุริย์พร ชาวแพรกน้อย | มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| 13. ผศ. ดร.มณจิรา ดวงสาพล | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 14. ผศ. ดร.เอื้ออารีย์ บุญเพิ่ม | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 15. นายพิเชฐ เจียรมนิทัศน์ | นายกสมาคมนักคณิตศาสตร์ประกันภัย |

รายชื่อคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี 2562 - 2563

1. ผศ.รจิต วัฒนสินธุ์	นายกสมาคม
2. อ. ดร.ฉวีวรรณ กิริติกร	อุปนายก
3. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงค์	กรรมการและเลขาธิการ
4. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์	กรรมการและรองเลขาธิการ
5. ผศ.ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ	กรรมการและเหรัญญิก
6. รศ.สุรวิทย์ ต้นเต่งผล	กรรมการและผู้ช่วยเหรัญญิก
7. ผศ.ลออ ชนวิริยะ	กรรมการและผู้ช่วยเหรัญญิก
8. ผศ.วาสนา สุขกระสานติ	กรรมการและบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์
9. ว่าที่ ร.อ. ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์	กรรมการและประชาสัมพันธ์
10. อ. ดร.รุ่งฟ้า จันท์จากรุณ	กรรมการและผู้ช่วยประชาสัมพันธ์
11. รศ.ภรณ์ เจริญภักตร์	กรรมการและปฏิคม
12. รศ. ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	กรรมการและฝ่ายดูแลเว็บไซต์
13. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	กรรมการ
14. รศ. ดร.ฉัฐไชย์ สีนาวงค์	กรรมการ
15. รศ. ดร.นพพร แหยมแสง	กรรมการ
16. รศ. ดร.พัชรา ไชยสุริยา	กรรมการ
17. รศ. ดร.วิชาญ ลีวศิริตฤกุล	กรรมการ
18. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
19. รศ. ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
20. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
21. รศ. ดร.อมร วาสนาวิจิตร	กรรมการ
22. รศ. ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์	กรรมการ
23. รศ.ศรีเสงี่ยม จักรใจ	กรรมการ
24. ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
25. อ.นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
26. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการ
27. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ ที่จัดทำขึ้นโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นภาษาไทยหรือภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณ และเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้นจึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	<i>Mathematical Journal</i> <i>by The Mathematical Association of Thailand</i> <i>Under The Patronage of His Majesty The King</i>
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของ บทความที่จะรับ ตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น - วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี - เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย - บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน - วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง

การพิจารณา กลั่นกรองบทความ ของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจาก ผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้อง โดยผู้ทรงคุณวุฒิไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับ ผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จาก ผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่ง บทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่อยู่ ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตาม ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่าง เคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่ง กองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสาร คณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือ หน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือ กระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคม คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่
www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตาม
 ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้น
 อัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อม
 ไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความ
 MJMATH.docx) ขึ้นที่ ระบบการส่งบทความ ที่ <https://www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการ
 ได้ที่อีเมล MathThaiOrg@gmail.com



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์

Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๕ ฉบับที่ ๗๐๑ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๓

Volume 65 Number 701 May – August 2020

บทความทั่วไป *General Article*

ปัญหาที่นำไปสู่จุดเริ่มต้นของทฤษฎีความน่าจะเป็น

1

Problems Leading to the Origin of Probability Theory

เรวัต ถนัดกิจศิริ

บทความวิชาการ *Academic Article*

การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน (2)

10

Evaluating Determinants by Jacobi's Method and Dodgson's Condensation Method (2)

พิสมัย กิตติภูมิ และ ปรินาติ ศรีรัตน์

บทความวิจัย *Research Article*

การเปรียบเทียบตัวแบบพยากรณ์ราคาอ้อย

30

A Comparison of Forecasting Methods for Sugarcane Prices

วรางคณา เรียนสุทธิ

การเดินของม้าหมากรุกปิดแบบ $(1, 2, 2)$ บนกระดานหมากรุกขนาด $3r \times 4s \times 4t$

49

เมื่อ $r \geq 1$ และ $s, t \geq 2$

A Closed $(1, 2, 2)$ -Knight's Tour on the $3r \times 4s \times 4t$ Chessboard,

where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$

ศิริรัตน์ สิงห์ตัน อรรถสิทธิ์ สีนาวา และ พิระพงษ์ เย็นทรง

จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล

65

The Numbers on a Pascal-Like Triangle

วรเชษฐ สมมะณี



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ปัญหาที่นำไปสู่จุดเริ่มต้นของทฤษฎีความน่าจะเป็น

Problems Leading to the Origin of Probability Theory

เรวัต ถนัดกิจศิริณ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท ปทุมวัน กรุงเทพมหานคร 10330

Raywat Tanadkithirun

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,

Chulalongkorn University, Payathai Road, Patumwan, Bangkok 10330

Email: raywat.t@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 28 ตุลาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 24 ธันวาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 8 มกราคม 2563

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ปัญหาสองปัญหาซึ่งนำไปสู่จุดเริ่มต้นของทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ อองตวน กอมโบตถาม บเลส ปาสกาล ในปี ค.ศ.1654 ได้ถูกนำเสนอ

คำสำคัญ: ทฤษฎีความน่าจะเป็น ปัญหาลูกเต๋า ปัญหาการแบ่งเงินเดิมพัน

ABSTRACT

In this article, two problems leading to the origin of probability theory that Antoine Gombaud asked Blaise Pascal in AD 1654 are presented.

Keywords: Probability theory, Dice problem, Problem of division of the stakes

1. บทนำ

แหล่งอ้างอิงต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับประวัติศาสตร์ของทฤษฎีความน่าจะเป็น เช่น [1, 2, 3, 4, 5] ชี้ตรงกันว่าทฤษฎีความน่าจะเป็นมีจุดเริ่มต้นในปี ค.ศ.1654 จากการที่ อองตวน กอมโบด (Antoine Gombaud) หรืออีกชื่อหนึ่งที่คนทั่วไปเรียกคือ เชอวาลิเยร์ เดอ เมเร (Chevalier de Méré) นักพนันชาวฝรั่งเศสที่มีชื่อเสียงในยุคนั้นได้ถาม เบลส์ ปาสกาล (Blaise Pascal) เกี่ยวกับปัญหาเกมการพนันสองปัญหาที่เขาพบเจอจากประสบการณ์การพนัน ทำให้ปาสกาลเขียนจดหมายไปปรึกษาปัญหาเหล่านี้กับ ปีแยร์ เดอ แฟร์มา (Pierre de Fermat) และนั่นทำให้เกิดการเขียนจดหมายโต้ตอบกันระหว่างนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสที่มีชื่อเสียงแห่งยุคทั้งสอง ซึ่งนับเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็นอย่างจริงจังเป็นครั้งแรก แม้ว่าจะมีการศึกษาเกมการพนันบางเกมมาบ้างแล้วก่อนหน้านี้ แต่ก็ยังไม่มีการศึกษาในแง่ทฤษฎีทั่วไปของความน่าจะเป็นก่อนเหตุการณ์สำคัญครั้งนี้

อันที่จริงแล้วทั้งสองปัญหาดังกล่าวที่กอมโบดถามปาสกาลนั้น ไม่ได้มาจากประสบการณ์การพนันส่วนตัวของเขาเองทั้งหมด ปัญหาแรกเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการโยนลูกเต๋า ซึ่งเขารู้สึกสับสนในคำตอบที่ได้จากการทดลองในการเล่นพนันจริงที่ขัดแย้งกับหลักการในการพนันที่ยึดถือกันมานาน หลักการหนึ่งซึ่งเขาถือว่าเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ปัญหาที่สองเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการแบ่งรางวัลในการแข่งขันที่ต้องจบลงก่อนที่จะได้ผู้ชนะ ซึ่งสำหรับปัญหานี้ได้มีหลายความพยายามในการหาคำตอบ แต่ยังไม่มีความสามารถให้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ แม้แต่กอมโบดเองก็ยังไม่รู้คำตอบของปัญหานี้ด้วย ปาสกาลและแฟร์มาช่วยกันคิดหาคำตอบของปัญหานี้โดยผ่านการเขียนจดหมายโต้ตอบกัน คนแรกที่หาคำตอบของปัญหานี้ได้ ก็คือ แฟร์มา แต่วิธีการหาคำตอบของปาสกาลนั้นง่ายกว่าวิธีของแฟร์มา และคำตอบนั้นยังนำไปสู่การศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็นอย่างจริงจังในเวลาต่อมา

บทความนี้จะเล่าถึงทั้งสองปัญหาดังกล่าว พร้อมทั้งให้คำตอบที่ปาสกาลและแฟร์มาช่วยกันคิด โดยใช้ภาษาปัจจุบันของทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ท่านผู้อ่านคุ้นเคยในการอธิบายประกอบ ขอให้ผู้อ่านพึงระลึกว่า ณ เวลา ค.ศ.1654 นั้นยังไม่มีเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เหมือนที่ใช้กันทั่วไปในปัจจุบัน เช่น ลอการิทึมฐานธรรมชาติ อนุกรมเทเลอร์ เมเชอร์ความน่าจะเป็น เป็นต้น แม้แต่คำว่า “ความน่าจะเป็น” ก็ยังไม่มีนิยาม และความน่าจะเป็นไม่ได้เป็นตัวเลขที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 และไม่มีสูตรที่เกี่ยวกับการคำนวณความน่าจะเป็นต่าง ๆ อีกด้วย

2. ปัญหาลูกเต๋า

ปัญหาแรกที่กอมโบดตามปาสกาลเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการโยนลูกเต๋า ปัญหาเมื่ออยู่ว่า “ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน ต้องโยนอย่างน้อยกี่ครั้ง โอกาสที่จะได้แต้มคู่ 6 อย่างน้อย 1 ครั้งจึงจะมากกว่าครึ่ง” [5] สำหรับปัญหาลูกเต๋านี้มีผู้คิดคำตอบได้ก่อนหน้านั้นแล้วซึ่งรวมถึงกอมโบดด้วย แต่สิ่งที่ทำให้เขาสับสนจนต้องมาถามปาสกาลคือ คำตอบที่ได้นี้ไม่สอดคล้องกับหลักการในการพนัน อันเก่าแก่หลักการหนึ่งที่ตัวเขาคิดว่าเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ คำตอบสำหรับปัญหานี้ที่ปาสกาลได้ให้ไว้ ทำให้เกิดสูตรทางทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ท่านผู้อ่านคุ้นเคยในเวลาต่อมานั้นคือ

$$P(A) = 1 - P(A^c) \text{ สำหรับเหตุการณ์ } A \text{ ใด ๆ}$$

ซึ่งการใช้สูตรความน่าจะเป็นนี้จะช่วยให้การหาคำตอบสำหรับปัญหานี้ง่ายขึ้นอย่างมาก ดังนี้

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ p_n แทนความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มคู่ 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน n ครั้ง และให้ q_n แทนความน่าจะเป็นที่จะไม่ได้แต้มคู่ 6 เลยในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน n ครั้ง จะได้ว่า

$$p_n = 1 - q_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \quad (1)$$

สังเกตว่า $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$ เป็นลำดับเพิ่ม ดังนั้นเราต้องการหา n ที่เล็กที่สุดที่ทำให้ $p_n > \frac{1}{2}$ ซึ่งจากการคำนวณพบว่า $p_{24} \approx 0.4914$ และ $p_{25} \approx 0.5055$ ดังนั้นคำตอบของปัญหานี้คือ $n = 25$ ครั้งนั่นเอง

สำหรับที่มาของคำถามนี้ มาจากการที่ในตอนแรกนั้นกอมโบดเล่นการพนันโดยพนันว่า “ในการโยนลูกเต๋านึงลูก 4 ครั้ง เขาจะได้แต้ม 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง” ซึ่งเขาชนะเกมการพนันนี้เป็นส่วนใหญ่ ต่อมาเขาเล่นการพนันใหม่โดยพนันว่า “ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 24 ครั้ง เขาจะได้แต้มคู่ 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง” ซึ่งเขาเลือกใช้จำนวนในการโยนเป็น 24 ครั้ง เนื่องจากเขาใช้หลักการในการพนันอันเก่าแก่หลักการหนึ่งที่เขาเชื่อมั่นมาก ๆ แต่ในการเล่นพนันแบบใหม่นี้เขาคาดว่าตนเองจะเป็นฝ่ายที่แพ้พนันได้มากกว่า และจากการทดลองเล่นพนันมานานเขาพบว่า ต้องเปลี่ยนจำนวนในการโยนเป็น 25 ครั้งจึงจะทำให้โอกาสที่จะชนะพนันนั้นมากกว่าครึ่ง แต่อย่างไรก็ตามกอมโบดเชื่อมั่นในหลักการในการพนันอันเก่าแก่เป็นอย่างมาก และประกาศว่าทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ไม่สอดคล้องกัน [5]

หลักการในการพนันที่ว่านี้เกี่ยวกับการหาเลขวิฤตของเกมการพนัน เลขวิฤตของเกมการพนันคือจำนวนใน “การเล่นพนัน” ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ความน่าจะเป็นที่ผู้พนันจะได้ “ความสำเร็จ” อย่างน้อยหนึ่งครั้งเป็น $\frac{1}{2}$ หรือมากกว่า สำหรับการเล่นพนันของกอมโบต์คำว่า “การเล่นพนัน” หมายถึงการโยนลูกเต๋าลูกเดียวในการพนันแบบแรก หรือการโยนลูกเต๋าสองลูกในการพนันแบบที่สอง และคำว่า “ความสำเร็จ” หมายถึงการได้แต้ม 6 สำหรับการโยนด้วยลูกเต๋าลูกเดียวในการพนันแบบแรก หรือการได้แต้มคู่ 6 สำหรับการโยนด้วยลูกเต๋าสองลูกในการพนันแบบที่สอง หลักการพนันอันเก่าแก่ที่กอมโบต์ยึดถือกล่าวว่า [5] ในเกมการพนันหนึ่งที่มีโอกาสในการเล่นพนัน 1 ครั้งได้ความสำเร็จเป็น 1 ใน N_1 ให้ n_1 แทนเลขวิฤตของเกมการพนันนี้ และสำหรับอีกเกมการพนันหนึ่งที่มีโอกาสในการเล่นพนัน 1 ครั้งได้ความสำเร็จเป็น 1 ใน N_2 ให้ n_2 แทนเลขวิฤตของเกมการพนันที่สองนี้ จะได้ว่า

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2}$$

ซึ่งสำหรับการพนันของกอมโบต์นี้ เขาสามารถคำนวณได้ว่าการโยนด้วยลูกเต๋าลูกเดียวนั้น การโยน 4 ครั้งจะทำให้การพนันว่าจะได้แต้ม 6 อย่างน้อย 1 ครั้งนั้นมีจำนวนผลลัพธ์ที่ชนะต่อผลลัพธ์ที่แพ้เป็น 671 ต่อ 625 จากผลลัพธ์ในการโยนทั้งหมด $6^4 = 1296$ รูปแบบ ส่วนการโยนที่น้อยกว่า 4 ครั้งจะทำให้ได้จำนวนผลลัพธ์ที่แพ้มากกว่าผลลัพธ์ที่ชนะ ดังนั้นเลขวิฤตของการพนันที่ใช้การโยนด้วยลูกเต๋าลูกเดียวซึ่งมี $N_1 = 6$ คือ $n_1 = 4$ และสำหรับการโยนด้วยลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันนั้น จะได้ว่า $N_2 = 36$ และ

$$n_2 = \frac{n_1}{N_1} \times N_2 = \frac{4}{6} \times 36 = 24$$

ในความเป็นจริงแล้วหลักการหาเลขวิฤตที่กอมโบต์ใช้นี้ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป โดย อับราฮัม เดอ มัวร์ (Abraham de Moivre) ได้พิสูจน์ไว้ในเวลาต่อมาในปี ค.ศ.1718 ว่า “ผลคูณของเลขวิฤตและความน่าจะเป็นของความสำเร็จหนึ่งครั้งมีค่าประมาณเป็น $\ln(2) \approx 0.693$ สำหรับความน่าจะเป็นของความสำเร็จหนึ่งครั้งที่น้อยเพียงพอ” [3] จากแนวคิดเดียวกันกับสมการที่ (1) จะได้ว่าเกมการพนันที่มีโอกาสในการเล่นพนัน 1 ครั้งแล้วได้ความสำเร็จเป็น p จะมีค่าวิฤต n เป็น $\lceil x \rceil$ ซึ่งคือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x เมื่อ x คือค่าที่ทำให้

$$1 - (1 - p)^x = \frac{1}{2}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ค่า x เป็น $x = -\frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$ ดังนั้น

$$n = \left\lceil -\frac{\ln 2}{\ln(1-p)} \right\rceil$$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์

$$\ln(1-p) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^m}{m}$$

ดังนั้นเมื่อ p มีค่าน้อย ๆ จะได้ว่า $\ln(1-p) \approx -p$ ทำให้ค่าประมาณของเลขวิกฤต n คือ

$$n \approx \left\lceil \frac{\ln 2}{p} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{0.693}{p} \right\rceil$$

ดังนั้นหลักการหาเลขวิกฤตที่กอมโบตใช้นั้นเป็นจริงเพียงในกรณีที่ความน่าจะเป็นที่จะชนะในการเล่นพนัน 1 ครั้งมีค่าน้อย ๆ เท่านั้น ซึ่งสมมูลกับการที่ค่าของ N_1 และ N_2 มีค่ามาก ๆ เท่านั้น สำหรับ

$N_1 = 6$ โอกาสในการเล่นพนัน 1 ครั้งแล้วชนะคือ $p_1 = \frac{1}{6}$ ดังนั้นค่าประมาณเลขวิกฤตที่ได้คือ $\left\lceil 0.693 \times 6 \right\rceil = 5$ ซึ่งไม่ตรงกับค่าจริงตามทฤษฎี

$$n_1 = \left\lceil -\frac{\ln 2}{\ln\left(1-\frac{1}{6}\right)} \right\rceil = 4$$

นั่นคือ $N_1 = 6$ นั้นไม่มากเพียงพอที่จะใช้ค่าประมาณนี้นั่นเอง แต่สำหรับ $N_2 = 36$ จะได้ค่าประมาณเลขวิกฤตเป็น $\left\lceil 0.693 \times 36 \right\rceil = 25$ ซึ่งตรงกับค่าจริงตามทฤษฎี

$$n_2 = \left\lceil -\frac{\ln 2}{\ln\left(1-\frac{1}{36}\right)} \right\rceil = 25$$

ดังนั้นกอมโบตเข้าใจผิดไปเองว่าหลักการในการพนันที่เขายึดถือ นั่นคือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเสมอ อย่างไรก็ตามปัญหานี้ก็ถือเป็นตัวอย่างที่ทำให้นักคณิตศาสตร์รุ่นต่อมาได้วิเคราะห์ว่าหลักการนั้นผิดอย่างไร และทำให้เกิดการพัฒนาทางด้านทฤษฎีความน่าจะเป็นต่อมา

3. ปัญหาการแบ่งเงินเดิมพัน

ปัญหาที่สองที่กอมโบดถามปาสกาลเป็นปัญหาเกี่ยวกับการแบ่งเงินเดิมพันในการแข่งที่ต้องจบลงกลางคันก่อนที่จะได้ผู้ชนะ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อของ problem of points หรือ problem of division of the stakes กล่าวว่า “ในเกมที่มีผู้เล่น 2 คน ซึ่งแต่ละคนมีโอกาสที่จะชนะในแต่ละเกมเท่า ๆ กัน ทั้งสองคนตกลงกันว่าผู้ที่ชนะได้ N เกมเป็นคนแรกจะเป็นผู้ชนะในที่สุดและได้เงินเดิมพันไปทั้งหมดคนเดียว แต่ปรากฏว่าเมื่อผู้เล่นคนแรกชนะได้ a เกม และผู้เล่นคนที่สองชนะได้ b เกม ก็มีเหตุที่ทำให้ต้องหยุดเล่น จึงเกิดปัญหาว່ว่าควรจะแบ่งเงินเดิมพันอย่างไรจึงจะยุติธรรม” [5]

พิจารณากรณีตัวอย่างเช่น สำหรับ $N=6, a=4, b=3$ จะเห็นได้ว่าผู้เล่นคนแรกต้องการชนะอีก 2 เกม และผู้เล่นคนที่สองต้องการชนะอีก 3 เกม แฟร์มาได้ให้วิธีคิดไว้ว่าถ้าหากให้ทั้งสองคนเล่นต่อไปอีก 4 เกมจะต้องมีผู้ที่ชนะครบ 6 เกมอย่างแน่นอน ในแต่ละเกมที่เล่นนี้สมมติให้สัญลักษณ์ W แทนการชนะของผู้เล่นคนแรก และ L แทนการแพ้ของผู้เล่นคนแรก ดังนั้นในการเล่นต่อไปอีก 4 เกมจะมีผลลัพธ์ได้ 16 รูปแบบได้แก่

WWWWW, WWWL, WWLW, WWLL, WLWW, WLWL, WLLW, WLLL,
LWWW, LWLW, LWLL, LLWW, LLWL, LLLW, LLLL

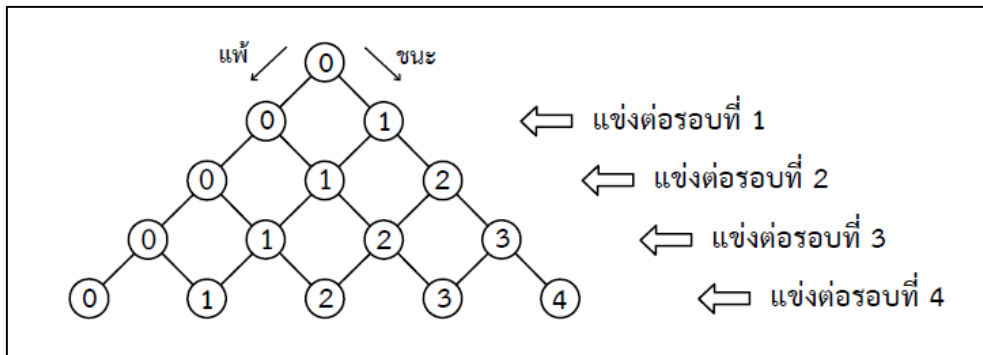
โดยที่สัญลักษณ์ในแต่ละตำแหน่งแทนการชนะหรือแพ้ของผู้เล่นคนแรกในเกมที่ 1 ถึงเกมที่ 4 ตามลำดับ จากผลลัพธ์ทั้ง 16 รูปแบบที่ได้ มีอยู่ 11 รูปแบบที่ผู้เล่นคนแรกจะชนะครบ 6 เกมได้ก่อนผู้เล่นคนที่สอง ได้แก่

WWWWW, WWWL, WWLW, WWLL, WLWW, WLWL,
WLLW, LWWW, LWLW, LLWW

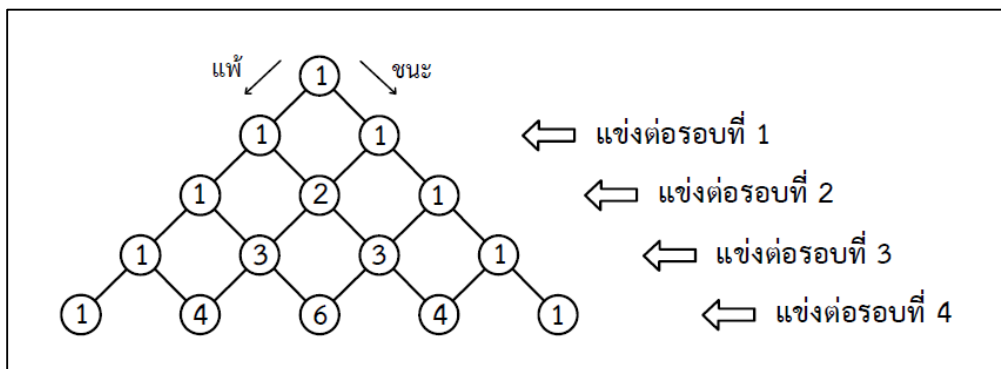
เนื่องจากผู้เล่นทั้งสองมีโอกาสที่จะชนะในแต่ละเกมเท่า ๆ กัน ดังนั้นเราจึงควรแบ่งสัดส่วนเงินเดิมพันให้ผู้เล่นคนแรกเป็นจำนวน $\frac{11}{16}$ เท่าของเงินเดิมพัน สำหรับเงินเดิมพันส่วนที่เหลือเราจะให้ผู้เล่นคนที่สองซึ่งคิดเป็นเงินจำนวน $1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$ เท่าของเงินเดิมพัน

วิธีการคิดของแฟร์มาสำหรับปัญหานี้ คือการเขียนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ แล้วนับดูว่ามีจำนวนผลลัพธ์ที่ทำให้ผู้เล่นแต่ละคนชนะครบ N เกมก่อนเป็นสัดส่วนเท่าใดจากจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด แล้วแบ่งเงินเดิมพันให้ผู้เล่นแต่ละคนตามสัดส่วนที่ได้ จะเห็นได้ว่าหากจำนวนผลลัพธ์ที่

เป็นไปได้ทั้งหมดมีจำนวนมาก ๆ การเขียนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้แล้วนับจำนวนผลลัพธ์ที่ผู้เล่นแต่ละคนชนะจะทำได้ยาก ปาสกาลได้เสนอวิธีคิดที่เหมือนกับแฟร์มา เพียงแต่ไม่ต้องเขียนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ออกมา แต่ให้สนใจจำนวนสะสมในแต่ละรอบที่ผู้เล่นแต่ละคนชนะหรือแพ้ จากตัวอย่างข้างต้นเราสามารถเขียนจำนวนการชนะสะสมของผู้เล่นคนแรกในการแข่งต่อไปอีก 4 เกมตามรูปที่ 3.1 และหาจำนวนรูปแบบของผลลัพธ์ที่ตรงกับจำนวนการชนะสะสมตามรูปที่ 3.2 ซึ่งเป็นที่มาของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล (Pascal's triangle) ที่เราใช้กันในปัจจุบันนั่นเอง



รูปที่ 3.1 จำนวนการชนะสะสมของผู้เล่นคนแรกในการแข่งต่อไปอีก 4 เกม



รูปที่ 3.2 จำนวนรูปแบบของผลลัพธ์ที่ตรงกับจำนวนการชนะสะสมของผู้เล่นคนแรกในรูปที่ 3.1

จากตัวอย่างที่ $N=6$, $a=4$, $b=3$ ผู้เล่นคนแรกจะชนะครบ 6 เกมก่อนถ้าเขาชนะมากกว่าหรือเท่ากับ 2 เกมในการแข่งต่ออีก 4 เกม จากรูปที่ 3.1 และ 3.2 จะเห็นได้ว่าจำนวนของผลลัพธ์ที่ผู้เล่นคนแรกจะชนะมากกว่าหรือเท่ากับ 2 เกมคือ $6 + 4 + 1 = 11$ รูปแบบ จากทั้งหมด

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ รูปแบบ ดังนั้นเราจึงควรแบ่งสัดส่วนเงินเดิมพันให้ผู้เล่นเกมแรกเป็นจำนวน $\frac{11}{16}$ เท่าของเงินเดิมพัน ซึ่งตรงกับคำตอบที่แฟร์มาได้ให้ไว้ แต่จะเห็นได้ว่าเราไม่จำเป็นต้องเขียนผลลัพธ์ทุกรูปแบบออกมาจริง ๆ ซึ่งสามารถทำได้ง่ายกว่ามากในกรณีที่จำนวนผลลัพธ์มีจำนวนมาก ๆ สังเกตว่าเราสามารถใส่รูปสามเหลี่ยมปาสคาลนี้เขียนสัดส่วนเงินเดิมพันของผู้เล่นเกมแรกได้เป็น

$$\sum_{i=2}^4 \binom{4}{i} \frac{1}{2^4} = \left(6 \times \frac{1}{2^4}\right) + \left(4 \times \frac{1}{2^4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2^4}\right) = \frac{11}{16}$$

สำหรับในกรณี N, a, b ทั่วไปแล้ว ผู้เล่นเกมแรกต้องการชนะอีก $N-a$ เกม และผู้เล่นคนที่สองต้องการชนะอีก $N-b$ เกม ดังนั้นถ้าหากให้ทั้งสองคนเล่นต่อไปอีก $M = (N-a) + (N-b) - 1$ เกม จะต้องมีผู้ที่ชนะครบ N เกมก่อนแน่นอน ถ้าเราสมมติให้มีการแข่งขันต่อไปอีก M เกม จำนวนผลลัพธ์ที่ผู้เล่นคนแรกจะชนะครบ N เกมก่อนคือ ผลรวมของจำนวนผลลัพธ์ที่ผู้เล่นคนแรกชนะตั้งแต่ $N-a$ เกมจนถึง M เกม ส่วนจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดจากการเล่นเกมต่อไปอีก M เกม คือ 2^M ดังนั้นสัดส่วนเงินเดิมพันของผู้เล่นเกมแรกจึงเท่ากับ

$$\sum_{i=N-a}^M \binom{M}{i} \frac{1}{2^M}$$

ปัญหาการแบ่งเงินเดิมพันนี้เป็นที่มาของการแจกแจงทวินาม การแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ คือ จำนวนในการทดลองที่เป็นอิสระต่อกันเป็น n และอัตราสำเร็จในแต่ละการทดลองเป็น p จะมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

โดยที่ X คือจำนวนครั้งของการทดลองที่สำเร็จในการทดลอง n ครั้งนั้น สำหรับปัญหาการแบ่งเงินเดิมพันนี้ จำนวนผลลัพธ์ที่ผู้เล่นคนแรกชนะในการแข่งต่ออีก M เกม มีการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ $n = M$ และ $p = \frac{1}{2}$ เราสามารถขยายโจทย์ปัญหานี้ให้ทั่วไปยิ่งขึ้น เช่นเปลี่ยนความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นแต่ละคนจะชนะในการแข่งแต่ละครั้ง หรือแม้กระทั่งพิจารณาในกรณีที่ผู้เล่นมากกว่าสองคนด้วย ซึ่งเป็นที่มาของตัวแปรสุ่มพหุนามในเวลาต่อมาอีกด้วย

4. สรุป

ปัญหาทั้งสองที่กอมโบดถามปาสกาลนั้นอาจจะดูไม่ยากสำหรับความรู้ในปัจจุบัน แต่ปัญหาทั้งสองนี้เองที่เป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็นอย่างจริงจัง และพัฒนามาเป็นทฤษฎีความน่าจะเป็นที่มีอยู่ในปัจจุบัน เราควรขอบคุณ กอมโบด ปาสกาล แฟร์มา และอีกหลายบุคคลที่เกี่ยวข้องที่ไม่ได้กล่าวถึง ที่ช่วยกันริเริ่มสร้างสรรค์และพัฒนาทฤษฎีที่สวยงามและมีคุณประโยชน์มากมายในปัจจุบัน

เอกสารอ้างอิง

- [1] Apostol, T. M. (1969). *Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability* (2nd ed.). New York, NY: John Wiley & Sons.
- [2] Burton, D. M. (1985). *The History of Mathematics: An Introduction* (7th ed.). New York, NY: McGraw-Hill.
- [3] Gorroochurn, P. (2011). Errors of Probability in Historical Context. *The American Statistician*, 65 (4), p. 246 - 254.
- [4] Gorroochurn, P. (2012). *Classic Problems of Probability*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- [5] Ore, O. (1960). Pascal and the Invention of Probability Theory. *The American Mathematical Monthly*, 67 (5), p. 409 - 419.



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน (2)

Evaluating Determinants by Jacobi's Method and

Dodgson's Condensation Method (2)

พิสมัย กิตติภูมิ^{1,*} และ ปาริชาติ ศรีรัตน์²

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 91011

Pisamai Kittipoom^{1,*} and Parichat Srirat²

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Prince of Songkla University,

Songkhla 90110

Email: ¹pisamai.k@psu.ac.th ²parichat74712@gmail.com

วันที่รับบทความ : 12 มิถุนายน 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 1 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 12 ธันวาคม 2562

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นบทความที่สอง และเป็นบทความสุดท้ายของการศึกษาวิธีหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์โดยใช้วิธีของยาโคบี และวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน โดยในบทความนี้มีการเปรียบเทียบพิสูจน์ของวิธีการทั้งสอง

คำสำคัญ: ตัวกำหนด โคแฟกเตอร์

* ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

This article is the second and final part of the study of Jacobi method and Dodgson's condensation method.

Keywords: Determinants, Cofactors

ในบทความตอนที่ 2 นี้ เราจะได้แนะนำเสนอวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนด 2 วิธี วิธีแรกได้มาจากทฤษฎีบทยาโคบี (Jacobi's theorem) วิธีที่สองคือการควบแน่นของดอดจ์สัน ซึ่งเป็นการลดขนาดของเมทริกซ์ลงทีละหนึ่ง โดยผ่านกระบวนการควบแน่น วิธีการควบแน่นของดอดจ์สันมีขั้นตอนการคำนวณที่ง่ายและไม่ซับซ้อน นอกจากนี้ที่มาและบทพิสูจน์ก็มีรายละเอียดที่น่าสนใจ ในบทความตอนที่ 1 เราได้นำเสนอว่า เบื้องหลังสำคัญของความสำเร็จของวิธีควบแน่นของดอดจ์สันมาจากทฤษฎีบทยาโคบี ดังนั้นในบทความตอนที่ 2 นี้ เราจะศึกษารายละเอียดการพิสูจน์ และเบื้องลึกเบื้องหลังของวิธีการหาตัวกำหนดทั้งสองวิธี

1. บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทยาโคบี

ในหัวข้อสุดท้ายของบทความตอนที่ 1 เราได้แสดงผ่านตัวอย่างของเมทริกซ์ขนาด 4×4 ว่าสูตรที่ได้จากทฤษฎีบทยาโคบีสามารถแจกแจงเป็นขั้นตอนในกระบวนการควบแน่นของดอดจ์สันได้ ในหัวข้อนี้ เราจึงต้องทำความเข้าใจทฤษฎีบทยาโคบีให้มากขึ้น โดยการศึกษาบทพิสูจน์และหาข้อสังเกตนี้ที่จะมีประโยชน์ในการพิสูจน์วิธีควบแน่นของดอดจ์สันต่อไป

ทฤษฎีบท 1.1 [4] (ทฤษฎีบทยาโคบี) ให้ $A = [a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ $n \geq 3$

ถ้า $[a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*]$ เป็นไมเนอร์ประกอบขนาด $(n-m) \times (n-m)$ โดยที่ $2 \leq m < n-1$ ของ A และ $[a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}]$ เป็นไมเนอร์สอดคล้องขนาด $m \times m$ ของเมทริกซ์ A' แล้ว

$$\det A \det [a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}] = (\det A)^m \cdot \det [a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*] \quad (1)$$

ถ้า $\det A \neq 0$ แล้ว

$$\det [a'_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}] = (\det A)^{m-1} \cdot \det [a_{k:k+n-m-1, k:k+n-m-1}^*] \quad (2)$$

บทพิสูจน์ [4] กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

และแอตจูเกตของ A คือ

$$A' = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} & C_{m+1,1} & \cdots & C_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} & C_{m+1,m} & \cdots & C_{n,m} \\ C_{1,m+1} & \cdots & C_{m,m+1} & C_{m+1,m+1} & \cdots & C_{n,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & \cdots & C_{m,n} & C_{m+1,n} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix}$$

สร้างเมทริกซ์ A'_I ขนาด $n \times n$ โดยมีสมาชิกในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ m เป็นสมาชิกในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ m ของเมทริกซ์ A' และสมาชิกในหลักที่ $m+1$ ถึงหลักที่ n เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกของเมทริกซ์ศูนย์และเมทริกซ์เอกลักษณ์ ดังแสดงต่อไปนี้

$$A'_I = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{1,m+1} & \cdots & C_{m,m+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & \cdots & C_{m,n} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

พิจารณาผลคูณของเมทริกซ์ A และ A'_I จะได้ว่า

$$AA'_I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sum_{j=1}^n a_{1,j} C_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1,j} C_{m,j} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{m,j} C_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{m,j} C_{m,j} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline \sum_{j=1}^n a_{m+1,j} C_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{m+1,j} C_{m,j} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} C_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{n,j} C_{m,j} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right]$$

จากสมบัติของโคแฟกเตอร์ของเมทริกซ์ $A=[a_{i,j}]$ ขนาด $n \times n$ จะได้ว่า

$$a_{i,1}C_{k,1} + a_{i,2}C_{k,2} + \cdots + a_{i,n}C_{k,n} = \begin{cases} \det A, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

เราพบว่าสมาชิกแนวทแยงในบล็อกซ้ายบนมีค่าเท่ากับ $\det A$ และสมาชิกอื่น ๆ ในบล็อกนี้มีค่าเป็นศูนย์ รวมถึงสมาชิกในบล็อกซ้ายล่างก็มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่นกัน

$$AA'_I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \det A & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right]$$

โดยใช้วิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ตามหลักที่ 1 กับเมทริกซ์ด้านซ้ายได้ว่า

$$\det(AA'_I) = (\det A)C_{1,1} + 0 + \cdots + 0$$

$$\text{โดยที่ } C_{1,1} = \det \left[\begin{array}{ccc|ccc} \det A & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right]_{(n-1) \times (n-1)}$$

ในทำนองเดียวกัน เราหาค่า $C_{1,1}$ โดยใช้การกระจายโคแฟกเตอร์ตามหลักที่ 1 ได้ว่า

$$\det(AA'_I) = \det A \det A \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \det A & \cdots & 0 & a_{3,m+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right)_{(n-2) \times (n-2)}$$

เนื่องจาก $\det(AA'_I) = \det A \det A'_I$ ดังนั้น เมื่อหาค่าตัวกำหนดถึงครั้งที่ m เราได้ว่า

$$\det A \det A'_I = (\det A)^m \det \begin{bmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

ถ้า $\det A \neq 0$ ได้ว่า

$$\det A'_I = (\det A)^{m-1} \det \begin{bmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ต่อมาหาค่า $\det A'_I$ ด้านซ้ายมือ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ของ A'_I ตามหลักที่ $m+1$ ได้ว่า

$$\det A'_I = 0 + 0 + \cdots + 0 + \det \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{1,m+2} & \cdots & C_{m,m+2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & \cdots & C_{m,n} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$= \det \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{1,m+3} & \cdots & C_{m,m+3} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & \cdots & C_{m,n} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}$$

$$= \det \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} \end{bmatrix}$$

$$= \det [a'_{(m+1):n, (m+1):n}]$$

ดังนั้น ในกรณีที่มีการตัดแถวและหลักที่ $m+1$ ถึง n ของเมทริกซ์ A และ A' เราจะว่า

$$\text{ไมเนอร์ประกอบ คือ } [a_{(m+1):n, (m+1):n}^*] = \begin{bmatrix} a_{m+1, m+1} & \cdots & a_{m+1, n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n, m+1} & \cdots & a_{n, n} \end{bmatrix}_{(n-m) \times (n-m)} \quad \text{และ}$$

$$\text{ไมเนอร์สอดคล้อง คือ } [a'_{(m+1):n, (m+1):n}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,m} & \cdots & C_{m,m} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$\text{โดยที่ } \det[a_{(m+1):n, (m+1):n}^*] = \det \begin{bmatrix} a_{m+1, m+1} & \cdots & a_{m+1, n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n, m+1} & \cdots & a_{n, n} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \det A'_i = \det [a'_{(m+1):n, (m+1):n}]$$

เมื่อแทนทั้งหมดในสมการ (3) จะได้ว่า เราได้พิสูจน์สมการ (1) ของยาโคบีเป็นที่เรียบร้อยแล้ว $\square$

หมายเหตุ ในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทยาโคบี มีการตัดแถวและหลักที่ $m+1$ ถึง n ที่สมมาตรของเมทริกซ์ A และ A' ซึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันว่า การเลือกตัดแถวและหลักใด ๆ ก็ยังได้ว่าสมการ (1) และ (2) ในทฤษฎีบทของยาโคบีเป็นจริง

ข้อสังเกต 1.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และให้ $A_{i:k, j:l}$ เป็นเมทริกซ์ย่อยของ A ที่ประกอบด้วยแถว $i, i+1, \dots, k$ และหลัก $j, j+1, \dots, l$ ของ A โดยที่ $k, l = 1, 2, 3, \dots, n$

พิจารณาเมทริกซ์ย่อยขนาด 3×3 ของ A

$$A_{i:i+2, j:j+2} = \begin{bmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} & a_{i,j+2} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j+2} \\ a_{i+2,j} & a_{i+2,j+1} & a_{i+2,j+2} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีของยาโคบี เราเลือกตัดแถวและหลักที่ 2 เพียงแถวและหลักเดียว นั่นคือ $m=3-1=2$ ทำให้ได้ไมเนอร์ประกอบของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+2, j:j+2}$ คือ $[a_{i,j}^*] = a_{i+1,j+1}$ และไมเนอร์สอดคล้องของ

$A_{i:i+2, j:j+2}$ คือ $[a'_{i+1, j+1}] = \begin{bmatrix} C'_{i,j} & C'_{i+2,j} \\ C'_{i+2,j} & C'_{i+2,j+2} \end{bmatrix}$ โดยที่ $C'_{k,l}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $A_{i:i+2, j:j+2}$ จากสูตรของยาโคบี ได้ว่า

$$|A_{i:i+2, j:j+2}| = \frac{1}{a_{i+1, j+1}} \begin{vmatrix} (-1)^{i+j} |A_{i+1:i+2, j+1:j+2}| & (-1)^{i+j+2} |A_{i:i+1, j+1:j+2}| \\ (-1)^{i+j+2} |A_{i+1:i+2, j:j+1}| & (-1)^{i+j+4} |A_{i:i+1, j:j+1}| \end{vmatrix}$$

จากสมบัติของตัวกำหนดเราได้ว่า

$$|A_{i+2,j,j+2}| = \frac{1}{a_{i+1,j+1}} \left| \begin{array}{cc} |A_{i+1,j,j+1}| & |A_{i+1,j+1,j+2}| \\ |A_{i+1+2,j,j+1}| & |A_{i+1+2,j+1,j+2}| \end{array} \right| \quad (4)$$

ในทำนองเดียวกัน ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ สำหรับเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+n-k,j:j+n-k}$ ขนาด $(n-k+1) \times (n-k+1)$ ของ A เมื่อ $k=1, 2, 3, \dots, n-1$

$$A_{i:i+n-k,j:j+n-k} = \begin{bmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,j+n-k} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,j+n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+n-k,j} & a_{i+n-k,j+1} & \cdots & a_{i+n-k,j+n-k} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีของยาโคบี เราตัดแถวที่ $i+1$ ถึง $i+n-k-1$ และหลักที่ $j+1$ ถึง $j+n-k-1$ จำนวน $n-k-1$ แถว (หลัก) เราได้ว่า $m=n-k+1-(n-k-1)=2$ และไมเนอร์ประกอบของ $A_{i:i+n-k,j:j+n-k}$ คือ

$$[a_{i+1:i+n-k-1,j+1:j+n-k-1}^*] = \begin{bmatrix} a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,j+n-k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+n-k-1,j+1} & \cdots & a_{i+n-k-1,j+n-k-1} \end{bmatrix} = A_{i+1:i+n-k-1,j+1:j+n-k-1}$$

และไมเนอร์สอดคล้องของ $A_{i:i+n-k,j:j+n-k}$ คือ

$$[a'_{i+1:i+n-k-1,j+1:j+n-k-1}] = \begin{bmatrix} C'_{i,j} & C'_{i+n-k,j} \\ C'_{i,j+n-k} & C'_{i+n-k,j+n-k} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C'_{i,m}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $A_{i+1:i+n-k,j+1:j+n-k}$ จากสูตร (1) ของยาโคบี และจากสมบัติของตัวกำหนด เราได้ว่า

$$|A_{i:i+n-k,j:j+n-k}| = \frac{1}{|A_{i+1:i+n-k-1,j+1:j+n-k-1}|} \left| \begin{array}{cc} |A_{i+1:i+n-k-1,j:j+n-k-1}| & |A_{i+1:i+n-k-1,j+1:j+n-k}| \\ |A_{i+1:i+n-k,j:j+n-k-1}| & |A_{i+1:i+n-k,j+1:j+n-k}| \end{array} \right| \quad (5)$$

2. บทพิสูจน์ของวิธีควบนั่นของดอดจ์สัน

ในบทความตอนที่ 1 เราได้แสดงขั้นตอนและตัวอย่างการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีควบนั่นของดอดจ์สัน เพื่อเป็นการทบทวนวิธีการดังกล่าว ในตัวอย่างต่อไปนี้ เราแสดงขั้นตอนการควบนั่นของดอดจ์สัน สำหรับเมทริกซ์ขนาด 5×5 ใด ๆ นอกจากนี้ เราพบข้อสังเกตที่สำคัญซึ่งจะมีประโยชน์ในการพิสูจน์วิธีควบนั่นของดอดจ์สันสำหรับเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ใด ๆ

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณาเมทริกซ์ขนาด 5×5

$$A = A^{(5)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีควบแน่น เราคำนวณเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(4)}$ ได้ดังนี้

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} |A_{1:2,1:2}| & |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,3:4}| & |A_{1:2,4:5}| \\ |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \\ |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \\ |A_{4:5,1:2}| & |A_{4:5,2:3}| & |A_{4:5,3:4}| & |A_{4:5,4:5}| \end{bmatrix}$$

จากนั้นคำนวณเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(3)}$ โดยการควบแน่น $A^{(4)}$ และหารเมทริกซ์ที่ได้ด้วยสมาชิกใน

$$\text{int } A^{(5)} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \text{ ดังนี้}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{1:2,1:2}| & |A_{1:2,2:3}| \\ \hline |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,3:4}| \\ \hline |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,4:5}| \\ \hline |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \\ \hline \end{array} \\ \hline a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| \\ \hline |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ \hline |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \\ \hline |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \\ \hline \end{array} \\ \hline a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| \\ \hline |A_{4:5,1:2}| & |A_{4:5,2:3}| \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \\ \hline |A_{4:5,2:3}| & |A_{4:5,3:4}| \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \\ \hline |A_{4:5,3:4}| & |A_{4:5,4:5}| \\ \hline \end{array} \\ \hline a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

จากสมการ (4) ในข้อสังเกต 1.1 เราได้ว่าสมาชิกใน $A^{(3)}$ คือตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 3×3 ของเมทริกซ์ $A = A^{(5)}$ ดังนี้

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}| & |A_{3:5,3:5}| \end{bmatrix} \quad (6)$$

ต่อมาทำการควบแน่น $A^{(3)}$ และหารด้วยสมาชิกใน $\text{int } A^{(4)} = \begin{bmatrix} |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \end{bmatrix}$ ได้เป็นเมทริกซ์

ควบแน่น

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \end{bmatrix} \\ |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ \begin{bmatrix} |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}| \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \\ |A_{3:5,2:4}| & |A_{3:5,3:5}| \end{bmatrix} \\ |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \end{bmatrix}$$

จากสมการ (5) ในข้อสังเกต 1.1 เมื่อ $n=5, k=2$ เราได้ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+3, j:j+3}$ ขนาด 4×4 ของเมทริกซ์ A ดังนี้

$$|A_{i:i+3, j:j+3}| = \frac{1}{|A_{i+1:i+2, j+1:j+2}|} \begin{vmatrix} |A_{i:i+2, j:j+2}| & |A_{i:i+2, j+1:j+3}| \\ |A_{i+1:i+3, j:j+2}| & |A_{i+1:i+3, j+1:j+3}| \end{vmatrix}$$

แทน $i, j=1$ ได้ว่า

$$|A_{1:4,1:4}| = \frac{1}{|A_{2:3,2:3}|} \begin{vmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \end{vmatrix}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับแถวและหลักที่ 1 ของ $A^{(2)}$

แทน $i=1, j=2$ ได้ว่า

$$|A_{1:4,2:5}| = \frac{1}{|A_{2:3,3:4}|} \begin{vmatrix} |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \end{vmatrix}$$

มีค่าเท่ากับแถวที่ 1 และหลักที่ 2 ของ $A^{(2)}$

ในการทำงานเดียวกัน เมื่อแทน $i=2, j=1$ และแทน $i, j=2$ เราได้ $|A_{2:5,1:4}|$ และ $|A_{2:5,2:5}|$ เป็นสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 และสมาชิกในแถวและหลักที่ 2 ของ $A^{(2)}$ ตามลำดับ ดังนั้น เราได้ว่าสมาชิกใน $A^{(2)}$ คือตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 4×4 ทั้งหมดของเมทริกซ์ A ดังนี้

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}| \end{bmatrix}$$

ก่อนที่จะแสดงขั้นตอนการควบแน่นครั้งสุดท้าย เราได้ข้อสังเกตจากการควบแน่นครั้งที่ 2 ซึ่งได้เมทริกซ์ควบแน่น $A^{(3)}$ เราพบว่าสมาชิกทุกตัวใน $A^{(3)}$ ในสมการ (6) เป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 3×3 ทั้งหมดของ A และในกระบวนการควบแน่นครั้งที่ 3 ซึ่งทำให้ได้เมทริกซ์ควบแน่น $A^{(2)}$ ที่เราพบว่าสมาชิกทุกตัวใน $A^{(2)}$ เป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 4×4 ทั้งหมดของ A

ดังนั้น ในการควบแน่นครั้งสุดท้าย ซึ่งคือการควบแน่น $A^{(2)}$ และหารค่าที่ได้ด้วย $\text{int } A^{(3)} = |A_{2:4,2:4}|$ ก็สามารถคาดเดาได้ว่าค่าที่ได้จะเป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ A ขนาด 5×5 นั่นเอง และนี่จึงกลายเป็นข้อสรุปของวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงการพิสูจน์วิธีควบแน่นของดอดจ์สันสำหรับเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.1 [3] (วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน) สำหรับเมทริกซ์ $A = A^{(n)}$ ขนาด $n \times n$ ที่ผ่านกระบวนการควบแน่น k ครั้ง ได้เป็นเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(n-k)} = [a_{i,j}^{(n-k)}]$ ขนาด $(n-k) \times (n-k)$ โดยที่ $k=1, 2, 3, \dots, n-1$ แล้วได้ว่าสมาชิก $a_{i,j}^{(n-k)}$ ทุกตำแหน่งใน $A^{(n-k)}$ คือค่าของตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+k, j:j+k}$ ที่มีขนาด $(k+1) \times (k+1)$ ทั้งหมดของ A ดังนี้

$$a_{i:i+k, j:j+k}^{(n-k)} = |A_{i:i+k, j:j+k}| \quad (7)$$

โดยที่ $i, j=1, 2, 3, \dots, n-k$ นั่นคือ

$$A^{(n-k)} = \begin{bmatrix} |A_{1:k+1,1:k+1}| & |A_{1:k+1,2:k+2}| & \cdots & |A_{1:k+1,n-k:n}| \\ |A_{2:k+2,1:k+1}| & |A_{2:k+2,2:k+2}| & \cdots & |A_{2:k+2,n-k:n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_{n-k:n,1:k+1}| & |A_{n-k:n,2:k+2}| & \cdots & |A_{n-k:n,n-k:n}| \end{bmatrix}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจากในกระบวนการควบนั่นต้องมีการหารสมาชิกของเมทริกซ์ควบนั่น $A^{(n-k)}$ ด้วยสมาชิกในเมทริกซ์ภายใน $\text{int } A^{(n-(k-2))}$ ดังนั้นในการพิสูจน์นี้เราสมมติให้สมาชิกทุกตัวของ $\text{int } A^{(n-(k-2))}$ ไม่เป็นศูนย์ และเราจะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

เมื่อ $k=1$ คือการควบนั่นครั้งแรก ซึ่งได้เมทริกซ์ควบนั่น $A^{(n-1)}$ ที่มีสมาชิกทุกตำแหน่งเป็นค่าของตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

ในการควบนั่นครั้งต่อ ๆ ไป คือ $k=2, 3, \dots, n-1$ สมมติให้สมาชิกของเมทริกซ์ควบนั่น $A^{(n-k)}$ ครั้งที่ k คือ

$$a_{i,j}^{(n-k)} = |A_{i:i+k, j:j+k}| \quad (8)$$

โดยที่ $i, j=1, 2, 3, \dots, n-k$

ต่อมาในการควบนั่นครั้งที่ $k+1$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ควบนั่น $A^{(n-(k+1))} = [a_{i,j}^{(n-(k+1))}]$ โดยที่ $i, j=1, 2, 3, \dots, n-(k+1)$ และสมาชิก $a_{i,j}^{(n-(k+1))}$ ได้จากการควบนั่น $A^{(n-k)} = [a_{i,j}^{(n-k)}]$ และหารด้วยสมาชิกใน $\text{int } A^{(n-(k-1))}$ ดังนี้

$$a_{i,j}^{(n-(k+1))} = \frac{a_{i,j}^{(n-k)} a_{i+1,j+1}^{(n-k)} - a_{i,j+1}^{(n-k)} a_{i+1,j}^{(n-k)}}{a_{i+1,j+1}^{(n-(k-1))}}$$

จาก (8) ได้ว่า

$$a_{i,j}^{(n-(k+1))} = \frac{|A_{i:i+k, j:j+k}| |A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}| - |A_{i:i+k, j+1:j+k+1}| |A_{i+1:i+k+1, j:j+k}|}{|A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}|} \quad (9)$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราต้องแสดงว่า $a_{i,j}^{(n-(k+1))}$ มีค่าเท่ากับ $|A_{i:i+k+1, j:j+k+1}|$ โดยที่ $A_{i:i+k+1, j:j+k+1}$ เป็นเมทริกซ์ย่อยขนาด $(k+2) \times (k+2)$ ของ A

$$\text{เนื่องจาก } A_{i:i+k+1, j:j+k+1} = \begin{bmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,j+k+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,j+k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+k+1,j} & a_{i+k+1,j+1} & \cdots & a_{i+k+1,j+k+1} \end{bmatrix} \quad \text{โดยวิธีของยาโคบี เราเลือกตัด}$$

แถวที่ $i+1$ ถึง $i+k$ และหลักที่ $j+1$ ถึง $j+k$ จำนวน k แถว k หลักของ $A_{i:i+k+1, j:j+k+1}$ ทำให้ได้ $m=2$ และมีไมเนอร์ประกอบของเมทริกซ์ย่อย $A_{i:i+k+1, j:j+k+1}$ คือ $[a_{i+1:i+k, j+1:j+k}^*] =$

$$\begin{bmatrix} a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,j+k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+k,j+1} & \cdots & a_{i+k,j+k} \end{bmatrix} = A_{i+1:i+k, j+1:j+k} \quad \text{และไมเนอร์สอดคล้องของ } A_{i:i+k+1, j:j+k+1} \quad \text{คือ}$$

$[a'_{i+1:i+k, j+1:j+k}] = \begin{bmatrix} C'_{i,j} & C'_{i+k+1,j} \\ C'_{i,j+k+1} & C'_{i+k+1,j+k+1} \end{bmatrix}$ โดยที่ $C'_{l,m}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}$ และ

จากสูตร (1) ของยาโคบี ได้ว่า

$$|A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}| = \frac{1}{|A_{i+1:i+k, j+1:j+k}|} \begin{bmatrix} C'_{i,j} & C'_{i+k+1,j} \\ C'_{i,j+k+1} & C'_{i+k+1,j+k+1} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} C'_{i,j} &= (-1)^{i+j} |A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}| \\ C'_{i+k+1,j} &= (-1)^{i+j+k+1} |A_{i+1:i+k, j+1:j+k+1}| \\ C'_{i,j+k+1} &= (-1)^{i+j+k+1} |A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k}| \\ C'_{i+k+1,j+k+1} &= (-1)^{i+j+2k+2} |A_{i+1:i+k, j+1:j+k}| \end{aligned}$$

ดังนั้น ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย $A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}$ ขนาด $(k+2) \times (k+2)$ ของ A คือ

$$|A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}| = \frac{|A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}| |A_{i+1:i+k, j+1:j+k}| - |A_{i+1:i+k, j+1:j+k+1}| |A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k}|}{|A_{i+1:i+k, j+1:j+k}|} \quad (10)$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $a_{i,j}^{(n-(k+1))}$ ในสมการ (9) โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราพิสูจน์สมการ (7)

ในขั้นสุดท้ายของวิธีการควบนั่น เมื่อ $k=n-1$ เราจึงสรุปได้ว่า เมทริกซ์ควบนั่นในครั้งสุดท้าย $A^{(1)}$ เท่ากับค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ $\square$

ในช่วงท้ายของการพิสูจน์วิธีควบนั่นของดอดจ์สัน มีการใช้ทฤษฎีบทยาโคบีเพื่อหาค่า $|A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}|$ และแสดงว่าค่าที่ได้เท่ากับ $a_{i,j}^{(n-(k+1))}$ ซึ่งเป็นสมาชิกในเมทริกซ์ควบนั่น $A^{(n-(k+1))}$ วิธีหาค่า $|A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}|$ เริ่มจากการตัดแถวที่ $i+1$ ถึง $i+k$ และหลักที่ $j+1$ ถึง $j+k$ ของ $A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}$ จำนวน k แถว k หลัก ซึ่งในวิธีของยาโคบินั้น เราสามารถเลือกตัดแถวและหลักอื่น ๆ ของ $A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}$ ที่ทำให้สามารถหา $|A_{i+1:i+k+1, j+1:j+k+1}|$ ได้เช่นกัน ซึ่งข้อสังเกตนี้จะช่วยให้เราแก้ปัญหาและข้อบกพร่องบางกรณีของวิธีควบนั่นของดอดจ์สันซึ่งจะแสดงรายละเอียดในหัวข้อต่อไป

3. ปัญหาที่พบในวิธีควบนั่นของดอดจ์สันและวิธีแก้ไข

ปัญหาสำคัญหนึ่งที่พบในวิธีควบนั่นของดอดจ์สันคือเมื่อมีสมาชิกบางตัวของเมทริกซ์ภายใน $\text{int } A$ เป็นศูนย์ ซึ่งเราได้แสดงวิธีแก้ไขปัญหานี้ผ่านตัวอย่างในบทความตอนที่ 1 มาแล้ว แต่ในกรณีที่

สมาชิกทุกตัวใน $\text{int } A$ ไม่เท่ากับศูนย์ก็อาจทำให้เกิดปัญหาในกระบวนการควบนั่นได้ ถ้าหลังจากการควบนั่นครั้งที่ k แล้วเกิดมีสมาชิกบางตัวใน $\text{int } A^{(n-k)}$ มีค่าเป็นศูนย์

การแก้ปัญหาดังกล่าว เราใช้ความสัมพันธ์ (7) ในทฤษฎีบท 2.1 โดยสมมติให้ในการควบนั่นครั้งที่ $k^* \in \{0, 1, 2, \dots, n-4\}$ ได้เมทริกซ์ควบนั่น $A^{(n-k^*)} = [a_{i,j}^{(n-k^*)}]$ ซึ่ง $\text{int } A^{(n-k^*)}$ มีสมาชิกในตำแหน่ง $i^*, j^* \in \{2, 3, 4, \dots, n-(k^*+1)\}$ เป็นศูนย์ นั่นคือ $a_{i^*,j^*}^{(n-k^*)} = 0$ และจากเหตุนี้ส่งผลให้เกิดปัญหาขึ้นในการควบนั่นครั้งที่ k^*+2 โดยเฉพาะกับสมาชิก $a_{i^*-1,j^*-1}^{(n-(k^*+2))}$ ของเมทริกซ์ควบนั่น $A^{(n-(k^*+2))}$ ที่ต้องถูกหารด้วย $a_{i^*,j^*}^{(n-k^*)}$ อย่างไรก็ตาม สำหรับสมาชิก $A^{(n-(k^*+2))}$ ในตำแหน่งที่ไม่มีปัญหา คือ $i \neq i^*-1, j \neq j^*-1$ นั้น เราสามารถคำนวณโดยใช้กระบวนการควบนั่นปกติ แต่ในตำแหน่ง i^*-1 และ j^*-1 ที่มีปัญหา เราสามารถคำนวณค่าผ่านสมการ (7) ได้ดังนี้

$$a_{i^*-1,j^*-1}^{(n-(k^*+2))} = \left| A_{i^*-1:i^*-1+(k^*+2), j^*-1:j^*-1+(k^*+2)} \right| \quad (11)$$

โดยใช้วิธีของยาโคบี เราต้องเลือกตัดแถวและหลักของเมทริกซ์ย่อย $A_{i^*-1:i^*+k^*+1, j^*-1:j^*+k^*+1}$ ที่ทำให้สามารถคำนวณค่าตัวกำหนดใน (11) ได้ จากนั้นแทนค่าสมาชิกตำแหน่งที่มีปัญหากลับในเมทริกซ์ควบนั่น และดำเนินการควบนั่นต่อไปจนได้ค่าตัวกำหนดของ A

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณา $A = A^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งมี $\text{int } A^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

โดยการควบนั่นครั้งที่ 1 ได้ว่า $A^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & \mathbf{0} & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ และ $\text{int } A^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า

มีสมาชิกในแถวและหลักที่ 1 ของ $\text{int } A^{(4)}$ เป็นศูนย์ ซึ่งส่งผลให้การควบนั่นในครั้งที่ 3 ไม่สามารถหาค่าสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ควบนั่น $A^{(2)}$ โดยใช้วิธีควบนั่นแบบเดิมได้ อย่างไรก็ตาม ไม่มีปัญหาในการควบนั่นครั้งที่ 2 เรายังดำเนินการควบนั่นเมทริกซ์ $A^{(4)}$ ได้ดังนี้

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

ในการควบนั่นครั้งที่ 3 เราได้

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} ? & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

เราพบปัญหาเฉพาะในแถวและหลักที่ 1 โดยใช้ความสัมพันธ์ (10) เมื่อ $n=5, k^*=1$ และ $i^*, j^*=0$ เราสามารถคำนวณค่า $a_{1,1}^{(2)}$ ซึ่งเป็นสมาชิกในตำแหน่งที่มีปัญหาของ $A^{(2)}$ ได้ดังนี้

$$a_{1,1}^{(2)} = |A_{1:4,1:4}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

โดยวิธีของยาโคบี เราเลือกตัดแถวและหลักที่ไม่สร้างปัญหา คือตัดแถวและหลักที่ 1 และ 2 ของ

$$A_{1:4,1:4} \text{ เราได้ไมเนอร์ประกอบคือ } [a_{i,j}^*] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ และไมเนอร์สอดคล้อง } [a'_{i,j}] = \begin{bmatrix} C'_{3,3} & C'_{4,3} \\ C'_{3,4} & C'_{4,4} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $C'_{j,i}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $A_{1:4,1:4}$ และจากสูตร (1) ของยาโคบี ได้ว่า

$$|A_{1:4,1:4}| = \frac{\begin{vmatrix} C'_{3,3} & C'_{4,3} \\ C'_{3,4} & C'_{4,4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \frac{6 \cdot -2}{3 \cdot -1} = 0$$

นั่นคือ

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

ในการควบนั่นครั้งสุดท้ายของ $A^{(2)}$ และหารด้วย $\text{int } A^{(3)} = 3$ เราได้ $\det A = \frac{6}{3} = 2$ เป็นค่าของ

ตัวกำหนดที่ถูกต้องของ A

การที่เราสามารถแก้ปัญหาคณิตที่มีสมาชิกบางตำแหน่งใน $\text{int } A^{(n-k)}$ เป็นศูนย์ สำหรับ $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-4\}$ โดยใช้สมการ (11) อาจสร้างความสงสัยให้ผู้อ่าน เนื่องจากสมการ (11) อ้างอิงถึงทฤษฎีบท 2.1 ซึ่งมีการกำหนดให้สมาชิกใน $\text{int } A$ และ $\text{int } A^{(n-k)}$ ต้องไม่เป็นศูนย์

ในตัวอย่างการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 5×5 ใด ๆ ต่อไปนี้ เราขอย้อนไปใช้วิธีของยาโคบี โดยในการคำนวณตัวกำหนดของทุกเมทริกซ์ในสูตร (2) ของยาโคบี เรายึดหลักเกณฑ์การตัดแถวและหลักที่บรรจุเมทริกซ์ภายในของเมทริกซ์นั้น ๆ ซึ่งหลักเกณฑ์นี้เองทำให้เราสามารถแจกแจงเป็นวิธีควบนั่นของดอดจ์สันได้ ในกรณีที่วิธีของดอดจ์สันมีปัญหาจากการมีสมาชิกบางตำแหน่งใน $\text{int } A^{(n-k)}$ เป็นศูนย์สำหรับ $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-4\}$ เราจะชี้ให้เห็นว่าเหตุใดเราจึงสามารถใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (11) ได้

ตัวอย่าง 3.2 ให้ A คือเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix}$$

จากวิธีของยาโคบี โดยการตัดแถวและหลักที่บรรจุ $\text{int } A$ เราได้ว่าไมเนอร์ประกอบ

$$[a_{2:4,2:4}^*] = \text{int } A = A_{2:4,2:4} \quad \text{และไมเนอร์สอดคล้อง} \quad [a'_{2:4,2:4}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{5,1} \\ C_{1,5} & C_{5,5} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } C_{i,j} \text{ คือ โคแฟกเตอร์ของ } A \text{ โดยสูตร (1) ของยาโคบี เราได้}$$

$$\det A = \frac{1}{|\text{int } A|} \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{5,1} \\ C_{1,5} & C_{5,5} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A_{2:4,2:4}|} \begin{vmatrix} C_{5,5} & C_{5,1} \\ C_{1,5} & C_{1,1} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A_{2:4,2:4}|} \begin{vmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}| \end{vmatrix} \quad (12)$$

ในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย $A_{1:4,1:4}$, $A_{1:4,2:5}$, $A_{2:5,1:4}$ และ $A_{2:5,2:5}$ เราใช้วิธีของยาโคบี โดยตัดแถวและหลักที่บรรจุเมทริกซ์ภายในของแต่ละเมทริกซ์ย่อย ดังที่แสดงมาแล้วในข้อสังเกต 1.1 สมการ (5) เมื่อแทน $n=5$, $k=2$ เราได้

$$\begin{vmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}| \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} |A_{1:3,1:3}| & |A_{1:3,2:4}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |A_{1:3,2:4}| & |A_{1:3,3:5}| \\ |A_{2:4,2:4}| & |A_{2:4,3:5}| \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| \\ |A_{2:4,1:3}| & |A_{2:4,2:4}| \\ |A_{3:5,1:3}| & |A_{3:5,2:4}| \\ |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| \end{vmatrix}}$$

ซึ่งพบว่าสมาชิกในตัวกำหนดของสมการข้างบนคือสมาชิกในเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(2)}$ ในวิธีของดอดจ์สัน และจากสมการ (5) ในข้อสังเกต 1.1 เราได้ว่าสมาชิกใน $A^{(2)}$ เขียนได้เป็น

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} A_{1:3,1:3} & A_{1:3,2:4} \\ \hline A_{2:4,1:3} & A_{2:4,2:4} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} A_{1:3,2:4} & A_{1:3,3:5} \\ \hline A_{2:4,2:4} & A_{2:4,3:5} \end{array} \right] \\ \hline A_{2:3,2:3} & A_{2:3,3:4} \\ \hline \left[\begin{array}{c|c} A_{2:4,1:3} & A_{2:4,2:4} \\ \hline A_{3:5,1:3} & A_{3:5,2:4} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} A_{2:4,2:4} & A_{2:4,3:5} \\ \hline A_{3:5,2:4} & A_{3:5,3:5} \end{array} \right] \\ \hline A_{3:4,2:3} & A_{3:4,3:4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1:4,1:4} & A_{1:4,2:5} \\ \hline A_{2:5,1:4} & A_{2:5,2:5} \end{bmatrix}$$

และเมื่อพิจารณาสมาชิกใน $A^{(2)}$ พบว่าได้มาจากการควบแน่นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} A_{1:3,1:3} & A_{1:3,2:4} & A_{1:3,3:5} \\ A_{2:4,1:3} & A_{2:4,2:4} & A_{2:4,3:5} \\ A_{3:5,1:3} & A_{3:5,2:4} & A_{3:5,3:5} \end{bmatrix}$$

และหารด้วยสมาชิกใน $\begin{bmatrix} A_{2:3,2:3} & A_{2:3,3:4} \\ A_{3:4,2:3} & A_{3:4,3:4} \end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน และเราพบว่าเมทริกซ์ขนาด 3×3

นี้คือเมทริกซ์ควบแน่น $A^{(3)}$ ในวิธีของดอดจ์สันนั่นเอง

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} A_{1:3,1:3} & A_{1:3,2:4} & A_{1:3,3:5} \\ A_{2:4,1:3} & A_{2:4,2:4} & A_{2:4,3:5} \\ A_{3:5,1:3} & A_{3:5,2:4} & A_{3:5,3:5} \end{bmatrix}$$

ในการคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 3×3 ซึ่งเป็นสมาชิกใน $A^{(3)}$ โดยการตัดแถวและหลักที่บรรจุเมทริกซ์ภายในของแต่ละเมทริกซ์ย่อย ดังที่แสดงมาแล้วในสมการ (4) ในข้อสังเกต 1.1 เราได้

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline A_{1:2,1:2} & A_{1:2,2:3} \\ \hline A_{2:3,1:2} & A_{2:3,2:3} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline A_{1:2,2:3} & A_{1:2,3:4} \\ \hline A_{2:3,2:3} & A_{2:3,3:4} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline A_{1:2,2:3} & A_{1:2,4:5} \\ \hline A_{2:3,3:4} & A_{2:3,4:5} \\ \hline \end{array} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A_{2:3,1:2} & A_{2:3,2:3} \\ \hline A_{3:4,1:2} & A_{3:4,2:3} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline A_{2:3,2:3} & A_{2:3,3:4} \\ \hline A_{3:4,2:3} & A_{3:4,3:4} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline A_{2:3,3:4} & A_{2:3,4:5} \\ \hline A_{3:4,3:4} & A_{3:4,4:5} \\ \hline \end{array} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A_{3:4,1:2} & A_{3:4,2:3} \\ \hline A_{4:5,1:2} & A_{4:5,2:3} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline A_{3:4,2:3} & A_{3:4,3:4} \\ \hline A_{4:5,2:3} & A_{4:5,3:4} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline A_{3:4,3:4} & A_{3:4,4:5} \\ \hline A_{4:5,3:4} & A_{4:5,4:5} \\ \hline \end{array} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

ซึ่งพบว่าสมาชิกใน $A^{(3)}$ ก็ได้มาจากการควบนแน่นเมทริกซ์ $A^{(4)}$ และหารด้วย $\text{int } A = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$

โดยที่ $A^{(4)}$ คือ

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} |A_{1:2,1:2}| & |A_{1:2,2:3}| & |A_{1:2,3:4}| & |A_{1:2,4:5}| \\ |A_{2:3,1:2}| & |A_{2:3,2:3}| & |A_{2:3,3:4}| & |A_{2:3,4:5}| \\ |A_{3:4,1:2}| & |A_{3:4,2:3}| & |A_{3:4,3:4}| & |A_{3:4,4:5}| \\ |A_{4:5,1:2}| & |A_{4:5,2:3}| & |A_{4:5,3:4}| & |A_{4:5,4:5}| \end{bmatrix}$$

และอีกครั้ง สมาชิกใน $A^{(4)}$ เกิดจากการควบนแน่นเมทริกซ์เริ่มต้น A นั้นเอง

จากที่แสดงมาทั้งหมด เราเห็นอีกครั้งว่าวิธีควบนแน่นของดอดจ์สันคือการดำเนินการย้อนกลับของขั้นตอนต่าง ๆ ที่ได้จากสมการ (12) ด้วยวิธีของยาโคบี ดังนั้นถ้าเราใช้วิธีควบนแน่นของดอดจ์สันในการหาค่าตัวกำหนดของ A และพบว่าสมาชิกบางตำแหน่งใน $\text{int } A^{(4)}$ (หรือ $\text{int } A$) เท่ากับศูนย์ สมมติคือ $|A_{3:4,3:4}| = 0$ เราพบว่า กระบวนการควบนแน่นของดอดจ์สันยังคงดำเนินการต่อไปได้

เพียงแต่ในขั้นตอนการหา $A^{(2)} = \begin{bmatrix} |A_{1:4,1:4}| & |A_{1:4,2:5}| \\ |A_{2:5,1:4}| & |A_{2:5,2:5}| \end{bmatrix}$ ต้องมีการปรับวิธีหาตัวกำหนด $|A_{2:5,2:5}|$

โดยไม่ใช้การตัดแถวและหลักแบบเดิมที่บรรจุ $\text{int } A_{2:5,2:5}$ ซึ่งวิธีแก้ปัญหานี้สามารถใช้ได้สำหรับเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ $n \geq 4$

อย่างไรก็ตาม ในการควบนั่นครั้งสุดท้าย

$$\det A = \frac{1}{\text{int } A^{(3)}} \begin{vmatrix} A_{1:4,1:4} & A_{1:4,2:5} \\ A_{2:5,1:4} & A_{2:5,2:5} \end{vmatrix}$$

สำหรับเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ ใด ๆ ที่ $n \geq 3$ ก็สามารถแสดงได้ในการทำงานเดียวกันว่า

$$\det A = \frac{1}{\text{int } A^{(3)}} \begin{vmatrix} A_{1:(n-1),1:(n-1)} & A_{1:(n-1),2:n} \\ A_{2:n,1:(n-1)} & A_{2:n,2:n} \end{vmatrix}$$

เราเห็นว่าในขั้นสุดท้ายนี้มีการหารด้วย $\text{int } A^{(3)}$ และถ้า $\text{int } A^{(3)} = 0$ เราจะไม่สามารถหาค่าตัวกำหนดได้โดยวิธีควบนั่นของดอดจ์สัน และการควบนั่นที่ได้ดำเนินการมาก่อนหน้านี้จะไม่เกิดประโยชน์ใด ๆ อย่างไรก็ตาม เราสามารถตรวจสอบว่าเมื่อควบนั่นเมทริกซ์ A แล้วจะมีโอกาสที่ $\text{int } A^{(3)} = 0$ หรือไม่ โดยใช้ความสัมพันธ์จากสมการ (6) และ (10) ได้ว่า

$$\text{int } A^{(3)} = a_{2,2}^{(3)} = |A_{2:(n-1),2:(n-1)}| = |\text{int } A|$$

ดังนั้น ก่อนที่จะใช้การควบนั่นของดอดจ์สันเพื่อหาค่าตัวกำหนด เราต้องตรวจสอบเสมอว่า $|\text{int } A| \neq 0$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณา $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เราพบว่าไม่มีศูนย์ใน $\text{int } A$ เมื่อทำการควบนั่นเมทริกซ์ A เราได้

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งไม่พบศูนย์ใน $\text{int } A^{(4)}$ และเราทำการควบนั่น $A^{(4)}$ ได้ว่า

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{-1} & \frac{-4}{2} & \frac{-1}{-1} \\ \frac{6}{2} & \frac{0}{-1} & \frac{2}{1} \\ \frac{-2}{1} & \frac{4}{-2} & \frac{3}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ในขั้นนี้เอง เราพบศูนย์ใน $\text{int } A^{(3)}$ นั่นหมายความว่า การควบนั่นที่เราทำมาก่อนหน้านั้นไม่สามารถใช้หาค่าตัวกำหนดของ A ได้ ดังนั้น ก่อนการใช้วิธีควบนั่นของดอดจ์สัน เพื่อหาค่าตัวกำหนด เราควรตรวจสอบเสมอว่า ค่าตัวกำหนด $|\text{int } A| \neq 0$ ถึงแม้ว่าเราจะไม่พบศูนย์ใน $\text{int } A$ หรือ $\text{int } A^{(n-k)}$ แต่ถ้า $|\text{int } A| = 0$ ปัญหาที่จะมาแสดงเมื่อทำการควบนั่นครั้งสุดท้าย

อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าเมทริกซ์ A ในตัวอย่างนี้จะมี $|\text{int } A| = 0$ เราสามารถแก้ไขปัญหที่เกิดขึ้นได้โดยการสลับแถวที่ 1 และ 2 ดังนี้

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $|\text{int } \tilde{A}| = -2 \neq 0$ ดังนั้น เราจึงสามารถใช้กระบวนการควบนั่นเพื่อหาค่าตัวกำหนดของ $\tilde{A}$ ได้ ถึงแม้ว่ามีสมาชิกบางตัวใน $\text{int } \tilde{A}$ เป็นศูนย์ เราสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 3.1 ว่าตัวกำหนดของ $\tilde{A}$ มีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือ ตัวกำหนดของ A มีค่าเป็น 0 เช่นกัน

4. สรุป

จากขั้นตอนที่ไม่ซับซ้อนในวิธีควบนั่นของดอดจ์สันที่สร้างความประทับใจให้กับคณะผู้เรียบเรียงในเริ่มแรก แต่เมื่อเจาะลึกในรายละเอียดก็พบว่า หากเราดำเนินการควบนั่นเมทริกซ์ไปอย่างไม่รีรอ ในช่วงเริ่มต้นของการคำนวณ เราอาจโชคดีที่ไม่พบการหารด้วยศูนย์เกิดขึ้นในการควบนั่น แต่เมื่อการควบนั่นดำเนินการมาถึงตอนท้าย ๆ ได้เมทริกซ์ควบนั่น $A^{(n-k)}$ และเรากลับพบว่า $\text{int } A^{(n-k)} = 0$ นั่นหมายความว่า กระบวนการควบนั่นที่เราทำมาก่อนหน้าทั้งหมดล้มเหลว ดังนั้น การตรวจสอบว่าค่าตัวกำหนด $|\text{int } A| \neq 0$ ก่อนดำเนินการควบนั่นจึงเป็นสิ่งจำเป็น อย่างไรก็ตาม ในการตรวจสอบสำหรับเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ เราต้องคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์ภายในขนาด $(n-2) \times (n-2)$ นับว่าเป็นค่ามัดจำที่ราคาแพง นอกจากนี้ระหว่างการควบนั่นก็ไม่การันตีว่าเราจะ

เจอปัญหาการหารด้วยศูนย์หรือไม่ ดังนั้นจึงไม่น่าแปลกใจว่าเหตุใดวิธีควบแน่นของดอดจสันจึงไม่ถูกอ้างอิงและนิยมใช้ในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์

เอกสารอ้างอิง

- [1] Abeles, F. F. (2008). Dodgson Condensation: The Historical and Mathematical Development of an Experimental Method, *Linear Algebra and its Applications*, 429, p. 429 - 438.
- [2] Dodgson, C. L. (1866). Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing Their Arithmetical Values, *Proceedings of the Royal Society of London*, 15, p. 150 - 155.
- [3] Leggett, D., Perry, J. and Torrence, E. (2011). Computing Determinants by Double-Crossing. *The College Mathematics Journal*, 42, p. 43 - 54.
- [4] Rise, A. and Torrence, E. (2007). “Shutting Up Like a Telescope”: Lewis Carroll's “Curious” Condensation Method for Evaluating Determinants. *The College Mathematics Journal*, 38, p. 85 - 95.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การเปรียบเทียบตัวแบบพยากรณ์ราคาอ้อย

A Comparison of Forecasting Methods for Sugarcane Prices

วารางคณา เรียนสุทธิ

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ วิทยาเขตพัทลุง พัทลุง 93210

Warangkhan Riansut

Faculty of Science, Thaksin University, Phatthalung Campus, Phatthalung 93210

Email: warang27@gmail.com

วันที่รับบทความ : 8 มิถุนายน 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 26 กรกฎาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 3 ตุลาคม 2562

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบตัวแบบพยากรณ์ราคาอ้อย โดยวิธีการพยากรณ์ทางสถิติทั้งหมด 6 วิธี ได้แก่ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแฉก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ และวิธีการพยากรณ์รวม เพื่อสร้างตัวแบบพยากรณ์ที่ดีที่สุด ราคาอ้อยเฉลี่ยต่อเดือนที่ใช้ศึกษาได้มาจากเว็บไซต์ของสำนักงานเศรษฐกิจการเกษตร เป็นอนุกรมเวลาตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2548 ถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ.2561 จำนวน 164 ค่า เกณฑ์สำหรับการเปรียบเทียบความเหมาะสมของตัวแบบพยากรณ์ที่ใช้ คือ เกณฑ์เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ยที่ต่ำที่สุด ผลการศึกษาพบว่าจากวิธีการพยากรณ์ทั้งหมดที่ได้ศึกษา วิธีที่มีความเหมาะสมมากที่สุด คือ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย ซึ่งมีตัวแบบพยากรณ์เป็น $\hat{Y}_t = 794.134160 + \hat{S}_t$ เมื่อ $\hat{Y}_t$ แทนค่าพยากรณ์ ณ เวลา t และ $\hat{S}_t$ แทนค่าดัชนีฤดูกาล ณ เวลา t

คำสำคัญ: อ้อย วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลัง วิธีการพยากรณ์รวม

ABSTRACT

This research aimed to compare the sugarcane prices forecast model by six statistical forecasting methods: Holt's exponential smoothing method, Damped trend exponential smoothing method, simple seasonal exponential smoothing method, Winters' additive exponential smoothing method, Winters' multiplicative exponential smoothing method, and combined forecasting method in order to create the best forecasting model. Time series of monthly sugarcane prices were gathered from the website of Office of Agricultural Economics during January 2005 to August 2018 of 164 values. The criterion of the lowest mean absolute percentage error was used for comparing the accuracy of the forecasting model. Research findings indicated that for all forecasting methods that had been studied, the most appropriate method was simple seasonal exponential smoothing method and the forecasting model was $\hat{Y}_t = 794.134160 + \hat{S}_t$ where $\hat{Y}_t$ represents the forecast value at time t and $\hat{S}_t$ represents the seasonal index at time t .

Keywords: Sugarcane, Exponential smoothing method, Combined forecasting method

1. บทนำ

อ้อย เป็นพืชไร่ชนิดหนึ่งที่มีความสำคัญต่อมนุษย์ในแง่ของการใช้เป็นอาหาร โดยนับเป็นพืชสำคัญอันดับที่ 4 ของโลกรองจากข้าวสาลี ข้าวโพด และข้าว ตามลำดับ แต่เมื่อพิจารณาในแง่ของผลผลิตคิดเป็นน้ำหนักแห้งที่เก็บเกี่ยวได้ต่อเนื้อที่ต่อปี อ้อย จัดเป็นพืชที่สำคัญอันดับหนึ่ง เพราะอ้อยสามารถใช้ปัจจัยสำหรับการเจริญเติบโต เช่น แสงแดด น้ำ อากาศ และธาตุอาหารได้มีประสิทธิภาพมากกว่า นอกจากนี้อ้อยยังเป็นพืชที่ปลูกง่าย และเมื่อปลูกครั้งหนึ่งแล้วสามารถเก็บเกี่ยวได้หลายครั้ง ประเทศที่ผลิตน้ำตาลจากอ้อยได้มากที่สุดคือ บราซิล รองลงมาได้แก่ อินเดีย คิวบา ออสเตรเลีย เม็กซิโก ฟิลิปปินส์ จีน และไทย ตามลำดับ สำหรับประเทศไทยได้มีการปลูกอ้อยมาแต่โบราณกาล การทำน้ำตาลจากอ้อยเริ่มในสมัยสุโขทัย แหล่งผลิตสำคัญอยู่ที่จังหวัดสุโขทัย พิษณุโลก และกำแพงเพชร น้ำตาลที่ผลิตได้ในสมัยนั้นเป็นน้ำตาลทรายแดง ส่วนการผลิตน้ำตาลทรายขาวนั้นได้เริ่ม

ที่จังหวัดลำปางและมีการขยายตัวเพิ่มขึ้นโดยลำดับ จากการผลิตเพียงเพื่อทดแทนปริมาณน้ำตาลที่สั่งเข้ามาจากประเทศฟิลิปปินส์และอินโดนีเซีย จนกระทั่งผลิตได้พอใช้บริโภคภายในประเทศและเหลือส่งออกต่างประเทศ ส่งผลให้ปี พ.ศ.2520 มูลค่าการส่งออกน้ำตาลได้เพิ่มขึ้นเป็น 7,395 ล้านบาท ซึ่งเป็นรายได้สูงที่สุดนับตั้งแต่ประเทศไทยได้มีการส่งออกน้ำตาล และนับเป็นรายได้อันดับที่ 3 รองจากข้าวและมันสำปะหลัง ต่อมาในปี พ.ศ.2521 มูลค่าการส่งออกลดลงเหลือเพียง 3,972 ล้านบาท เนื่องจากน้ำตาลล้นตลาด และราคาตกต่ำ แม้กระนั้นการส่งออกอ้อยก็ยังเป็นรายได้ 1 ใน 10 ของสินค้าส่งออกทั้งหมด จึงนับได้ว่าอ้อยเป็นพืชชนิดหนึ่งที่มีความสำคัญต่อเศรษฐกิจของประเทศไทย [1] จากการศึกษาราคาอ้อยเฉลี่ยต่อเดือนจากเว็บไซต์ของสำนักงานเศรษฐกิจการเกษตรย้อนหลังตั้งแต่ปี พ.ศ.2548 ถึงปัจจุบัน [7] พบว่าราคาอ้อยมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นจากอดีตอย่างชัดเจน เกษตรกรผู้ปลูกอ้อยอาจมีคำถามว่าแนวโน้มของราคาจะยังคงสูงขึ้นเช่นนี้ตลอดไปหรือไม่ ช่วงเดือนใดที่ราคาสูงหรือราคาตกต่ำ การพยากรณ์ทางสถิตินับเป็นเครื่องมือหนึ่งที่ช่วยตอบคำถามเหล่านี้ได้ ด้วยเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาการสร้างตัวแบบพยากรณ์โดยวิธีการพยากรณ์ทางสถิติทั้งหมด 6 วิธี ได้แก่ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแฉก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ และวิธีการพยากรณ์รวม เนื่องจากวิธีการพยากรณ์ทั้ง 6 วิธีนี้มีความน่าเชื่อถือ โดยมีหลายงานวิจัยที่ได้นำวิธีการพยากรณ์เหล่านี้มาใช้ เช่น การศึกษาของวรางคณา กิรติวิบูลย์ [4] และการศึกษาของวรางคณา เรียนสุทธิ์ [5] หลังจากที่ได้ตัวแบบพยากรณ์จากวิธีการพยากรณ์ทั้ง 6 วิธีดังกล่าว ผู้วิจัยจะคัดเลือกตัวแบบที่มีความเหมาะสมมากที่สุดเพียง 1 วิธี โดยใช้เกณฑ์เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Percentage Error: MAPE) ของข้อมูลชุดทดสอบที่ต่ำที่สุด เพื่อใช้ประโยชน์ในการวางแผนการปลูก ซึ่งจะส่งผลดีต่อการตัดสินใจ การบริหาร การจัดการด้านความเสี่ยงต่าง ๆ และยังช่วยในการประเมินการคาดการณ์ราคาล่วงหน้าได้อีกด้วย

2. วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างตัวแบบพยากรณ์โดยใช้อนุกรมเวลาของราคาอ้อย (บาท/ตัน) ที่รวมทุกพันธุ์ของอ้อย ซึ่งเป็นราคาสินค้าเกษตรกลุ่มธัญพืชและพืชอาหารที่เกษตรกรขายได้ ณ ไร่นา

อนุกรมเวลาราคาอ้อยที่นำมาศึกษาเป็นข้อมูลรายเดือนได้มาจากเว็บไซต์ของสำนักงานเศรษฐกิจการเกษตร [7] ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2548 ถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ.2561 จำนวน 164 ค่า ดำเนินการแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ชุด ชุดที่ 1 คือ ข้อมูลตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2548 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 จำนวน 156 ค่า ใช้สำหรับการสร้างตัวแบบพยากรณ์ และชุดที่ 2 คือ ข้อมูลตั้งแต่เดือนมกราคมถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ.2561 จำนวน 8 ค่า เป็นข้อมูลชุดทดสอบที่ใช้สำหรับการเปรียบเทียบความเหมาะสมของตัวแบบพยากรณ์ด้วยเกณฑ์ MAPE ที่ต่ำที่สุด

การตรวจสอบว่าอนุกรมเวลาราคาอ้อยมีการเคลื่อนไหวจากแนวโน้มหรือไม่ [5] ดำเนินการดังนี้

1. ตรวจสอบข้อสมมุติ (Assumption) คือ อนุกรมเวลาราคาอ้อยในแต่ละปีที่มีการแจกแจงปกติหรือไม่ โดยใช้การทดสอบคอลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ (Kolmogorov-Smirnov's Test) และตรวจสอบความแปรปรวนของราคาอ้อยในแต่ละปีว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่ โดยใช้การทดสอบของเลวีนาภายใต้การใช้มัธยฐาน (Levene's Test based on Median)

2. เลือกใช้สถิติสำหรับการทดสอบค่าเฉลี่ยหรือมัธยฐานของอนุกรมเวลาราคาอ้อยในแต่ละปีเพื่อการตรวจสอบแนวโน้ม โดยถ้าอนุกรมเวลาในแต่ละปีมีการแจกแจงปกติและมีความแปรปรวนเท่ากัน จะใช้สถิติอิงพารามิเตอร์ (Parametric Statistics) ซึ่งคือ การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One-Way Analysis of Variance: ANOVA) แต่ถ้าอนุกรมเวลาในแต่ละปีไม่มีการแจกแจงปกติหรือมีความแปรปรวนไม่เท่ากัน จะใช้สถิติไม่อิงพารามิเตอร์ (Nonparametric Statistics) ซึ่งคือ การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียวโดยลำดับที่ของครัสคอล-วอลลิส (Kruskal-Wallis's One-Way Analysis of Variance by Rank) สำหรับอนุกรมเวลาที่ตรวจสอบแล้วพบแนวโน้มจะหมายความว่าเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปราคาอ้อยจะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างใดอย่างหนึ่ง

การตรวจสอบว่าอนุกรมเวลาราคาอ้อยมีอิทธิพลของฤดูกาลหรือไม่ [6] ดำเนินการดังนี้

1. พิจารณาว่าอนุกรมเวลาราคาอ้อยมีการเคลื่อนไหวจากแนวโน้มหรือไม่ ถ้ามีต้องกำจัดแนวโน้มออกก่อนที่จะทดสอบค่าเฉลี่ยหรือมัธยฐานของอนุกรมเวลาในแต่ละเดือน ซึ่งวิธีการกำจัดแนวโน้มสามารถศึกษาได้จากวรรณกรรม เรียนสุทธิ [5]

2. ตรวจสอบข้อสมมุติ คือ อนุกรมเวลาราคาอ้อยในแต่ละเดือนหลังจากกำจัดแนวโน้มออกแล้วมีการแจกแจงปกติและมีความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ เช่นเดียวกับข้อ 1 ของการตรวจสอบแนวโน้ม

3. เลือกใช้สถิติทดสอบค่าเฉลี่ยหรือมัธยฐานของอนุกรมเวลาราคาอ้อยในแต่ละเดือนเพื่อการตรวจสอบอิทธิพลของฤดูกาล โดยมีหลักการเลือกใช้สถิติเช่นเดียวกับข้อ 2 ของการตรวจสอบแนวโน้ม ซึ่งจำนวนฤดูกาลของอนุกรมเวลาราคาอ้อย คือ 12 เนื่องจากราคาอ้อยที่นำมาศึกษาเป็นข้อมูลรายเดือน สำหรับอนุกรมเวลาที่เราตรวจสอบแล้วพบอิทธิพลของฤดูกาลจะหมายความว่าราคาอ้อยในแต่ละเดือนมีการเปลี่ยนแปลงในทิศทางและลักษณะเดียวกัน

จากการพิจารณาลักษณะการเคลื่อนไหวของอนุกรมเวลาชุดที่ 1 ดังรูปที่ 3.1 ในผลการวิจัยพบว่าราคาอ้อยมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น แต่ไม่น่าจะมีอิทธิพลของฤดูกาล นอกเหนือจากการพิจารณารกราฟของอนุกรมเวลาเทียบกับเวลาแล้ว ผู้วิจัยยังได้ทำการทดสอบสมมติฐาน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ซึ่งพบว่าอนุกรมเวลาชุดนี้มีการเคลื่อนไหวจากแนวโน้ม โดยไม่มีอิทธิพลของฤดูกาล ดังแสดงผลการทดสอบในผลการวิจัย อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าอนุกรมเวลาราคาอ้อยจะมีเพียงการเคลื่อนไหวจากแนวโน้ม แต่การศึกษาครั้งนี้จะพิจารณาเปรียบเทียบวิธีการสร้างตัวแบบพยากรณ์โดยวิธีการพยากรณ์ทางสถิติที่มีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาทุกรูปแบบ ซึ่งหมายถึงอนุกรมเวลาที่มีเฉพาะ การเคลื่อนไหวจากแนวโน้ม ได้แก่ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์และวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแตร อนุกรมเวลาที่มีเฉพาะอิทธิพลของฤดูกาล ได้แก่ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย และอนุกรมเวลาที่มีทั้งการเคลื่อนไหวจากแนวโน้มและอิทธิพลของฤดูกาล ได้แก่ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ และวิธีการพยากรณ์รวม เพื่อให้ครอบคลุมตัวแบบพยากรณ์ที่ดีที่สุด [6]

2.1 วิธีการสร้างตัวแบบพยากรณ์

วิธีการสร้างตัวแบบพยากรณ์ด้วยวิธีการทางสถิติทั้ง 6 วิธี ที่ต้องการศึกษา แสดงรายละเอียดดังหัวข้อที่ 2.1.1 – 2.1.6 โดยมีสัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับการสร้างตัวแบบพยากรณ์ดังนี้

Y_t แทน อนุกรมเวลาราคาอ้อย ณ เวลา t

$\hat{Y}_t$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา t

$\hat{Y}_{t+m}$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา $t+m$ โดยที่ m แทนจำนวนช่วงเวลาที่ต้องการพยากรณ์ไปข้างหน้า

a_t , b_t และ S_t แทน ค่าประมาณระยะตัดแกน Y ความชันของแนวโน้ม และอิทธิพลของฤดูกาล ณ เวลา t ตามลำดับ

α, γ, ϕ และ δ แทน ค่าคงตัวการปรับเรียบ โดยที่ $0 < \alpha < 1, 0 < \gamma < 1, 0 < \phi < 1$ และ $0 < \delta < 1$

t แทน ช่วงเวลา ซึ่งมีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n_1 โดยที่ n_1 แทนจำนวนข้อมูลในอนุกรมเวลาชุดที่ 1 ($n_1 = 156$)

s แทนจำนวนฤดูกาล ซึ่งอนุกรมเวลาราคาอ้อยเป็นข้อมูลรายเดือน ดังนั้น $s = 12$

2.1.1 วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ (Holt's Exponential Smoothing Method)

การปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์มีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาที่มีการเคลื่อนไหวจากแนวโน้มที่เป็นเส้นตรงและไม่มีอิทธิพลของฤดูกาล มีค่าคงตัวการปรับเรียบ 2 ตัว คือ ค่าคงตัวที่ใช้ปรับเรียบของค่าระดับ (Level: α) และค่าคงตัวที่ใช้ปรับเรียบของค่าความชัน (Trend: γ) ตัวแบบพยากรณ์ของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ [6] แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_{t+m} = a_t + b_t(m) \quad (1)$$

เมื่อ $a_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$ และ $b_t = \gamma(a_t - a_{t-1}) + (1 - \gamma)b_{t-1}$

2.1.2 วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแดม (Damped Trend Exponential Smoothing Method)

การปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแดมมีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาที่มีการเคลื่อนไหวจากแนวโน้มที่เป็นเส้นตรงและไม่มีอิทธิพลของฤดูกาล โดยอัตราการเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนไหวจากแนวโน้มจะช้ากว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของแนวโน้มที่เป็นเส้นตรงของการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ อีกทั้งความชันยังมีค่าลดลงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ตัวแบบพยากรณ์ของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแดม [3] แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_{t+m} = a_t + b_t \sum_{i=1}^m \phi^i \quad (2)$$

เมื่อ $a_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(a_{t-1} + \phi b_{t-1})$ และ $b_t = \gamma(a_t - a_{t-1}) + (1 - \gamma)\phi b_{t-1}$

2.1.3 วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย (Simple Seasonal Exponential Smoothing Method)

การปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่ายมีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาที่ไม่มีการเคลื่อนไหวจากแนวโน้ม แต่มีเพียงอิทธิพลของฤดูกาล โดยอิทธิพลของฤดูกาลมีค่าเท่ากัน

ทุกช่วงเวลา ตัวแบบพยากรณ์ของการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย [6] แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_t = a_t + \hat{S}_t \quad (3)$$

เมื่อ $a_t = \alpha(Y_t - \hat{S}_{t-s}) + (1-\alpha)a_{t-1}$ และ $\hat{S}_t = \delta(Y_t - a_t) + (1-\delta)\hat{S}_{t-s}$

2.1.4 วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก (Winters' Additive Exponential Smoothing Method)

การปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวกมีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาที่มีการเคลื่อนไหวทั้งจากแนวโน้มที่เป็นเส้นตรงและอิทธิพลของฤดูกาล โดยที่อิทธิพลของฤดูกาลต่อค่าแนวโน้มมีค่าคงที่ กล่าวคืออัตราส่วนของอิทธิพลของฤดูกาลต่อค่าแนวโน้มมีค่าไม่เพิ่มขึ้นและไม่ลดลงเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป ตัวแบบพยากรณ์ของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก [6] แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_{t+m} = (a_t + b_t m) + \hat{S}_t \quad (4)$$

เมื่อ $a_t = \alpha(Y_t - \hat{S}_{t-s}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$, $b_t = \gamma(a_t - a_{t-1}) + (1-\gamma)b_{t-1}$ และ

$$\hat{S}_t = \delta(Y_t - a_t) + (1-\delta)\hat{S}_{t-s}$$

2.1.5 วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ (Winters' Multiplicative Exponential Smoothing Method)

การปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณมีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาที่มีการเคลื่อนไหวทั้งจากแนวโน้มที่เป็นเส้นตรงและอิทธิพลของฤดูกาล โดยที่อิทธิพลของฤดูกาลต่อค่าแนวโน้มมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจลดลงก็ได้ กล่าวคืออัตราส่วนของอิทธิพลของฤดูกาลต่อค่าแนวโน้มมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป ตัวแบบพยากรณ์ของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ [6] แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_{t+m} = (a_t + b_t m) \hat{S}_t \quad (5)$$

เมื่อ $a_t = \alpha \frac{Y_t}{\hat{S}_{t-s}} + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$, $b_t = \gamma(a_t - a_{t-1}) + (1-\gamma)b_{t-1}$ และ $\hat{S}_t = \delta \frac{Y_t}{a_t} + (1-\delta)\hat{S}_{t-s}$

2.1.6 วิธีการพยากรณ์รวม (Combined Forecasting Method)

การพยากรณ์รวมเป็นวิธีการประยุกต์ที่มีการรวมค่าพยากรณ์จากตัวแบบพยากรณ์เดี่ยวตั้งแต่ 2 ตัวแบบขึ้นไป เพื่อให้ได้ค่าพยากรณ์ใหม่ที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด สามารถใช้ได้ดีในกรณีที่ตัวแบบพยากรณ์เดี่ยวมีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลามากกว่า 1 ตัวแบบ [4] งานวิจัยนี้ได้พิจารณาตัวแบบพยากรณ์เดี่ยว 2 ตัวแบบ ที่ได้มาจากวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่ายและวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก เนื่องจากมีค่า MAPE ของข้อมูลชุดที่ 1 ต่ำกว่าวิธีอื่น ๆ ดังตารางที่ 3.1 ในผลการวิจัย และเกณฑ์ MAPE [3] แสดงดังนี้

$$MAPE = \frac{100}{n_1} \sum_{t=1}^{n_1} \left| \frac{e_t}{Y_t} \right| \quad (6)$$

เมื่อ $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ แทน ความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา t

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างตัวแบบพยากรณ์รวม โดยกำหนดให้ค่าพยากรณ์ของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่ายและวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวกเป็นตัวแปรอิสระ และใช้ข้อมูลราคาอ้อยชุดที่ 1 ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2548 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 จำนวน 156 ค่า เป็นตัวแปรตาม ตัวแบบพยากรณ์แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 \hat{Y}_{1t} + b_2 \hat{Y}_{2t} \quad (7)$$

เมื่อ $\hat{Y}_{1t}$ และ $\hat{Y}_{2t}$ แทน ค่าพยากรณ์เดี่ยว ณ เวลา t จากวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่ายและวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก ตามลำดับ

b_0 , b_1 และ b_2 แทน ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method) [10]

2.2 การเปรียบเทียบความเหมาะสมของตัวแบบพยากรณ์

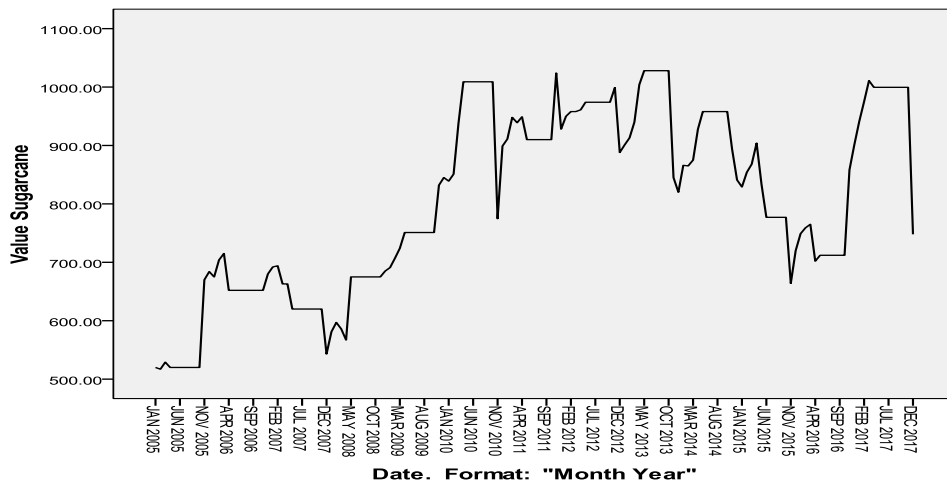
การวิจัยครั้งนี้ได้คัดเลือกตัวแบบพยากรณ์ที่มีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาราคาอ้อย โดยการเปรียบเทียบราคาอ้อยของข้อมูลชุดที่ 2 ตั้งแต่เดือนมกราคมถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ.2561 จำนวน 8 ค่า กับค่าพยากรณ์จากวิธีการทางสถิติทั้ง 6 วิธี เพื่อคำนวณค่า MAPE โดยตัวแบบพยากรณ์ที่ให้ค่า MAPE ต่ำที่สุด จะจัดเป็นตัวแบบที่มีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาชุดนี้มากที่สุด เนื่องจากให้ค่าพยากรณ์ที่มีความแตกต่างกับข้อมูลจริงน้อยที่สุด สูตรการคำนวณค่า MAPE ดำเนินการได้เช่นเดียวกับสมการ (6) โดยคำนวณจากข้อมูลชุดที่ 2 จำนวน 8 ค่า จากนั้นผู้วิจัยจะใช้ตัวแบบ

พยากรณ์ที่มีความเหมาะสมมากที่สุดในการพยากรณ์ราคาอ้อย ตั้งแต่เดือนกันยายนถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2561 ต่อไป

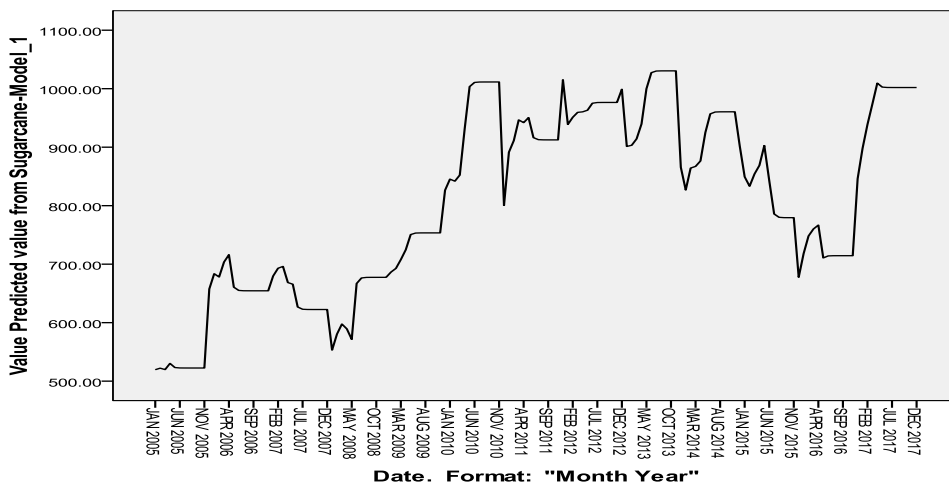
3. ผลการวิจัย

3.1 ผลการพิจารณาลักษณะของอนุกรมเวลา

จากการพิจารณาลักษณะการเคลื่อนไหวของอนุกรมเวลาราคาอ้อยชุดที่ 1 ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2548 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 จำนวน 156 ค่า ดังรูปที่ 3.1 พบว่าราคาอ้อยมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น แต่ไม่มีอิทธิพลของฤดูกาล นอกเหนือจากการพิจารณากราฟของอนุกรมเวลาเทียบกับเวลาแล้ว ผู้วิจัยยังได้ตรวจสอบว่าอนุกรมเวลาราคาอ้อยมีการเคลื่อนไหวจากแนวโน้ม แต่ไม่มีอิทธิพลของฤดูกาลจริงหรือไม่ โดยการทดสอบสมมติฐาน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ซึ่งพบว่าอนุกรมเวลาในแต่ละปีมีการแจกแจงไม่ปกติ แต่มีความแปรปรวนเท่ากัน จึงตรวจสอบมัธยฐานในแต่ละปีโดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียวโดยลำดับที่ของครัสคอล-วอลลิส ผลการตรวจสอบคือ ราคาอ้อยในแต่ละปีมีมัธยฐานแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 (Kruskal-Wallis: $\chi^2 = 132.821$ p-value < 0.0001) หมายความว่าอนุกรมเวลาชุดนี้มีการเคลื่อนไหวจากแนวโน้ม และเนื่องจากอนุกรมเวลาในแต่ละเดือนดังรูปที่ 3.1 มีการเคลื่อนไหวของข้อมูลที่ไม่คงที่ กล่าวคือ เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป ราคาอ้อยมีความผันผวนเพิ่มขึ้น จึงปรับแนวโน้มออกโดยการหารราคาอ้อยด้วยค่าประมาณของแนวโน้มที่ได้จากการวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่าย ดังรูปที่ 3.2 พบว่าอนุกรมเวลาของผลหารที่เกิดขึ้นหรือราคาอ้อยในแต่ละเดือนเมื่อปรับแนวโน้มออกด้วยการหารแล้วมีการแจกแจงปกติและมีความแปรปรวนเท่ากัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จึงตรวจสอบค่าเฉลี่ยในแต่ละเดือนโดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว ผลการตรวจสอบคือ ราคาอ้อยในแต่ละเดือนเมื่อปรับแนวโน้มออกด้วยการหารมีค่าเฉลี่ยไม่แตกต่างกัน (ANOVA: $F = 0.137$, p-value = 0.9996) หมายความว่าอนุกรมเวลาชุดนี้ไม่มีอิทธิพลของฤดูกาล



รูปที่ 3.1 ลักษณะการเคลื่อนไหวของอนุกรมเวลาราคาอ้อย ชุดที่ 1
ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2548 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560



รูปที่ 3.2 ค่าประมาณของแนวโน้มที่ได้จากการวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่าย

อย่างไรก็ตาม การศึกษาครั้งนี้ได้พิจารณาเปรียบเทียบวิธีการสร้างตัวแบบพยากรณ์โดยวิธีการพยากรณ์ทางสถิติทุกรูปแบบ เพื่อให้ผลการศึกษาที่ได้ครอบคลุมตัวแบบพยากรณ์ที่ดีที่สุด ถึงแม้ว่าอนุกรมเวลาราคาอ้อยจะมีเพียงการเคลื่อนไหวจากแนวโน้มเท่านั้น [5] วิธีการพยากรณ์ที่พิจารณาได้แก่ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแฉก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย วิธีการปรับเรียบด้วย

เส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ และวิธีการพยากรณ์รวม เนื่องจากผลของค่า MAPE ของข้อมูลชุดที่ 1 ในตารางที่ 3.1 พบว่าวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวกมีค่า MAPE ต่ำที่สุด รองลงมาคือ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย ซึ่งจะเห็นว่าทั้ง 2 วิธีการพยากรณ์นี้มีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาที่มีอิทธิพลของฤดูกาลด้วย แต่กลับมีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาราคาอ้อยที่มีเพียงการเคลื่อนไหวจากแนวโน้มเท่านั้น อย่างไรก็ตาม วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแฉกและวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์มีค่า MAPE สูงกว่าวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวกและวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่ายเพียงเล็กน้อย ขณะที่วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณมีค่า MAPE สูงที่สุด

ตารางที่ 3.1 ค่า MAPE ของข้อมูลชุดที่ 1

วิธีการพยากรณ์	โฮลต์	แฉก	ฤดูกาลอย่างง่าย	วินเทอร์บวก	วินเทอร์คูณ
MAPE	3.0344	3.0043	2.9771	<u>2.9230</u>	3.5072

3.2 ผลการสร้างตัวแบบพยากรณ์

3.2.1 ผลของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์

จากการสร้างตัวแบบพยากรณ์ด้วยวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ โดยใช้โปรแกรม SPSS Version 17 พบว่าโปรแกรมกำหนดค่า $\alpha = 0.900513$, $\gamma = 0.000035$, $a_t = 773.215292$ และ $b_t = 2.222043$ ดังนั้นจะได้ตัวแบบพยากรณ์แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_{t+m} = 773.215292 + 2.222043m \quad (8)$$

เมื่อ $\hat{Y}_{t+m}$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา $t + m$ โดยที่ $m = 1$ แทน เดือนมกราคม พ.ศ.2561

3.2.2 ผลของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแฉก

จากการสร้างตัวแบบพยากรณ์ด้วยวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแฉก โดยใช้โปรแกรม SPSS Version 17 พบว่าโปรแกรมกำหนดค่า $\alpha = 0.910308$, $\gamma = 0.000023$, $\phi = 0.998674$, $a_t = 770.650239$ และ $b_t = 1.470369$ ดังนั้นจะได้ตัวแบบพยากรณ์แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_{t+m} = 770.650239 + 1.470369 \sum_{i=1}^m (0.998674)^i \quad (9)$$

เมื่อ $\hat{Y}_{t+m}$ แทนค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา $t+m$ โดยที่ $m=1$ แทน เดือนมกราคม พ.ศ.2561

3.2.3 ผลของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย

จากการสร้างตัวแบบพยากรณ์ด้วยวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย โดยใช้โปรแกรม SPSS Version 17 พบว่าโปรแกรมกำหนดค่า $\alpha = 0.900021$, $\delta = 0.000001$ และ $a_t = 794.134160$ ดังนั้นจะได้ตัวแบบพยากรณ์แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_t = 794.134160 + \hat{S}_t \quad (10)$$

เมื่อ $\hat{Y}_t$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา t

$\hat{S}_t$ แทน ค่าดัชนีฤดูกาล ณ เวลา t รายละเอียดแสดงดังตารางที่ 3.2 ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่า ราคาอ้อยของเดือนมกราคม กุมภาพันธ์ และธันวาคมของทุกปี มีค่าน้อยกว่าเดือนอื่น ๆ เนื่องจากมีค่าดัชนีฤดูกาลน้อยกว่า 0 (เกณฑ์ในการพิจารณาว่าราคาอ้อยมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าเดือนอื่น ๆ ของตัวแบบบวก คือ 0 เนื่องจากตามทฤษฎี ผลรวมของค่าดัชนีฤดูกาลของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่ายมีค่าเท่ากับ 0)

ตารางที่ 3.2 ดัชนีฤดูกาลของอนุกรมเวลาราคาอ้อย จากวิธีการปรับเรียบด้วย
เส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย

เดือน	ดัชนีฤดูกาล	เดือน	ดัชนีฤดูกาล	เดือน	ดัชนีฤดูกาล
มกราคม	-26.4630	พฤษภาคม	11.8231	กันยายน	7.4385
กุมภาพันธ์	-11.2861	มิถุนายน	7.4385	ตุลาคม	7.4385
มีนาคม	1.6993	กรกฎาคม	7.4385	พฤศจิกายน	1.3454
เมษายน	9.2847	สิงหาคม	7.4385	ธันวาคม	-23.5961

3.2.4 ผลของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก

จากการสร้างตัวแบบพยากรณ์ด้วยวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก โดยใช้โปรแกรม SPSS Version 17 พบว่าโปรแกรมกำหนดค่า $\alpha = 0.899968$, $\gamma = 0.000014$, $\delta = 0.000328$, $a_t = 806.45165$ และ $b_t = 2.236458$ ดังนั้นจะได้ตัวแบบพยากรณ์แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_{t+m} = (806.45165 + 2.236458m) + \hat{S}_t \quad (11)$$

เมื่อ $\hat{Y}_{t+m}$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา $t+m$ โดยที่ $m=1$ แทน เดือนมกราคม พ.ศ.2561

$\hat{S}_t$ แทน ค่าดัชนีฤดูกาล ณ เวลา t รายละเอียดแสดงดังตารางที่ 3.3 ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่า ราคาอ้อยของเดือนมกราคม กุมภาพันธ์ และตุลาคมถึงธันวาคม ของทุกปี มีค่าน้อยกว่าเดือนอื่น ๆ เนื่องจากมีค่าดัชนีฤดูกาลน้อยกว่า 0 (เกณฑ์ในการพิจารณาว่าราคาอ้อยมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าเดือนอื่น ๆ ของตัวแบบบวก คือ 0 เนื่องจากตามทฤษฎี ผลรวมของค่าดัชนีฤดูกาลของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวกมีค่าเท่ากับ 0)

ตารางที่ 3.3 ดัชนีฤดูกาลของอนุกรมเวลาราคาอ้อย จากวิธีการปรับเรียบด้วย
เส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก

เดือน	ดัชนีฤดูกาล	เดือน	ดัชนีฤดูกาล	เดือน	ดัชนีฤดูกาล
มกราคม	-14.14939	พฤษภาคม	15.18205	กันยายน	1.84034
กุมภาพันธ์	-1.20959	มิถุนายน	8.55816	ตุลาคม	-0.39889
มีนาคม	9.53673	กรกฎาคม	6.31889	พฤศจิกายน	-8.73085
เมษายน	14.88286	สิงหาคม	4.07961	ธันวาคม	-35.90773

3.2.5 ผลของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ

จากการสร้างตัวแบบพยากรณ์ด้วยวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ โดยใช้โปรแกรม SPSS Version 17 พบว่าโปรแกรมกำหนดค่า $\alpha = 0.803653$, $\gamma = 0.001$, $\delta = 0.696371$, $a_t = 811.328887$ และ $b_t = 2.0631021$ ดังนั้นจะได้ตัวแบบพยากรณ์แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_{t+m} = (811.328887 + 2.0631021m)\hat{S}_t \quad (12)$$

เมื่อ $\hat{Y}_{t+m}$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา $t+m$ โดยที่ $m=1$ แทน เดือนมกราคม พ.ศ.2561

$\hat{S}_t$ แทน ค่าดัชนีฤดูกาล ณ เวลา t รายละเอียดแสดงดังตารางที่ 3.4 ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่า ราคาอ้อยของเดือนมกราคม พฤษภาคมถึงสิงหาคม และพฤศจิกายนถึงธันวาคม ของทุกปี มีค่าน้อยกว่าเดือนอื่น ๆ เนื่องจากมีค่าดัชนีฤดูกาลน้อยกว่า 1 (เกณฑ์ในการพิจารณาว่าราคาอ้อยมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าเดือนอื่น ๆ ของตัวแบบคูณ คือ 1 เนื่องจากตามทฤษฎี ผลรวมของค่าดัชนีฤดูกาลของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณมีค่าเท่ากับ 1)

ตารางที่ 3.4 ดัชนีฤดูกาลของอนุกรมเวลาราคาอ้อย จากวิธีการปรับเรียบด้วย
เส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ

เดือน	ดัชนีฤดูกาล	เดือน	ดัชนีฤดูกาล	เดือน	ดัชนีฤดูกาล
มกราคม	0.99712	พฤษภาคม	0.99792	กันยายน	1.00320
กุมภาพันธ์	1.00373	มิถุนายน	0.98937	ตุลาคม	1.00356
มีนาคม	1.00851	กรกฎาคม	0.99336	พฤศจิกายน	0.98558
เมษายน	1.00131	สิงหาคม	0.99798	ธันวาคม	0.94019

3.2.6 ผลของวิธีการพยากรณ์รวม

ตัวแบบพยากรณ์โดยวิธีการพยากรณ์รวม แสดงดังนี้

$$\hat{Y}_t = 40.938263 + 0.221968\hat{Y}_{1t} + 0.727313\hat{Y}_{2t} \quad (13)$$

เมื่อ $\hat{Y}_t$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา t

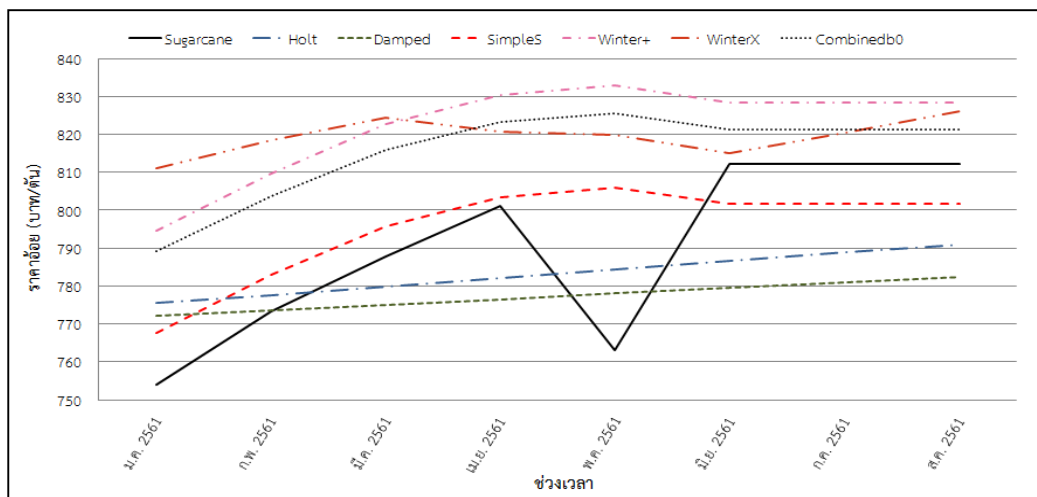
$\hat{Y}_{1t}$ และ $\hat{Y}_{2t}$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา t จากวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย และวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก ตามลำดับ

3.3 ผลการเปรียบเทียบความเหมาะสมของตัวแบบพยากรณ์

จากการเปรียบเทียบค่าจริงกับค่าพยากรณ์ราคาอ้อยของข้อมูลชุดที่ 2 ตั้งแต่เดือนมกราคมถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ.2561 โดยการคำนวณค่า MAPE ในสมการที่ (6) ได้ผลแสดงดังตารางที่ 3.5 และรูปที่ 3.3 ซึ่งพบว่าเมื่อใช้ตัวแบบพยากรณ์ของวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย ในสมการที่ (10) ได้ค่า MAPE ต่ำที่สุด ดังนั้นวิธีการพยากรณ์นี้จึงเป็นวิธีที่มีความเหมาะสมกับอนุกรมราคาอ้อยชุดนี้มากที่สุด โดยวิธีการพยากรณ์นี้มีความผิดพลาดจากการพยากรณ์ร้อยละ 1.7375 (MAPE = 1.7375)

ตารางที่ 3.5 ค่า MAPE ของข้อมูลชุดที่ 2

ช่วงเวลา	ราคาอ้อย	ราคาอ้อย จากการพยากรณ์โดยวิธี					
		ไฮลด์	แดม	ฤดูกาล อย่าง ง่าย	วินเทอร์ บวก	วินเทอร์ คูณ	พยากรณ์ รวม
ม.ค. 2561	754.03	775.44	772.12	767.67	794.54	811.05	789.22
ก.พ. 2561	773.17	777.66	773.59	782.85	809.71	818.50	803.62
มี.ค. 2561	787.67	779.88	775.05	795.83	822.70	824.47	815.95
เม.ย. 2561	801.15	782.10	776.51	803.42	830.28	820.65	823.15
พ.ค. 2561	763.15	784.33	777.97	805.96	832.82	819.93	825.56
มิ.ย. 2561	812.16	786.55	779.43	801.57	828.43	814.95	821.39
ก.ค. 2561	812.16	788.77	780.89	801.57	828.43	820.29	821.39
ส.ค. 2561	812.16	790.99	782.34	801.57	828.42	826.16	821.38
MAPE		2.2752	2.5781	<u>1.7375</u>	4.1649	3.8799	3.3157



รูปที่ 3.3 การเปรียบเทียบราคาอ้อยและค่าพยากรณ์ของข้อมูลชุดที่ 2

4. อภิปรายและสรุปผล

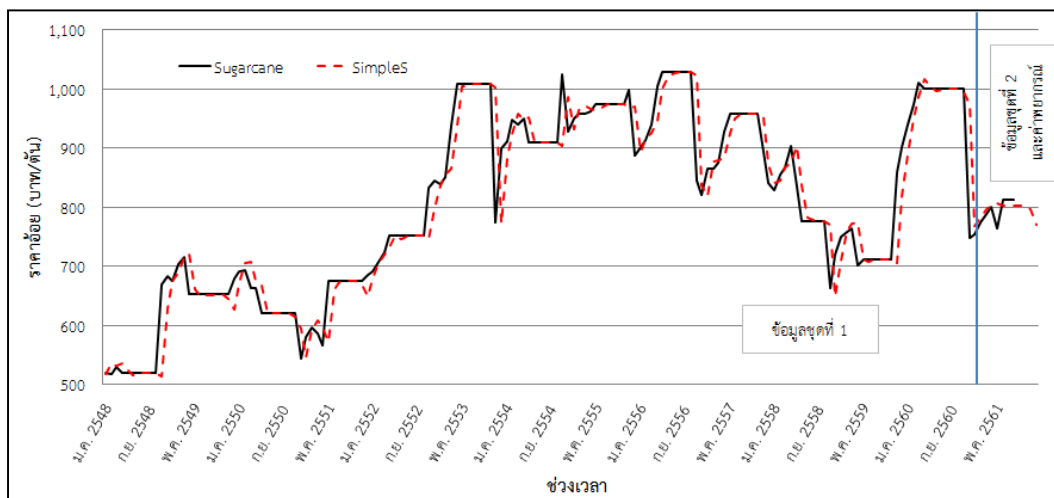
การวิจัยครั้งนี้ได้เปรียบเทียบตัวแบบพยากรณ์ราคาอ้อยโดยใช้ข้อมูลจากเว็บไซต์ของสำนักงานเศรษฐกิจการเกษตร ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2548 ถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ.2561 จำนวน 164 ค่า ผู้วิจัยดำเนินการแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ชุด ชุดที่ 1 คืออนุกรมเวลาตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2548 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 จำนวน 156 ค่า ใช้สำหรับการสร้างตัวแบบพยากรณ์โดยวิธีการพยากรณ์ทางสถิติทั้งหมด 6 วิธี ได้แก่ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแฉก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบบวก วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของวินเทอร์แบบคูณ และวิธีการพยากรณ์รวม ชุดที่ 2 คืออนุกรมเวลาตั้งแต่เดือนมกราคมถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ.2561 จำนวน 8 ค่า ใช้สำหรับการเปรียบเทียบความเหมาะสมของตัวแบบพยากรณ์ด้วยเกณฑ์เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ย (MAPE) ที่ต่ำที่สุด ผลการศึกษาพบว่าวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่ายเป็นวิธีที่มีความเหมาะสมมากที่สุด ซึ่งมีตัวแบบพยากรณ์ดังนี้

$$\hat{Y}_t = 794.134160 + \hat{S}_t$$

เมื่อ $\hat{Y}_t$ แทน ค่าพยากรณ์ราคาอ้อย ณ เวลา t

$\hat{S}_t$ แทน ค่าดัชนีฤดูกาล ณ เวลา t

จากการใช้วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่ายในการพยากรณ์ราคาอ้อย ตั้งแต่เดือนกันยายนถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2561 พบว่าราคาอ้อยมีแนวโน้มเป็นไปในทิศทางลดลง ดังรูปที่ 4.1 ซึ่งสอดคล้องกับที่ประชาชาติธุรกิจออนไลน์ได้รายงานไว้ว่าปัญหาราคาอ้อยตกต่ำในฤดูการผลิตปี พ.ศ.2560 และต่อเนื่องมาจนถึงปี พ.ศ.2562 ทำให้สมาชิกสมาคมกลุ่มชาวไร่อ้อยเขต 7 ต้องยื่นหนังสือผ่านผู้ว่าราชการจังหวัดกาญจนบุรี เกี่ยวกับการเสนอแนวทางแก้ไขความเดือดร้อนของชาวไร่อ้อย ขอให้สนับสนุนร่างแก้ไขพระราชบัญญัติอ้อยและน้ำตาลทรายที่เกษตรกรชาวไร่อ้อยเสนอ และหาทางช่วยเหลือคลี่คลายปัญหาก่อนที่จะเกิดผลกระทบต่อเศรษฐกิจโดยรวมของประเทศ หรืออาจนำไปสู่การล่มสลายของอุตสาหกรรมอ้อยและน้ำตาลทราย [2]



รูปที่ 4.1 การเปรียบเทียบราคาอ้อยและค่าพยากรณ์
จากวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย

จากการวิเคราะห์อนุกรมเวลาราคาอ้อยของข้อมูลชุดที่ 1 ที่พบว่าอนุกรมเวลาชุดนี้มีเพียงการเคลื่อนไหวจากแนวโน้ม ซึ่งวิธีการพยากรณ์ที่มีความเหมาะสมควรจะเป็นวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของโฮลต์ และวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีแนวโน้มแบบแคม แต่ผลการศึกษาครั้งนี้กลับพบว่าวิธีการที่มีความเหมาะสมคือ วิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังที่มีฤดูกาลอย่างง่าย ซึ่งจะเห็นว่าวิธีการพยากรณ์นี้มีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลาที่มีเพียงอิทธิพลของฤดูกาลเท่านั้น ดังนั้นผู้วิจัยควรพิจารณาวิธีการพยากรณ์ที่หลากหลายในการสร้างตัวแบบพยากรณ์ เพื่อให้ครอบคลุมตัวแบบพยากรณ์ที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งการศึกษานี้ยังได้พิจารณาวิธีการพยากรณ์อื่น ๆ เช่น วิธีบ็อกซ์-เจนกินส์ (Box-Jenkins Method) [8] และวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลังของบราวน์ (Brown's Exponential Smoothing Method) [9] ผลการศึกษาพบว่าค่า MAPE ของทั้ง 2 วิธีการพยากรณ์นี้สูงกว่าทุกวิธีที่ได้ศึกษาในครั้งนี้ อย่างไรก็ตาม ราคาอ้อยมีการเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ อาจเพราะปัจจัยต่าง ๆ เช่น ความต้องการบริโภคทั้งภายในและต่างประเทศ ปริมาณการส่งออกหรือนำเข้าระหว่างประเทศ ดังนั้นการศึกษารังต่อไปจึงควรพิจารณาตัวแปรเหล่านี้เพื่อใช้ในการพัฒนาตัวแบบพยากรณ์ให้มีความเหมาะสมมากยิ่งขึ้น อีกทั้งเมื่อมีราคาอ้อยที่เป็นปัจจุบันมากขึ้นหรือราคาอ้อยมีความผันผวนเพิ่มขึ้น ผู้วิจัยควรนำข้อมูลเหล่านั้นมาปรับปรุงตัวแบบเพื่อให้ได้ตัวแบบพยากรณ์ที่มีความเหมาะสมกับการพยากรณ์ราคาอ้อยในอนาคตต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] เกษม สุขสถาน. (ม.ป.ป.). สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน เรื่องที่ 3 อ้อย. สืบค้น 7 ตุลาคม 2561, จาก <http://kanchanapisek.or.th/kp6/sub/book/book.php?book=5&chap=3&page=t5-3-infodetail01.html>
- Suksatan, K. (n.d.). Thai Encyclopedia for Youth, Issue 3 Sugarcane. Retrieved October 7, 2018, from <http://kanchanapisek.or.th/kp6/sub/book/book.php?book=5&chap=3&page=t5-3-infodetail01.html>
- [2] ประชาชาติธุรกิจออนไลน์. (2561). ชาวไร่อ้อยเขต 7 ยื่นหนังสือถึงรัฐบาลผ่านพ่อเมืองกาญจน์ เร่งแก้ไข พ.ร.บ.ชาวไร่อ้อย. สืบค้น 7 ตุลาคม 2561, จาก <https://www.prachachat.net/local-economy/news-168133>
- Prachachat Business Online. (2018). Sugarcane Farmers in District 7 Filed a Letter to the Government. Retrieved October 7, 2018, from <https://www.prachachat.net/local-economy/news-168133>
- [3] มุกดา แม้นมินทร์. (2549). *อนุกรมเวลาและการพยากรณ์*. กรุงเทพฯ: โพรพรินต์ติ้ง.
- Manmin, M. (2006). *Time Series and Forecasting*. Bangkok: Foreprinting.
- [4] วรางคณา กิริติวิบูลย์. (2558). ตัวแบบพยากรณ์จำนวนผู้ประกันตนภาคสมัครใจ (มาตรา 39). *วารสารวิจัยรามคำแหง (มนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์)*, 18(1), น. 21 - 35.
- Keerativibool, W. (2015). Forecasting Model for the Number of Insured Persons (Article 39). *Ramkhamhaeng Research Journal of Humanities and Social Sciences*, 18(1), p. 21 - 35.
- [5] วรางคณา เรียนสุทธิ์. (2561). การเปรียบเทียบตัวแบบพยากรณ์ราคาส้มเขียวหวาน โดยวิธีการปรับเรียบด้วยเส้นโค้งเลขชี้กำลัง. *Thai Journal of Science and Technology*, 7(5 ฉบับเสริม), น. 460 - 470.
- Riansut, W. (2018). Comparison of Tangerine Prices Forecast Model by Exponential Smoothing Methods. *Thai Journal of Science and Technology*, 7(Supplement Issue 5), p. 460 - 470.

- [6] สมเกียรติ เกตุเอี่ยม. (2548). *เทคนิคการพยากรณ์* (พิมพ์ครั้งที่ 2). สงขลา: มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- Ket-iam, S. (2005). *Forecasting Technique* (2nd ed.). Songkhla: Thaksin University.
- [7] สำนักงานเศรษฐกิจการเกษตร. (2561). ราคาสินค้าเกษตรที่เกษตรกรขายได้ ณ ไร่นา. สืบค้น 7 ตุลาคม 2561, จาก <http://www.oae.go.th/view/1/ดัชนีราคาและผลผลิต/TH-TH>
- Office of Agricultural Economics. (2018). Prices of Agricultural Products that Farmers Sell at Farmland. Retrieved October 7, 2018, from <http://www.oae.go.th/view/1/ดัชนีราคาและผลผลิต/TH-TH>
- [8] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., and Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (3rd ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- [9] IBM Corporation. (2013). Brown's Exponential Smoothing (TSMODEL Algorithms). Retrieved February 19, 2019, from https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSLVMB_22.0.0/com.ibm.spss.statistics.algorithms/alg_tsmodel_models_exsmooth_browns.html
- [10] Montgomery, D. C., Peck, E. A., and Vining, G. G. (2006). *Introduction to Linear Regression Analysis* (4th ed.). New York: John Wiley and Sons.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การเดินของม้าหมากรุกปิดแบบ (1, 2, 2)

บนกระดานหมากรุกขนาด $3r \times 4s \times 4t$ เมื่อ $r \geq 1$ และ $s, t \geq 2$

A Closed (1, 2, 2)-Knight's Tour on
the $3r \times 4s \times 4t$ Chessboard, where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$

ศิริรัตน์ สิงห์ตันต์^{1,*} อัดถสิตี สิ้นนา² และ พีระพงษ์ เย็นทรวง³

^{1,2,3}ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง กรุงเทพมหานคร 10240

Sirirat Singhun^{1,*} Adthasit Sinna² and Pheerapong Yensuang³

^{1,2,3}Department of Mathematics, Faculty of Science, Ramkhamhaeng University, Bangkok 10240

Email: ¹sin_sirirat@ru.ac.th ²adthasit@ru.ac.th ³Peerapong_at@hotmail.com

วันที่รับบทความ : 22 สิงหาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 12 ธันวาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 7 กุมภาพันธ์ 2563

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการเดินของม้าหมากรุกปิดแบบ (1, 2, 2) บนกระดานหมากรุกขนาด $3r \times 4s \times 4t$ เมื่อ $r \geq 1$ และ $s, t \geq 2$

คำสำคัญ: การเดินของม้าหมากรุกปิด กระดานหมากรุก

* ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

In this paper, a closed (1, 2, 2)-knight's tour on the $3r \times 4s \times 4t$ chessboard, where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$, is obtained.

Keywords: Closed knight's tour, Chessboard

1. Introduction

A knight is an interesting chess piece on the chessboard because of its move. It moves like the L-shape, one square vertically or one square horizontally and then two squares at 90 degrees angle. Euler [4] was the first person to study the knight's moves on the chessboard. He found that, a knight can move from a square to every other squares exactly once and return to its starting square. This is called a *closed knight's tour*. Then, the chessboard is extended to an $m \times n$ chessboard, an array with m rows and n columns. The problem is which $m \times n$ chessboard contains a closed knight's tour. In 1991, Schwenk [4] answered this question.

Theorem 1.1 [4] The $m \times n$ chessboard with $m \leq n$ admits a closed knight's tour unless one or more of the following conditions holds:

- (i) m and n are both odd; or
- (ii) $m = 1$ or 2 or 4 ; or
- (iii) $m = 3$ and $n = 4$ or 6 or 8 .

Next, the knight's move was generalized by Chia [2] to move a squares vertically or a squares horizontally and then b squares at 90 degrees angle. It is called an (a, b) -knight's move. An (1, 2)-knight's move is an ordinary knight's move and a closed (1, 2)-knight's tour is a closed knight's tour. The authors in [2] obtained necessary conditions for existence of a closed (a, b) -knight's tour on the $m \times n$ chessboard.

Theorem 1.2 [2] Suppose that the $m \times n$ chessboard admits a closed (a, b) -knight's tour, where $a < b$ and $m \leq n$. Then,

- (i) $a + b$ is odd;
- (ii) m or n is even;
- (iii) $m \geq a + b$; and
- (iv) $n \geq 2b$.

Also, the chessboard is extended to the three-dimension chessboard called the $k \times m \times n$ chessboard. It is obtained from k copies of the $m \times n$ chessboard by putting each copy from the top to the bottom. We label each square by (l, i, j) where l is the level of the $k \times m \times n$ chessboard counting from the top to the bottom and (i, j) is the position of the square of the $m \times n$ chessboard. Note that it can be seen that a position of the three-dimension chessboard is a cube. Moreover, the (a, b) -knight's move is extended to an (a, b, c) -knight's move. If the knight moves with an (a, b, c) -knight's move from cube (i, j, k) to cube (r, s, t) , then $\{|r - i|, |s - j|, |t - k|\} = \{a, b, c\}$. That is, if the knight stands at cube (l, i, j) , then the knight can move to at most 24 cubes: $(l \pm a, i \pm b, j \pm c)$, $(l \pm b, i \pm a, j \pm c)$, and $(l \pm c, i \pm b, j \pm a)$. Also, a closed (a, b, c) -knight's tour is a series of (a, b, c) -knight's moves that visits every small cube of the $k \times m \times n$ chessboard. Bai et al. [1] obtained necessary conditions for existence of a closed $(1, 2, 2)$ -knight's tour on the $k \times m \times n$ chessboard.

Theorem 1.3 [1] The $k \times m \times n$ chessboard with $k \leq m \leq n$ does not admit a closed $(1, 2, 2)$ -knight's tour if one of the following conditions holds:

- (i) k, m and n are odd;
- (ii) $k \leq 2$;
- (iii) $k = 3$ and $m \leq 7$;
- (iv) $k = 4$.

Moreover, the authors in [1] showed closed (1, 2, 2)-knight's tours on the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard, where $s, t \geq 2$.

Theorem 1.4 [1] Suppose $s \geq 2$ and $t \geq 2$. Then, the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard admits a closed (1, 2, 2)-knight's tour.

The knight's tour problem is converted to question about a certain graph. A graph that represents all (a, b, c) -knight's moves on the $k \times m \times n$ chessboard is a graph with mkn vertices where each cube is replaced by a vertex and two vertices are joined by an edge if the knight can move by an (a, b, c) -knight's move between these cubes or vertices. Then, a closed (a, b, c) -knight's tour is a Hamiltonian cycle, a cycle that passed through each vertex exactly once, of the graph representing all (a, b, c) -knight's moves on the $k \times m \times n$ chessboard.

Motivated by these, this paper shows that the $3r \times 4s \times 4t$ chessboard, where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$, contains a closed (1, 2, 2)-knight's tour (in Theorem 2.1).

2. Main Results

First, we recall the construction of a closed (1, 2, 2)-knight's tour on the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard, where $s, t \geq 2$, in the proof of Theorem 1.4 as follows.

Algorithm 2.1 A closed (1, 2, 2)-knight's tour on the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard, where $s, t \geq 2$, is obtained as follows.

(i) A closed knight's tour C of the first level of the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard is obtained by Theorem 1 of [3]. (We roughly describe in Section 2.1.)

(ii) C is extended to a closed (1, 2, 2)-knight's tour C^* : $v_1v_2 \dots v_nv_1$ on the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard where $v_1, v_4, v_7, \dots, v_{n-2}$ (respectively $v_2, v_5, v_8, \dots, v_{n-1}$ and $v_3, v_6, v_9, \dots, v_n$) are vertices on the first (respectively second and third) level of the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard.

(iii) If $C : (i_1, j_1) (i_2, j_2) \dots (i_{4s}, j_{4t}) (i_1, j_1)$ is a closed knight's tour of the $4s \times 4t$ chessboard, where $r, s \geq 2$, then a path $P: (1, i_1, j_1) (2, \alpha, \beta) (3, i_1, j_1) (1, i_2, j_2)$ of C^* is constructed where

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} (i_1 + 2, j_1 + 2) & \text{if } i_1 \pmod{4} \in \{1, 2\}, j_1 \pmod{4} \in \{1, 2\} \\ (i_1 + 2, j_1 - 2) & \text{if } i_1 \pmod{4} \in \{1, 2\}, j_1 \pmod{4} \in \{0, 3\} \\ (i_1 - 2, j_1 + 2) & \text{if } i_1 \pmod{4} \in \{0, 3\}, j_1 \pmod{4} \in \{1, 2\} \\ (i_1 - 2, j_1 - 2) & \text{if } i_1 \pmod{4} \in \{0, 3\}, j_1 \pmod{4} \in \{0, 3\}. \end{cases}$$

Repeat the above construction for the edge $(i_2, j_2)(i_3, j_3)$ by replacing i_1 and j_1 with i_2 and j_2 , respectively, and so on. Note that in the first level and the third level, we obtain the same closed knight's tour C .

In this paper, we have two main results as follows.

(i) Introduce new algorithm to find a closed knight's tour of the $4s \times 4t$ chessboard, where $s, t \geq 2$.

(ii) Construct a closed $(1, 2, 2)$ -knight's tour of the $3r \times 4s \times 4t$ chessboard, where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$.

2.1 The Construction of a Closed Knight's Tour of the $4s \times 4t$ Chessboard where $s, t \geq 2$

Parberry's algorithm is to find a closed knight's tour in all square-like chessboards, such as $n \times n$, $n \times (n+1)$ and $n \times (n+2)$. Lin and Wei [3] improved Parberry's algorithm to an arbitrary rectangular $m \times n$ chessboard. Lin and Wei's algorithm on the $m \times n$ chessboard where $m \leq n$ has three steps as follows.

First, partition the $m \times n$ chessboard. If $m = 3$, then partition into one $3 \times k$ for some $k < n$, and many 3×4 chessboards. If $4 \leq m \leq 10$, then divide into two rectangular chessboards. For $m > 10$, divide into four quadrants.

Second, find closed knight's tours on each smaller rectangular chessboard.

Finally, combine all closed knight's tours on smaller chessboards to a closed knight's tour on the $m \times n$ chessboard.

In this section, we introduce the new algorithm to find a closed knight's tour on the $4s \times 4t$ chessboard where $s, t \geq 2$. Our algorithm does not divide the $4s \times 4t$ chessboard into two or four small chessboards. We start with the 8×8 chessboard and its closed knight's tour. The extension of the 8×8 chessboard to the $4s \times 4t$ chessboard is the combination of the small chessboard with four columns chessboard on the right-side or with four rows chessboard on the bottom of the 8×8 chessboard. While Lin and Wei's algorithm finds closed knight's tours on each smaller chessboard, our construction obtains cycles on small chessboards, 4×4 , 4×8 and 8×4 chessboards. Finally, connect each cycle with the closed knight's tour on the 8×8 chessboard to obtain a closed knight's tour on the combined chessboard.

For our construction, we give sequences of the knight's moves by labeling each square of the chessboard by numbers or letters. Thus, readers can consider cycle in appropriate direction by following each process of the construction from the smaller chessboards, 4×4 , 4×8 , 8×4 and 8×8 chessboards, and then obtain a Hamiltonian cycle or a closed knight's tour on $4s \times 4t$ chessboard where $s, t \geq 2$ as follows.

Process 1: Construct a closed knight's tour $C : 1-2-3-\cdots-64-1$ on the 8×8 chessboard as shown in Figure 2.1(a).

Process 2: Construct four 8-cycles on the 8×4 chessboard, called C_1, C_2, C_3 and C_4 where $C_1 : 1-2-3-4-5-6-7-8-1$, $C_2 : s-t-u-v-w-x-y-z-s$, $C_3 : A-B-C-D-E-F-G-H-A$, and $C_4 : a-b-c-d-e-f-g-h-a$, as shown in Figure 2.1(b).

1	50	5	54	7	58	19	60
4	53	2	63	30	61	8	57
49	64	51	6	55	20	59	18
52	3	48	29	62	31	56	9
27	44	25	38	21	34	17	32
24	47	28	41	14	39	10	35
43	26	45	22	37	12	33	16
46	23	42	13	40	15	36	11

(a)

1	s	A	a
B	b	2	t
z	8	h	H
c	C	u	3
7	y	G	g
D	d	4	v
x	6	f	F
e	E	w	5

(b)

Figure 2.1 (a) A closed knight's tour on the 8×8 chessboard
and (b) Four 8-cycles on the 8×4 chessboard

Process 3: Construct a closed knight's tour on the 8×12 chessboard from a closed knight's tour of the 8×8 chessboard and four 8-cycles of the 8×4 chessboard by

- putting the 8×8 chessboard on the left of the 8×4 chessboard,
- deleting edges 8-9, 16-17, 32-33, and 56-57 of C , 7-8 of C_1 , y - z of C_2 , D-E of C_3 , and d-e of C_4 , and
- joining 8 of C with z of C_2 , 9 of C with y of C_2 , 16 of C with E of C_3 , 17 of C with D of C_3 , 32 of C with d of C_4 , 33 of C with e of C_4 , 56 of C with 7 of C_1 , and 57 of C with 8 of C_1 , as shown in Figure 2.2.

1	50	5	54	7	58	19	60	1	s	A	a
4	53	2	63	30	61	8	57	B	b	2	t
49	64	51	6	55	20	59	18	z	8	h	H
52	3	48	29	62	31	56	9	c	C	u	3
27	44	25	38	21	34	17	32	7	y	G	g
24	47	28	41	14	39	10	35	D	d	4	v
43	26	45	22	37	12	33	16	x	6	f	F
46	23	42	13	40	15	36	11	e	E	w	5

Figure 2.2 A closed knight's tour on the 8×12 chessboard

Process 4: The $8 \times 4t$ chessboard, where $t \geq 4$, is obtained from the 8×12 chessboard and $t - 3$ copies of the 8×4 chessboards by putting 8×12 chessboard on the left of $t - 3$ consecutive copies of the 8×4 chessboards. We do two steps to obtain the $8 \times 4t$ chessboard.

4.1 Connect four 8-cycles of each of $t - 3$ consecutive of the 8×4 chessboard by

- for the i^{th} copy, deleting edges 3-4 of C_1 , $t-u$ of C_2 , G-H of C_3 and a-h of C_4 ,
- for the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, deleting edges 7-8 of C_1 , $s-z$ of C_2 , C-D of C_3 and b-c of C_4 , and
- joining 3 of the i^{th} copy with 8 of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, 4 of the i^{th} copy with 7 of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, t of the i^{th} copy with s of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, u of the i^{th} copy with z of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, H of the i^{th} copy with C of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, G of the i^{th} copy with D of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, a of the i^{th} copy with b of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, h of the i^{th} copy with c of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, as shown in Figure 2.3.

Then, the $8 \times 4(t - 3)$ chessboard is obtained from $t - 3$ copies of the 8×4 chessboard by joining each of $t - 3$ consecutive copies and it contains four cycles.

4.2 Connect a closed knight's tour on the 8×12 chessboard with four 8-cycles of the first copy of the 8×4 chessboard. Since the last four columns of the 8×12 chessboard is obtained from the 8×4 chessboard, we can use the algorithm in step 4.1 to obtain a closed knight's tour on the combined chessboards.

i^{th} copy								$(i+1)^{\text{th}}$ copy							
1	50	5	54	7	58	19	60	1	s	A	a	1	s	A	a
4	53	2	63	30	61	8	57	B	b	2	t	B	b	2	t
49	64	51	6	55	20	59	18	z	8	h	H	z	8	h	H
52	3	48	29	62	31	56	9	c	C	u	3	c	C	u	3
27	44	25	38	21	34	17	32	7	y	G	g	7	y	G	g
24	47	28	41	14	39	10	35	D	d	4	v	D	d	4	v
43	26	45	22	37	12	33	16	x	6	f	F	x	6	f	F
46	23	42	13	40	15	36	11	e	E	w	5	e	E	w	5

Figure 2.3 A closed knight's tour on the $8 \times 4t$ chessboard, where $t \geq 4$

Note that (i) when Process 4 ends, we obtain a closed knight's tour on the $8 \times 4t$ chessboard, and (ii) if we anti-clockwise rotate the 8×4 chessboard, we obtain the 4×8 chessboard, and also obtain four 8-cycles.

Process 5: Construct a closed knight's tour on the 12×8 chessboard from a closed knight's tour of the 8×8 and four 8-cycles of the 4×8 chessboards by

- deleting edges 11-12, 36-37, 22-23, and 42-43 of C , and 3-4 of C_1 , $t-u$ of C_2 , A-H of C_3 , and f-g of C_4
- joining 11 with f, 12 with g, 36 with 4, 37 with 3, 22 with H, 23 with A, 43 with t and 42 with u , as shown in Figure 2.4.

8 × 8	1	50	5	54	7	58	19	60
	4	53	2	63	30	61	8	57
	49	64	51	6	55	20	59	18
	52	3	48	29	62	31	56	9
	27	44	25	38	21	34	17	32
	24	47	28	41	14	39	10	35
	43	26	45	22	37	12	33	16
	46	23	42	13	40	15	36	11
4 × 8	a	t	H	3	g	v	F	5
	A	2	h	u	G	4	f	w
	s	b	8	C	y	d	6	E
	1	B	z	c	7	D	x	e

Figure 2.4 A closed knight's tour on the 12×8 chessboard

Process 6: Construct four 4-cycles on the 4×4 chessboard, called D_1 , D_2 , D_3 and D_4 where $D_1 : 1-2-3-4-1$, $D_2 : s-t-u-v-s$, $D_3 : A-B-C-D-A$, and $D_4 : a-b-c-d-a$, as shown in Figure 2.5.

1	s	A	a
B	b	2	t
v	4	d	D
c	C	u	3

Figure 2.5 Four 4-cycles on the 4×4 chessboard

Process 7: Construct four 12-cycles on the 4×12 chessboard from four 8-cycles of the 4×8 chessboard and four 4-cycles of the 4×4 chessboards by

- deleting edges 5-6 of C_1 , w-x of C_2 , E-F of C_3 and e-f of C_4 , and 1 – 4 of D_1 , s-v of D_2 , B-C of D_3 , and b-c of D_4

- joining F with B, E with C, e with 4, f with 1, 5 with b, 6 with c, w with s, x with v, as shown in Figure 2.6

a	t	H	3	g	v	F	5	1	s	A	a
A	2	h	u	G	4	f	w	B	b	2	t
s	b	8	C	y	d	6	E	v	4	d	D
1	B	z	c	7	D	x	e	c	C	u	3

4×8
 4×4

Figure 2.6 Four 12-cycles on the 4×12 chessboard

Process 8: The $4 \times 4t$ chessboard, where $t \geq 4$, is obtained from the 4×12 chessboard and $t - 3$ copies of the 4×4 chessboards by putting the 4×12 chessboard on the left of $t - 3$ consecutive copies of the 4×4 chessboards. We do two steps to obtain the $4 \times 4t$ chessboard.

8.1 Connect four 8-cycles of each of $t - 3$ consecutive copies of the 4×4 chessboards by

- for the i^{th} copy, deleting edges 2-3 of D_1 , t-u of D_2 , A-D of D_3 , a-d of D_4 ,
 - for the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, deleting edges 1 – 4 of D_1 , s-v of D_2 , B-C of D_3 , b-c of D_4 , and

- joining 2 of the i^{th} copy with 1 of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, 3 of the i^{th} copy with 4 of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, t of the i^{th} copy with s of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, u of the i^{th} copy with v

of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, A of the i^{th} copy with B of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, D of the i^{th} copy with C of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, a of the i^{th} copy with b of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, d of the i^{th} copy with c of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, as shown in Figure 2.7.

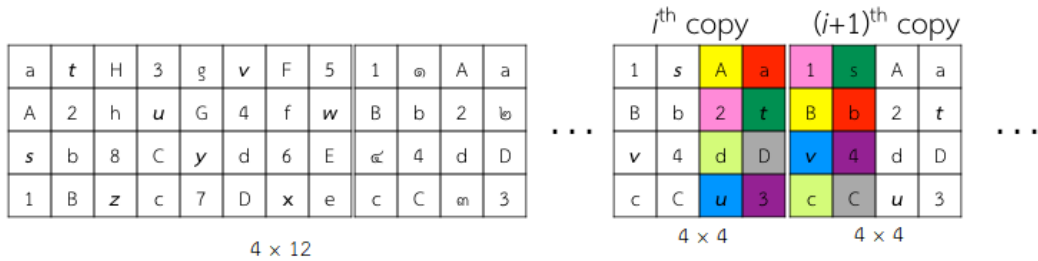


Figure 2.7 Four cycles on the $4 \times 4t$ chessboard

Then, the $4 \times 4(t - 3)$ chessboard is obtained from $t - 3$ copies of the 4×4 chessboard by joining each of $t - 3$ consecutive copies and it contains four cycles.

8.2 Connect four 12-cycles of the 4×12 chessboard with four 4-cycles of the first copy of the 4×4 chessboard. Since the last four columns of the 4×12 chessboard is obtained from the 4×4 chessboard, we can use the algorithm in step 8.1 to obtain four cycles on the combined chessboards.

Then, the $4 \times 4t$ chessboard contains four cycles.

Process 9: Construct a closed knight's tour on the $12 \times 4t$ chessboard, where $t \geq 2$. If $t = 2$, put the 8×8 chessboard on the top of the 4×8 chessboard. If $t = 3$, put the 8×12 chessboard on the top of the 4×12 chessboard. If $t \geq 4$, put the $8 \times 4t$ chessboard (in Process 4) on the top of the $4 \times 4t$ chessboard (in Process 8). Here, we note that the 8×12 chessboard and the $8 \times 4t$ chessboard, where $t \geq 4$, are obtained from the 8×8 chessboard. In either case,

- delete edges 11-12, 36-37, 22-23 and 42-43 of the 8×8 chessboard and edges f-g, 3-4, A-H and $t-u$ of the 4×8 chessboard, and
- join 11 with f, 12 with g, 36 with 4, 37 with 3, 22 with H, 23 with A, 43 with t and 42 with u, as shown in Figure 2.8.

of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, b of the i^{th} copy with a of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, c of the i^{th} copy with h of the $(i + 1)^{\text{th}}$ copy, as shown in Figure 2.9.

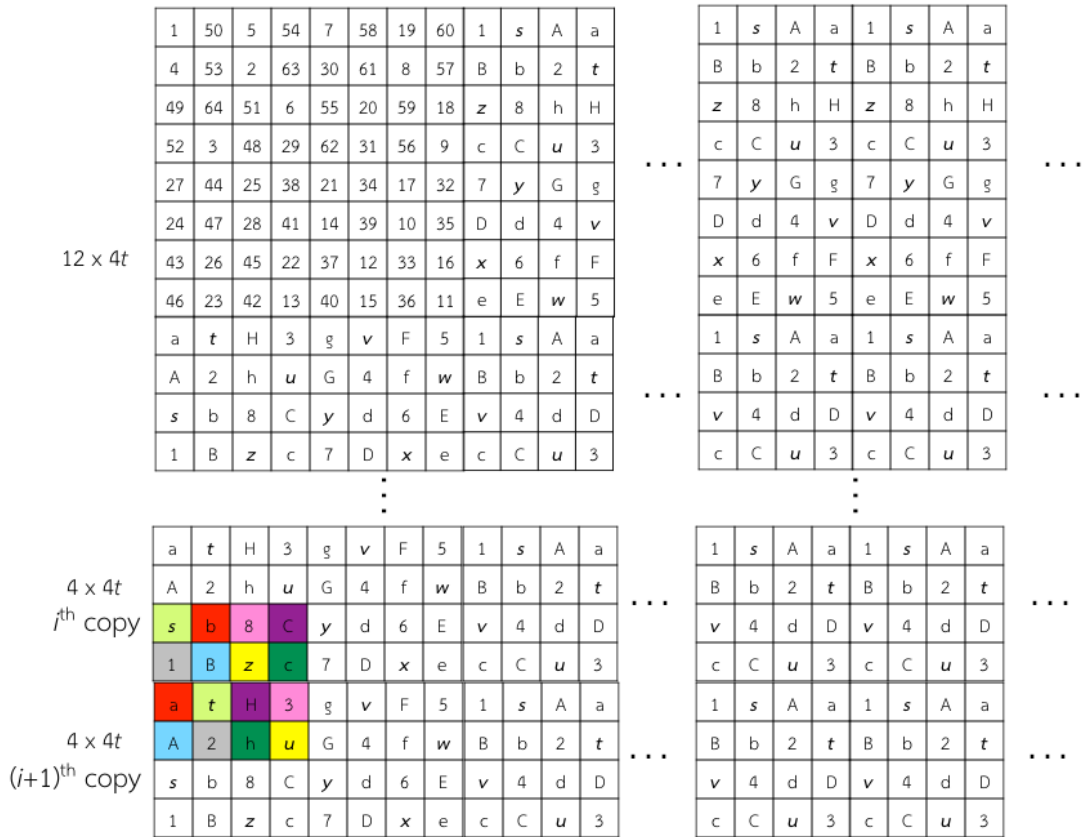


Figure 2.9 A closed knight's tour on the $4s \times 4t$ chessboard, when $s, t \geq 2$

10.2 Connect the closed knight's tour on the $12 \times 4t$ chessboard with four cycles of the first copy of the $4 \times 4t$ chessboard. Since the first eight columns of the $4 \times 4t$ chessboard is obtained from the 4×8 chessboard, we can use the algorithm in step 10.1 to obtain a closed knight's tour on the combined chessboards.

2.2 The Construction of a Closed $(1, 2, 2)$ -Knight's Tour of the $3r \times 4s \times 4t$ Chessboard, where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$

First, we use Algorithm 2.1 to construct a closed $(1, 2, 2)$ -knight's tour on the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard by using a closed knight's tour in Section 2.1. In Figure 2.10,

the closed knight's tours C from Section 2.1 are shown in the first and the third levels of the $3 \times 8 \times 8$ chessboard. Thus, we may say that small cubes of the $3 \times 8 \times 8$ chessboard are named by numbers of the closed knight's tour. In the second level, the number with a circle, $\textcircled{x}$, is the position (obtained by Algorithm 2.1(iii)) that the knight can move to cube x in the first level or cube x in the third level by an (1, 2, 2)-knight's move. Also, by Algorithm 2.1 (iii), for each number x in the first level we obtain a path $P_x : x - \textcircled{x} - x - (x+1)$, where the first x and $(x+1)$ in P_x are in the first level and x after $\textcircled{x}$ in P_x is in the third level. Connect each path P_x , we obtain a Hamiltonian cycle or a closed (1, 2, 2)-knight's tour C^* . In Figure 2.10, a closed (1, 2, 2)-knight's tour C^* is

$$1 - \textcircled{1} - 1 - 2 - \textcircled{2} - 2 - 3 - \textcircled{3} - 3 - \dots - 64 - \textcircled{64} - 64 - 1.$$

Next, we extend the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard, where $s, t \geq 2$, to the $3r \times 4s \times 4t$ chessboard, where $r > 1$ and $s, t \geq 2$, we use r copies of the closed (1, 2, 2)-knight's tour C^* of the $3 \times 4s \times 4t$ chessboard by putting each copy from the top to the bottom. We do the following.

- Delete edge $(2, 3, 3) - (3, 1, 1)$ of the i^{th} copy and edge $(1, 4, 1) - (2, 2, 3)$ of the $(i+1)^{\text{th}}$ copy for all $i = 1, 2, 3, \dots, r-1$.
- Join $(2, 3, 3)$ of the i^{th} copy with $(1, 4, 1)$ of the $(i+1)^{\text{th}}$ copy and $(3, 1, 1)$ of the i^{th} copy with $(2, 2, 3)$ of the $(i+1)^{\text{th}}$ copy for all $i = 1, 2, 3, \dots, r-1$.

In Figure 2.10, edges $\textcircled{1} - 1$ of the first copy and $52 - \textcircled{52}$ of the second copy are deleted and then join $\textcircled{1}$ with 52 and 1 with $\textcircled{52}$.

Then, we obtain a closed (1, 2, 2)-knight's tour on the $3r \times 4s \times 4t$ chessboard where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$ in the following theorem.

Theorem 2.1 Suppose $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$. Then, the $3r \times 4s \times 4t$ chessboard admits a closed (1, 2, 2)-knight's tour.

3. Conclusion

This paper shows a closed $(1, 2, 2)$ -knight's tour on the $3r \times 4s \times 4t$ chessboard, where $r \geq 1$ and $s, t \geq 2$. This research extends the result of Bai et. al. [1] from $r = 1$ to $r > 1$. However, this is a special case of the $k \times m \times n$ chessboard where k, m and n are positive integers. The remaining cases are open problems. Moreover, we shall mention that the condition $k \leq m \leq n$ is quoted for the existence of a closed $(1, 2, 2)$ -knight's tour on the $k \times m \times n$ chessboard in Theorem 1.3, while our result in Theorem 2.1 does not give the relation between r, s and t . There are no problems because of our construction.

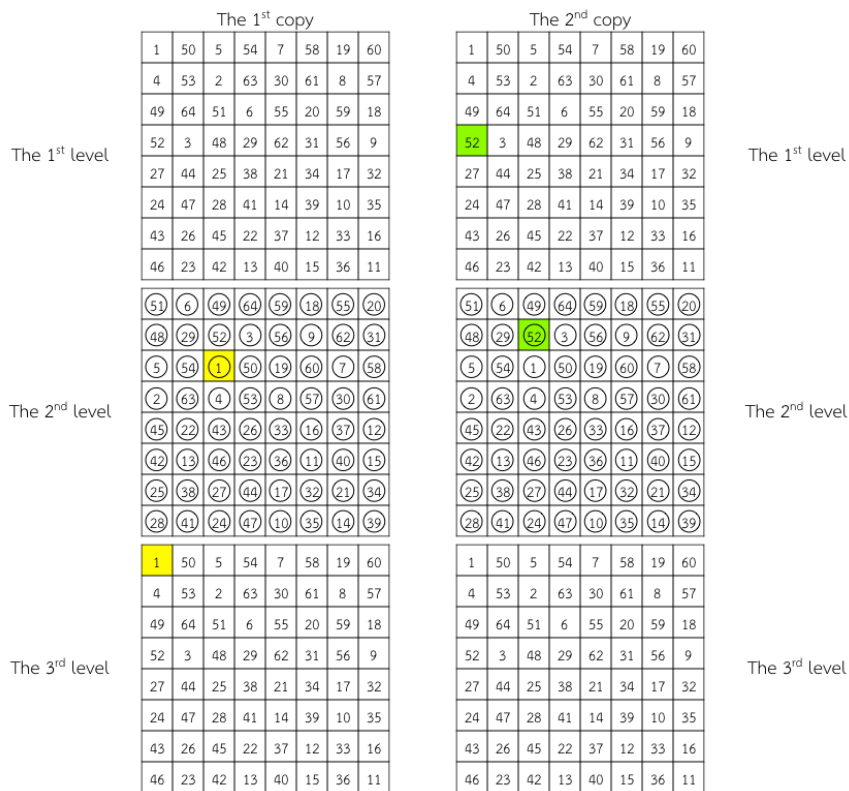


Figure 2.10 A closed $(1, 2, 2)$ -knight's tour on the $6 \times 8 \times 8$ chessboard

References

- [1] Bai, S., Yang, X.-F., Zhu, G.-B., Jiang, D.-L. and Huang, J. (2010). Generalized Knight's Tour on 3D Chessboards. *Discrete Applied Mathematics*, 158 (16), p. 1727 - 1731.
- [2] Chia, G.L. and Ong, S-H. (2005). Generalized Knight's Tours on Rectangular Chessboards. *Discrete Applied Mathematics*, 150, p. 80 - 98.
- [3] Lin, S.-S. and Wei, C.-L. (2005). Optimal Algorithms for Constructing Knight's Tour on Arbitrary $n \times m$ Chessboards. *Discrete Applied Mathematics*, 146, p. 219 - 232.
- [4] Schwenk, A.J. (1991). Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?. *Mathematics Magazine*, 64(5), p. 325 - 332.

หมายเหตุ ท่านสามารถอ่านบทความที่มีภาพประกอบเป็นภาพสีที่มีความละเอียดสูง ได้ที่
<https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/article/view/210559> หรือ





วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(701) พฤษภาคม – สิงหาคม 2563

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล

The Numbers on a Pascal-Like Triangle

วรเชษฐ สมมะณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ เชียงใหม่ 50300

Worachead Sommanee

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Chiang Mai Rajabhat University, Chiang Mai 50300

Email: worachead_som@cmru.ac.th

วันที่รับบทความ : 3 ตุลาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 18 ธันวาคม 2562

วันที่ตอบรับบทความ : 5 มีนาคม 2563

บทคัดย่อ

ในปี ค.ศ.2014 Chen ได้สร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลเพื่อใช้ในการหาสูตรของผลบวกกำลัง
ในรูป $\sum_{i=1}^n i^k$ ในบทความวิจัยนี้เราศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวน
บนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen ยิ่งไปกว่านั้นเราได้หาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยม
คล้ายปาสกาลดังกล่าว

คำสำคัญ: รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง

ABSTRACT

In 2014, Chen constructed a Pascal-like triangle for finding the formula of power sums of the form $\sum_{i=1}^n i^k$. In this paper, we investigate a relationship between the Stirling

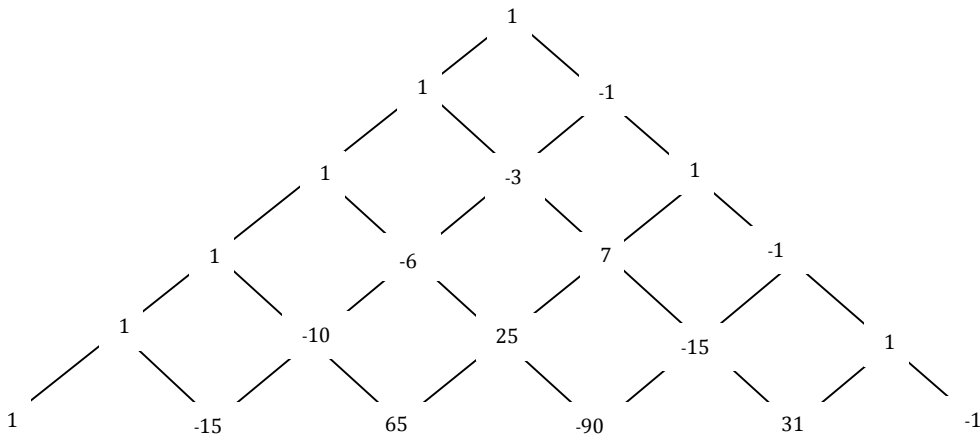
numbers of the second kind and the numbers on the Chen's Pascal-like triangle. Moreover, we find the formula of the numbers on such the Pascal-like triangle.

Keywords: Pascal-like triangle, Stirling number of the second kind

1. บทนำ

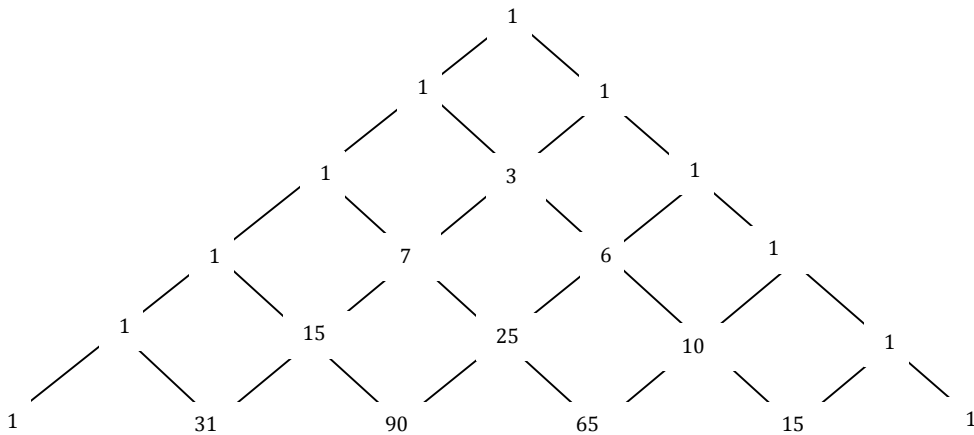
รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล (Pascal-like triangle) ถูกสร้างขึ้นมาโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ซึ่งรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลเหล่านั้นมีรูปแบบและลักษณะการนิยามที่แตกต่างกัน (ผู้อ่านสามารถดูตัวอย่างได้จาก [1], [2], [4] และ [5])

ในปี ค.ศ. 2014 Chen [2] ได้ศึกษาสูตรของผลบวกกำลังในรูป $\sum_{i=1}^n i^k$ โดยเขาได้สร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลซึ่งสามารถนำมาช่วยในการคำนวณหาผลบวกกำลังได้ง่ายขึ้น



รูปที่ 1.1 รูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen (แสดง 6 แถวแรก)

ผู้อ่านสามารถดูวิธีการสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen ได้ใน [2] นอกจากนี้ผู้เขียนยังได้ให้หมายเหตุที่สำคัญไว้ว่าหากเรานำเครื่องหมายลบทั้งหมดในรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าวออก จะปรากฏจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Stirling number of the second kind) ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 รูปสามเหลี่ยมสำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (แสดง 6 แถวแรก)

ทั้งนี้ผู้อ่านสามารถศึกษาการสร้างรูปสามเหลี่ยมสำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองได้จาก [3, หน้า 112]

ในบทความวิจัยนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen พร้อมทั้งหาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าว

2. ความรู้เบื้องต้นและสัญลักษณ์

กำหนดให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \leq k \leq n$ และให้จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาล ตัวที่ k ของแถวที่ n เขียนแทนด้วย $a_{n,k}$ โดยการสร้างจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลในรูปที่ 1.1 จะได้ว่า

$$a_{n,1} = 1, \quad a_{n,n} = (-1)^{n+1} \quad \text{สำหรับทุก } n \quad (2.1)$$

และ

$$a_{n,k} = (-n+k-1)a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} \quad \text{สำหรับ } 1 < k < n \quad (2.2)$$

ในบทความวิจัย [2] ผู้เขียนได้แสดงว่า $\sum_{i=1}^n i^m = \sum_{j=1}^m a_{m,j} \frac{n(n+1) \cdots (n+m-j+1)}{m-j+2}$

บทนิยาม 2.1 จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Stirling number of the second kind) คือ จำนวนผลแบ่งกัน (partition) ที่แตกต่างกันทั้งหมดของเซตที่มีสมาชิก n ตัว โดยแบ่งเป็น k ส่วน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $S(n, k)$ เมื่อ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \leq k \leq n$

ผู้อ่านสามารถศึกษาตัวอย่างและสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง ได้จาก [3] และ [6]

ทฤษฎีบท 2.1 [3, Theorem 37]

1. $S(n, n) = S(n, 1) = 1$ สำหรับ $n \geq 1$
2. $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ สำหรับ $n \geq 2$
3. $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ สำหรับ $n \geq 2$

ทฤษฎีบท 2.2 [3, Theorem 38] $S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$ สำหรับ $1 \leq k \leq n$

ทฤษฎีบท 2.3 [6, หน้า 118] $S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n$ สำหรับ $1 \leq k \leq n$

สูตรในทฤษฎีบท 2.3 เรียกว่าสูตรออยเลอร์สำหรับจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Euler's formula for Stirling numbers of the second kind)

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 2.3 เราจะเห็นว่า

$$S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n \text{ สำหรับ } 1 \leq k \leq n \quad (2.3)$$

3. จำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สองกับจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen พร้อมทั้งหาสูตรของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลดังกล่าว

บทตั้ง 3.1 $S(n, 2) = (-1)^n a_{n, n-1}$ สำหรับ $n \geq 2$

บทพิสูจน์ จะพิสูจน์โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

สังเกตได้ว่า $S(2, 2) = 1 = (-1)^2 (1) = (-1)^2 a_{2, 1} = (-1)^2 a_{2, 2-1}$

ให้ $r \geq 2$ และสมมติให้ $S(r, 2) = (-1)^r a_{r, r-1}$ (*)

เราจะแสดงว่า $S(r+1,2) = (-1)^{r+1}a_{r+1,r}$

โดยทฤษฎีบท 2.2 สมการ (*) และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 1 ได้ว่า

$$S(r+1,2) = 2S(r,2) + S(r,1) = 2(-1)^r a_{r,r-1} + 1$$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ (2.2) และ (2.1) ได้ว่า } (-1)^{r+1}a_{r+1,r} &= (-1)^{r+1}((-r-1+r-1)a_{r,r-1} + a_{r,r}) \\ &= (-1)^{r+1}((-2)a_{r,r-1} + (-1)^{r+1}) \\ &= 2(-1)^r a_{r,r-1} + 1 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $S(r+1,2) = (-1)^{r+1}a_{r+1,r}$

เพราะฉะนั้น $S(n,2) = (-1)^n a_{n,n-1}$ สำหรับ $n \geq 2$ □

ทฤษฎีบท 3.2 $S(n,k) = (-1)^{n+k} a_{n,n-k+1}$ สำหรับ $1 \leq k \leq n$ ทุก $n \geq 1$

บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 1$ ถ้า $k=1$ จะได้ว่า

$$S(n,1) = 1 = (-1)^{2(n+1)} = (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}a_{n,n} = (-1)^{n+1}a_{n,n-1+1}$$

และถ้า $k=n$ แล้วจะได้ $S(n,n) = 1 = (1)(1) = (-1)^{2n}a_{n,1} = (-1)^{n+n}a_{n,n-n+1}$

ดังนั้น $S(n,k) = (-1)^{n+k} a_{n,n-k+1}$ เมื่อ $k=1$ หรือ $k=n$

ต่อไปกำหนดให้ $1 < k < n$ ซึ่งเป็นผลให้ $n \geq 3$

จะพิสูจน์โดยการใช้องรูปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า

$$S(n,k) = (-1)^{n+k} a_{n,n-k+1} \text{ สำหรับ } 1 < k < n \text{ ทุก } n \geq 3$$

พิจารณากรณี $n=3$ จะเห็นว่า ถ้า $1 < k < n=3$ แล้ว $k=2$

$$\text{จะได้ว่า } S(3,2) = 3 = (-1)(-3) = (-1)^5 a_{3,2} = (-1)^{3+2} a_{3,3-2+1}$$

ให้ $r \geq 3$ และสมมติให้ $S(r,k) = (-1)^{r+k} a_{r,r-k+1}$ สำหรับ $1 < k < r$ (**)

เราจะแสดงว่า $S(r+1,k) = (-1)^{r+k+1} a_{r+1,r-k+2}$ สำหรับ $1 < k < r+1$

สำหรับกรณี $k=2$ โดยบทตั้ง 3.1 จะได้ $S(r+1,2) = (-1)^{r+1} a_{r+1,r+1-1} = (-1)^{r+2+1} a_{r+1,r-2+2}$

สำหรับกรณี $k=r$ โดยทฤษฎีบท 2.2 ทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 1 และสมการ (**) ได้ว่า

$$S(r+1,r) = rS(r,r) + S(r,r-1) = r(1) + (-1)^{r+(r-1)} a_{r,r-(r-1)+1} = r - a_{r,2}$$

โดยสมการ (2.2) และ (2.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (-1)^{r+r+1}a_{r+1,r-r+2} &= (-1)^{2r+1}a_{r+1,2} = (-1)((-r-1+2-1)a_{r+1-1,2-1} + a_{r+1-1,2}) \\ &= -(-ra_{r,1} + a_{r,2}) = r - a_{r,2} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $S(r+1, r) = (-1)^{r+r+1} a_{r+1, r-r+2}$

สำหรับกรณี $2 < k < r$ สังเกตได้ว่า $1 < k-1 < r-1$

โดยทฤษฎีบท 2.2 และสมการ (**) ได้ว่า

$$S(r+1, k) = kS(r, k) + S(r, k-1) = k(-1)^{r+k} a_{r, r-k+1} + (-1)^{r+k-1} a_{r, r-k+2}$$

โดยสมการ (2.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (-1)^{r+k+1} a_{r+1, r-k+2} &= (-1)^{r+k+1} ((-r-1+r-k+2-1)a_{r, r-k+1} + a_{r, r-k+2}) \\ &= k(-1)^{r+k} a_{r, r-k+1} + (-1)^{r+k+1} a_{r, r-k+2} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $S(r+1, k) = (-1)^{r+k+1} a_{r+1, r-k+2}$ สำหรับ $2 < k < r$

ดังนั้น $S(n, k) = (-1)^{n+k} a_{n, n-k+1}$ สำหรับ $1 < k < n$ □

บทแทรก 3.3 $a_{n, k} = (-1)^{k+1} S(n, n-k+1)$ สำหรับ $1 \leq k \leq n$ ทุก $n \geq 1$

บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 1$ และ $1 \leq k \leq n$ สังเกตว่า $1 \leq n-k+1 \leq n$

โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $S(n, n-k+1) = (-1)^{n+n-k+1} a_{n, n-(n-k+1)+1} = (-1)^{-(k+1)} a_{n, k}$

ดังนั้น $a_{n, k} = (-1)^{k+1} S(n, n-k+1)$ □

บทแทรก 3.4 $a_{n, k} = \frac{(-1)^n}{(n-k+1)!} \sum_{j=1}^{n-k+1} (-1)^j \binom{n-k+1}{j} j^n$ สำหรับ $1 \leq k \leq n$ ทุก $n \geq 1$

บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 1$ และ $1 \leq k \leq n$ โดยบทแทรก 3.3 และสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_{n, k} &= (-1)^{k+1} S(n, n-k+1) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} \sum_{j=1}^{n-k+1} (-1)^j \binom{n-k+1}{j} j^n \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-k+1)!} \sum_{j=1}^{n-k+1} (-1)^j \binom{n-k+1}{j} j^n \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.1 ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการหาค่าของ $a_{6,3}$ โดยใช้สูตรในบทแทรก 3.4

$$a_{6,3} = \frac{(-1)^6}{(6-3+1)!} \sum_{j=1}^{6-3+1} (-1)^j \binom{6-3+1}{j} j^6 = 65$$

จากรูปที่ 1.1 จะเห็นว่า $a_{6,3}$ มีค่าเป็น 65 ตรงกับค่าที่คำนวณได้จากสูตรในบทแทรก 3.4

บทแทรก 3.5 $a_{n,2} = -\binom{n}{2}$ สำหรับ $n \geq 2$

บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 2$ โดยบทแทรก 3.3 และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$a_{n,2} = (-1)^{2+1} S(n, n-2+1) = -S(n, n-1) = -\binom{n}{2} \quad \square$$

บทแทรก 3.6 $a_{n,n-1} = (-1)^n (2^{n-1} - 1)$ สำหรับ $n \geq 2$

บทพิสูจน์ ให้ $n \geq 2$ โดยบทแทรก 3.3 และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$a_{n,n-1} = (-1)^{n-1+1} S(n, n-(n-1)+1) = (-1)^n S(n, 2) = (-1)^n (2^{n-1} - 1) \quad \square$$

ข้อสังเกต ผู้เขียนขอนิยาม $C(n)$ เป็นผลบวกของจำนวนบนรูปสามเหลี่ยมคล้ายปาสกาลของ Chen

ในแถวที่ n นั่นคือ $C(n) = \sum_{k=1}^n a_{n,k}$ เช่น $C(1)=1$, $C(2)=1+(-1)=0$, $C(3)=1+(-3)+1=-1$,

$C(4)=1$, $C(5)=2$ และ $C(6)=-9$ จากตัวอย่างจะเห็นว่าลำดับของ $C(n)$ มีลักษณะคล้ายกับ

จำนวนเบลเต็มเต็ม (complementary Bell number) B_n โดยนิยาม $B_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k S(n, k)$ และ

มีลำดับเป็น $-1, 0, 1, 1, -2, -9, -9, \dots$ (สำหรับ $n \geq 1$) ผู้อ่านสามารถดูลำดับของ B_n เพิ่มเติมได้ใน

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS A000587) [7] จากตัวอย่างผู้เขียน

คาดว่า $C(n) = (-1)^n B_n$ ดังนั้นผู้ที่สนใจสามารถทำการศึกษาข้อสมมติฐานดังกล่าวได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Bayat, M., Teimoori, H., and Khatami, Z. (2014). Pascal-like Triangle and Pascal-like Functional Matrix. *Journal of Mathematical Extension*, 7, p. 67 - 82.
- [2] Chen, Z. (2014). A Pascal-like Triangle From Finding Power Sums. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(6), p. 932 - 938.
- [3] Cohen, D. I. (1978). *Basic Techniques of Combinatorial Theory* (No. 04; QA164, C6.). Michigan: John Wiley and Sons Ltd.
- [4] Matsui, H., Minematsu, D., Yamauchi, T., and Adera, R. M. (2010). Pascal-like Triangles and Fibonacci-like Sequences. *The Mathematical Gazette*, 94(529), p. 27 - 41.
- [5] Neal, D. (1994). The Series and a Pascal-like Triangle. *The College Mathematics Journal*, 25(2), p. 99 - 101.

- [6] Quaintance, J., and Gould, H. W. (2015). *Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of H.W. Gould*. World Scientific.
- [7] Sloane, N. J. A. (2020). *Rao Uppuluri-Carpenter (or Complementary Bell number)*. Retrieved January 24, 2020, from <http://oeis.org/A000587>.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้ ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ สรุป เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1

2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาต ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ เป็นภาพวาดคำ และลายเส้นต่าง ๆ ให้ใช้เส้นสีดำ ทั้งนี้ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับได้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป” เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ “ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกของนามสกุลที่ปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทย ก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

ประเภทของสมาชิก

สมาชิกมี 3 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ สมาชิกสามัญ และสมาชิกวารสาร

● สมาชิกสามัญ สำหรับผู้ที่มีความสนใจ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิระดับเครื่องหมายของสมาคมฯ
2. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

● สมาชิกวารสาร สำหรับบุคคลหรือหน่วยงานที่มีความสนใจวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ เป็นประจำ

สิทธิของสมาชิกวารสาร

1. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
2. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นอันเป็นประโยชน์ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
3. มีสิทธิได้รับความช่วยเหลือในทางการศึกษาคณิตศาสตร์ หรือความช่วยเหลือในประการอื่นใด เท่าที่คณะกรรมการบริหารสมาคมฯ จะจัดทำได้

ค่าสมัครสมาชิก ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท

ค่าสมาชิกสามัญ	ค่าสมาชิกวารสาร	วาระการเป็นสมาชิก (สามัญรายปี และวารสาร)
ตลอดชีพ 3,000 บาท	250 บาทต่อปี	เริ่มในวันที่ 1 พฤษภาคม ของทุกปี
รายปี 250 บาท		และสิ้นสุดในวันที่ 30 เมษายน ของปีต่อไป

ดาวน์โหลด ใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

<http://www.mathassociation.net> หัวข้อ “สมัคร”

ใบสมัครสมาชิก

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

☐ สมาชิกใหม่

☐ ต่ออายุ เลขที่สมาชิกเดิม.....

วันที่ เดือน พ.ศ.

ข้าพเจ้า (ชื่อ-นามสกุล) อาชีพ

เบอร์โทรศัพท์ อีเมล

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท)

☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)

☐ สมาชิกวารสาร (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน - 30 - บาท

รวมเป็นเงิน บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์ เลขที่บัญชี 162-0-25671-1

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับจัดส่งวารสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ซอย หมู่ที่

ถนน ตำบล อำเภอ

จังหวัด รหัสไปรษณีย์

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....

รับเงินค่าสมาชิกจำนวน

วันที่

ลงนาม..... ผู้สมัคร

(.....)

ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน มาที่

(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตูป.ณ. 2022 ปณ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332

หรือ (ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบ

ทำบุญสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี 2563



เมื่อวันศุกร์ที่ 22 พฤษภาคม พ.ศ.2563 เวลา 07.00 น. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์ นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ และกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดงานทำบุญ ถวายภัตตาหารเพล ถวายสังฆทาน และปัจจัย แต่พระภิกษุสงฆ์จำนวน 9 รูป ณ ตึกวชิราลงกรณ์ โรงพยาบาลจุฬาลงกรณ์ สภากาชาดไทย เนื่องในโอกาสวันคล้ายวันก่อตั้งสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ และทำบุญอุทิศส่วนกุศลให้กับกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ที่ล่วงลับไปแล้ว



กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2563
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการ
ในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของ
สมาคมที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารและหนังสือวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่ม 2) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
 - Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี
2. อบรมครูคณิตศาสตร์ภาคฤดูร้อน ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา
 - งดการอบรม ประจำปี พ.ศ. 2563 --
3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
 - งดการสอบ ประจำปี พ.ศ. 2563 --
4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี (AMM) ครั้งที่ 25 ประจำปี พ.ศ. 2563
โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ
ซึ่งมี คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เป็นเจ้าภาพ
 - งดการประชุม ประจำปี พ.ศ. 2563 --
5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทย
เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริม
การสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
 - งดประกวดโครงงาน ประจำปี พ.ศ. 2563 --
 - ประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 9
(The 9th Undergraduate in Applied Mathematics Conference (UAMC))
โดยมี ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
เป็นเจ้าภาพ
 - เลื่อนการประชุม อย่างไม่มีกำหนด --

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาชิรณิศา คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทรศัพท์ และโทรสาร 02-252-7980

