



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand  
Under The Patronage of His Majesty The King

# วารสารคณิตศาสตร์

## Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๓ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๔

Volume 66 Number 703 January – April 2021

### บทความทั่วไป *General Article*

ดิสเล็กเซียกับการเรียนคณิตศาสตร์

1

Dyslexia with Mathematics Learning

เชมจิรา เทียงอยู่

### บทความวิจัย *Research Article*

ไบเบสของกึ่งไฮเพอร์กรุ๊ป

14

On Bi-Bases of Semihypergroups

เอกชัย อุดม จิตติกร โชคชัย และ ลำคัญ ฮ่อบรรทัด

ลำดับโมเบียส

32

Mobius Sequences

สมพงษ์ นุญสุริฉาย และ ลลิตา อภิสรพาณิชย์

สูตรจำนวนจุดตรึงของไดกราฟที่เกิดจากความสัมพันธ์  $a^b \equiv b \pmod n$  และการวางนัยทั่วไปบางแบบ 42

Formula for Number of Fixed Points of Digraph Arising from The Relation  $a^b \equiv b \pmod n$

And Some Generalization

รตินันท์ บุญเคลือบ และ วิภาวี คุณานพรัตน์

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง  $7^x - 5^y = z^2$

62

The Solution of The Exponential Diophantine Equation  $7^x - 5^y = z^2$

สุทธวิวัฒน์ ทองนาท วาเรียม ช่วยจันทร์ และ ชีรเดช เกื้อวงศ์



วารสารคณิตศาสตร์

ISSN 0858-4788

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๓ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๔

*Mathematical Journal*

*by The Mathematical Association of Thailand*

*Under The Patronage of His Majesty The King*

*Volume 66 Number 703 January – April 2021*

**ที่ปรึกษา** นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์)

**หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร**

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

**กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร**

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

**สถานที่ติดต่อ** สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาชิรฐานิศา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

**พิมพ์ที่** สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร 0-2218-3562 ถึง 63

<http://www.cuprint.chula.ac.th>

## คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

### สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ เป็นวารสารทางวิชาการที่จัดทำขึ้นเพื่อตีพิมพ์ เผยแพร่บทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับวงการคณิตศาสตร์ ตลอดจนเป็นพื้นที่ให้นักวิชาการและบุคคลทั่วไปได้ติดตามและพัฒนางานวิชาการ เพื่อการพัฒนาด้านคณิตศาสตร์อย่างเป็นรูปธรรม

วารสารคณิตศาสตร์ ฉบับนี้ประกอบด้วย บทความทั่วไป 1 เรื่อง และบทความวิจัย 4 เรื่อง ในโอกาสนี้ กองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์ ขอขอบพระคุณ นักวิชาการ และผู้สนับสนุนทุกท่านที่ส่งผลงานมาตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ หากท่านมีข้อเสนอแนะ หรือติชมเกี่ยวกับวารสาร สามารถส่งข้อเสนอแนะได้ทางอีเมล MathThaiOrg@gmail.com และขอเชิญชวนทุกท่านในแวดวงคณิตศาสตร์ ส่งบทความวิจัย บทความวิชาการ หรือบทความทั่วไป ที่ไม่เคยตีพิมพ์ที่ใดมาก่อน ผ่านระบบออนไลน์ของวารสารที่ <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH> ทั้งนี้ผู้ใช้ระบบไม่ต้องเสียค่าใช้จ่ายใด ๆ ทั้งสิ้น

ด้วยสถานการณ์การแพร่ระบาดของโรคติดเชื้อไวรัสโคโรนา 2019 “COVID-19” งานเทศกาลสงกรานต์ 2564 นี้ ทุกคนอาจจะต้องปรับตัว ลดงานรื่นเริง การรวมกลุ่มกันขนาดใหญ่ เพื่อร่วมป้องกันไม่ให้เกิดการระบาดของโรคขยายตัวเพิ่มมากขึ้น สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ขอส่งความปรารถนาดีมายังสมาชิกทุกท่าน ขอให้มีความสุข ก้าวผ่านช่วงเวลาที่ยากลำบากนี้ด้วยกัน ขอเป็นกำลังใจให้ทุกท่าน ขอให้สิ่งที่ไม่ดีผ่านไปเร็ว ๆ แล้วสิ่งดี ๆ เข้ามาแทนที่โดยเร็ว

### กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ  
รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล  
ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์

### กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- |                                   |                                                |
|-----------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช        | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย                          |
| 2. รศ. ดร.ณัฐชัย สีนาวงค์         | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.นพพร แหยมแสง            | มหาวิทยาลัยรามคำแหง                            |
| 4. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี          |
| 5. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง          | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์                         |
| 6. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์   | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย                          |
| 7. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงค์         | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ     |

### กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- |                                 |                                                |
|---------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี         | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย                          |
| 2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช     | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์                   |
| 3. ศ. ดร.ไพศาล นาคมหาชาสินธุ์   | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย                          |
| 4. รศ. ดร.กาญจน์ภา อมรชกุล      | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์                   |
| 5. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา         | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์                         |
| 6. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์  | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่                           |
| 7. รศ. ดร.พิรยุทธ์ ชาญเศรษฐีกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์                         |
| 8. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ      | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ     |
| 9. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ          | มหาวิทยาลัยศิลปากร                             |
| 10. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม     | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 11. ผศ. ดร.ศิริรัตน์ สิงห์ตัน   | มหาวิทยาลัยรามคำแหง                            |
| 12. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิแก้ว       | มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์                          |
| 13. ผศ. ดร.สุรียพร ชาวแพรงน้อย  | มหาวิทยาลัยนเรศวร                              |
| 14. ผศ. ดร.มณฑิรา ดวงสาพล       | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์                          |
| 15. ผศ. ดร.เอื้ออารี บุญเพิ่ม   | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์                          |
| 16. นายพิเชฐ เจียรณณิทวีสิน     | นายกสมาคมนักคณิตศาสตร์ประกันภัย                |

---

**รายชื่อคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์**  
**ประจำปี 2562 - 2563**

|                                                                       |                                      |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. ผศ.รจิต วัฒนสินธุ์                                                 | นายกสมาคม                            |
| 2. อ. ดร.ฉวีวรรณ กิรติกร                                              | อุปนายก                              |
| 3. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงค์                                             | กรรมการและเลขาธิการ                  |
| 4. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์                                       | กรรมการและรองเลขาธิการ               |
| 5. ผศ.ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ                                              | กรรมการและเหรัญญิก                   |
| 6. รศ.สุรวิทย์ ต้นเต่งผล                                              | กรรมการและผู้ช่วยเหรัญญิก            |
| 7. ผศ.ลออ ชนวิริยะ                                                    | กรรมการและผู้ช่วยเหรัญญิก            |
| 8. ผศ.वासना สุขกระสานติ                                               | กรรมการและบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์ |
| 9. ว่าที่ ร.อ. ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์                               | กรรมการและประชาสัมพันธ์              |
| 10. อ. ดร.รุ่งฟ้า จันท์จากรุณ                                         | กรรมการและผู้ช่วยประชาสัมพันธ์       |
| 11. รศ.ภรณ์ เจริญภักตร์                                               | กรรมการและปฏิคม                      |
| 12. รศ. ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์                                           | กรรมการและฝ่ายดูแลเว็บไซต์           |
| 13. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช                                           | กรรมการ                              |
| 14. รศ. ดร.ฉัฐไชย์ สีนาวงค์                                           | กรรมการ                              |
| 15. รศ. ดร.นพพร แหยมแสง                                               | กรรมการ                              |
| 16. รศ. ดร.พัชรา ไชยสุริยา                                            | กรรมการ                              |
| 17. รศ. ดร.วิชาญ ลีวเกียรติกุล                                        | กรรมการ                              |
| 18. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์                                    | กรรมการ                              |
| 19. รศ. ดร.ศจี เพียรสกุล                                              | กรรมการ                              |
| 20. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง                                             | กรรมการ                              |
| 21. รศ. ดร.อมร वासनावิจิตร                                            | กรรมการ                              |
| 22. รศ. ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์                                           | กรรมการ                              |
| 23. รศ.ศรีเสงี่ยม จักรใจ                                              | กรรมการ                              |
| 24. ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์                                          | กรรมการ                              |
| 25. อ.นวลน้อย เจริญผล                                                 | กรรมการ                              |
| 26. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)    | กรรมการ                              |
| 27. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART) | กรรมการ                              |

## กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ ที่จัดทำขึ้นโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นภาษาไทยหรือภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

### กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณ และเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้นจึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

|                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ชื่อวารสาร<br>(ภาษาไทย)                | <b>วารสารคณิตศาสตร์</b><br>โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| ชื่อวารสาร<br>(ภาษาอังกฤษ)             | <b>Mathematical Journal</b><br>by The Mathematical Association of Thailand<br>Under The Patronage of His Majesty The King                                                                                                                                                                                                                                               |
| กำหนดการเผยแพร่                        | ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน<br>ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม<br>ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| ขอบเขตของบทความที่จะรับตีพิมพ์ในวารสาร | บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น <ul style="list-style-type: none"> <li>• วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี</li> <li>• เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย</li> <li>• บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน</li> <li>• วิศวกรรมศาสตร์</li> </ul> และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง |

|                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การพิจารณา<br>กลั่นกรองบทความ<br>ของวารสาร | ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณาจากกลั่นกรองจาก<br>ผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้อง โดยผู้ทรงคุณวุฒิไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับ<br>ผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จาก<br>ผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ<br>จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด                                                                                                                                                                                       |
| ข้อตกลงการส่ง<br>บทความ                    | บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่อยู่<br>ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น<br>บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรพอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และ<br>ภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตามข้อกำหนดใน<br>การจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด                                                                                                                                                                                                             |
| ลิขสิทธิ์วารสาร                            | เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์<br>ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่ง<br>กองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ<br>บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสาร<br>คณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือ<br>หน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือ<br>กระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคม<br>คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น |

### การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่  
[www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH](http://www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH) หัวข้อ user\_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตาม  
 ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้น  
 อัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อม  
 ไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความ  
 MJMATH.docx) ขึ้นที่ ระบบการส่งบทความ ที่ <https://www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการ  
 ได้ที่อีเมล [MathThaiOrg@gmail.com](mailto:MathThaiOrg@gmail.com)







สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand  
Under The Patronage of His Majesty The King

# วารสารคณิตศาสตร์

## Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๓ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๔

Volume 66 Number 703 January – April 2021

### บทความทั่วไป *General Article*

ดิสเล็กเซียกับการเรียนคณิตศาสตร์

1

Dyslexia with Mathematics Learning

เชมจิรา เทียงอยู่

### บทความวิจัย *Research Article*

ไบเบสของกึ่งไฮเพอร์กรุป

14

On Bi-Bases of Semihypergroups

เอกชัย อุดม จิตติกร โชคชัย และ ลำคัญ ฮ่อบรรทัด

ลำดับโมเบียส

32

Mobius Sequences

สมพงษ์ นุญสุริฉาย และ ลลิตา อภิสรพาณิชย์

สูตรจำนวนจุดตรึงของไดกราฟที่เกิดจากความสัมพันธ์  $a^b \equiv b \pmod{n}$  และการวางนัยทั่วไปบางแบบ 42

Formula for Number of Fixed Points of Digraph Arising from The Relation  $a^b \equiv b \pmod{n}$

And Some Generalization

รตินันท์ บุญเคลือบ และ วิภาวี คุณานพรัตน์

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง  $7^x - 5^y = z^2$

62

The Solution of The Exponential Diophantine Equation  $7^x - 5^y = z^2$

สุทธิวัฒน์ ทองนาค วาเรียม ช่วยจันทร์ และ ชีรเดช เกื้อวงศ์





วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(703) มกราคม – เมษายน 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

## ดิสเล็กเซียกับการเรียนคณิตศาสตร์

## Dyslexia with Mathematics Learning

เขมจิรา เตีย่งอยู่

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี 15000

Khemjira Tiengyoo

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,

Thepsatri Rajabhat University, Lopburi 15000

Email: khemjira.ty@gmail.com

วันที่รับบทความ : 23 กุมภาพันธ์ 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 15 มิถุนายน 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 21 สิงหาคม 2563

### บทคัดย่อ

บทความทั่วไปฉบับนี้กล่าวถึงความเกี่ยวข้องของปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์กับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย พร้อมทั้งเสนอแนวทางการสอนให้กับครูผู้สอนแก่ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย

**คำสำคัญ:** ดิสเล็กเซีย คณิตศาสตร์ การศึกษา

### ABSTRACT

This general article shows that it is encountered by dyslexia students with an understanding of mathematics. Recommendations for the teaching of mathematical support to dyslexia students.

**Keywords:** Dyslexia, Mathematics, Education

## 1. บทนำ

ในหลายปีที่ผ่านมาได้มีการพูดกันอย่างแพร่หลายจนกลายเป็นประโยคติดหูที่ว่า “คนไทยอ่านหนังสือไม่เกิน 8 บรรทัดต่อปี” ทั้งที่คนส่วนใหญ่ไม่ทราบถึงที่มาว่าผู้ใดเป็นคนสำรวจ ความน่าเชื่อถือมีมากน้อยเพียงใดจนกลายเป็นคำพูดที่เอาไว้อย่างเสียสละ หรือประชดประชันกับความซึ้งใจของเด็กไทย ในยุคปัจจุบัน หากคำพูดดังกล่าวเป็นความจริงก็ถือเป็นอีกหนึ่งเรื่องที่น่ายกย่องสำหรับการศึกษาไทย แต่ในปี พ.ศ.2558 สำนักงานสถิติแห่งชาติ [1] ได้รวบรวมข้อมูลการอ่านหนังสือของเยาวชนไทยที่อยู่ในช่วงอายุ 15 ถึง 24 ปี พบว่า เวลาที่ใช้ในการอ่านหนังสือของเด็กไทยเฉลี่ยวันละ 94 นาที โดยเลือกอ่านประเภทความรู้วิชาการ คิดเป็นร้อยละ 21.5 ของประเภทการอ่านทั้งหมด และยังมีเด็กไทยอ่านหนังสือไม่ออกถึงร้อยละ 20.6 ของเยาวชนไทยทั้งหมด ซึ่งถือเป็นปัญหาใหญ่สำหรับการศึกษาของไทยตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันที่ยังไม่ได้รับการแก้ไข ปัจจัยที่ส่งผลต่อการอ่านของเด็กมีหลายด้านทั้งด้านครอบครัว สภาพแวดล้อม โรงเรียน หรือครู แต่คงปฏิเสธไม่ได้ว่าปัจจัยเหล่านั้นเป็นเรื่องภายนอก ถึงจะมีการแก้ไขให้ดีขึ้นเพียงใดหากตัวเด็กไม่ฝึกฝนหรือพยายามด้วยตนเอง ก็ไม่สามารถพัฒนาด้านการอ่านได้สำเร็จ เมื่อมองอีกมุมหนึ่งสำหรับเด็กบางคนต่อให้พยายามมากเพียงใด ก็ไม่สามารถอ่านหนังสือได้เหมือนคนปกติทั่วไป เนื่องจากมีภาวะผิดปกติในด้านการฟัง อ่าน หรือเขียน ส่งผลให้เด็กกลุ่มนี้เสียเปรียบด้านการศึกษาเมื่อเทียบกับเด็กวัยเดียวกัน เช่น อ่านหรือเขียนช้า มีปัญหาด้านการสะกดคำ อ่านสลับตัวอักษร ความจำสั้นเมื่อเจอสิ่งที่ซับซ้อน มีปัญหาด้านการสื่อสารอ่านออกเสียงไม่ชัด มีความยากลำบากในการตอบคำถามทั้งปลายเปิดและปิด ส่งผลให้ไม่เห็นคุณค่าในตัวเอง หรือมีความกังวลตลอดเวลา [12] ลักษณะพฤติกรรมดังกล่าวคือ *ภาวะบกพร่องด้านการอ่าน หรือ ดิสเล็กเซีย (Dyslexia)* หากเด็กมีภาวะนี้ ทางครอบครัว คนใกล้ชิด หรือครู ควรรู้วิธีการรับมือกับเด็กกลุ่มนี้ให้ถูกวิธี เพื่อลดปัญหาต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นต่อตัวเด็ก เช่น รู้สึกว่าตนเองด้อยค่า ไม่มีความรู้เหมือนคนอื่น ไม่อยากไปโรงเรียน เครียด ซึมเศร้า ตลอดจนถูกสังคมตัดสินว่าเป็นบุคคลที่ไร้ความสามารถ แต่ที่จริงแล้วเด็กเหล่านี้อาจเป็นบุคคลสำคัญในการขับเคลื่อนพัฒนาประเทศในอนาคตได้ หากได้รับการดูแลที่ถูกต้อง

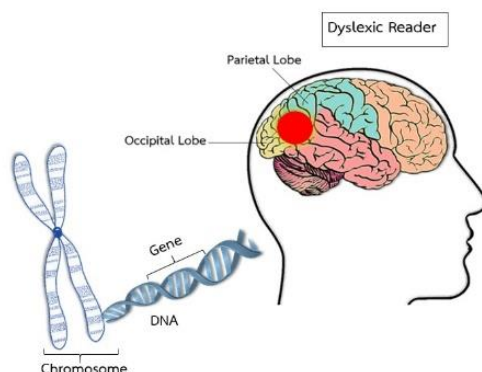
จากที่กล่าวมาข้างต้น ดิสเล็กเซียถือเป็นภาวะบกพร่องด้านการอ่านซึ่งเป็นหนึ่งในกลุ่มของภาวะบกพร่องทางการเรียนรู้ (Learning Disorder) ที่แบ่งตามลักษณะของการวินิจฉัย โดยใช้หลักการทางประสาทวิทยา และนอกจากดิสเล็กเซียแล้ว ยังพบว่ามีอีกสองภาวะที่อยู่ในกลุ่มนี้เช่นกัน คือ ภาวะบกพร่องด้านการเขียน หรือ ดิสกราเฟีย (Dysgraphia) และภาวะบกพร่องทางคณิตศาสตร์

หรือ ดิสแคลคูลีย (Dyscalculia) ในบทความนี้ ให้ความสนใจในประเด็น *ดิสเล็กเซียกับการเรียนคณิตศาสตร์* ถึงแม้ว่าภาวะนี้กับดิสแคลคูลียจะดูคล้ายกันจนบางครั้งหลายคนเกิดความสับสนว่า ทั้งสองกลุ่มเป็นภาวะเดียวกันหรือไม่ แต่แท้ที่จริงแล้ว ดิสเล็กเซียเป็นภาวะบกพร่องด้านการอ่านที่ส่งผลต่อการเรียนในวิชาต่าง ๆ และเห็นได้ชัดในวิชาเกี่ยวข้องกับภาษา แต่อย่างไรก็ตามผู้เรียนที่มีภาวะนี้ ยังคงได้รับผลกระทบจากการอ่านไม่ได้กับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เช่นกัน เนื่องจากผู้เรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถอ่านโจทย์ที่กำหนดให้ได้ แต่นั่นก็ไม่ได้หมายความว่าไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหานั้นผ่านวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้ หากแต่ต้องมีคนคอยช่วยเหลือด้านการอ่านโจทย์ ซึ่งต่างกับดิสแคลคูลียที่บกพร่องทางคณิตศาสตร์โดยตรง แม้ว่าจะไม่มีปัญหาด้านการอ่านแต่กลุ่มนี้ก็จะไม่สามารถเข้าใจหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานได้ เช่น ไม่เข้าใจเรื่องจำนวน การดำเนินการขั้นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ขาดความเข้าใจการเขียนและอ่านกราฟ หรือพูดง่าย ๆ คือ ไม่มีความรู้ลึกทางคณิตศาสตร์นั่นเอง [4] ด้วยเหตุที่ผู้เขียนเห็นถึงความสำคัญของผู้เรียนที่มีปัญหาทางการเรียนรู้ในภาวะต่าง ๆ จึงมีแนวคิดจะให้บทความฉบับนี้เป็นสื่อกลางในการถ่ายทอดแนวทางการสอนให้กับครูผู้สอน โดยจะกล่าวถึงผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียกับการเรียนคณิตศาสตร์ในหัวข้อต่าง ๆ ที่น่าสนใจ เริ่มจากรู้จักภาวะดิสเล็กเซีย ในหัวข้อที่ 2 ภาวะดิสเล็กเซียกับการเรียนคณิตศาสตร์ ในหัวข้อที่ 3 แนวทางการสอน ในหัวข้อที่ 4 และดิสเล็กเซียพัฒนาได้ ในหัวข้อที่ 5

## 2. รู้จักภาวะดิสเล็กเซีย

ดิสเล็กเซีย “ไม่ใช่โรค” แต่เป็นความผิดปกติทางพันธุกรรมบนโครโมโซมคู่ที่ 1 ตำแหน่ง p34 - p36 โครโมโซมคู่ที่ 6 ตำแหน่ง p21 - p22 โครโมโซมคู่ที่ 15 ตำแหน่ง q21 และโครโมโซมคู่ที่ 18 ตำแหน่ง q11 โดยมียีนที่เกี่ยวข้องคือ DCDC2 (Doublecortin Domain Containing Protein 2) และ KIAA0319 [11] ส่งผลให้สมองซีกซ้ายบริเวณสมองกลีบข้าง (Parietal Lobe) ซึ่งทำหน้าที่แยกแยะเสียง และสมองกลีบท้ายทอย (Occipital Lobe) ซึ่งทำหน้าที่เกี่ยวข้องกับการมองเห็น จดจำสิ่งที่พบเจอ และควบคุมเกี่ยวกับทักษะด้านการอ่าน ทำงานผิดปกติ [2] ทำให้ผู้ที่มีภาวะดิสเล็กเซีย มีความผิดปกติด้านการฟัง ไม่สามารถแยกแยะเสียงได้ เช่น เมื่อให้พูดคำว่า “เกม” อ่านว่า กอ-เอ-มอ (เกม) หากตัดเสียง กอ ออกแล้วใส่เสียง จอ แทน คนทั่วไปสามารถอ่านออกเสียงเป็น จอ-เอ-มอ (เจม) ได้ แต่สำหรับผู้ที่มีภาวะดิสเล็กเซียจะไม่สามารถตัดเสียงหรือใช้คำสัมผัสดังตัวอย่างที่กล่าวไปได้ หรือความผิดปกติด้านความเร็วในการมองเห็นรูปภาพและตัวอักษร เช่น หากมีตาราง

ขนาด  $10 \times 5$  ที่ประกอบไปด้วยตัวอักษร สี หรือภาพ ในตาราง เมื่อชี้ที่ตารางช่องใดช่องหนึ่ง คนทั่วไปจะสามารถบอกได้ทันทีเกี่ยวกับสิ่งที่มองเห็น ตรงข้ามกับผู้ที่มีภาวะดิสเล็กเซียที่ไม่สามารถตอบได้ทันที เนื่องจากเกิดความสับสนในการมองคำ บางคนเห็นคำว่า “dog” เป็น “god” หรือ “1 2 3” เป็น “3 2 1” หรือบางคนเห็นเป็นภาพซ้อน สลับไปมา และแน่นอนว่าหากพบลักษณะที่กล่าวมาข้างต้นจะส่งผลให้มีความบกพร่องด้านการอ่านคล่องไปด้วย [8] ส่งผลให้อ่านช้ากว่าคนทั่วไป หรืออ่านไม่ออก จับใจความเรื่องและลำดับเรื่องที่อ่านไม่ได้



รูปที่ 2.1 ภาพแสดงบริเวณของสมองที่ผิดปกติ [3, 5, 13]

### 3. ภาวะดิสเล็กเซียกับการเรียนคณิตศาสตร์

อย่างที่ทราบกันว่าภาวะดิสเล็กเซียเป็นภาวะบกพร่องด้านการอ่าน หลายคนมักคิดว่าหากบุคคลดังกล่าวได้เข้าศึกษาในระบบการศึกษา จะต้องเผชิญกับความยากลำบากในวิชาที่เกี่ยวข้องกับด้านภาษาเท่านั้น แต่แท้ที่จริงแล้ว ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียยังจะมีปัญหาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เช่นกัน เพราะนอกจากคณิตศาสตร์จะเป็นวิชาที่ยากต่อการทำความเข้าใจแล้ว ยังมีเรื่องสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เช่น การบวก (+) กับการคูณ (×) ซึ่งส่งผลให้ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียมีปัญหาต่อการทำความเข้าใจในภาษาคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก และด้วยลักษณะที่กล่าวมาในหัวข้อข้างต้นจะเห็นว่าเป็นการเพิ่มความซับซ้อนต่อการทำความเข้าใจของเนื้อหาไปอีกระดับ จึงไม่แปลกที่ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียจะไม่สามารถทำความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้

จากการศึกษางานวิจัยของ Perkin และ Croft [10] ที่ได้ศึกษาปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียสำหรับการเรียนในระดับปริญญาตรี โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มแรกเป็นผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย จำนวน 6 คน ให้เรียนแบบตัวต่อตัว และกลุ่มที่สองประกอบด้วยผู้เรียนที่

ไม่มีภาวะดิสเล็กเซีย จำนวน 12 คน ให้เรียนรวมกับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย จำนวน 12 คน เพื่อหาสาเหตุอันเป็นตัวขัดขวางการเรียนรู้ในรายวิชาคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งหาความต่างระหว่างผู้เรียนกลุ่มที่มีภาวะกับไม่มีภาวะดิสเล็กเซียว่ามีปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์ต่างกันอย่างไร จากผลงานวิจัยพบว่า ผู้เรียนกลุ่มดิสเล็กเซียจะมีปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ 4 ด้าน คือ 1) ด้านเนื้อหา 2) ด้านการถ่ายทอด 3) ด้านขั้นตอนและกระบวนการ และ 4) ด้านการประเมินผล ซึ่งปัญหาเหล่านี้ส่วนใหญ่จะไม่พบในกลุ่มผู้เรียนที่ไม่มีภาวะดิสเล็กเซีย เนื่องจากปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์แต่ละด้านของกลุ่มที่มีภาวะดิสเล็กเซียนี้ล้วนมีผลมาจากการรับรู้ทางสายตาที่ผิดปกติ เช่น การเห็นภาพซ้อนสลับไปมา การเห็นตัวอักษรหรือข้อความเบลอ การหลุดโฟกัสจากสิ่งที่อ่าน มีความลำบากต่อการมองเห็นเกิดจากแสงของกระดาด

รายละเอียดของปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์แต่ละด้านของผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียเป็นดังนี้

#### 1. ด้านเนื้อหา พบว่าผู้เรียนมีปัญหาด้วยกัน 3 ส่วน คือ

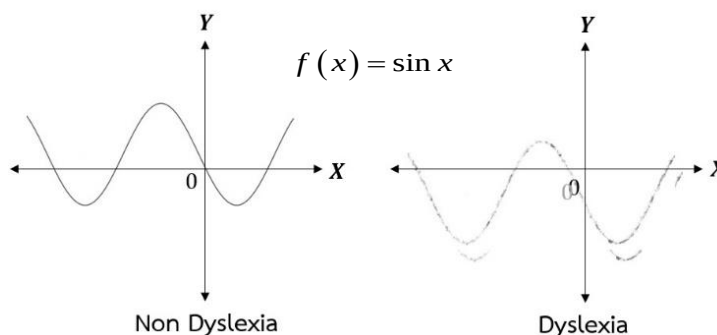
1.1 คำศัพท์ จากที่ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย มักเกิดความสับสนด้านการอ่านเป็นทุนเดิม ฉะนั้นหากเพิ่มความซับซ้อนของคำศัพท์ขึ้น ก็จะเป็นการสร้างคามยุ่งยากต่อการเรียนรู้ให้แก่ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียนี้ได้ เนื่องจากสมองจะไม่สามารถแยกได้ว่าส่วนใดเป็นคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ และส่วนใดเป็นคำศัพท์ทางภาษาที่ใช้ในชีวิตประจำวัน คำศัพท์บางคำที่เขียนเหมือนกันแต่เมื่อใช้ในบริบทที่ต่างกันความหมายก็ต่างไปด้วย เช่น คำว่า Product ซึ่งทั่วไปหมายถึง สินค้า หรือผลผลิต แต่ทางคณิตศาสตร์หมายถึงการคูณ หรือคำว่า Acute ซึ่งทั่วไปหมายถึง ความรุนแรง หรือฉับพลัน หรือสาหัส แต่ทางคณิตศาสตร์กลับหมายถึงมุมที่มีขนาดน้อยกว่า 90 องศา หรือมุมแหลมนั่นเอง หรือคำว่า Vulgar ซึ่งทั่วไปหมายถึง หยาบคาย แต่ทางคณิตศาสตร์หมายถึงเศษเกิน และยังพบปัญหากับคำบางคำที่นักเรียนเคยเจอในวัยเด็กมาแล้ว เช่น คำว่า Differentiate ซึ่งมีความหมายเดียวกันกับ Distinguish ซึ่งหมายถึงการแบ่งแยก หรือความแตกต่าง แต่เมื่อเรียนคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น Differentiate กลับหมายถึงความชันของเส้นโค้ง ในทำนองเดียวกันกับคำว่า Complex ซึ่งมีความหมายเดียวกับ Complicated ที่หมายถึงความซับซ้อน หรือยุ่งยาก แต่เมื่อเรียนในระดับที่สูงขึ้นจะพบว่า Complex หมายถึงจำนวนเชิงซ้อน นอกจากนี้ยังพบปัญหาในส่วนที่มีการออกเสียงเหมือนกันและมีสะกดคำที่คล้ายกัน เช่น คำว่า Integer ซึ่งหมายถึงจำนวนเต็ม กับ Integral ซึ่งหมายถึงการหาพื้นที่ใต้กราฟ หรือคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ในภาษาไทยที่อาจทำให้เกิดความสับสนได้ เช่น คำว่า ตัวหารร่วม กับ ตัวหารรวม หรือ เมตริก กับ เมทริกซ์

1.2 สัญลักษณ์ เป็นทักษะพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนควรรู้ เพื่อใช้เป็นตัวกลางในการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้เกิดความเข้าใจตรงกัน แต่ในทางตรงข้ามก็เป็นความยากลำบากสำหรับผู้เรียนที่มีภาวะติสเล็กเกี่ยวกับการเรียนรู้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแน่นอนว่าการเรียนคณิตศาสตร์ไม่สามารถหลีกเลี่ยงสิ่งเหล่านี้ได้ อย่างน้อยผู้เรียนทุกคนต้องรู้จักสัญลักษณ์การคูณที่เขียนแทนด้วย  $\times$  เช่น  $2 \times 5$  หรือบางครั้งเขียนแทนด้วย  $\cdot$  เช่น  $2 \cdot 5$  เมื่อเริ่มมีการใช้สัญลักษณ์มากขึ้น ส่งผลทำให้ผู้เรียนที่มีภาวะติสเล็กเกิดความเข้าใจผิด เขียน  $2 \times 5$  แทนด้วย 2.5 แต่แท้ที่จริงแล้ว 2.5 เป็นทศนิยม นั้นหมายความว่าผู้เรียนมีปัญหาด้านการมองสัญลักษณ์ที่คลาดเคลื่อนเห็น 2.5 เป็น 2.5 หรือเกิดความสับสนระหว่างเครื่องหมายบวก (+) กับเครื่องหมายคูณ ( $\times$ ) ซึ่งต่างกันเพียงความเอียงเท่านั้น แต่กลับมีความหมายทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน ซึ่งการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นคงไม่ได้มีเพียงสัญลักษณ์การบวก ลบ คูณ และหารเท่านั้น แต่อาจมีตัวห้อยหรือเลขยกกำลัง เช่น  $x_i^2$  หรือการใช้  $x'$  และ  $x''$  บางครั้งอาจถูกใช้กับเรื่องการหาอนุพันธ์ แต่บางครั้งถูกใช้ในรูปของตัวแปร ส่งผลให้ผู้เรียนอาจเกิดความสับสนในกรณีที่ไม่มีสัญลักษณ์สากลได้ และที่แย่ไปกว่านั้น คือการใช้สัญลักษณ์เดียวกันแต่ความหมายต่างกัน เช่น การใช้  $i$  และ  $j$  เพื่อแสดงตำแหน่งของเวกเตอร์ แต่ในบางครั้งใช้  $i$  และ  $j$  แทนจำนวนเชิงซ้อน ทั้งนี้ผู้เรียนจำเป็นต้องพบกับสัญลักษณ์ที่แปลกใหม่มากขึ้น เนื่องจากสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์บางสัญลักษณ์สามารถใช้ได้หลายแบบ เช่น ในเรื่องของ การแสดงตำแหน่งเวกเตอร์ อาจเขียนแทนด้วยเวกเตอร์แนวนอน  $(3, 2)$  หรือเขียนแทนด้วยเวกเตอร์แนวตั้ง  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ได้เช่นกัน หรือการใช้สัญลักษณ์เพื่อหาอนุพันธ์ก็จะพบสัญลักษณ์ในหลากหลายรูปแบบ เช่น  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{df}{dx}$ ,  $y'$ ,  $f'$  หรือ  $f_x$  สัญลักษณ์ข้างต้น ต่างเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวทั้งสิ้น แต่หากเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรจะใช้สัญลักษณ์  $\partial$ ,  $\delta$  หรือ  $d$  จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าผู้เรียนต้องพบกับสัญลักษณ์ต่างๆ บางครั้งจะเกิดความสับสนในการมอง และสมองอาจไม่สามารถแยกความแตกต่างของสัญลักษณ์แต่ละตัวได้ อีกทั้งยังต้องเผชิญกับความยากลำบากในการเลือกใช้ให้ถูกต้อง สำหรับผู้เรียนที่มีภาวะติสเล็กเสียแล้ว ก็ไม่เป็นการง่ายเลยที่จะเข้าใจความหมายได้โดยไม่มีคนมาอธิบาย

1.3 กราฟ เป็นอีกทักษะหนึ่งที่ใช้ในการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ แต่สำหรับผู้เรียนที่มีภาวะภาวะติสเล็กเสีย ต้องเผชิญกับความยากลำบากในการมองกราฟ ซึ่งอาจจะเห็น



รูปผิดจากเดิม หรือเห็นจุดหรือกราฟลอยบนอากาศ บางครั้งเห็นเป็นภาพซ้อนจนไม่สามารถอ่านค่าของกราฟได้ ตัวอย่างการมองเห็นกราฟของผู้เรียนที่มีภาวะภาวะดิสเล็กเซียเป็นดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ตัวอย่างกราฟที่มองเห็นของคนปกติและคนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย

2. ด้านการถ่ายทอด การเรียนการสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่คุ้นเคยมักสอนในรูปแบบการบรรยาย ใช้ชอล์ก ขึ้นกระดาน หรือเขียนผ่านโปรเจคเตอร์ ซึ่งเอื้อต่อผู้สอน เพราะสบาย แก่ไขได้เร็ว แต่ในทางตรงกันข้าม กลับส่งผลเสียต่อผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย เนื่องจากไม่สามารถฟังผู้สอนให้เข้าใจและจดบันทึกไปพร้อมกันได้ ที่มากไปกว่านั้นคือผู้เรียนบางคนจดผิดจดถูกเพราะเกิดความสับสนของตัวอักษรกับสมการ หรือสูญเสียตำแหน่งการมองเห็น ไม่รู้ว่าจะมองส่วนไหนอยู่ ฉะนั้นปัญหาใหญ่สำหรับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย คือ การจดบันทึกสิ่งที่เรียนให้ทันและถูกต้อง ซึ่งเป็นหน้าที่ของผู้สอนในการควบคุมหรือแนะแนวทางให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้เนื้อหาด้วยความเข้าใจ ทันเพื่อน ตลอดจนสามารถจดบันทึกสิ่งที่เรียนให้ถูกต้องได้

3. ด้านขั้นตอนและกระบวนการ คงเป็นเรื่องยากสำหรับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียต่อการทำความเข้าใจถึงผลลัพธ์ที่ได้ ยิ่งเรียนในระดับที่สูงขึ้นความซับซ้อนของโจทย์ก็เพิ่มมากขึ้น เช่น ในระดับมัธยมศึกษา เราสามารถหาผลเฉลยจากการแก้สมการหนึ่งตัวแปรหรือสองตัวแปรได้ แต่เมื่อเรียนในระดับที่สูงขึ้น เราต้องแก้ระบบสมการที่มีตัวแปรมากกว่าสองตัว ซึ่งนิยมใช้เมทริกซ์ช่วยในการหาผลเฉลย หลายคนอาจคุ้นชินกับวิธีนี้ แต่ก็มีหลายคนที่ไม่ชอบการหาผลเฉลยด้วยวิธีนี้เช่นกัน เนื่องจากเป็นวิธีที่มีกระบวนการซับซ้อนอีกทั้งตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณมีมาก แม้แต่ผู้เรียนที่ไม่มีภาวะดิสเล็กเซียบางคนก็ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ จึงไม่เป็นที่แปลกใจมากสำหรับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียที่จะหาผลเฉลยไม่ได้ เพราะอีกหนึ่งปัจจัยที่สำคัญที่ส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียคือ ปัญหาด้านความจำระยะสั้น ซึ่งเป็นลักษณะร่วมที่พบมากกับผู้เรียนที่มีภาวะดิส

เล็กเซีย แต่ไม่ใช่กับทุกคน ฉะนั้นเมื่อกระบวนการมีความซับซ้อนมากขึ้น ก็จะส่งผลให้ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียเรียนรู้ได้ช้ากว่าคนปกติทั่วไป สังเกตได้ง่ายจากการหาผลเฉลยของระบบสมการด้วยวิธีเมทริกซ์ที่ตัวเลขแต่ละตัวมีตำแหน่งกำกับ โดยพื้นฐานของผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย มักสับสนในเรื่องสัญลักษณ์อยู่แล้ว ยังต้องมาพบกับกระบวนการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถวที่มีหลายขั้นตอนและคงเลียงไม่ได้กับปัญหาที่อาจเกิดขึ้นในขั้นตอนและกระบวนการได้มาของผลลัพธ์ เนื่องจากผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียนี้จะมีข้อจำกัดเรื่องของความจำปฏิบัติการ กล่าวคือ การรับข้อมูลเข้าสู่สมอง เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาที่มีความยุ่งยากกว่าคนปกติทั่วไป ฉะนั้นการที่ไม่สามารถแก้ปัญหาหลายขั้นตอนได้นั้น อาจจะมาจากการไม่สามารถเรียงลำดับขั้นตอนของสถานการณ์การแก้โจทย์ปัญหาได้ ส่งผลให้เกิดปัญหาการข้ามขั้นตอนหรืออาจขาดบางขั้นตอนไปนั่นเอง

4. ด้านการประเมินผล เมื่ออยู่ในระบบการศึกษาคงเลียงไม่ได้กับการวัดระดับความสามารถทางการเรียน และจากลักษณะของผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียดังที่กล่าวมาคงไม่สามารถใช้วิธีการวัดเดียวกับผู้เรียนปกติทั่วไปได้ จากการที่การวัดและประเมินผลมีได้หลากหลายรูปแบบ ฉะนั้นควรเลือกรูปแบบการวัดและประเมินผลให้เหมาะสมกับบริบทของแต่ละคน เช่น การสอบแบบปรนัย อัตนัย สอบปากเปล่า การทำโครงงานกลุ่ม หรือสอบโดยใช้คอมพิวเตอร์

#### 4. แนวทางการสอน

หากลองจินตนาการถึงห้องเรียนที่เต็มไปด้วยผู้เรียนทั้งที่มีและไม่มีภาวะดิสเล็กเซีย จะพบปัญหาที่หลากหลายแตกต่างกันออกไป ผู้สอนต้องคอยสังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนขณะที่สอน เพื่อลดปัญหาต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้น เนื่องจากในปัจจุบันยังไม่พบงานวิจัยหรือวิธีการรักษาภาวะดิสเล็กเซียที่หายขาดได้ ฉะนั้นรายละเอียดที่จะกล่าวดังต่อไปนี้จะเป็นเพียงหนึ่งแนวทางในการสอนสำหรับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียเท่านั้น

##### 4.1 วิธีการจัดการเรียนการสอน

4.1.1 การเรียนการสอนในห้องเรียนทั่วไป ซึ่งมีทั้งผู้เรียนที่มีภาวะและไม่มีภาวะดิสเล็กเซียเรียนรวมกันจำนวนประมาณ 30 ถึง 40 คนต่อห้อง ผู้สอนควรจับคู่ให้ผู้เรียนที่มีภาวะและไม่มีภาวะดิสเล็กเซียนั่งเรียนคู่กัน เพื่อให้เพื่อนช่วยเพื่อน เนื่องจากผู้เรียนทั้งสองอาจมีความถนัดที่ต่างกัน หรืออาจใช้วิธีการอัดเสียงของผู้สอนขณะที่กำลังสอนอยู่ เพื่อประโยชน์ต่อการทบทวนเนื้อหา

#### 4.1.2 การเรียนแบบตัวต่อตัว

สำหรับสัดส่วนการสอนของผู้เรียนที่มีภาวะต่อผู้เรียนที่ไม่มีภาวะดิสเล็กเซียประมาณ 1 : 5 คงไม่สามารถจัดการเรียนการสอนให้เต็มศักยภาพได้ เนื่องจากผู้สอนไม่สามารถถ่ายทอดหรืออธิบายเนื้อหาแบบละเอียดให้แก่ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียทุกคนได้ ทั้งปัจจัยภายนอกต่าง ๆ เช่น เวลา เนื้อหาที่เยอะ ตลอดจนปัญหาของผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียแต่ละคนมีความแตกต่างกัน จึงไม่แปลกที่การจัดการเรียนการสอนในรูปแบบนี้ ผู้สอนอาจดูแลได้ไม่ทั่วถึง แต่หากผู้สอนแยกผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียมาดำเนินการสอนเฉพาะกลุ่ม จะทำให้การเรียนนั้นช้าลงไปอีก ถึงแม้ว่าจะมีภาวะเดียวกันแต่พฤติกรรมหรือปัญหาของแต่ละคนต่างกัน อีกทั้งขาดผู้เรียนที่ไม่มีภาวะดิสเล็กเซียคอยประกบ ดังนั้น Perkin และ Croft [10] จึงได้เสนอแนวทางการจัดการเรียนการสอนสำหรับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย ว่าเหมาะสมกับการเรียนแบบตัวต่อตัว เพื่อแก้ปัญหาให้ผู้เรียนได้ตรงจุด

#### แนวทางการสอนแบบตัวต่อตัว [6]

1. ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียที่มีปัญหาด้านความจำระยะสั้น ให้ใช้วิธีการ
  - 1.1 เขียนแผนภาพ เพื่อทบทวนขั้นตอน
  - 1.2 เขียนแผนผังความคิด เพื่อสรุปสาระสำคัญของเนื้อหา
  - 1.3 ผู้สอน ควรเน้นย้ำ หรือสอนซ้ำ ๆ ในเรื่องเดิม เพื่อให้ผู้เรียนสามารถจดจำขั้นตอนหรือคำพูดผู้สอนได้
2. ผู้สอน ควรมอบหมายการบ้านหรืองานในจำนวนที่เหมาะสม ไม่ควรให้เยอะจนเกินไป

#### 4.2 สื่อและอุปกรณ์การสอน

4.2.1 การจัดทำเอกสารประกอบการสอน เนื่องจากผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียมีปัญหาด้านการจดบันทึกสิ่งที่เรียนไม่ทัน ดังนั้นก่อนการสอนผู้สอนควรแจกเอกสารประกอบการสอน โดยอาจมีรูปแบบดังนี้

1. ใช้ตัวอักษรฟอนต์ Sans Serif ขนาด 16 – 20
2. ปรับตัวอักษรทางภาษาเป็นตัวตรง และตัวอักษรหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้เขียนเป็นตัวเอียง
3. สำหรับพื้นของกระดาษใช้สีครีม เพื่อลดแสงจ้าต่อสายตา
4. เว้นระยะห่างระหว่างบรรทัดให้เหมาะสมไม่ใกล้หรือห่างจนเกินไป

4.2.2 ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียจะมีปัญหาด้านการมองตัวเลข เช่น การมองตัวเลขในแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ ผู้เรียนบางคนเห็นเป็นภาพพุ่งออกมาบนกระดาษ ดังนั้นอาจใช้กระดาษตารางแทนกระดาษธรรมดา หรือเมื่อมีดำเนินการตามแถวให้ใช้ดินสอปิดแถวและหลักที่ไม่ต้องการจะช่วยลดการล่อของภาพที่มองเห็นได้ [10]

4.2.3 สำหรับสื่อการสอน ควรระบุลำดับและขั้นตอนการดำเนินการ พร้อมทั้งระบุสีในแต่ละขั้นตอนให้ชัดเจน เพื่อแก้ปัญหาความจำระยะสั้น ดังรูปที่ 4.1

$$27 + 42 = ?$$

- \* Place the numbers you are going to add such that the digits in the same place values are placed in the same column (i.e. ones under ones, tens under tens, etc).

|       | Tens | Ones |
|-------|------|------|
|       | 2    | 7    |
| +     | 4    | 2    |
| <hr/> |      |      |
|       |      | 9    |

Step 1:  
Add the ones.  
 $7 + 2 = 9$

|       | Tens | Ones |
|-------|------|------|
|       | 2    | 7    |
| +     | 4    | 2    |
| <hr/> |      |      |
|       | 6    | 9    |

Step 2:  
Add the tens.  
 $2 + 4 = 6$

รูปที่ 4.1 ตัวอย่างสื่อการสอน เรื่อง การบวกจำนวนเต็มในหลักสิบ [7]

จากรูปที่ 4.1 เป็นตัวอย่างสื่อการสอน เรื่อง การบวกจำนวนเต็มในหลักสิบ ซึ่งจะเห็นชัดเจนว่า มีการระบุลำดับขั้นตอน พร้อมทั้งระบุสีในแต่ละขั้นที่แตกต่างกันออกไป ทั้งนี้สามารถนำวิธีการดังกล่าวไปประยุกต์ใช้กับการสอนในเรื่องอื่น ๆ ได้

4.2.4 ใช้แอปพลิเคชันต่าง ๆ ที่ช่วยเสริมสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เช่น Graphing Mnemonic ช่วยสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับการมองกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ ดังรูปที่ 4.2

| Function                                                           | Graph | Shape        | Diagram | How to Remember                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------|-------|--------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = kx^{-2}$<br>Examples:<br>$y = 3x^{-2}$<br>$y = \frac{5}{x^2}$ |       | Volcano      |         | Remember MTV:<br>power Minus Two is<br>Volcano-shaped                                                                 |
| $y = kx^{-1}$<br>Examples:<br>$y = 5x^{-1}$<br>$y = \frac{4}{x}$   |       | Slanted<br>x |         | A "x" that is slanted is a<br>negative one                                                                            |
| $y = kx^0$<br>Examples:<br>$y = 3$<br>$y = -7$                     |       | Road         |         | You already learnt this in<br>lower sec! Any equation<br>without x, i.e. $y = k$ graphs<br>are all horizontal graphs! |
| $y = kx^1$<br>Examples:<br>$y = 8x$<br>$y = 3x$                    |       | Slope        |         | You already learnt this in<br>lower sec!<br>$y = mx + c$ graphs are all<br>straight line slopes!                      |

รูปที่ 4.2 ตัวอย่างสื่อการสอนโดย Graphing Mnemonic [9]

## 5. ดิสเล็กเซียพัฒนาได้

จากที่กล่าวมาในหัวข้อข้างต้นเป็นบทบาทของสถาบันการศึกษาที่มีส่วนต่อการพัฒนาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย และผู้เรียนกลุ่มนี้จะมีพัฒนาการมากขึ้นเพียงใดขึ้นอยู่กับความร่วมมือกันของทั้งสองสถาบัน คือ สถาบันการศึกษาและสถาบันครอบครัว ทั้งสองสถาบันนี้เสมือนเป็นกำลังเท้าในการวิ่งมาราธอน ซึ่งสถาบันการศึกษามีหน้าที่ในการผลักดันและส่งเสริมพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย จากนั้นส่งไม้ต่อไปให้สถาบันครอบครัวเป็นตัวเสริมความกล้าให้ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย เกิดความมั่นใจในการวิ่ง และวิ่งต่อไปจนถึงเส้นชัย กล่าวคือสถาบันครอบครัวมีหน้าที่ในการสนับสนุนเป็นกำลังใจพร้อมทั้งเสริมสร้างความมั่นใจในการเรียนให้แก่ผู้ที่มีภาวะดิสเล็กเซีย เช่น เข้าใจธรรมชาติของภาวะนี้ สอนการบ้านด้วยความใจเย็น เน้นย้ำกิจวัตรประจำวันอย่างสม่ำเสมอ สอดแทรกการเข้าสังคมและการอยู่ร่วมกับผู้อื่นอย่างไรให้มีความสุข รวมทั้งสร้างทัศนคติที่ดีต่อการดำเนินชีวิต

ดังนั้น ครอบครัว คนใกล้ชิด รวมทั้งผู้สอน ต้องคอยสังเกตพฤติกรรม หากพบลักษณะดังที่กล่าวมาข้างต้น ให้ไปพบแพทย์เพื่อตรวจสอบความผิดปกตินั้น เนื่องจากการรู้ว่ามีภาวะดิสเล็กเซีย ทำให้

คนรอบข้างต้องปรับวิธีการดูแล อีกทั้งการรับมือให้ถูกวิธี เพื่อลดปัญหาทางสังคมที่อาจเกิดขึ้นในอนาคตได้ เช่น ปัญหาที่คนรอบข้างไม่เข้าใจธรรมชาติของลักษณะความผิดปกตินี้ ส่งผลทางลบกับผู้ที่ภาวะดิสเล็กเซีย คิดว่าตนเองไร้ศักยภาพ ไม่มีกำลังใจต่อการเรียน เข้ากับสังคมไม่ได้ ตลอดจนเป็นโรคซึมเศร้า ในทางกลับกันหากคนใกล้ชิดรู้แนวทางการปฏิบัติที่ถูกต้องต่อผู้ที่มีภาวะดิสเล็กเซีย อาจเป็นแรงผลักดันให้พวกเขาเหล่านั้นประสบความสำเร็จในด้านต่าง ๆ ได้ เช่น จอห์น เลนนอน (John Lennon) แม้มีภาวะดิสเล็กเซีย แต่กลับมีความสามารถด้านการเขียนโน้ตและเขียนเนื้อเพลงได้อย่างไพเราะ หรือ ปาโบล รุยซ์ ปิกาสโซ (Pablo Ruiz Picasso) จิตรกรเอกของโลกผู้มีพรสวรรค์ในการสร้างสรรค์ผลงานมากที่สุด หรือ อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ (Albert Einstein) นักฟิสิกส์ระดับโลกผู้คิดค้นทฤษฎีสัมพัทธภาพ กลศาสตร์ควอนตัมและจักรวาลวิทยา [14] จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าผู้ที่มีภาวะดิสเล็กเซียไม่ได้เป็นได้เป็นบุคคลไร้ความสามารถ หากแต่ผู้สอนและคนรอบข้างต้องให้การสนับสนุนพร้อมทั้งหาสิ่งที่ผู้เรียนสนใจแล้วร่วมกันผลักดัน พัฒนาให้ผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียต่อยอดความรู้ได้

สำหรับประเทศไทย ยังให้ความสำคัญกับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซียกับการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์น้อย ส่วนใหญ่มักแก้ปัญหาในวิชาที่เกี่ยวข้องกับภาษาเท่านั้น ซึ่งในวิชาคณิตศาสตร์เองก็ส่งผลกระทบต่อการเรียนรู้ไม่น้อยไปกว่าวิชาด้านภาษา ดังนั้นเราควรเริ่มต้นจากการพัฒนาผู้สอนให้มีความพร้อมในการรับมือกับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย นอกจากผู้สอนจะมีความรู้ด้านคณิตศาสตร์แล้ว เราควรสนับสนุนให้ผู้สอนรู้แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่เหมาะสมกับผู้เรียนที่มีภาวะดิสเล็กเซีย เพื่อตอบสนองความต้องการของผู้เรียนในยุคปัจจุบัน

## เอกสารอ้างอิง

[1] สำนักงานสถิติแห่งชาติ. (2559). *การสำรวจการอ่านของประชาชน พ.ศ. 2558*.

กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์สำนักสถิติแห่งชาติ.

National Statistical Office. (2559). *The Reading of Population Survey 2015*. Bangkok: National Statistical Office Printery.

[2] Butterworth, B. and Kovas, Y. (2013), Understanding Neurocognitive Developmental Disorders Can Improve Education for All. *Science*, 6130 (340), p. 305 - 300.

- [3] Chromosome Dictionary Definition. Retrieved June 15, 2020, from <https://www.yourdictionary.com/chromosome>.
- [4] Difference between Dyslexia and Dyscalculia. Retrieved June 15, 2020, From <https://www.understood.org/en/learning-thinking-differences/child-learning-disabilities/dyslexia/the-difference-between-dyslexia-and-dyscalculia>.
- [5] DNA String Coloured Transparent PNG. Retrieved June 15, 2020, from <https://www.stickpng.com/img/miscellaneous/dna-strings/dna-string-coloured>.
- [6] Dyslexia in The Classroom. Retrieved June 17, 2020, from <https://dyslexiaida.org/wp-content/uploads/2015/01/DITC-Handbook.pdf>.
- [7] Faber, H. (2017). The Math Handbook for Students with Math Difficulties, Dyscalculia, Dyslexia or ADHD. Boca Raton, Florida USA: Universal Publishers, Inc.
- [8] Norton, E. S., Beach, S. D. and Gabrieli, J. D. E. (2014). The Neurobiology of Dyslexia. *ScienceDirect*, 2015 (30), p. 73 - 78.
- [9] O-Level A-Math: Mastering Functions and Graphs (Part 2). Retrieved July 3, 2019, from [http://www.tuitionmath.com/single-post/2017/12/11/O-level A-Math-Mastering-Functions-and-Graphs-Part-2](http://www.tuitionmath.com/single-post/2017/12/11/O-level-A-Math-Mastering-Functions-and-Graphs-Part-2).
- [10] Perkin, G. and Croft, T. (2007). The Dyslexic Student and Mathematics in Higher Education. *InterScience*, 13 (3), p. 193 - 210.
- [11] Schumacher, J., Hoffmann, P., Schmä, C., Körne, S. G., and Nöthen, M. (2007). Genetics of Dyslexia: The Evolving Landscape. *Journal of Medical Genetics*, 5 (44), p. 289 - 297.
- [12] Shaw, S. C. K and Anderson, J. L. (2017). Twelve Tips for Teaching Medical Students with Dyslexia. *Medical Teacher*, 7 (39), p. 686 - 690.
- [13] The Brain Pacemaker. Retrieved June 15, 2020, from <https://livepast100well.com>.
- [14] What is Dyslexia. Retrieved January 8, 2020, from <https://book.mthai.com/all-books/6033.html>.



วารสารคณิตศาสตร์ **Mathematical Journal** 66(703) มกราคม – เมษายน 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

## ไบเบสของกึ่งไฮเพอร์กรุป

## On Bi-Bases of Semihypergroups

เอกชัย อุดม<sup>1</sup> ฐิติกร โชคชัย<sup>2</sup> และ สำคัญ ฮ่อบรรทัด<sup>3,\*</sup>

<sup>1,2,3</sup>สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ บุรีรัมย์ 31000

Aekkachai Udom<sup>1</sup> Titikorn Chokchai<sup>2</sup> and Samkhan Hobanthad<sup>3,\*</sup>

<sup>1,2,3</sup>Department of Mathematics, Faculty of Science, Buriram Rajabhat University, Buriram 31000

Email: <sup>1</sup>aekkachai.udo@bru.ac.th <sup>2</sup>nottitikorn2015@gmail.com <sup>3</sup>samkan.hb@bru.ac.th

วันที่รับบทความ : 11 สิงหาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 17 มกราคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 17 เมษายน 2563

### บทคัดย่อ

จุดมุ่งหมายของบทความนี้คือการศึกษาแนวความคิดของไบเบสของกึ่งไฮเพอร์กรุป โดยแนะนำและอธิบายพัฒนาการของไบเบสของกึ่งไฮเพอร์กรุป ผลการวิจัยได้จากการขยายแนวคิดบนกึ่งกรุป  
**คำสำคัญ:** กึ่งไฮเพอร์กรุป ไบไฮเพอร์ไอดีล ไบเบส ควอซีออเดอร์

### ABSTRACT

The aim of this paper is to study the concept of bi-bases of a semihypergroup. The notions of bi-base of semihypergroups are introduced and described. The results obtained extend the results on semigroup.

**Keywords:** Semihypergroup, Bi-hyperideal, Bi-base, Quasi-order

---

\* ผู้เขียนหลัก



## 1. Introduction and Preliminaries

Hyperstructure theory was born in 1934 by a French mathematician, Marty [9]. He defined hypergroups, began to analyze their properties and applied them to groups and rational algebraic function. Many mathematicians have studied hypergroups from a theoretical perspective due to the applicability to many subjects of pure and applied mathematics. Fabrici [4] introduced the concepts of a two-sided base semigroup and Fabrici's results extended to ordered semigroups by Changpas and Summaprab [2]. In 2017, Changpas and Kummoon studied the notion of bi-base of a semigroup and bi-base of a  $\Gamma$ -semigroup [7 - 8]. The purpose of this paper is to introduce the concept of bi-base of a semihypergroup and extend the results in [7] to semihypergroups. Let  $H$  be a nonempty set. A mapping  $\circ: H \times H \rightarrow P^*(H)$  where  $P^*(H)$  denotes the family of all nonempty subsets of  $H$ . If  $A$  and  $B$  are two nonempty subsets of  $H$ , then, we denote

$$1. A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b, \quad x \circ A = \{x\} \circ A, \quad A \circ x = A \circ \{x\} \text{ for all } x \in H,$$

$$2. A^m = \underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{m-1 \text{ times}} \text{ for all } m \in \mathbb{N},$$

$$3. a^n = \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{n-1 \text{ times}} \text{ for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } a \in A.$$

A system  $(H, \circ)$  is called a *semihypergroup* if for all  $x, y, z \in H$ ,  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ .

A nonempty subset  $A$  of a semihypergroup  $H$  is called a *subsemihypergroup* of  $H$  if  $A \circ A \subseteq A$ . A subsemihypergroup  $A$  of a semihypergroup  $H$  is called a *bi-hyperideal* of  $H$  if  $A \circ H \circ A \subseteq A$ .

**Proposition 1.1** Let  $H$  be a semihypergroup and  $A, B, C, D$  be nonempty subsets of  $H$ .

(1) If  $A \subseteq B$  and  $C \subseteq D$ , then  $A \circ C \subseteq B \circ D$ .

(2)  $A \circ (B \cup C) \subseteq A \circ B \cup A \circ C$  and  $(B \cup C) \circ A \subseteq B \circ A \cup C \circ A$ .

**Proof.** (1) Assume that  $A \subseteq B$  and  $C \subseteq D$ . Let  $x \in A \circ C$ . Hence,  $x \in a \circ c$  for some  $a \in A$  and  $c \in C$ . Since  $A \subseteq B$  and  $C \subseteq D$ ,  $x \in a \circ c$  for some  $a \in B$  and  $c \in D$ . Hence,  $x \in B \circ D$ . Therefore,  $A \circ C \subseteq B \circ D$ .

(2) Let  $x \in A \circ (B \cup C)$ . Hence,  $x \in s \circ t$  for some  $s \in A$  and  $t \in B \cup C$ . There are three cases to be considered.

Case 1  $t \in B$  and  $t \notin C$ .

Hence,  $x \in s \circ t$  for some  $s \in A$  and  $t \in B$ . Thus,  $x \in A \circ B \subseteq A \circ B \cup A \circ C$ .

Case 2  $t \notin B$  and  $t \in C$ .

Hence,  $x \in s \circ t$  for some  $s \in A$  and  $t \in C$ . Thus,  $x \in A \circ C \subseteq A \circ B \cup A \circ C$ .

Case 3  $t \in B$  and  $t \in C$ .

Hence,  $x \in s \circ t$  for some  $s \in A$ ,  $t \in B$  and  $t \in C$ . Thus,  $x \in A \circ B \cup A \circ C$ .

This implies that  $A \circ (B \cup C) \subseteq A \circ B \cup A \circ C$ . Similarly,  $(B \cup C) \circ A \subseteq B \circ A \cup C \circ A$ .  $\square$

From Proposition 1.1, if  $a \in A$  and  $b \in A$ , then  $a \circ b \subseteq A \circ A = A^2$ .

**Proposition 1.2** Let  $H$  be a semihypergroup and  $B_i$  be a bi-hyperideal of  $H$  for each  $i$  in an indexed set  $I$ . If  $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ , then  $\bigcap_{i \in I} B_i$  is a bi-hyperideal of  $H$ .

**Proof.** Assume that  $A = \bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ . Let  $a \in A \circ H \circ A$ . We have  $a \in b_1 \circ h \circ b_2$  for some  $b_1, b_2 \in A$  and  $h \in H$ . From  $b_1, b_2 \in A = \bigcap_{i \in I} B_i$ , so  $b_1, b_2 \in B_i$  for all  $i \in I$ . Since  $B_i$  is a bi-hyperideal for all  $i \in I$ , we have  $a \in b_1 \circ h \circ b_2 \subseteq B_i$  for all  $i \in I$ . Thus,  $a \in \bigcap_{i \in I} B_i = A$ . Therefore,  $A = \bigcap_{i \in I} B_i$  is a bi-hyperideal of  $H$ .  $\square$

**Definition 1.3** Let  $A$  be a nonempty subset of a semihypergroup  $H$ . Then, the intersection of all bi-hyperideals of  $H$  containing  $A$  is the *smallest bi-hyperideal of  $H$  generated by  $A$*  and is denoted by  $(A)_b$ .

**Proposition 1.4** Let  $A$  be a nonempty subset of a semihypergroup  $H$ . Then,

$$(A)_b = A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A.$$

**Proof.** Let  $B = A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A$ . Consider,

$$\begin{aligned} B \circ B &= (A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A) \circ (A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A) \\ &\subseteq A \circ A \cup A \circ H \circ A \subseteq B. \end{aligned}$$

Hence,  $B$  is a subsemihypergroup of  $H$ . Consider,

$$\begin{aligned} B \circ H \circ B &= (A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A) \circ H \circ (A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \cup A \circ H \circ A^2 \cup A \circ H \circ A \circ H \circ A \cup A^2 \circ H \circ A \\ &\quad \cup A^2 \circ H \circ A^2 \cup A^2 \circ H \circ A \circ H \circ A \cup A \circ H \circ A \circ H \circ A \\ &\quad \cup A \circ H \circ A \circ H \circ A^2 \cup A \circ H \circ A \circ H \circ A \circ H \circ A \\ &\subseteq A \circ H \circ A \cup A \circ H \circ H \circ A \cup A \circ H \circ H \circ H \circ A \cup A \circ H \circ H \circ A \\ &\quad \cup A \circ H \circ H \circ H \circ A \cup A \circ H \circ H \circ H \circ H \circ A \cup A \circ H \circ H \circ H \circ H \circ A \\ &\quad \cup A \circ H \circ H \circ H \circ H \circ A \cup A \circ H \circ H \circ H \circ H \circ H \circ A \\ &\subseteq A \circ H \circ A \subseteq B. \end{aligned}$$

Therefore,  $B$  is a bi-hyperideal of  $H$  containing  $A$ .

Let  $C$  be a bi-hyperideal of  $H$  containing  $A$ . Clearly,  $A \subseteq C$ . Since  $C$  is a subsemihypergroup of  $H$ ,  $A \circ A \subseteq C \circ C \subseteq C$ . Consider,  $A \circ H \circ A \subseteq C \circ H \circ C \subseteq C$ . Thus,  $B = A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A \subseteq C$ . Hence,  $B$  is a smallest bi-hyperideal of  $H$  containing  $A$ . Therefore,  $(A)_b = A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A$ .  $\square$

**Definition 1.5** Let  $H$  be a semihypergroup. A subset  $B$  of  $H$  is called a *bi-base* of  $H$  if it satisfies the following two conditions:

- (1)  $H = (B)_b$  (i.e.,  $H = B \cup B \circ B \cup B \circ H \circ B$ ).
- (2) If  $A$  is a nonempty subset of  $B$  and  $H = (A)_b$ , then,  $A = B$ .

**Example 1.6** Let  $H = \{a, b, c, d, e\}$ . The hyperoperation is defined by

| $\circ$ | $a$           | $b$           | $c$           | $d$           | $e$           |
|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $a$     | $\{a\}$       | $\{a\}$       | $\{a, b, c\}$ | $\{a\}$       | $\{a, b, c\}$ |
| $b$     | $\{a\}$       | $\{a\}$       | $\{a, b, c\}$ | $\{a\}$       | $\{a, b, c\}$ |
| $c$     | $\{a\}$       | $\{a\}$       | $\{a, b, c\}$ | $\{a\}$       | $\{a, b, c\}$ |
| $d$     | $\{a, b, d\}$ | $\{a, b, d\}$ | $H$           | $\{a, b, d\}$ | $H$           |
| $e$     | $\{a, b, d\}$ | $\{a, b, d\}$ | $H$           | $\{a, b, d\}$ | $H$           |

From [6],  $(H, \circ)$  is a semihypergroup. Consider  $B_1 = \{e\}$  and  $B_2 = \{c, d\}$ . Thus,  $B_1$  and  $B_2$  are bi-bases of  $H$ .

## 2. Main Results

In this section, we characterize bi-bases of semihypergroups and find a condition that a bi-base is a subsemihypergroup.

**Lemma 2.1** Let  $B$  be a bi-base of a semihypergroup  $H$  and  $a, b \in B$ .

If  $a \in b \circ b \cup b \circ H \circ b$ , then  $a = b$ .

**Proof.** Assume that  $a \in b \circ b \cup b \circ H \circ b$ . Suppose that  $a \neq b$ . Consider  $A = B \setminus \{a\}$ . Thus,  $A \subset B$ . Since  $A \subset B$ , we have  $(A)_b \subseteq (B)_b = H$ . Hence,  $(A)_b \subseteq H$ . From  $(B)_b = H$ , so  $x \in B \cup B \circ B \cup B \circ H \circ B$  for all  $x \in H$ . Let  $x \in H$ . There are three cases to be considered.

Case 1  $x \in B$ .

Subcase 1.1  $x \neq a$ . Thus,  $x \in B \setminus \{a\} = A \subseteq (A)_b$ .

Subcase 1.2  $x = a$ . By assumption,

$$x = a \in b \circ b \cup b \circ H \circ b \subseteq A \circ A \cup A \circ H \circ A \subseteq (A)_b.$$

Case 2  $x \in B \circ B$ . Hence,  $x \in b_1 \circ b_2$  for some  $b_1, b_2 \in B$ . There are four subcases to be considered.

Subcase 2.1  $b_1 = a$  and  $b_2 = a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_1 \circ b_2 \\ &= a \circ a \\ &\subseteq (b \circ b \cup b \circ H \circ b) \circ (b \circ b \cup b \circ H \circ b) \\ &= b^4 \cup b^3 \circ H \circ b \cup b \circ H \circ b^3 \cup b \circ H \circ b^2 \circ H \circ b \\ &\subseteq A^4 \cup A^3 \circ H \circ A \cup A \circ H \circ A^3 \cup A \circ H \circ A^2 \circ H \circ A \\ &\subseteq A \circ H^2 \circ A \cup A \circ H^3 \circ A \cup A \circ H^3 \circ A \cup A \circ H^4 \circ A \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 2.2  $b_1 \neq a$  and  $b_2 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_1 \circ b_2 \\
 &= b_1 \circ a \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ (b \circ b \cup b \circ H \circ b) \\
 &= (B \setminus \{a\}) \circ b \circ b \cup (B \setminus \{a\}) \circ b \circ H \circ b \\
 &\subseteq A^3 \cup A^2 \circ H \circ A \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \cup A \circ H^2 \circ A \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 2.3  $b_1 = a$  and  $b_2 \neq a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_1 \circ b_2 \\
 &= a \circ b_2 \\
 &\subseteq (b \circ b \cup b \circ H \circ b) \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= b \circ b \circ (B \setminus \{a\}) \cup b \circ H \circ b \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &\subseteq A^3 \cup A \circ H \circ A^2 \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \cup A \circ H^2 \circ A \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 2.4  $b_1 \neq a$  and  $b_2 \neq a$ . By assumption,  $A = B \setminus \{a\}$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_1 \circ b_2 \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= A \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Case 3  $x \in B \circ H \circ B$ . Hence,  $x \in b_3 \circ h \circ b_4$  for some  $b_3, b_4 \in B$  and  $h \in H$ . There are four subcases to be considered.

Subcase 3.1  $b_3 = a$  and  $b_4 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ h \circ b_4 \\
 &= a \circ h \circ a \\
 &\subseteq (b \circ b \cup b \circ H \circ b) \circ H \circ (b \circ b \cup b \circ H \circ b) \\
 &= b \circ b \circ H \circ b \circ b \cup b \circ b \circ H \circ b \circ H \circ b \cup b \circ H \circ b \circ H \circ b \circ b \\
 &\quad \cup b \circ H \circ b \circ H \circ b \circ H \circ b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\subseteq A \circ A \circ H \circ A \circ A \cup A \circ A \circ H \circ A \circ H \circ A \cup A \circ H \circ A \circ H \circ A \circ A \\
 &\quad \cup A \circ H \circ A \circ H \circ A \circ H \circ A \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.2  $b_3 \neq a$  and  $b_4 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ h \circ b_4 \\
 &= b_3 \circ h \circ a \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ H \circ (b \circ b \cup b \circ H \circ b) \\
 &= (B \setminus \{a\}) \circ H \circ b \circ b \cup (B \setminus \{a\}) \circ H \circ b \circ H \circ b \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \circ A \cup A \circ H \circ A \circ H \circ A \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.3  $b_3 = a$  and  $b_4 \neq a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ h \circ b_4 \\
 &= a \circ h \circ b_4 \\
 &\subseteq (b \circ b \cup b \circ H \circ b) \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= b \circ b \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \cup b \circ H \circ b \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &\subseteq A \circ A \circ H \circ A \cup A \circ H \circ A \circ H \circ A \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.4  $b_3 \neq a$  and  $b_4 \neq a$ . By assumption,  $A = B \setminus \{a\}$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ h \circ b_4 \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

This implies that  $(A)_b = H$ . This is a contradiction. Therefore,  $a = b$ . □

**Lemma 2.2** Let  $B$  be a bi-base of a semihypergroup  $H$  and  $a, b, c \in B$ .

If  $a \in c \circ b \cup c \circ H \circ b$ , then  $a = b$  or  $a = c$ .

**Proof.** Assume that  $a \in c \circ b \cup c \circ H \circ b$ . Suppose that  $a \neq b$  and  $a \neq c$ .

Consider  $A = B \setminus \{a\}$ , we have  $A \subset B$ . Since  $a \neq b$  and  $a \neq c$ , we have  $b, c \in A$ .

Since  $A \subset B$ , we have  $(A)_b \subseteq (B)_b = H$ . Hence,  $(A)_b \subseteq H$ . Since  $(B)_b = H$ , we have  $x \in B \cup B \circ B \cup B \circ H \circ B$  for all  $x \in H$ . Let  $x \in H$ . There are three cases to be considered.

Case 1  $x \in B$ .

Subcase 1.1  $x \neq a$ . Thus,  $x \in B \setminus \{a\} = A \subseteq (A)_b$ .

Subcase 1.2  $x = a$ . By assumption,

$$x = a \in c \circ b \cup c \circ H \circ b \subseteq A \circ A \cup A \circ H \circ A \subseteq (A)_b.$$

Case 2  $x \in B \circ B$ . Hence,  $x \in b_1 \circ b_2$  for some  $b_1, b_2 \in B$ . There are four subcases to be considered.

Subcase 2.1  $b_1 = a$  and  $b_2 = a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_1 \circ b_2 \\ &= a \circ a \\ &\subseteq (c \circ b \cup c \circ H \circ b) \circ (c \circ b \cup c \circ H \circ b) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 2.2  $b_1 \neq a$  and  $b_2 = a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_1 \circ b_2 \\ &= b_1 \circ a \\ &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ (c \circ b \cup c \circ H \circ b) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 2.3  $b_1 = a$  and  $b_2 \neq a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_1 \circ b_2 \\ &= a \circ b_2 \\ &\subseteq (c \circ b \cup c \circ H \circ b) \circ (B \setminus \{a\}) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 2.4  $b_1 \neq a$  and  $b_2 \neq a$ . By assumption,  $A = B \setminus \{a\}$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_1 \circ b_2 \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= A \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Case 3  $x \in B \circ H \circ B$ . Hence,  $x \in b_3 \circ h \circ b_4$  for some  $b_3, b_4 \in B$  and  $h \in H$ . There are four subcases to be considered.

Subcase 3.1  $b_3 = a$  and  $b_4 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ h \circ b_4 \\
 &= a \circ h \circ a \\
 &\subseteq (c \circ b \cup c \circ H \circ b) \circ H \circ (c \circ b \cup c \circ H \circ b) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.2  $b_3 \neq a$  and  $b_4 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ h \circ b_4 \\
 &= b_3 \circ h \circ a \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ H \circ (c \circ b \cup c \circ H \circ b) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.3  $b_3 = a$  and  $b_4 \neq a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ h \circ b_4 \\
 &= a \circ h \circ b_4 \\
 &\subseteq (c \circ b \cup c \circ H \circ b) \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.4  $b_3 \neq a$  and  $b_4 \neq a$ . By assumption,  $A = B \setminus \{a\}$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ h \circ b_4 \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

This implies that  $(A)_b = H$ . This is a contradiction. Therefore,  $a = b$  or  $a = c$ .  $\square$



**Definition 2.3** Let  $H$  be a semihypergroup. For any  $a, b \in H$ , define a *quasi-order* on  $H$  by

$$a \leq_b b \text{ if and only if } (a)_b \subseteq (b)_b.$$

From Definition 2.3,  $a \not\leq_b b$  if and only if  $(a)_b \not\subseteq (b)_b$ . The following example shows that the relation  $\leq_b$  defined above is not a partial order.

**Example 2.4** Let  $H = \{a, b, c, d\}$ . The hyperoperation is defined by

| $\circ$ | $a$     | $b$        | $c$        | $d$     |
|---------|---------|------------|------------|---------|
| $a$     | $\{a\}$ | $\{b\}$    | $\{c\}$    | $\{d\}$ |
| $b$     | $\{b\}$ | $\{a, c\}$ | $\{b, c\}$ | $\{d\}$ |
| $c$     | $\{c\}$ | $\{b, c\}$ | $\{a, b\}$ | $\{d\}$ |
| $d$     | $\{d\}$ | $\{d\}$    | $\{d\}$    | $H$     |

From [5],  $(H, \circ)$  is a semihypergroup. We have that the singleton sets consisting of an element of  $H$ .

Consider  $(a)_b = a \cup a \circ a \cup a \circ H \circ a = H$  and  $(b)_b = b \cup b \circ b \cup b \circ H \circ b = H$ . We have  $(a)_b \subseteq (b)_b$  and  $(b)_b \subseteq (a)_b$ . Hence,  $a \leq_b b$  and  $b \leq_b a$ . But  $a \neq b$ . Therefore,  $\leq_b$  is not a partial order on  $H$ .

**Lemma 2.5** Let  $B$  be a bi-base of a semihypergroup  $H$ . If  $a, b \in B$  such that  $b \neq a$ , then neither  $a \leq_b b$  nor  $b \leq_b a$ .

**Proof.** Assume that  $a, b \in B$  such that  $a \neq b$ .

Case 1  $a \leq_b b$ . Thus,  $(a)_b \subseteq (b)_b$ . Consider  $a \in (a)_b \subseteq (b)_b = \{b\} \cup b \circ b \cup b \circ H \circ b$ .

Since  $a \neq b$ ,  $a \in b \circ b \cup b \circ H \circ b$ . By Lemma 2.1,  $a = b$ . This is a contradiction.

Case 2  $b \leq_b a$ . This can be proved similarly. □

**Lemma 2.6** Let  $B$  be a bi-base of a semihypergroup  $H$ . For all  $a, b, c \in B$  and  $h \in H$ ,

- (1) if  $a \in b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c$ , then  $a = b$  or  $a = c$ ;
- (2) if  $a \in b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c$ , then  $a = b$  or  $a = c$ .

**Proof.** (1) Assume that  $a \in b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c$ . Suppose that  $a \neq b$  and  $a \neq c$ . Consider  $A = B \setminus \{a\}$ , we have  $A \subset B$ . Since  $a \neq b$  and  $a \neq c$ ,  $b, c \in A$ . Since  $A \subset B$ , we have  $(A)_b \subseteq (B)_b = H$ . Hence,  $(A)_b \subseteq H$ . Since  $(B)_b = H$ ,  $x \in B \cup B \circ B \cup B \circ H \circ B$  for all  $x \in H$ . Let  $x \in H$ . There are three cases to be considered.

Case 1  $x \in B$ .

Subcase 1.1  $x \neq a$ . Thus,  $x \in B \setminus \{a\} = A \subseteq (A)_b$ .

Subcase 1.2  $x = a$ . By assumption,

$$\begin{aligned} x &= a \in b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c \\ &\subseteq A \circ A \cup A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Case 2  $x \in B \circ B$ . Hence,  $x \in b_1 \circ b_2$  for some  $b_1, b_2 \in B$ . There are four subcases to be considered.

Subcase 2.1  $b_1 = a$  and  $b_2 = a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_1 \circ b_2 \\ &= a \circ a \\ &\subseteq (b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c) \circ (b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 2.2  $b_1 \neq a$  and  $b_2 = a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_1 \circ b_2 \\ &= b_1 \circ a \\ &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ (b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 2.3  $b_1 = a$  and  $b_2 \neq a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_1 \circ b_2 \\ &= a \circ b_2 \\ &\subseteq (b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c) \circ (B \setminus \{a\}) \end{aligned}$$

$$\subseteq A \circ H \circ A$$

$$\subseteq (A)_b.$$

Subcase 2.4  $b_1 \neq a$  and  $b_2 \neq a$ . By assumption,  $A = B \setminus \{a\}$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_1 \circ b_2 \\ &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ (B \setminus \{a\}) \\ &\subseteq A \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Case 3  $x \in B \circ H \circ B$ . Hence,  $x \in b_3 \circ h \circ b_4$  for some  $b_3, b_4 \in B$  and  $k \in H$ . There are four subcases to be considered.

Subcase 3.1  $b_3 = a$  and  $b_4 = a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_3 \circ k \circ b_4 \\ &= a \circ k \circ a \\ &\subseteq (b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c) \circ H \circ \\ &\quad (b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 3.2  $b_3 \neq a$  and  $b_4 = a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_3 \circ k \circ b_4 \\ &= b_3 \circ k \circ a \\ &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ H \circ (b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 3.3  $b_3 = a$  and  $b_4 \neq a$ . We have

$$\begin{aligned} x &\in b_3 \circ k \circ b_4 \\ &= a \circ k \circ b_4 \\ &\subseteq (b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c) \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\ &\subseteq A \circ H \circ A \\ &\subseteq (A)_b. \end{aligned}$$

Subcase 3.4  $b_3 \neq a$  and  $b_4 \neq a$ . By assumption,  $A = B \setminus \{a\}$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ k \circ b_4 \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

This implies  $(A)_b = H$ . This is a contradiction. Therefore,  $a = b$  or  $a = c$ .

(2) Assume that  $a \in b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c$ . Suppose that  $a \neq b$  and  $a \neq c$ . Consider  $A = B \setminus \{a\}$ . We have  $A \subset B$ . Since  $a \neq b$  and  $a \neq c$ ,  $b, c \in A$ . Since  $A \subset B$ , we have  $(A)_b \subseteq (B)_b = H$ . Hence,  $(A)_b \subseteq H$ . Since  $(B)_b = H$ ,  $x \in B \cup B \circ B \cup B \circ H \circ B$  for all  $x \in H$ . Let  $x \in H$ . There are three cases to be considered.

Case 1  $x \in B$ .

Subcase 1.1  $x \neq a$ . Thus,  $x \in B \setminus \{a\} = A \subseteq (A)_b$ .

Subcase 1.2  $x = a$ . By assumption,

$$\begin{aligned}
 x &= a \in b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Case 2  $x \in B \circ B$ . Hence,  $x \in b_1 \circ b_2$  for some  $b_1, b_2 \in B$ . There are four subcases to be considered.

Subcase 2.1  $b_1 = a$  and  $b_2 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_1 \circ b_2 \\
 &= a \circ a \\
 &\subseteq (b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c) \\
 &\quad \circ (b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 2.2  $b_1 \neq a$  and  $b_2 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_1 \circ b_2 \\
 &= b_1 \circ a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ (b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 2.3  $b_1 = a$  and  $b_2 \neq a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_1 \circ b_2 \\
 &= a \circ b_2 \\
 &\subseteq (b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c) \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 2.4  $b_1 \neq a$  and  $b_2 \neq a$ . By assumption,  $A = B \setminus \{a\}$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_1 \circ b_2 \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= A \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Case 3  $x \in B \circ H \circ B$ . Hence,  $x \in b_3 \circ k \circ b_4$  for some  $b_3, b_4 \in B$  and  $k \in H$ . There are four subcases to be considered.

Subcase 3.1  $b_3 = a$  and  $b_4 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ k \circ b_4 \\
 &= a \circ k \circ a \\
 &\subseteq (b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c) \\
 &\quad \circ H \circ (b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.2  $b_3 \neq a$  and  $b_4 = a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ k \circ b_4 \\
 &= b_3 \circ k \circ a \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ H \circ (b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.3  $b_3 = a$  and  $b_4 \neq a$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ k \circ b_4 \\
 &= a \circ k \circ b_4 \\
 &\subseteq (b \circ h \circ c \cup (b \circ h \circ c)^2 \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c) \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &\subseteq A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

Subcase 3.4  $b_3 \neq a$  and  $b_4 \neq a$ . By assumption,  $A = B \setminus \{a\}$ . We have

$$\begin{aligned}
 x &\in b_3 \circ k \circ b_4 \\
 &\subseteq (B \setminus \{a\}) \circ H \circ (B \setminus \{a\}) \\
 &= A \circ H \circ A \\
 &\subseteq (A)_b.
 \end{aligned}$$

This implies  $(A)_b = H$ . This is a contradiction. Therefore,  $a = b$  or  $a = c$ .  $\square$

**Lemma 2.7** Let  $B$  be a bi-base of a semihypergroup  $H$ .

- (1) For any  $a, b, c \in B$ , if  $a \neq b$  and  $a \neq c$ , then  $a \not\leq_b b \circ c$ .
- (2) For any  $a, b, c \in B$  and  $h \in H$ , if  $a \neq b$  and  $a \neq c$ , then  $a \not\leq_b b \circ h \circ c$ .

**Proof.** Let  $B$  be a bi-base of a semihypergroup  $H$  and  $a, b, c \in B, h \in H$ .

(1) Suppose that  $a \leq_b b \circ c$ . Thus,  $(a)_b \subseteq (b \circ c)_b$ .

We have  $a \in (a)_b \subseteq (b \circ c)_b = b \circ c \cup (b \circ c)^2 \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c$ .

By Lemma 2.6 (1), we have  $a = b$  or  $a = c$ .

(2) Suppose that  $a \leq_b b \circ h \circ c$ . Thus,  $(a)_b \subseteq (b \circ h \circ c)_b$ .

We have  $a \in (a)_b \subseteq (b \circ h \circ c)_b = b \circ h \circ c \cup b \circ h \circ c \circ b \circ h \circ c \cup b \circ h \circ c \circ H \circ b \circ h \circ c$ .

By Lemma 2.6 (2), we have  $a = b$  or  $a = c$ .  $\square$

**Theorem 2.8** A nonempty subset  $B$  of a semihypergroup  $H$  is a bi-base of  $H$  if and only if  $B$  satisfies the following conditions:

- (1) For any  $x \in H$ ,
  - (1.1) there exists  $b \in B$  such that  $x \leq_b b$ , or
  - (1.2) there exist  $b_1, b_2 \in B$  such that  $x \leq_b b_1 \circ b_2$ , or
  - (1.3) there exist  $b_3, b_4 \in B$  and  $h \in H$  such that  $x \leq_b b_3 \circ h \circ b_4$ .
- (2) For any  $a, b, c \in B$ , if  $a \neq b$  and  $a \neq c$ , then  $a \not\leq_b b \circ c$ .

(3) For any  $a, b, c \in B$  and  $h \in H$ , if  $a \neq b$  and  $a \neq c$ , then  $a \not\leq_b b \circ h \circ c$ .

**Proof.** Let  $B$  be a nonempty subset of a semihypergroup  $H$ . Assume that  $B$  is a bi-base of  $H$ . Therefore,  $H = (B)_b$ . Suppose that  $x \in H$ , so  $x \in B \cup B \circ B \cup B \circ H \circ B$ . There are three cases to be considered.

Case 1  $x \in B$ . Thus,  $x = b$  for some  $b \in B$ . This implies that  $(x)_b \subseteq (b)_b$ . Hence,  $x \leq_b b$ .

Case 2  $x \in B \circ B$ . Thus,  $x \in b_1 \circ b_2$  for some  $b_1, b_2 \in B$ . This implies that  $(x)_b \subseteq (b_1 \circ b_2)_b$ . Hence,  $x \leq_b b_1 \circ b_2$ .

Case 3  $x \in B \circ H \circ B$ . Thus,  $x \in b_3 \circ h \circ b_4$  for some  $b_3, b_4 \in B$  and  $h \in H$ .

This implies  $(x)_b \subseteq (b_3 \circ h \circ b_4)_b$ . Hence,  $x \leq_b b_3 \circ h \circ b_4$ .

The validity of (2) and (3) follows from Lemma 2.7 (1) and Lemma 2.7 (2), respectively.

Conversely, assume that  $B$  satisfies (1), (2) and (3). We show that  $B$  is a bi-base of  $H$ . Clearly,  $(B)_b \subseteq H$ . Let  $x \in H$ . From (1.1), it follows that  $x \in (x)_b \subseteq (b)_b \subseteq (B)_b$  for some  $b \in B$ . From (1.2), it follows that

$$\begin{aligned} x &\in (x)_b \\ &\subseteq (b_1 \circ b_2)_b \\ &= b_1 \circ b_2 \cup b_1 \circ b_2 \circ b_1 \circ b_2 \cup b_1 \circ b_2 \circ H \circ b_1 \circ b_2 \\ &\subseteq b_1 \circ b_2 \cup b_1 \circ H \circ b_2 \\ &\subseteq B \circ B \cup B \circ H \circ B \subseteq (B)_b \end{aligned}$$

for some  $b_1, b_2 \in B$ . From (1.3), it follows that

$$\begin{aligned} x &\in (x)_b \\ &\subseteq (b_3 \circ h \circ b_4)_b \\ &= b_3 \circ h \circ b_4 \cup b_3 \circ h \circ b_4 \circ b_3 \circ h \circ b_4 \cup b_3 \circ h \circ b_4 \circ H \circ b_3 \circ h \circ b_4 \\ &\subseteq b_3 \circ H \circ b_4 \\ &\subseteq B \circ H \circ B \\ &\subseteq (B)_b \end{aligned}$$

for some  $b_3, b_4 \in B$  and  $h \in H$ . It remains to show that  $B$  is a minimal subset of  $H$  with the property  $H = (B)_b$ . Assume that  $H = (A)_b$  for some  $A \subset B$ . There exists

$b \in B \setminus A$ . Since  $b \in B \subseteq H = (A)_b$ , we have  $b \in (A)_b$ . Thus,  $b \in A \cup A \circ A \cup A \circ H \circ A$ . Since  $b \notin A$ ,  $b \in A \circ A \cup A \circ H \circ A$ . There are two cases to be considered.

Case 1  $b \in A \circ A$ . Thus,  $b \in a_1 \circ a_2$  for some  $a_1, a_2 \in A$ . Since  $b \notin A$ ,  $b \neq a_1$  and  $b \neq a_2$ . Thus,  $(b)_b \subseteq (a_1 \circ a_2)_b$ . Hence,  $b \leq a_1 \circ a_2$ . This contradicts (2).

Case 2  $b \in A \circ H \circ A$ . Thus,  $b \in a_3 \circ h \circ a_4$  for some  $a_3, a_4 \in A$  and  $h \in H$ . Since  $b \notin A$ ,  $b \neq a_3$  and  $b \neq a_4$ . Thus,  $(b)_b \subseteq (a_3 \circ h \circ a_4)_b$ . Hence,  $b \leq a_3 \circ h \circ a_4$ . This contradicts (3).

Therefore,  $B$  is a bi-base of  $H$  and the proof is completed.  $\square$

In Example 1.6, we have that  $\{e\}$  is a bi-base of  $H$ . But  $\{e\}$  is not a subsemihypergroup of  $H$ . So, we find a condition that a bi-base is a subsemihypergroup.

**Theorem 2.9** Let  $B$  be a bi-base of a semihypergroup  $H$ .

Then,  $B$  is a subsemihypergroup of  $H$  if and only if  $B$  satisfies the conditions  $b \in b \circ c$  or  $c \in b \circ c$  for any  $b, c \in B$ .

**Proof.** Assume that  $B$  is a subsemihypergroup of  $H$ . Let  $b, c \in B$ .

Suppose that  $b \notin b \circ c$  and  $c \notin b \circ c$ . Let  $a \in b \circ c$ . Thus,  $a \neq b$  and  $a \neq c$ .

Since  $a \in b \circ c \subseteq b \circ c \cup b \circ c \circ b \circ c \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c$  and by Lemma 2.6 (1), we have  $a = b$  or  $a = c$ . This is a contradiction.

Conversely, assume that  $b \in b \circ c$  or  $c \in b \circ c$  for any  $b, c \in B$ . Let  $a \in B \circ B$ . Thus,  $a \in b \circ c$  for some  $b, c \in B$ . Since  $a \in b \circ c \cup b \circ c \circ b \circ c \cup b \circ c \circ H \circ b \circ c$  and by Lemma 2.6 (1),  $a = b$  or  $a = c$ . Hence,  $a \in \{b, c\} \subseteq B$ . Therefore,  $B$  is a subsemihypergroup of  $H$ .  $\square$

## Acknowledgments

The authors are highly grateful to the committee for their valuable comments and helpful suggestions which have improved the presentation of this paper. This research was supported by Buriram Rajabhat University.



## References

- [1] Anvariye, S. M., Mirvakili, S., and Davvaz, B. (2010). On  $\Gamma$ –hyperideals in  $\Gamma$ –Semihypergroups, *Carpathian Journal of Mathematics*, 26 (1), p. 11 – 23.
- [2] Changphas, T., and Summaprab, P. (2014). On Two-Sided Bases of An Ordered Semigroup, *Quasigroups and Related Systems*, 22, p. 59 – 66.
- [3] Fabrici, I. (1972). One-Sided Bases of Semigroups, *Matematický Casopis*, 22 (4), p. 286 – 290.
- [4] Fabrici, I. (1975). Two-Sided Bases of Semigroups, *Matematický Casopis*, 25 (2), p. 173 – 178.
- [5] Jafarabadi, H. M., Sarmin, H., and Molaei, M. R. (2012). Completely Simple and Regular Semi Hypergroups, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Science Society*, 35 (2), p. 335 – 343.
- [6] Kehayopulu, N. (2018). On Ordered Hypersemigroups Given by A Table of Multiplication and A Figure, *Turkish Journal of Mathematics*, 42, p. 2045 - 2060.
- [7] Kummoon, P., and Changphas, T. (2017). On Bi-Bases of A Semigroup, *Quasigroups and Related Systems*, 25, p. 87 – 94.
- [8] Kummoon, P., and Changphas, T. (2017). On Bi-Bases of  $\Gamma$ –Semigroup. *Thai Journal of Mathematics, Special issue: Annual Meeting in Mathematics 2017*, p. 75 – 86.
- [9] Marty, F. (1934). Sur une Generalization de la Notion de Groupe, *the 8<sup>th</sup> Congress Math. Scandenave*. Stockholm.
- [10] Tamura, T. (1955). One-Sided Bases and Translations of A Semigroup, *Mathematica Japonica*, 3, p. 137 – 141.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(703) มกราคม – เมษายน 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

## ลำดับโมเบียส

## Mobius Sequences

สมพงษ์ ญูสุริฉาย<sup>1,\*</sup> และ ลลิตา อภิสรพานิชย์<sup>2</sup>

<sup>1</sup>หน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ สาขาวิทยาศาสตร์การคำนวณ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 90110

<sup>2</sup>สาขาวิทยาศาสตร์การคำนวณ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 90110

Sompong Chuysurichay<sup>1,\*</sup> and Lalita Apisornpanich<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Algebra and Applications Research Unit, Division of Computational Science,

Faculty of Science, Prince of Songkla University, Songkhla 90110

<sup>2</sup>Division of Computational Science, Faculty of Science,

Prince of Songkla University, Songkhla 90110

Email: <sup>1</sup>sompong.c@psu.ac.th <sup>2</sup>5910210268@psu.ac.th

วันที่รับบทความ : 10 มกราคม 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 6 พฤษภาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 21 สิงหาคม 2563

### บทคัดย่อ

ในงานวิจัยเรื่องนี้ผู้วิจัยหารูปแบบปิดของลำดับโมเบียส ซึ่งนิยามโดย

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d}$$

เมื่อ  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $ad - bc \neq 0$

คำสำคัญ: โมเบียส ลำดับ

---

\* ผู้เขียนหลัก

## ABSTRACT

In this research, we obtain a new derivation of the closed-form solution of a Mobius sequence defined by

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d}$$

where  $a, b, c$  and  $d$  are real numbers with  $ad - bc \neq 0$ .

**Keywords:** Mobius, Sequence

## 1. Introduction

A Mobius sequence is a sequence defined by using iterated applications of a single Mobius transformation to an initial point on the real line (or more generally, on the extended complex plane). It is a common sequence appeared in many literatures yet a complete set of solutions are still rare to find. Many authors studied Mobius sequences in terms of their dynamical properties [1, 2, 5]. It is also applied in the study of continued fractions [3]. The complete set of solutions, in nontrivial cases, can be found in [4]. Liebeck [4] obtained the solution to the Mobius sequence by assuming that the sequence must converge to some complex number and constructing an *auxiliary equation* from this recurrence relation. He also explained the behavior of the solution in each case. See Theorem 2R in [4] for more details.

The aim of this paper is to collect, with proof different from [4], the closed-form solution of Mobius sequences defined on the real line. The novelty of our method is to define another *auxiliary sequence* which later becomes a homogeneous linear recurrence relation of degree 2 and can be easily solved. Our main result is summarized in Theorem 1 below.

## 2. Mobius Sequences and Their Closed-Form

A Mobius sequence is a sequence of real numbers  $\{z_n\}$ , with initial value  $z_1$ , defined for any  $n \in \mathbb{N}$  by the recurrence relation

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d} \quad (1)$$

where  $a, b, c$  and  $d$  are real numbers with  $ad - bc \neq 0$ . The closed-form solution of a Mobius sequence is summarized in the following theorem.

**Theorem 1** Let  $\{z_n\}$  be a Mobius sequence defined recursively by (1).

(1) If  $c = 0$  and  $a = d$ , then  $z_n = z_1 + (n-1)\frac{b}{d}$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) If  $c = 0$  and  $a \neq d$ , then

$$z_n = \left(\frac{a}{d}\right)^{n-1} z_1 + \frac{b}{d^{n-1}} \left(\frac{a^{n-1} - d^{n-1}}{a - d}\right)$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ .

(3) If  $c \neq 0$  and  $(a-d)^2 + 4bc > 0$ , then

$$z_n = \frac{\left(\frac{\alpha-d}{c}\right)(\beta-d-cz_1)\alpha^{n-1} + \left(\frac{\beta-d}{c}\right)(cz_1+d-\alpha)\beta^{n-1}}{(\beta-d-cz_1)\alpha^{n-1} + (cz_1+d-\alpha)\beta^{n-1}}$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ , where

$$\alpha = \frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2} \text{ and } \beta = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}.$$

(4) If  $c \neq 0$  and  $(a-d)^2 + 4bc = 0$ , then

$$z_n = \frac{1}{2c} \left[ \frac{(a-d)(2cz_1+d-a)n + (a-d)^2 + 4cdz_1}{(2cz_1+d-a)n + 2(a-cz_1)} \right]$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ .

(5) If  $c \neq 0$  and  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ , then

$$z_n = \frac{r}{c} \left[ \frac{(cz_1+d)\sin n\theta - r\sin(n-1)\theta}{(cz_1+d)\sin(n-1)\theta - r\sin(n-2)\theta} \right] - \frac{d}{c}$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ , where  $r = \sqrt{ad-bc}$  and  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}}\right)$ .

**Proof.** We consider the following cases:

Case 1  $c = 0$ . Then,  $ad \neq 0$  and (1) reduces to

$$z_{n+1} = \frac{a}{d} z_n + \frac{b}{d}. \quad (2)$$

From (2), we get

$$z_n = \frac{a}{d} z_{n-1} + \frac{b}{d}. \quad (3)$$

Substituting (3) in (2) and continuing in the same manner, we have

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{a}{d} \left( \frac{a}{d} z_{n-1} + \frac{b}{d} \right) + \frac{b}{d} \\ &= \left( \frac{a}{d} \right)^2 z_{n-1} + \frac{b}{d} \left( \frac{a}{d} + 1 \right) \\ &= \left( \frac{a}{d} \right)^2 \left( \frac{a}{d} z_{n-2} + \frac{b}{d} \right) + \frac{b}{d} \left( \frac{a}{d} + 1 \right) \\ &= \left( \frac{a}{d} \right)^3 z_{n-2} + \frac{b}{d} \left( \left( \frac{a}{d} \right)^2 + \left( \frac{a}{d} \right) + 1 \right) \\ &\quad \vdots \\ &= \left( \frac{a}{d} \right)^n z_1 + \frac{b}{d} \left( \left( \frac{a}{d} \right)^{n-1} + \left( \frac{a}{d} \right)^{n-2} + \cdots + \left( \frac{a}{d} \right) + 1 \right). \end{aligned}$$

Thus, we have the following results.

(1) If  $c = 0$  and  $a = d$ , then  $z_{n+1} = z_1 + \frac{bn}{d}$ . Hence,  $z_n = z_1 + \frac{b}{d}(n-1)$  for all

$n \in \mathbb{N}$ .

(2) If  $c = 0$  and  $a \neq d$ , then  $z_{n+1} = \left( \frac{a}{d} \right)^n z_1 + \frac{b}{d} \left( \frac{\left( \frac{a}{d} \right)^n - 1}{\frac{a}{d} - 1} \right)$ . Hence,

$$z_n = \left( \frac{a}{d} \right)^{n-1} z_1 + \frac{b}{d^{n-1}} \left( \frac{a^{n-1} - d^{n-1}}{a - d} \right) \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

Case 2  $c \neq 0$ . Define a sequence  $\{x_n\}$  by

$$x_{n+1} = (cz_n + d)x_n. \quad (4)$$

Since  $cz_n + d \neq 0$ ,  $x_n \neq 0$  for all  $n \in \mathbb{N}$ . Then, we have

$$z_n = \frac{x_{n+1}}{cx_n} - \frac{d}{c}. \quad (5)$$

Substituting (5) in (1), we get

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+2}}{cx_{n+1}} - \frac{d}{c} &= \frac{a \left( \frac{x_{n+1}}{cx_n} - \frac{d}{c} \right) + b}{c \left( \frac{x_{n+1}}{cx_n} - \frac{d}{c} \right) + d} \\ \frac{x_{n+2} - dx_{n+1}}{cx_{n+1}} &= \frac{ax_{n+1} - adx_n + bcx_n}{cx_{n+1}} \\ x_{n+2} - (a+d)x_{n+1} + (ad-bc)x_n &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

The auxiliary equation of (6) is

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0.$$

Solving for  $x$ , we get

$$x = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}.$$

Let  $\alpha = \frac{a+d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$  and  $\beta = \frac{a+d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$ .

We consider 3 subcases.

Case 2.1  $(a-d)^2 + 4bc > 0$ . Since  $ad-bc \neq 0$ , we have  $\alpha, \beta \neq 0$ . Also,  $\alpha \neq \beta$  because  $(a-d)^2 + 4bc > 0$ . Thus, the solution of (6) is

$$x_n = k_1 \alpha^n + k_2 \beta^n \quad (7)$$

where  $k_1$  and  $k_2$  are constants.

Putting  $n=1, 2$  in (7), we get the system of equations

$$\left. \begin{aligned} \alpha k_1 + \beta k_2 &= x_1, \\ \alpha^2 k_1 + \beta^2 k_2 &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Using Cramer's rule, the solutions for (8) are

$$k_1 = \frac{\beta x_1 - x_2}{\alpha(\beta - \alpha)} \text{ and } k_2 = \frac{x_2 - \alpha x_1}{\beta(\beta - \alpha)}.$$

Thus,

$$x_n = \left( \frac{\beta x_1 - x_2}{\beta - \alpha} \right) \alpha^{n-1} + \left( \frac{x_2 - \alpha x_1}{\beta - \alpha} \right) \beta^{n-1}. \quad (9)$$

Putting (9) in (5) and simplifying, we get

$$z_n = \frac{\left( \frac{\alpha - d}{c} \right) (\beta - d - cz_1) \alpha^{n-1} + \left( \frac{\beta - d}{c} \right) (cz_1 + d - \alpha) \beta^{n-1}}{(\beta - d - cz_1) \alpha^{n-1} + (cz_1 + d - \alpha) \beta^{n-1}}$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ .

Case 2.2  $(a-d)^2 + 4bc = 0$ . Then  $\alpha = \beta = \frac{a+d}{2}$ . Thus, the solution of (6) is

$$x_n = (k_1 + k_2 n) \alpha^n, \quad (10)$$

where  $k_1$  and  $k_2$  are constants.

Putting  $n=1, 2$  in (10), we get the system of equations

$$\left. \begin{aligned} \alpha k_1 + \alpha k_2 &= x_1, \\ \alpha^2 k_1 + 2\alpha^2 k_2 &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Using Cramer's rule, the solutions for (11) are

$$k_1 = \frac{x_1}{\alpha^2} (2\alpha - cz_1 - d) \text{ and } k_2 = \frac{x_1}{\alpha^2} (cz_1 + d - \alpha).$$

Thus,

$$\begin{aligned} x_n &= \left[ \frac{x_1}{\alpha^2} (2\alpha - cz_1 - d) + \frac{x_1}{\alpha^2} (ncz_1 + nd - n\alpha) \right] \alpha^n \\ &= x_1 \alpha^{n-2} \left[ a - cz_1 + ncz_1 + \frac{n}{2} (d - a) \right] \end{aligned}$$

$$= x_1 \alpha^{n-2} \left[ (n-1)cz_1 + \frac{(d-a)}{2}n + a \right]. \quad (12)$$

Putting (12) in (5) and simplifying, we have

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{x_1 \alpha^{n-1} \left[ ncz_1 + \left( \frac{d-a}{2} \right) (n+1) + a \right]}{cx_1 \alpha^{n-2} \left[ (n-1)cz_1 + \left( \frac{d-a}{2} \right) n + a \right]} - \frac{d}{c} \\ &= \left( \frac{a+d}{2c} \right) \left[ \frac{ncz_1 + \left( \frac{d-a}{2} \right) (n+1) + a}{(n-1)cz_1 + \left( \frac{d-a}{2} \right) n + a} \right] - \frac{d}{c} \\ &= \frac{1}{2c} \left[ \frac{(a-d)(2cz_1 + d - a)n + (a-d)^2 + 4cdz_1}{(2cz_1 + d - a)n + 2(a - cz_1)} \right] \end{aligned}$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ .

Case 2.3  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ . Then,  $\alpha, \beta$  are nonreal complex numbers. Note that

$$ad - bc = \frac{1}{4}(a+d)^2 - \frac{1}{4}[(a-d)^2 + 4bc] > 0.$$

We also have

$$\alpha = \frac{a+d-i\sqrt{-(a-d)^2-4bc}}{2} \text{ and } \beta = \frac{a+d+i\sqrt{-(a-d)^2-4bc}}{2}.$$

Let  $\theta$  be the argument of  $\beta$  and  $r = |\beta|$ .

Then,  $r = \sqrt{ad-bc}$  and  $\sin \theta = \sqrt{\frac{-(a-d)^2-4bc}{4(ad-bc)}} > 0$ . Thus,  $\theta \in (0, \pi)$  and hence,

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}} \right). \text{ Then, } \alpha = r(\cos \theta - i \sin \theta) \text{ and } \beta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Thus, the solution of (6) is

$$x_n = r^n (k_1 \cos n\theta + k_2 \sin n\theta), \quad (13)$$

where  $k_1$  and  $k_2$  are constants.

Putting  $n=1, 2$  in (13), we get the system of equations



$$\begin{cases} (r \cos \theta)k_1 + (r \sin \theta)k_2 = x_1, \\ (r^2 \cos 2\theta)k_1 + (r^2 \sin 2\theta)k_2 = x_2. \end{cases} \quad (14)$$

Using Cramer's rule and  $x_2 = (cz_1 + d)x_1$ , the solutions for (14) are

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{rx_1 \sin 2\theta - x_2 \sin \theta}{r^2 \sin \theta} \\ &= \frac{rx_1 \sin 2\theta - x_1 (cz_1 + d) \sin \theta}{r^2 \sin \theta} \\ &= \frac{x_1}{r^2 \sin \theta} [r \sin 2\theta - (cz_1 + d) \sin \theta] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{x_2 \cos \theta - rx_1 \cos 2\theta}{r^2 \sin \theta} \\ &= \frac{x_1 (cz_1 + d) \cos \theta - rx_1 \cos 2\theta}{r^2 \sin \theta} \\ &= \frac{x_1}{r^2 \sin \theta} [(cz_1 + d) \cos \theta - r \cos 2\theta]. \end{aligned}$$

Substituting  $k_1$ ,  $k_2$  and (13) in (5), we get

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{r}{c} \left[ \frac{(\cos(n+1)\theta)[r \sin 2\theta - (cz_1 + d) \sin \theta] + (\sin(n+1)\theta)[(cz_1 + d) \cos \theta - r \cos 2\theta]}{(\cos n\theta)[r \sin 2\theta - (cz_1 + d) \sin \theta] + (\sin n\theta)[(cz_1 + d) \cos \theta - r \cos 2\theta]} \right] - \frac{d}{c} \\ &= \frac{r}{c} \left[ \frac{(cz_1 + d)[\sin(n+1)\theta \cos \theta - \cos(n+1)\theta \sin \theta]}{(cz_1 + d)[\sin n\theta \cos \theta - \cos n\theta \sin \theta] + r[\cos n\theta \sin 2\theta - \sin n\theta \cos 2\theta]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r[\cos(n+1)\theta \sin 2\theta - \sin(n+1)\theta \cos 2\theta]}{(cz_1 + d)[\sin n\theta \cos \theta - \cos n\theta \sin \theta] + r[\cos n\theta \sin 2\theta - \sin n\theta \cos 2\theta]} \right] - \frac{d}{c} \\ &= \frac{r}{c} \left[ \frac{(cz_1 + d) \sin n\theta - r \sin(n-1)\theta}{(cz_1 + d) \sin(n-1)\theta - r \sin(n-2)\theta} \right] - \frac{d}{c}. \end{aligned}$$

### 3. Examples

We illustrate the results in Theorem 1 by the following examples.

1. Let  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=0$ ,  $d=1$  and  $z_1=1$ .

Then, (1) becomes  $z_{n+1}=z_n+1$ . By Theorem 1 (1), we get  $z_n=n$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Let  $a=2$ ,  $b=1$ ,  $c=0$ ,  $d=1$  and  $z_1=2$ .

Then, (1) becomes  $z_{n+1}=2z_n+1$ . By Theorem 1 (2), we get  $z_n=3 \cdot 2^{n-1}-1$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Let  $a=1$ ,  $b=4$ ,  $c=1$ ,  $d=1$  and  $z_1=1$ .

Then, (1) becomes  $z_{n+1}=\frac{z_n+4}{z_n+1}$ . By Theorem 1 (3), we get  $z_n=\frac{2 \cdot 3^n+2(-1)^n}{3^n-(-1)^n}$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Let  $a=3$ ,  $b=-1$ ,  $c=1$ ,  $d=1$  and  $z_1=2$ .

Then, (1) becomes  $z_{n+1}=\frac{3z_n-1}{z_n+1}$ . By Theorem 1 (4), we get  $z_n=\frac{n+3}{n+1}$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Let  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $c=-1$ ,  $d=1$  and  $z_1=2$ .

Then, (1) becomes  $z_{n+1}=\frac{1}{-z_n+1}$ . By Theorem 1 (5), we get

$$z_n = \frac{\sin \frac{(n-2)\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3}}{\sin \frac{(n-2)\pi}{3} + \sin \frac{(n-1)\pi}{3}} \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

### Acknowledgement

The second author is grateful to the Development and Promotion of Science and Technology Project (DPST).

### References

- [1] De Pree, J. D. and Thron, W. J. (1962). On Sequences of Moebius Transformations. *Mathematische Zeitschrift*, 80 (1), p. 184 - 193.

- [2] Eljoseph, N. (1968). On The Iteration of Linear Fractional Transformations. *The American Mathematical Monthly*, 75 (4), p. 362 - 366.
- [3] Karlsson, J., Wallin, H., and Gelfgren, J. (1991). Iteration of Möbius Transforms and Continued Fractions. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 21 (1), p. 451 - 472.
- [4] Liebeck, H . (1961). The Convergence of Sequences with Linear Fractional Recurrence Relation. *The American Mathematical Monthly*, 68 (4), p. 353 - 355.
- [5] Piranian, G. and Thron, W. J. (1957). Convergence Properties of Sequences of Linear Fractional Transformations. *The Michigan Mathematical Journal*, 4 (2), p. 129 - 135.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(703) มกราคม – เมษายน 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

## สูตรจำนวนจุดตรึงของไดกราฟที่เกิดจากความสัมพันธ์ $a^6 \equiv b \pmod{n}$

### และการวางนัยทั่วไปบางแบบ

## Formula for Number of Fixed Points of Digraph Arising from The Relation $a^6 \equiv b \pmod{n}$ And Some Generalization

รตินันท์ บุญเคลือบ<sup>1,\*</sup> และ วิภาวี คุณานพรัตน์<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10330

<sup>2</sup>โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร 10330

Ratinan Boonklurb<sup>1,\*</sup> and Wipawee Kunanopparat<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,

Chulalongkorn University, Bangkok 10330

<sup>2</sup>Triamudomsuksa School, Bangkok 10330

Email: <sup>1</sup>ratinan.b@chula.ac.th <sup>2</sup>pramchanun@gmail.com

วันที่รับบทความ : 28 กุมภาพันธ์ 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 8 เมษายน 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 10 พฤษภาคม 2563

### บทคัดย่อ

สำหรับจำนวนนับ  $n$  ที่  $n \geq 2$  บทความฉบับนี้ให้สูตรจำนวนจุดตรึงของไดกราฟ  $\Gamma(n, 6)$  ที่มีจุดยอดเป็นเซต  $V = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  และเส้นเชื่อมแสดงทิศทาง  $(a, b) \in E \subseteq V \times V$  ก็ต่อเมื่อ

---

\* ผู้เขียนหลัก

$a^6 \equiv b \pmod{n}$  โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามไซโคลโตมิก และขยายผลไปสู่สูตรจำนวนจุดตรึงของ  $\Gamma(n, k)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนนับที่  $k \geq 4$  และ  $k - 1$  เป็นจำนวนเฉพาะ

**คำสำคัญ:** ไคกราฟ จุดตรึง พหุนามไซโคลโตมิก

### ABSTRACT

For an integer  $n$  such that  $n \geq 2$ , this article provides a formula for number of fixed points of the digraph  $\Gamma(n, 6)$  which has the vertex set  $V = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  and directed edges  $(a, b) \in E \subseteq V \times V$  if and only if  $a^6 \equiv b \pmod{n}$  by using the knowledge about the factorization of the cyclotomic polynomial and extend the result to formula for number of fixed points of digraph  $\Gamma(n, k)$  where  $k$  is an integer such that  $k \geq 4$  and  $k - 1$  is a prime number.

**Keywords:** Digraph, Fixed point, Cyclotomic polynomial

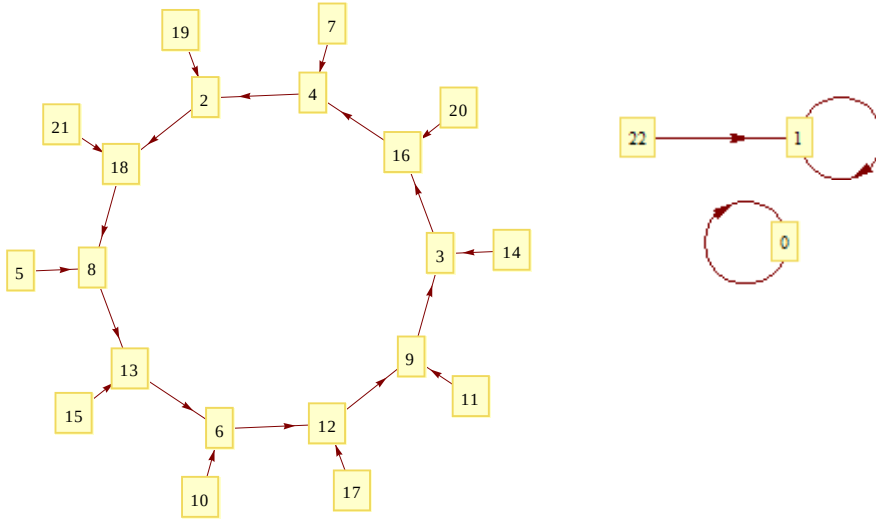
### 1. บทนำ

บทความฉบับนี้พิจารณาให้จำนวนนับสองจำนวนเป็นเสมือนจุดยอด แล้วนำความสัมพันธ์สมภาคระหว่างจำนวนนับสองจำนวนมาสร้างเป็นเสมือนเส้นเชื่อมระบุทิศทางระหว่างจำนวนนับทั้งสอง ซึ่งบรรดาจุดยอดและเส้นเชื่อมระบุทิศทางเหล่านี้ จะเรียกรวมกันว่า กราฟระบุทิศทาง หรือ ไคกราฟ

**บทนิยาม 1.1** [6] กราฟระบุทิศทาง หรือ ไคกราฟ  $G = (V, E)$  ประกอบด้วยเซตจำกัด  $V$  ที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกว่า เซตของจุดยอด และ  $E$  เป็นเซตของคู่อันดับที่เป็นสับเซตของ  $V \times V$  โดยเรียก  $E$  ว่า เซตของเส้นเชื่อมระบุทิศทาง

ทั้งนี้ สำหรับไคกราฟ  $G = (V, E)$  ถ้า  $(a, b) \in E$  หมายความว่า มีเส้นเชื่อมจากจุดยอด  $a$  ไปยังจุดยอด  $b$  เรียกจุดยอด  $a$  ว่า จุดเริ่มต้น และเรียกจุดยอด  $b$  ว่า จุดปลายของเส้นเชื่อมระบุทิศทาง และมักเขียนลูกศรกำกับทิศทางไว้ ในขณะที่ถ้า  $(a, a) \in E$  จะหมายถึง มีเส้นเชื่อมม้วนเป็นวงกลับมาที่จุดยอด  $a$  โดยเรียกเส้นเชื่อมลักษณะนี้ว่า วงวน และเรียกจุดยอด  $a$  ว่าเป็น จุดตรึงของไคกราฟ  $G$  นอกจากนี้ จุดยอด  $v$  ของไคกราฟ  $G$  จะเป็น จุดตรึงเอกเทศ เมื่อจุดยอด  $v$  เป็นจุดตรึงของ  $G$  ที่ไม่มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอดอื่นของ  $G$  มาเชื่อมกับจุดยอด  $v$

ตัวอย่าง 1.1 ให้  $G = (V, E)$  โดยที่  $V = \{0, 1, 2, \dots, 22\}$  และ  $E = \{(0, 0), (1, 1), (2, 18), (3, 16), (4, 2), (5, 8), (6, 12), (7, 4), (8, 13), (9, 3), (10, 6), (11, 9), (12, 9), (13, 6), (14, 3), (15, 13), (16, 4), (17, 12), (18, 8), (19, 2), (20, 16), (21, 18), (22, 1)\}$



รูปที่ 1.1 ไดกราฟ  $G$  ในตัวอย่างที่ 1.1

สังเกตว่าใน  $G$  มี  $(0, 0), (1, 1) \in E$  ดังนั้น 0 และ 1 เป็นจุดตรึงของ  $G$  ซึ่งในแผนภาพจะแทนด้วยเส้นเชื่อมแสดงทิศทางที่มีลักษณะเป็นวงวนดังรูปที่ 1.1 แต่ 0 เป็นจุดตรึงเอกเทศ และ 1 ไม่เป็นจุดตรึงเอกเทศ และมี  $(2, 18), (18, 8), (8, 13), (13, 6), (6, 12), (12, 9), (9, 3), (3, 16), (16, 4), (4, 2) \in E$  ซึ่งในแผนภาพแทนด้วยเส้นเชื่อมแสดงทิศทางสลับเส้นที่เชื่อมจุดยอด 2, 18, 8, 13, 6, 12, 9, 3, 16 และ 4 เข้าด้วยกันเป็นวง เรียกเส้นเชื่อมแสดงทิศทางทั้งสลับเส้นที่เชื่อมจุดยอดเหล่านี้เข้าด้วยกันว่า วง

ในปี ค.ศ.1992 นักคณิตศาสตร์ชื่อ Szalay [9] ได้สร้างไดกราฟ  $\Gamma(n, 2) = (V, E)$  สำหรับจำนวนนับ  $n$  ที่  $n \geq 2$  โดยที่  $V = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  และ  $(a, b) \in E$  ก็ต่อเมื่อ  $a^2 \equiv b \pmod{n}$  แล้วศึกษาโครงสร้างของ  $\Gamma(n, 2)$  โดยเฉพาะอย่างยิ่งจำนวนจุดตรึงของ  $\Gamma(n, 2)$  ต่อมา Skowronex-Kaziów [7] และ Ju และ Wu [3] ได้ศึกษาโครงสร้างและจำนวนจุดตรึงของไดกราฟลักษณะเดียวกับ Szalay [9] คือ  $\Gamma(n, 3)$  และ  $\Gamma(n, 5)$  โดยเปลี่ยนเงื่อนไขของการมีเส้นเชื่อมระบุทิศทาง  $(a, b)$  ในไดกราฟเป็น  $a^3 \equiv b \pmod{n}$  และ  $a^5 \equiv b \pmod{n}$  ตามลำดับ ในปี ค.ศ.2011 Somer และ Křížek [8] ได้ขยายแนวคิดของ Szalay [9] ศึกษาไดกราฟ  $\Gamma(n, k)$  ที่เงื่อนไขการมีเส้นเชื่อมระบุ

ทิศทาง  $(a, b)$  ในไดกราฟเป็น  $a^k \equiv b \pmod{n}$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนนับที่  $k \geq 2$  แต่พิสูจน์ได้เพียงขอบเขตล่างของจำนวนจุดตรึงของไดกราฟ  $\Gamma(n, k)$  เท่านั้น เมื่อเร็ว ๆ นี้ รตินันท์ และ ธัญพิชชา [1] ได้ให้สูตรที่เด่นชัดของจำนวนจุดตรึงของไดกราฟ  $\Gamma(n, 4)$  โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับส่วนตกรังกำลังสอง และสัญลักษณ์ของเลขชี้กำลัง

สังเกตว่าที่ผ่านมา งานวิจัยส่วนหนึ่งมุ่งความสนใจไปที่โครงสร้างและสูตรของจำนวนจุดตรึงของ  $\Gamma(n, k)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเฉพาะ หรือจำนวนในรูปกำลังของสอง ดังนั้นในงานวิจัยนี้ จึงได้สนใจศึกษา  $\Gamma(n, 6)$  ซึ่ง 6 เป็นจำนวนประกอบที่ไม่ใช่กำลังของสอง และหาสูตรที่เด่นชัดของจำนวนจุดตรึงทั้งหมดของ  $\Gamma(n, 6)$  โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับรากปฐมฐาน ซึ่งความรู้ี้สามารถขยายไปสู่สูตรของจำนวนจุดตรึงทั้งหมดของ  $\Gamma(n, k)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนนับ ที่  $k \geq 4$  และ  $k - 1$  เป็นจำนวนเฉพาะ

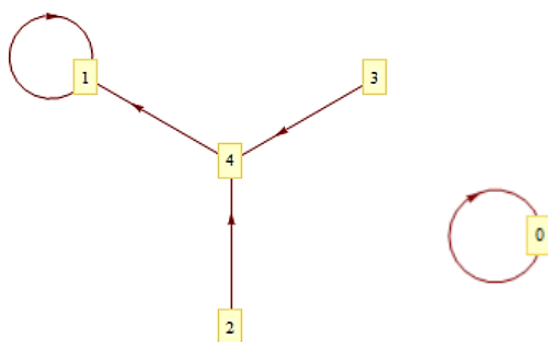
## 2. สูตรสำหรับจำนวนจุดตรึงของไดกราฟ $\Gamma(n, 6)$ ที่เกิดจากความสัมพันธ์ $a^6 \equiv b \pmod{n}$

ให้  $n$  เป็นจำนวนนับ ที่  $n \geq 2$  และ  $V = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  นิยามไดกราฟ  $\Gamma(n, 6) = (V, E)$  โดย  $(a, b) \in E$  ก็ต่อเมื่อ  $a^6 \equiv b \pmod{n}$

### ตัวอย่าง 2.1

(i) ให้  $n = 5$

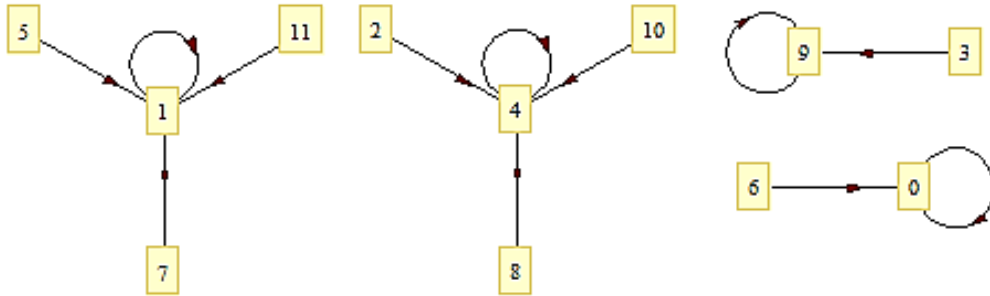
จะได้ว่า  $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  เนื่องจาก  $0^6 \equiv 0 \pmod{5}$ ,  $1^6 \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $2^6 \equiv 4 \pmod{5}$ ,  $3^6 \equiv 4 \pmod{5}$  และ  $4^6 \equiv 1 \pmod{5}$  ดังนั้น  $\Gamma(5, 6)$  จะมีแผนภาพดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ไดกราฟ  $\Gamma(5, 6)$

(ii) ให้  $n = 12$

ด้วยแนวคิดเดียวกันกับ (i) ทำให้ได้ว่า  $\Gamma(12, 6)$  มีแผนภาพดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ไดกราฟ  $\Gamma(12, 6)$

จากตัวอย่าง 2.1 จะเห็นว่า 0 เป็นจุดตรึงเอกเทศของ  $\Gamma(5, 6)$  แต่ไม่เป็นจุดตรึงเอกเทศของ  $\Gamma(12, 6)$  ทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นการบอกเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะรับประกันว่าเมื่อใด 0 จะเป็นจุดตรึงเอกเทศของ  $\Gamma(n, 6)$  ซึ่งเงื่อนไขและบทพิสูจน์เหมือนกับกรณี  $\Gamma(n, 4)$  ที่พิสูจน์โดยดิโนนัท และธัญพิชชา [1] แต่เพื่อความสมบูรณ์ผู้เขียนขอนำเสนอบทพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้อีกครั้ง

**ทฤษฎีบท 2.1** 0 และ 1 เป็นจุดตรึงของ  $\Gamma(n, 6)$  ยิ่งไปกว่านั้น 0 เป็นจุดตรึงเอกเทศของ  $\Gamma(n, 6)$  ก็ต่อเมื่อ  $n$  ปราสจากกำลังสอง นั่นคือ  $n$  มีสมบัติว่าสำหรับจำนวนเฉพาะ  $p$  ที่เป็นตัวประกอบของ  $n$  ถ้า  $p^\alpha \mid n$  แล้ว  $\alpha = 1$

**บทพิสูจน์** เนื่องจาก  $n \mid (0^6 - 0)$  และ  $n \mid (1^6 - 1)$  สำหรับทุกจำนวนนับ  $n$  จะได้ว่า 0 และ 1 เป็นจุดตรึงของ  $\Gamma(n, 6)$

ต่อมาจะพิสูจน์ว่า 0 เป็นจุดตรึงเอกเทศของ  $\Gamma(n, 6)$  ก็ต่อเมื่อ  $n$  ปราสจากกำลังสอง

สมมติว่า  $n$  ไม่ปราสจากกำลังสอง จะได้ว่า มีจำนวนเฉพาะ  $p$  และจำนวนเต็ม  $k$  ที่  $n = p^2 k$  จะได้ว่า  $\left(\frac{n}{p}\right)^6 = n^3 k^3 \equiv 0 \pmod{n}$  ดังนั้น  $\left(\frac{n}{p}, 0\right) \in E$  นั่นคือ 0 ไม่เป็นจุดตรึงเอกเทศของ  $\Gamma(n, 6)$

สมมติว่า  $n$  ปราสจากกำลังสอง ทำให้ได้ว่า มีจำนวนเฉพาะ  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_l$  ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด ที่  $n = p_1 p_2 p_3 \dots p_l$  ต่อมาสมมติว่า 0 ไม่เป็นจุดตรึงเอกเทศ ฉะนั้นจะมี  $k \in V$  และมีจำนวนเต็ม  $s$  ที่  $k^6 = p_1 p_2 p_3 \dots p_l s$  เนื่องจาก  $k$  เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม  $t$  ที่ทำให้

$$k^6 = p_1 p_2 p_3 \dots p_l (p_1 p_2 p_3 \dots p_l)^5 t^6$$

จะได้ว่า  $k = p_1 p_2 p_3 \dots p_l t \geq n$  ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง □



**ข้อสังเกต 2.1** เนื่องจาก  $(n-1)^6 - (n-1) = (n-1)(n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n - 2)$  ทำให้ได้ว่า  $n$  หาร  $(n-1)^6 - (n-1)$  ลงตัว ก็ต่อเมื่อ  $n = 2$  ดังนั้นสำหรับจำนวนนับ  $n$  ที่  $n \geq 3$  จุดยอด  $n-1$  ไม่เป็นจุดตรึงของ  $\Gamma(n, 6)$  ซึ่งเหมือนกับไดกราฟ  $\Gamma(n, 4)$  ใน [1] แต่แตกต่างจากไดกราฟที่ศึกษาใน [3] และ [7] ที่  $n-1$  เป็นจุดตรึงของไดกราฟเสมอ

ต่อมาในการหาสูตรสำหรับจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน  $\Gamma(n, 6)$  จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวนเกี่ยวกับการมีอยู่ของผลเฉลยของสมภาค  $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$

**ทฤษฎีบทประกอบ 2.2** [5] (ทฤษฎีบทประกอบของเฮนเซล) ให้  $f(x)$  เป็นพหุนามในตัวแปร  $x$  ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และ  $r$  เป็นจำนวนนับ ถ้าจำนวนเต็ม  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_r$  เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ซึ่งกันและกัน และ  $m = m_1 m_2 m_3 \dots m_r$  แล้ว  $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$  มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ  $f(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$  มีผลเฉลยทุก  $i \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$  ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า  $v(m)$  และ  $v(m_i)$  เป็นจำนวนผลเฉลยของ  $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$  และ  $f(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$  ตามลำดับ แล้ว  $v(m) = v(m_1)v(m_2)v(m_3) \dots v(m_r)$

นอกจากนี้ยังจำเป็นต้องทำความรู้จักกับสัญลักษณ์ การคำนวณ และบทนิยามที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวนเพิ่มเติมดังนี้

**บทนิยาม 2.1** ให้  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะ

(i) [2] กำหนดให้  $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  และสำหรับ  $a, b \in \mathbb{Z}_p$  นิยาม

$$a \oplus b = (a + b) \pmod{p} \text{ และ } a \odot b = (ab) \pmod{p}$$

ซึ่งต่อไปจะเขียนแทน  $a \oplus b$  ด้วย  $a + b$  และ  $a \odot b$  ด้วย  $ab$

(ii) [2] กำหนดสัญลักษณ์  $\mathbb{Z}_p[x]$  เป็นเซตของพหุนามทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นสมาชิกของ  $\mathbb{Z}_p$  พร้อมการดำเนินการ  $\oplus$  และ  $\odot$

(iii) [4] ให้  $n$  เป็นจำนวนนับ สมาชิก  $\omega \in \mathbb{Z}_p$  จะเรียกว่าเป็น *รากที่  $n$  ของหนึ่ง* ถ้า  $\omega^n \pmod{p} = 1$  และ จะเรียกว่าเป็น *รากปฐมฐานที่  $n$  ของหนึ่ง* ถ้า  $\omega^n \pmod{p} = 1$  และ  $\omega^m \pmod{p} \neq 1$  ทุกจำนวนนับ  $m$  ที่  $1 \leq m < n$

(iv) [4] ให้  $n$  เป็นจำนวนนับ และ  $\omega \in \mathbb{Z}_p$  เป็นรากปฐมฐานที่  $n$  ของหนึ่ง นิยาม พหุนามไซโคลโตมิกอันดับที่  $n$  เขียนแทนด้วย  $\Phi_n(x)$  เป็นผลคูณในรูป

$$\Phi_n(x) = \left( \prod_{\substack{k=1 \\ \text{ห.ร.ม.}(k,n)=1}}^n (x - \omega^k) \right) \pmod{p}$$

จากบทนิยาม 2.1 (iv) จะเห็นว่า การนิยาม  $\Phi_n(x)$  ขึ้นอยู่กับการมีอยู่ของรากปฐมฐานที่  $n$  ของหนึ่งใน  $\mathbb{Z}_p$

**ตัวอย่าง 2.2** กำหนดให้  $p = 11$  จะได้ว่า  $3^{10} \pmod{11} = 1$  ดังนั้น 3 เป็นรากที่ 10 ของหนึ่ง แต่  $3^5 \pmod{11} = 1$  และทราบว่า  $3^1 \pmod{11} = 3$ ,  $3^2 \pmod{11} = 9$ ,  $3^3 \pmod{11} = 5$  และ  $3^4 \pmod{11} = 4$  ทำให้ได้ว่า 3 ไม่เป็นรากปฐมฐานที่ 10 ของหนึ่ง แต่เป็นรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่ง จึงได้ว่าพหุนามไซโคลโตมิกอันดับที่ 5 คือ

$$\begin{aligned} \Phi_5(x) &= (x - 3)(x - 3^2)(x - 3^3)(x - 3^4) \pmod{11} \\ &= (x - 3)(x - 9)(x - 5)(x - 4) \pmod{11} \\ &= (x^4 - 21x^3 + 155x^2 - 483x + 540) \pmod{11} \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

นอกจากนี้ยังสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า  $10^2 \pmod{11} = 1$  และ  $10 \pmod{11} = 10$  ทำให้ได้ว่า 10 เป็นรากปฐมฐานที่ 2 ของหนึ่ง จึงได้ว่าพหุนามไซโคลโตมิกอันดับที่ 2 คือ

$$\Phi_2(x) = (x - 10) \pmod{11} = x + 1$$

ในทางกลับกันเราสามารถตรวจสอบได้ว่าถ้า  $a \in \mathbb{Z}_{11}$  แล้ว  $a^3 \pmod{11} \neq 1$  และ  $a^7 \pmod{11} \neq 1$  นั่นคือจะไม่สามารถสร้าง  $\Phi_3(x)$  และ  $\Phi_7(x)$  ด้วยบทนิยาม 2.1 (iv) ได้

**ตัวอย่าง 2.3** กำหนดให้  $p = 7$  จะได้ว่า  $2^3 \pmod{7} = 1$  และทราบว่า  $2^1 \pmod{7} = 2$  และ  $2^2 \pmod{7} = 4$  ทำให้ได้ว่า 2 เป็นรากปฐมฐานที่ 3 ของหนึ่ง จึงได้ว่าพหุนามไซโคลโตมิกอันดับที่ 3 คือ  $\Phi_3(x) = (x - 2)(x - 2^2) \pmod{7} = (x^2 - 6x + 8) \pmod{7} = x^2 + x + 1$

จากตัวอย่างทั้งสองนี้ จะเห็นว่าสำหรับจำนวนเฉพาะ  $p$  ถ้าสามารถสร้าง  $\Phi_q(x)$  เมื่อ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะด้วยบทนิยาม 2.1 (iv) ได้แล้ว  $\Phi_q(x)$  จะมีลักษณะพิเศษกล่าวคือ

$$\Phi_q(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + x^{q-3} + \cdots + x + 1$$

ในความเป็นจริงแล้ว  $\mathbb{Z}_p$  ในบทนิยาม 2.1 (iii) และ (iv) จะสามารถแทนที่ด้วยฟิลด์ใด ๆ ก็ได้ เช่น เซตของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งไม่มีข้อจำกัดในการสร้าง  $\Phi_n(x)$  โดยสำหรับฟิลด์ใด ๆ  $\Phi_n(x)$  จะเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มเสมอ [4] และยังสามารถพิสูจน์ได้เช่นเดียวกันว่า สำหรับ

จำนวนเฉพาะ  $q$  ใด ๆ จะได้ว่า  $\Phi_q(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + x^{q-3} + \dots + x + 1$  ซึ่งทำให้ได้ว่า พหุนามในรูป  $\Phi_q(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + x^{q-3} + \dots + x + 1$  มองเป็นพหุนามหนึ่งใน  $\mathbb{Z}_p[x]$  ได้

ดังนั้นจากตัวอย่าง 2.2 จึงอาจสามารถมองเป็นว่าพหุนาม  $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  ที่สร้างจากฟีลด์ใด ๆ สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นใน  $\mathbb{Z}_{11}[x]$  ได้ และ  $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$  ที่สร้างจากฟีลด์ใด ๆ ไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นใน  $\mathbb{Z}_{11}[x]$  ได้ แต่สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นใน  $\mathbb{Z}_7[x]$  ได้

ทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทที่รับประกันว่า เมื่อใดที่พหุนามไซโคลโตมิกซึ่งสร้างจากฟีลด์ใด ๆ จะแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นใน  $\mathbb{Z}_p[x]$  ได้บ้าง

**ทฤษฎีบทประกอบ 2.3** [4] พหุนามไซโคลโตมิก  $\Phi_n(x)$  สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้นอย่างสมบูรณ์ใน  $\mathbb{Z}_p[x]$  ได้ ก็ต่อเมื่อ  $p \equiv 1 \pmod{n}$

อย่างไรก็ดี ในหัวข้อที่ 2 ของบทความฉบับนี้ จะนำทฤษฎีบทประกอบ 2.3 ไปใช้ในกรณีที่  $n = 5$  และในหัวข้อที่ 3 จึงจะนำทฤษฎีบทประกอบ 2.3 ไปใช้ในกรณีทั่วไปยิ่งขึ้น

ต่อไปจะเป็นการนำทฤษฎีบทประกอบต่าง ๆ ข้างต้นมาช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักเกี่ยวกับจำนวนจุดตรึงทั้งหมดของ  $\Gamma(n, 6)$

**ทฤษฎีบท 2.4** ให้  $s$  และ  $n$  เป็นจำนวนนับ โดยที่  $n \geq 2$  และ  $n$  แยกตัวประกอบได้ในรูป

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_s^{\alpha_s}$$

โดย  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_s$  เป็นจำนวนเฉพาะ  $\alpha_i$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด ถ้า  $\pi(n)$  แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ  $p_i$  ที่แตกต่างกันทั้งหมดที่เป็นตัวประกอบของ  $n$  ซึ่ง  $p_i \equiv 1 \pmod{5}$  แล้วจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน  $\Gamma(n, 6)$  คือ  $2^s 3^{\pi(n)}$  จุด

**บทพิสูจน์** กำหนดให้  $L(n)$  เป็นจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน  $\Gamma(n, 6)$  ดังนั้น  $L(n)$  เป็นจำนวนผลเฉลี่ยใน  $V = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  ของสมภาค

$$f(x) = x^6 - x = x(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod{n}$$

กรณี 1  $s = 1$

โดยไม่เสียไรทั่วไปให้  $n = p^\alpha$  เมื่อ  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะและ  $\alpha$  เป็นจำนวนนับ

จะได้ว่า  $V = \{0, 1, 2, \dots, p^\alpha - 1\}$

สมมติให้  $x \in V - \{0, 1\}$  เป็นผลเฉลี่ยของ  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$

เนื่องจาก  $p \mid p^\alpha$  ทำให้ได้ว่า  $p \mid x$  หรือ  $p \mid (x - 1)$  หรือ  $p \mid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

กรณี 1.1  $p \mid x$

สมมติว่า  $p \mid (x - 1)$  หรือ  $p \mid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  จะได้ว่า  $p \mid 1$  ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง  
 ดังนั้น  $p \nmid (x - 1)$  และ  $p \nmid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  ทำให้ได้ว่า  $p^\alpha \nmid (x - 1)$  และ  
 $p^\alpha \nmid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  และเนื่องจาก  $2 \leq x \leq p^\alpha - 1$  ทำให้ได้ว่า  $p^\alpha \nmid x$  เช่นกัน  
 ดังนั้นกรณี 1.1 นี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 1.2  $p \mid (x - 1)$

สมมติว่า  $p \mid x$  จะได้ว่า  $p \mid 1$  ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ต่อมา สมมติว่า  $p \mid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  เนื่องจาก  $p \mid (x - 1)$  จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม  $t$  ที่  
 $x = pt + 1$  ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= (pt + 1)^4 + (pt + 1)^3 + (pt + 1)^2 + (pt + 1) + 1 \\ &\equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \pmod{p} \end{aligned}$$

แต่  $p \mid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  จึงทำให้  $p \mid 5$  ดังนั้น  $p = 5$  นั่นคือ  $p \mid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$   
 ทำให้เกิดสมภาค  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$  เมื่อ  $x \neq 0$  และ 1 อย่างไรก็ตามเมื่อคำนวณ  
 โดยตรงพบว่า

$$\begin{aligned} 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 &= 31 \not\equiv 0 \pmod{5} \\ 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 &= 121 \not\equiv 0 \pmod{5} \\ 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4 + 1 &= 341 \not\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ทำให้ได้ว่า  $p \nmid x$  และ  $p \nmid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  จึงได้ว่า  $p^\alpha \nmid x$   
 และ  $p^\alpha \nmid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  และเนื่องจาก  $1 \leq x - 1 \leq p^\alpha - 2$  ทำให้ได้ว่า  $p^\alpha \nmid x - 1$   
 เช่นกัน ดังนั้นกรณี 1.2 นี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 1.3  $p \mid (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

นั่นคือสมภาค  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  สังเกตว่า  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  คือ  
 $\Phi_5(x)$  และโดยทฤษฎีบทประกอบ 2.3 จะได้ว่า  $\Phi_5(x)$  แยกตัวประกอบได้เป็นผลคูณของพหุนาม  
 เชิงเส้นอย่างสมบูรณ์ 4 พหุนามได้ใน  $\mathbb{Z}_p[x]$  ได้ ก็ต่อเมื่อ  $p \equiv 1 \pmod{5}$

ดังนั้นสมภาคในกรณีย่อยนี้มีผลเฉลย 4 ตัว สมมติว่าเป็น  $a, b, c$  และ  $d$  ก็ต่อเมื่อ  $p \equiv 1 \pmod{5}$   
 จากทฤษฎีบท 2.1 และ กรณี 1.1, 1.2 และ 1.3 จะได้ว่า

$$L(n) = \begin{cases} |\{0, 1, a, b, c, d\}| = 6 & \text{เมื่อ } p \equiv 1 \pmod{5} \\ |\{0, 1\}| = 2 & \text{เมื่อ } p \not\equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

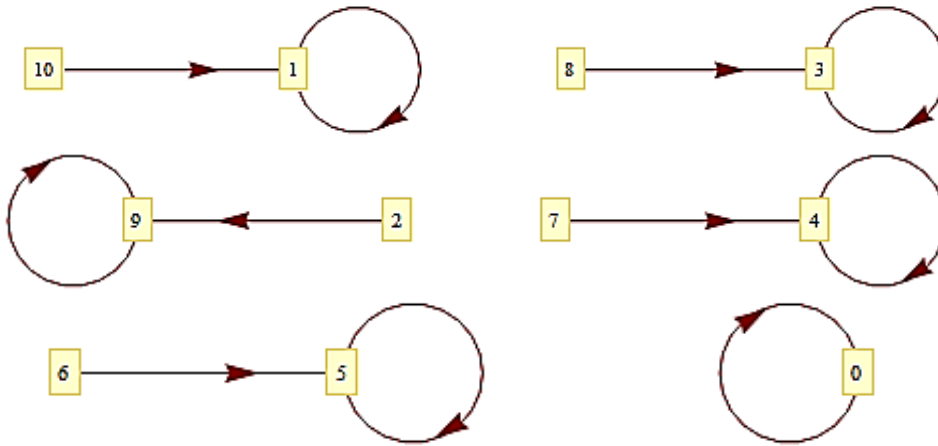
กรณี  $2 \leq s$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.2 จะได้ว่า

$$L(n) = L(p_1^{\alpha_1})L(p_2^{\alpha_2})L(p_3^{\alpha_3}) \cdots L(p_s^{\alpha_s})$$

ดังนั้นจากกรณี 1 จะได้ว่า  $L(n) = 6^{\pi(n)} \cdot 2^{s-\pi(n)} = 2^s 3^{\pi(n)}$  □

**ตัวอย่าง 2.3** ให้  $n = 11$  หรือ  $n = 31$  จะได้ว่า  $s = 1$  และ  $p_1 = 11 \equiv 1 \pmod{5}$  หรือ  $p_1 = 31 \equiv 1 \pmod{5}$  ดังนั้น  $\pi(11) = \pi(31) = 1$  และ  $L(11) = 2^1 3^1 = 6$



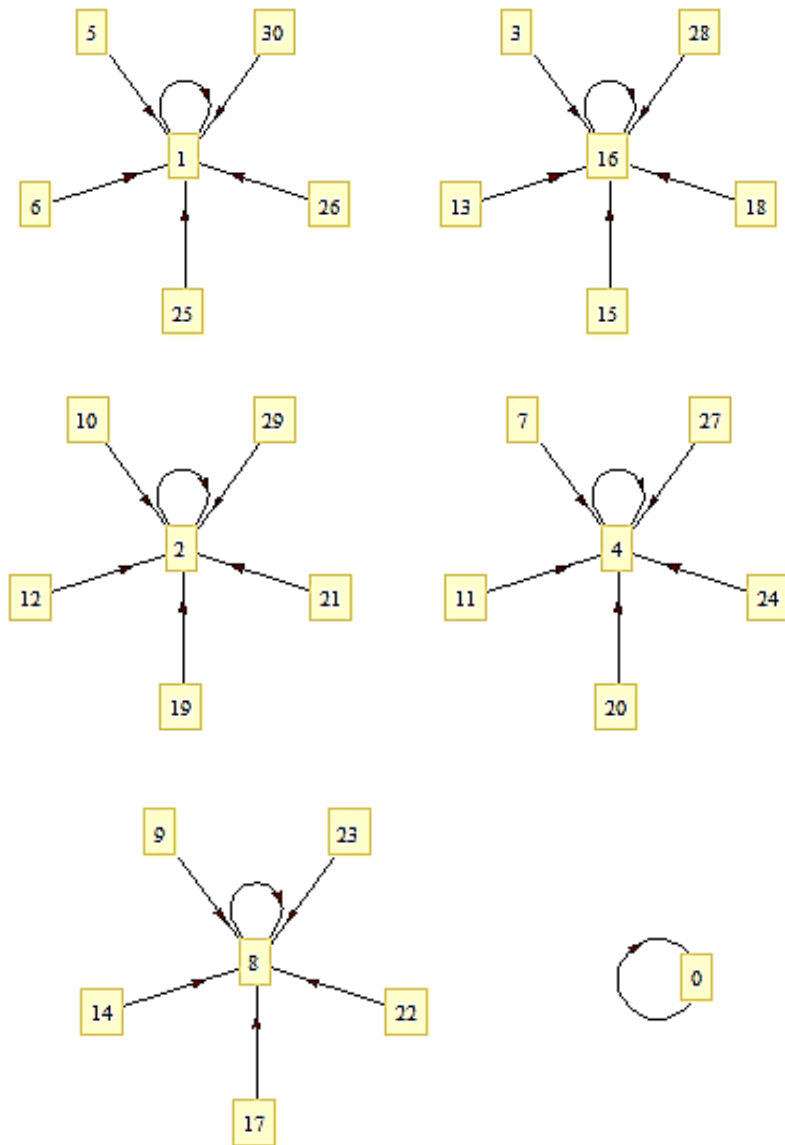
รูปที่ 2.3 ไคกราฟ  $\Gamma(11, 6)$

**ข้อสังเกต 2.2** (i) ใน  $\mathbb{Z}_{11}$  จากตัวอย่าง 2.2 ทำให้ทราบว่า 3 เป็นรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่ง และสังเกตจากรูปที่ 2.3 ได้ว่า  $3^1 \pmod{11} = 3$ ,  $3^2 \pmod{11} = 9$ ,  $3^3 \pmod{11} = 5$  และ  $3^4 \pmod{11} = 4$  เป็น 4 จุดตรึงในบรรดา 6 จุดตรึงทั้งหมดของ  $\Gamma(11, 6)$

(ii) ในทำนองเดียวกัน ใน  $\mathbb{Z}_{31}$  สามารถตรวจสอบได้ว่า 2 เป็นรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่ง และสังเกตจากรูปที่ 2.4 ได้ว่า  $2^1 \pmod{31} = 2$ ,  $2^2 \pmod{31} = 4$ ,  $2^3 \pmod{31} = 8$  และ  $2^4 \pmod{31} = 16$  เป็น 4 จุดตรึงในบรรดา 6 จุดตรึงทั้งหมดของ  $\Gamma(31, 6)$

ดังนั้นโดยบทนิยามของรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่ง บทนิยามของ  $\Phi_5(x)$  และข้อสังเกต 2.2 ทำให้ได้บทแทรกดังต่อไปนี้

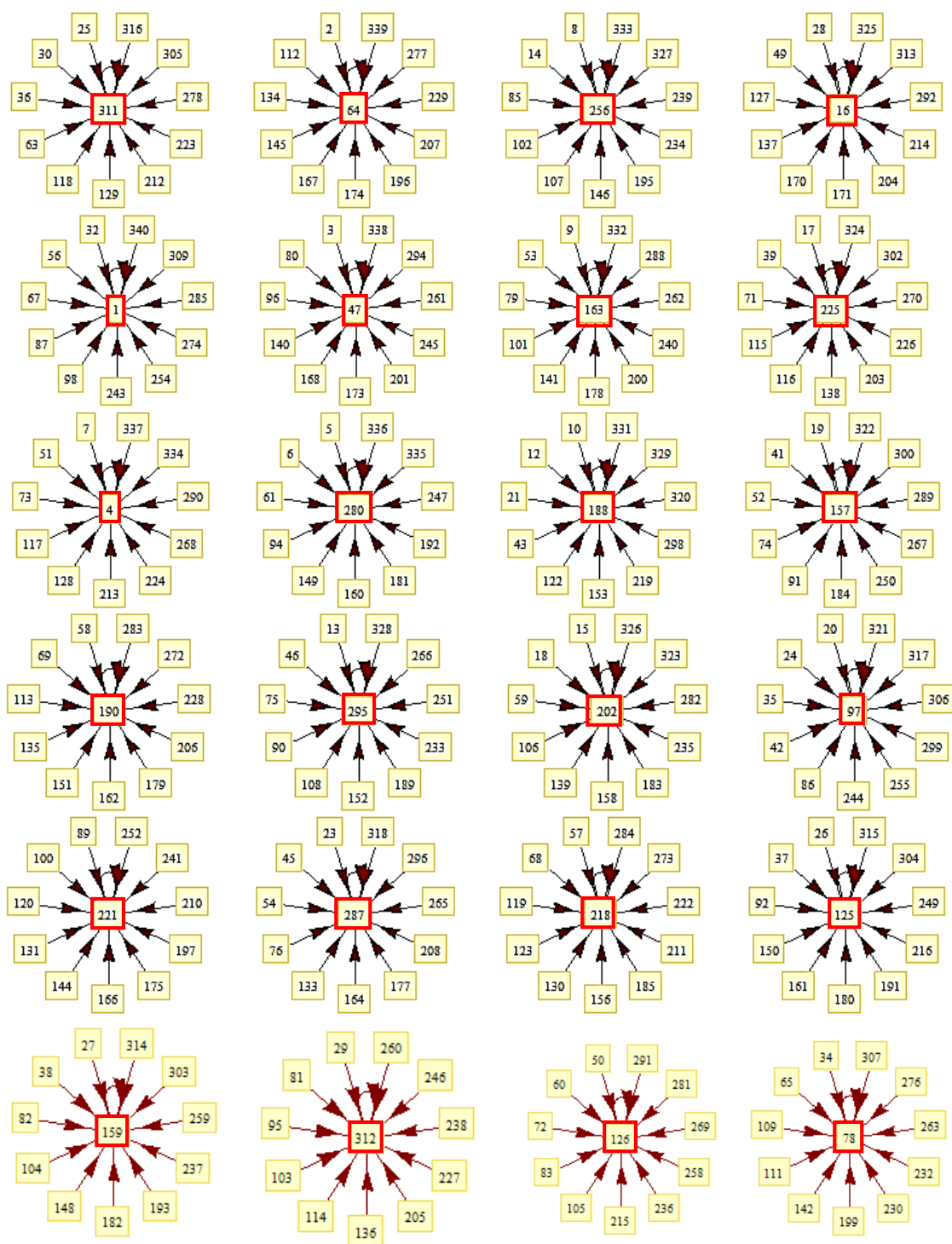
**บทแทรก 2.5** ให้  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะที่  $p \equiv 1 \pmod{5}$  และ  $\omega$  เป็นรากปฐมฐานที่ 5 ของหนึ่งใน  $\mathbb{Z}_p$  จะได้ว่า  $\Gamma(p, 6)$  มีจุดตรึง 6 จุด ได้แก่  $0, 1, \omega \pmod{p}, \omega^2 \pmod{p}, \omega^3 \pmod{p}$  และ  $\omega^4 \pmod{p}$



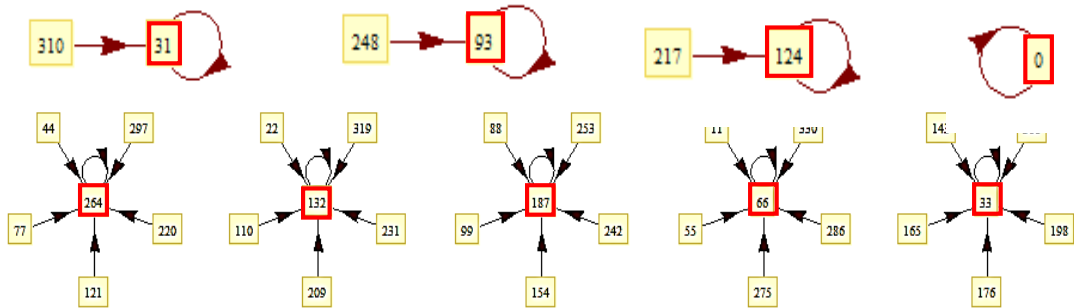
รูปที่ 2.4 ไดกราฟ  $\Gamma(31,6)$

ตัวอย่าง 2.4 ให้  $n = 341$  จะได้ว่า  $s = 2$ ,  $p_1 = 11 \equiv 1 \pmod{5}$  และ  $p_2 = 31 \equiv 1 \pmod{5}$

ดังนั้น  $\pi(341) = 2$  และ  $L(341) = 2^2 3^2 = 36$



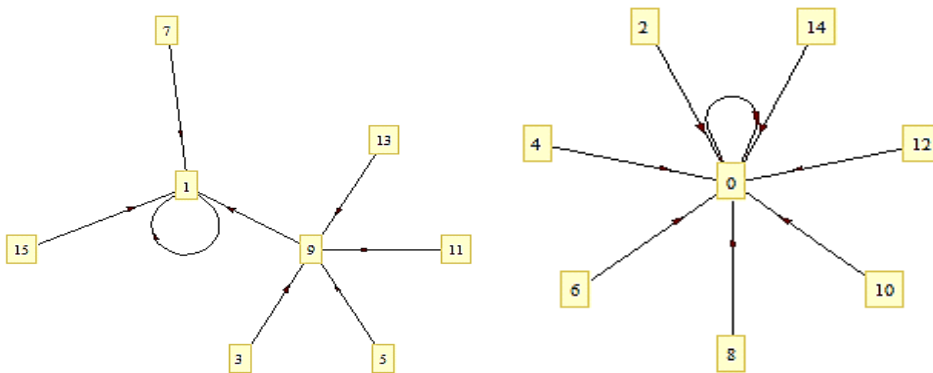
รูปที่ 2.5 ไดกราฟ  $\Gamma(341, 6)$



รูปที่ 2.5 (ต่อ) ไดกราฟ  $\Gamma(341, 6)$

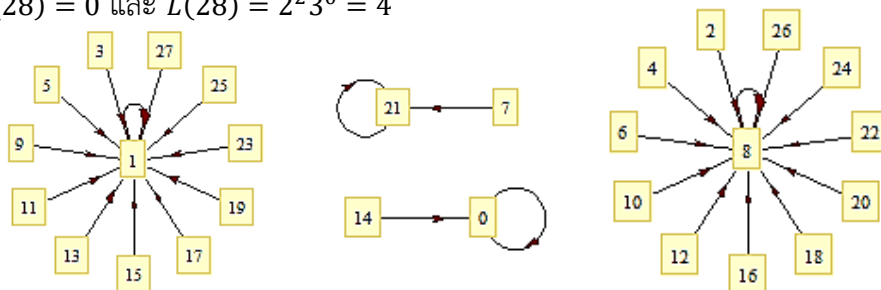
หมายเหตุ เนื่องจากข้อจำกัดของโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ในการสร้างแผนภาพ ในที่นี้ขอใช้กรอบหนาเพื่อเน้นจุดที่มีวงวน

ตัวอย่าง 2.3 ให้  $n = 16$  จะได้ว่า  $s = 1$  และ  $p_1 = 2 \not\equiv 1 \pmod{5}$  ดังนั้น  $\pi(16) = 0$  และ  $L(16) = 2^1 3^0 = 2$



รูปที่ 2.6 ไดกราฟ  $\Gamma(16, 6)$

ตัวอย่าง 2.4 ให้  $n = 28$  จะได้ว่า  $s = 2$ ,  $p_1 = 2 \not\equiv 1 \pmod{5}$  และ  $p_2 = 7 \not\equiv 1 \pmod{5}$  ดังนั้น  $\pi(28) = 0$  และ  $L(28) = 2^2 3^0 = 4$



รูปที่ 2.7 ไดกราฟ  $\Gamma(28, 6)$



### 3. การวางนัยทั่วไป

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 2 ว่า Kanoksing [4] สามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้า  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะใด ๆ แล้ว สำหรับฟิลด์ใด ๆ

$$\Phi_q(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + x^{q-3} + \cdots + x + 1$$

และสำหรับจำนวนเต็ม  $k$  ที่  $k \geq 4$  สมภาคที่เกี่ยวข้องกับการหาจำนวนจุดตรึงของ  $\Gamma(n, k)$  คือ

$$x^k - x = x(x-1)(x^{k-2} + x^{k-3} + x^{k-4} + \cdots + x + 1) \equiv 0 \pmod{n}$$

ซึ่งจะได้ว่า เมื่อ  $k-1$  เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว  $\Phi_{k-1}(x) = x^{k-2} + x^{k-3} + x^{k-4} + \cdots + x + 1$

ต่อมาเมื่อพิจารณาบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 2.4 กรณีที่ 1.3 จะพบว่า โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.3 จะได้ว่า  $\Phi_{k-1}(x) \equiv 0 \pmod{p}$  จะแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนามเชิงเส้น  $k-2$  ตัว อย่างสมบูรณ์ได้ใน  $\mathbb{Z}_p[x]$  และมีผลเฉลย  $k-2$  ตัว ก็ต่อเมื่อ  $p \equiv 1 \pmod{k-1}$  จึงสามารถวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.4 และบทแทรก 2.5 ได้เป็น

**ทฤษฎีบท 3.1** ให้  $s$  และ  $n$  เป็นจำนวนนับที่  $n \geq 2$  ซึ่งแยกตัวประกอบได้ในรูป

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

โดย  $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_s$  เป็นจำนวนเฉพาะ  $\alpha_i$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและไม่เป็นศูนย์ พร้อมกันทั้งหมด ถ้า  $k$  เป็นจำนวนนับที่  $k \geq 4$  และ  $k-1$  เป็นจำนวนเฉพาะ แล้วจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน  $\Gamma(n, k)$  คือ  $k^{\pi(n)} 2^{s-\pi(n)}$  จุด เมื่อ  $\pi(n)$  แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ  $p_i$  ที่แตกต่างกันทั้งหมดที่เป็นตัวประกอบของ  $n$  ซึ่ง  $p_i \equiv 1 \pmod{k-1}$

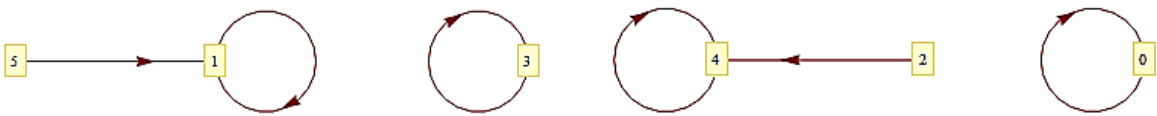
**บทแทรก 3.2** ให้  $k$  เป็นจำนวนนับที่  $k \geq 4$  และ  $k-1$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะที่  $p \equiv 1 \pmod{k-1}$  ถ้า  $\omega$  เป็นรากปฐมฐานที่  $k-1$  ของหนึ่งใน  $\mathbb{Z}_p$  จะได้ว่า  $\Gamma(p, k)$  มีจุดตรึง  $k$  จุด ได้แก่  $0, 1, \omega \pmod{p}, \omega^2 \pmod{p}, \omega^3 \pmod{p}, \dots, \omega^{k-2} \pmod{p}$

**ตัวอย่าง 3.1** ให้  $k = 4$  จะได้ว่า  $k-1 = 3$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน  $\Gamma(n, 4)$  คือ  $4^{\pi(n)} 2^{s-\pi(n)} = 2^{\pi(n)+s}$  จุด เมื่อ  $\pi(n)$  แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ  $p_i$  ที่เป็นตัวประกอบของ  $n$  ซึ่ง  $p_i \equiv 1 \pmod{3}$

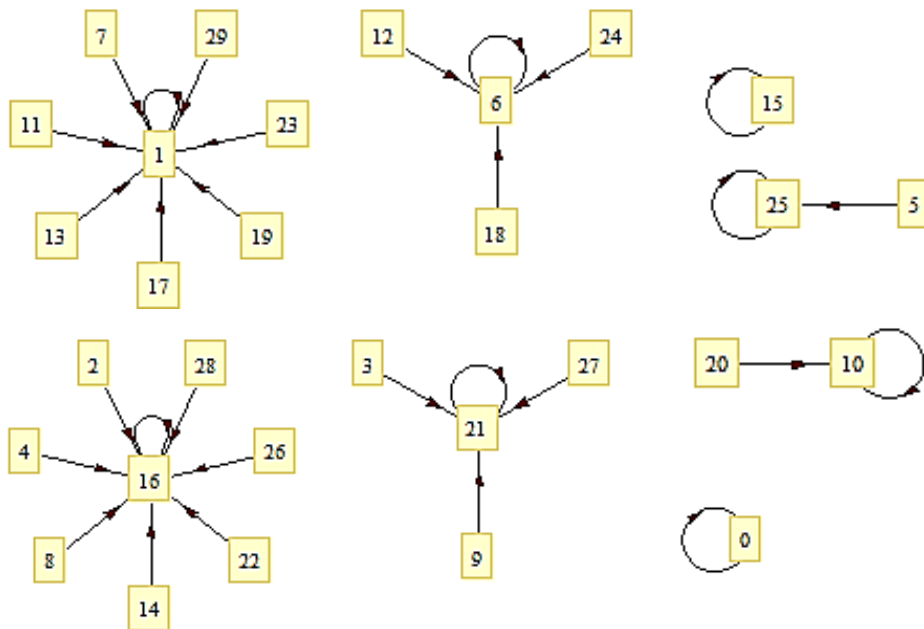
สังเกตว่าสำหรับจำนวนเฉพาะ  $p_i$  จะได้ว่า ถ้า  $p_i = 2$  แล้ว  $p_i \not\equiv 1 \pmod{3}$  และ  $p_i \equiv 1 \pmod{3}$  ก็ต่อเมื่อ  $p_i \equiv 1 \pmod{12}$  หรือ  $p_i \equiv 7 \pmod{12}$  ทำให้จำนวนของจำนวนเฉพาะ  $p_i$  ที่เป็นตัวประกอบของ  $n$  ซึ่ง  $p_i \equiv 1 \pmod{3}$  และจำนวนของจำนวนเฉพาะ  $p_i$  ที่เป็นตัว

ประกอบของ  $n$  ซึ่ง  $p_i = 2$  หรือ  $p_i \equiv 1 \pmod{12}$  หรือ  $p_i \equiv 7 \pmod{12}$  มีจำนวนเท่ากัน ซึ่งสูตรจำนวนจุดตรึงในตัวอย่างนี้ตรงกับสูตรจำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน  $\Gamma(n, 4)$  ที่นำเสนอใน [1]

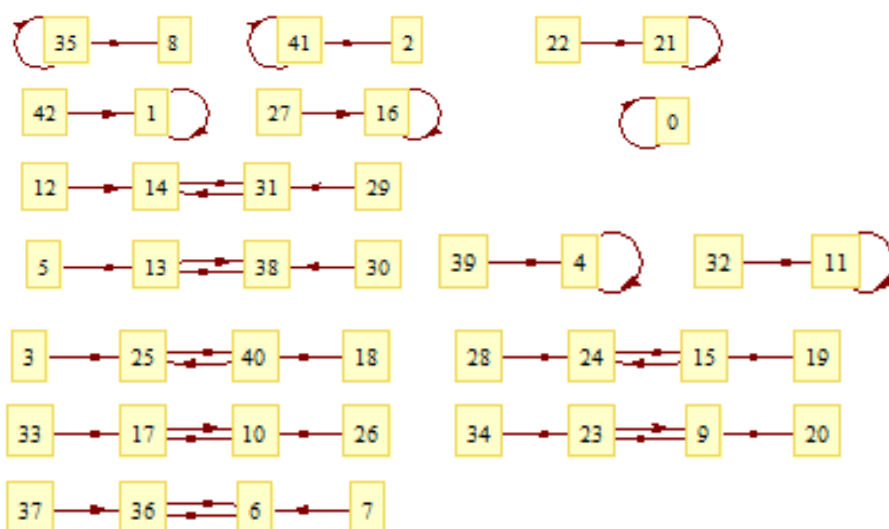
**ตัวอย่าง 3.2** ให้  $k = 8$  จะได้ว่า  $k - 1 = 7$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน  $\Gamma(n, 8)$  คือ  $8^{\pi(n)} 2^{s-\pi(n)} = 2^{2\pi(n)+s}$  จุด เมื่อ  $\pi(n)$  แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ  $p_i$  ที่เป็นตัวประกอบของ  $n$  ซึ่ง  $p_i \equiv 1 \pmod{7}$  รูปที่ 3.1 3.2 และ 3.3 เป็นแผนภาพของ  $\Gamma(6, 8)$ ,  $\Gamma(30, 8)$  และ  $\Gamma(43, 8)$  ซึ่งมีจุดตรึง 4, 8 และ 8 จุด ตามลำดับ สังเกตว่า 4 เป็นรากปฐมฐานที่ 7 ของ 1 ใน  $\mathbb{Z}_{43}$  จึงได้ว่า  $4 \pmod{43} = 4$ ,  $4^2 \pmod{43} = 16$ ,  $4^3 \pmod{43} = 21$ ,  $4^4 \pmod{43} = 41$ ,  $4^5 \pmod{43} = 35$  และ  $4^6 \pmod{43} = 11$  เป็นจุดตรึง 6 จุด ในบรรดา 8 จุดของ  $\Gamma(43, 8)$



รูปที่ 3.1 ไดกราฟ  $\Gamma(6, 8)$

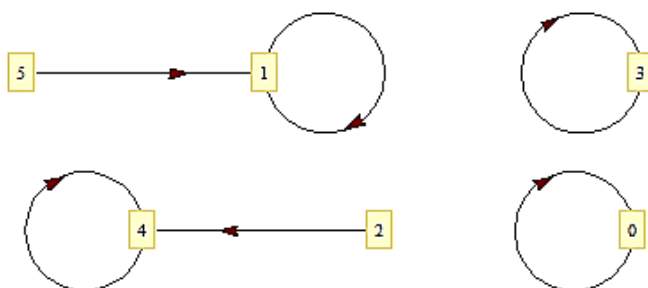


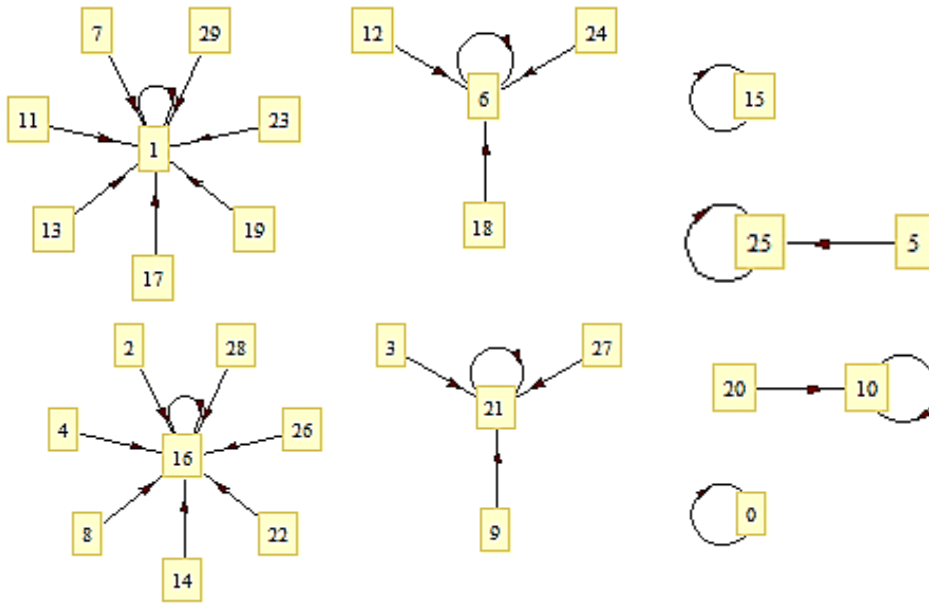
รูปที่ 3.2 ไดกราฟ  $\Gamma(30, 8)$

รูปที่ 3.3 ไคกราฟ  $\Gamma(43, 8)$ 

ตัวอย่าง 3.3 ให้  $k = 12$  จะได้ว่า  $k - 1 = 11$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จำนวนจุดตรึงทั้งหมดใน  $\Gamma(n, 12)$  คือ  $12^{\pi(n)} 2^{s-\pi(n)} = 2^{\pi(n)+s} 3^{\pi(n)}$  จุด เมื่อ  $\pi(n)$  แทนจำนวนของจำนวนเฉพาะ  $p_i$  ที่เป็นตัวประกอบของ  $n$  ซึ่ง  $p_i \equiv 1 \pmod{11}$  รูปที่ 3.4 3.5 และ 3.6 เป็นแผนภาพของ  $\Gamma(6, 12)$ ,  $\Gamma(30, 12)$  และ  $\Gamma(67, 12)$  ซึ่งมีจุดตรึง 4, 8 และ 12 จุด ตามลำดับ

สังเกตว่า 9 เป็นรากปฐมฐานที่ 11 ของ 1 ใน  $\mathbb{Z}_{67}$  จึงได้ว่า  $9 \pmod{67} = 9$ ,  $9^2 \pmod{67} = 14$ ,  $9^3 \pmod{67} = 59$ ,  $9^4 \pmod{67} = 62$ ,  $9^5 \pmod{67} = 22$ ,  $9^6 \pmod{67} = 64$ ,  $9^7 \pmod{67} = 40$ ,  $9^8 \pmod{67} = 25$ ,  $9^9 \pmod{67} = 24$  และ  $9^{10} \pmod{67} = 15$  เป็นจุดตรึง 10 จุด ในบรรดา 12 จุดของ  $\Gamma(67, 12)$

รูปที่ 3.4 ไคกราฟ  $\Gamma(6, 12)$



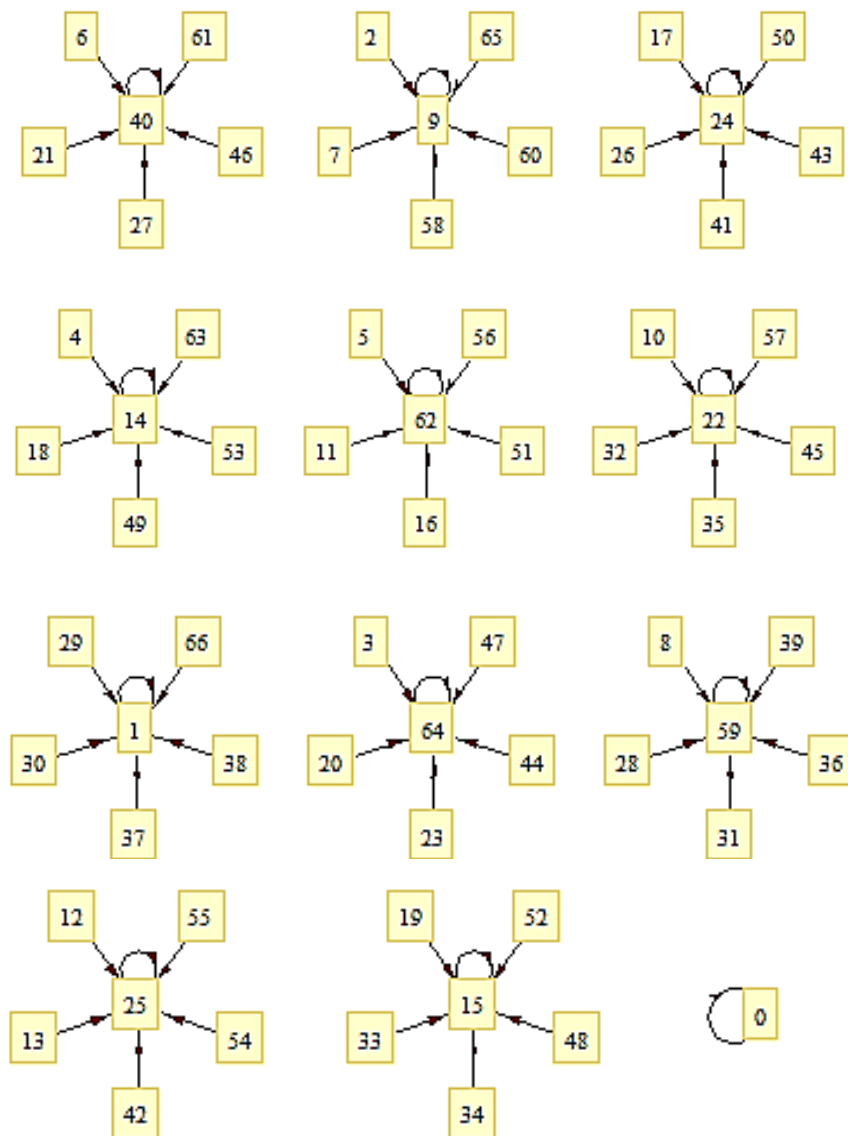
รูปที่ 3.5 ไดรกราฟ  $\Gamma(30, 12)$

ในกรณีที่  $k = 3$  จริงอยู่ที่ว่า  $k - 1 = 2$  เป็นจำนวนเฉพาะ แต่  $\Phi_2(x) = x + 1$  ซึ่งเป็นพหุนามเชิงเส้นอยู่แล้ว และจำนวนผลเฉลยของสมภาคที่เกี่ยวข้องกับการหาจำนวนจุดตรึงของ  $\Gamma(n, 3)$  ซึ่งคือ  $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1) \equiv 0 \pmod{n}$  ขึ้นอยู่กับกำลังของ 2 ที่เป็นตัวประกอบของ  $n$  ทำให้สูตรของจำนวนจุดตรึงของ  $\Gamma(n, 3)$  แตกต่างจากทฤษฎีบท 3.1 ซึ่งผู้ที่สนใจสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน [6]

จะเห็นว่าการนำความรู้เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามไซโคลโตมิกมาร่วมพิจารณาช่วยให้การหาสูตรจำนวนจุดตรึงของ  $\Gamma(n, 6)$  ทำได้ง่ายขึ้น และยังขยายผลไปได้ยังกรณีที่ทั่วไปกว่าได้ด้วย สำหรับผู้ที่สนใจอาจศึกษาเพิ่มเติมว่า จุดยอดใดบ้างจะเป็นจุดตรึงของ  $\Gamma(n, 6)$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับที่  $n \geq 2$  จุดยอดเหล่านี้มีความเกี่ยวข้องกับรากปฐมฐานหรือไม่ อย่างไร และสามารถขยายผลนี้ไปยังกรณีที่ทั่วไปกว่าได้หรือไม่

### กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการคณิตศาสตร์ที่ได้รับการสนับสนุนโดยทุนพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.)



รูปที่ 3.6 ไดกราฟ  $\Gamma(67, 12)$

## เอกสารอ้างอิง

- [1] รตินันท์ บุญเคลือบ และ ัญพิชชา ยอดแก้ว. (2561). ไดกราฟที่เกิดจากความสัมพันธ์  $a^4 \equiv b \pmod{n}$ . *วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์*, 63 (695), น. 9 - 18.  
Boonklurb, R. and Yodkeaw, T. (2018). Digraph Arising from The Relation  $a^4 \equiv b \pmod{n}$ . *Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand under The Patronage of His Majesty the King*, 63 (695), p. 9 - 18.
- [2] อัจฉรา หาญชูวงศ์. (2542). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.  
Harnchoowong, A. (1999). *Theory of Numbers*. Bangkok: Chulalongkorn University Printery.
- [3] Ju, T. and Wu, M. (2014). On Iteration Digraph and Zero-Divisor Graph of Ring  $\mathbb{Z}_n$ . *Czechoslovak Mathematical Journal*, 64 (139), p. 611 - 628.
- [4] Kanoksing, P. (2017). *Structure of The Quotient Ring of Polynomials over Integer Modulo m with The  $n^{\text{th}}$  Cyclotomic Polynomial*. (Senior Project). Chulalongkorn University, Faculty of Science, Department of Mathematics and Computer Science.
- [5] Meemark, Y. (2016). *Theory of Numbers*. Retrieved from <http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~myotsana/MATH331INT.pdf>.
- [6] Rosen, K. H. (1999). *Discrete Mathematics and Its Applications* (4<sup>th</sup> ed.). McGraw-Hill International Edition.
- [7] Skowronex-Kaziów, J. (2009). Properties of Digraphs Connected with Some Congruence Relations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 59 (134), p. 39 - 49.
- [8] Somer, L. and Křížek, M. (2011). The Structure of Digraphs Associated with the Congruence  $x^k \equiv y \pmod{n}$ . *Czechoslovak Mathematical Journal*, 61 (136), p. 337 - 358.

- [9] Szalay, L. (1992). A Discrete Iteration in Number Theory. *BDTF Tud. Közl.*, 8, p. 71 - 91 (in Hungarian).



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(703) มกราคม – เมษายน 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง  $7^x - 5^y = z^2$

The Solution of The Exponential Diophantine Equation

$$7^x - 5^y = z^2$$

สุทธิวัฒน์ ทองนาคน<sup>1,\*</sup> วาเรียม ช่วยจันทร์<sup>2</sup> และ ชีรเดช เกี้ยววงศ์<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93210

Sutthiwat Thongnak<sup>1,\*</sup> Wariam Chuayjan<sup>2</sup> and Theeradach Kaewong<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science,  
Thaksin University, Phatthalung 93210

Email: <sup>1</sup>tsutthiwat@tsu.ac.th <sup>2</sup>wariam\_chuayjan@hotmail.com <sup>3</sup>theeradachkaewong@gmail.com

วันที่รับบทความ : 18 มีนาคม 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 17 มิถุนายน 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 29 กรกฎาคม 2563

### บทคัดย่อ

ในบทความนี้ นำเสนอการพิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง  $7^x - 5^y = z^2$  มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว เมื่อ  $x, y$  และ  $z$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในการพิสูจน์ เราได้ใช้ข้อคาดการณ์ของคาลาแลนและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการมาช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งพบว่า ผลเฉลยมีเพียงชุดเดียว คือ  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

**คำสำคัญ:** สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง ผลเฉลยจำนวนเต็ม ข้อคาดการณ์ของคาลาแลน

---

\* ผู้เขียนหลัก



## ABSTRACT

In this paper, we prove that the exponential Diophantine equation  $7^x - 5^y = z^2$  has one solution where  $x$ ,  $y$  and  $z$  are non-negative integers. In the proof, we apply reasonably Catalan's conjecture and various theorems concerning the congruence to obtain the solution. The result reveals that the unique solution is  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

**Keywords:** Exponential Diophantine equation, Integer solution, Catalan's conjecture

## 1. Introduction

Diophantine equations have been interesting to many mathematicians for a long time. Over the last decade, a number of the exponential Diophantine equations have been studied since Catalan presented Catalan's conjecture [3] and Mihailescu proved this conjecture [11]. In 2007, Acu studied the equation  $2^x + 5^y = z^2$  [1]. He proved that  $(3, 0, 3)$  and  $(2, 1, 3)$  are the only two solutions  $(x, y, z)$  where  $x$ ,  $y$  and  $z$  are non-negative integers. In 2011, Suvarnamani et al. suggested that two equations which are  $4^x + 7^y = z^2$  and  $4^x + 11^y = z^2$  have no integer solutions [21]. In 2012, the Diophantine equation  $4^x + p^y = z^2$  where  $x$ ,  $y$  and  $z$  are non-negative integers and  $p$  is any positive prime number was studied by Chotchaisthit. The study revealed that the equation does not have solutions [5]. Meanwhile, Sroysang [15 - 16] proved two Diophantine equations including  $3^x + 5^y = z^2$  and  $31^x + 32^y = z^2$ . In the same year, Peker and Cenberci presented that the Diophantine equation  $8^x + 19^y = z^2$  has no solution [12]. After that several Diophantine equations have been studied by different mathematical researchers [4, 7, 13, 14, 17, 18, 19, 20]. In 2017, Jayakumar and Shankarakalidoss proved that the Diophantine equation  $47^x + 2^y = z^2$  has a unique non-negative solution  $(x, y, z) = (0, 3, 3)$  [6] while Asthana and Singh showed that  $(1, 0, 2)$ ,  $(1, 1, 4)$ ,  $(3, 2, 14)$  and  $(5, 1, 16)$  are solutions  $(x, y, z)$  to the Diophantine equation  $3^x + 13^y = z^2$  [2]. After that, Kumar et al. [8] studied two equations including  $61^x + 67^y = z^2$  and  $67^x + 73^y = z^2$ . They could show that the two equations have

no solution. Recently, Laipaporn et al. proved the solution of  $3^x + p5^y = z^2$  where  $p$  is a prime number. They found that the equations has infinitely many solutions [9]. While Makate et al. proved that  $8^x + 61^y = z^2$  and  $8^x + 67^y = z^2$  have same unique solution  $(x, y, z) = (1, 0, 3)$  [10].

In this paper, we present a different Diophantine equation  $7^x - 5^y = z^2$  and prove that the equation has only one trivial solution.

## 2. Preliminaries

**Proposition 2.1** [11] (Catalan's conjecture)  $(3, 2, 2, 3)$  is a unique solution  $(a, b, x, y)$  for the Diophantine equation  $a^x - b^y = 1$  where  $a, b, x$  and  $y$  are integers such that  $\min\{a, b, x, y\} > 1$ .

**Lemma 2.2** The Diophantine equation  $7^x - z^2 = 1$  has no solution  $(x, z)$  where  $x$  and  $z$  are integers and  $\min\{x, z\} > 1$ .

**Proof.** Suppose that  $x$  and  $z$  are integers where  $\min\{x, z\} > 1$  such that  $7^x - z^2 = 1$ . By Proposition 2.1, it is sufficient to conclude that the equation has no solution.  $\square$

## 3. Main Result

**Theorem 3.1** The Diophantine equation  $7^x - 5^y = z^2$  has a unique solution  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  where  $x, y$  and  $z$  are non-negative integers.

**Proof.** Let  $x, y$  and  $z$  be non-negative integers such that

$$7^x - 5^y = z^2. \quad (1)$$

First, we consider two cases including  $x = 0$  and  $x \geq 1$ .

Case 1 If  $x = 0$ , then from (1) we have  $z^2 + 5^y = 1$ . Obviously, the equation has only one solution when  $z$  and  $y = 0$ .

Case 2 If  $x \geq 1$ , then we separate  $y$  in two subcases including  $y = 0$  and  $y \geq 1$ .

Subcase 1 If  $y = 0$ , then  $7^x - z^2 = 1$ . By Lemma 2.2, it is sufficient to consider only  $x = 1$  or  $z \leq 1$ . Hence, we consider  $x$  and  $z$  which are as follow. For  $x = 1$ , we have

$z^2 = 6$ . This is impossible. For  $z = 0$ , it follows that  $7^x = 1$ . It has no solution. For  $z = 1$ , we have  $7^x = 2$ . This is impossible.

Subcase 2 If  $y \geq 1$ , then  $z^2$  is even which implies that  $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ . From (1), it follows that  $z^2 \equiv (-1)^x - 1 \pmod{4}$ . Then, we have  $(-1)^x - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ . This implies that  $x$  is positive even, so we let  $x = 2m$  where  $m \in \mathbb{Z}^+$ . From (1), we have  $5^y = 7^{2m} - z^2$ . It is written as

$$5^y = (7^m + z)(7^m - z). \quad (2)$$

From (2), it yields (3) and (4):

$$5^\alpha = 7^m - z \quad (3)$$

and

$$5^\beta = 7^m + z, \quad (4)$$

where  $0 \leq \alpha < \beta \leq y$  and  $\alpha + \beta = y$ . From (3) and (4), we have

$$2 \cdot 7^m = 5^\alpha (1 + 5^{\beta-\alpha}). \quad (5)$$

We separate  $\alpha$  into  $\alpha = 0$  and  $\alpha \geq 1$ .

If  $\alpha = 0$ , then (5) becomes  $2 \cdot 7^m = 1 + 5^\beta$ . Thus, we have  $2 \equiv 1 + (-1)^\beta \pmod{3}$ . This implies that  $\beta$  is even. Let  $\beta = 2t$  where  $t \in \mathbb{Z}^+$ , we have

$$2 \cdot 7^m = 1 + 25^t. \quad (6)$$

From (6), we have  $2 \cdot (-1)^m \equiv 1 + 1 \pmod{8}$ . This implies that  $m$  is even. Suppose  $m = 2l$  where  $l \in \mathbb{Z}^+$ . Then, we have

$$2 \cdot 49^l = 1 + 25^t. \quad (7)$$

From (7), we have  $2 \cdot (-1)^l \equiv 1 \pmod{5}$  which is impossible.

If  $\alpha \geq 1$ , (5) implies that  $5 \mid 2 \cdot 7^m$  which contradicts the fact that 2, 5 and 7 are relatively primes. Hence, the theorem is proved.  $\square$

## References

- [1] Acu, D. (2007). On A Diophantine Equation  $2^x + 5^y = z^2$ . *General Mathematics*, 4, p. 145 - 148.

- [2] Asthana, S., and Singh, M. M. (2017). On The Diophantine Equation  $3^x + 13^y = z^2$ . *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 114, p. 301 - 304.
- [3] Catalan, E. (1844). Note Extraite Dune Lettre Adressee a Lediteur. *Journal für die Reine and Angewandte Mathematik*, 27, p. 192.
- [4] Cheenchan, I., Phona, S., Ponggan, J., Tanakan, S., and Boonthiem, S. (2016). On The Diophantine Equation  $p^x + 5^y = z^2$ . *SNRU Journal of Science and Technology*, 8, p. 146 - 148.
- [5] Chotchaisthit, S. (2012). On The Diophantine Equation  $4^x + p^y = z^2$  Where  $p$  is A Prime Number. *American Journal Mathematics and Sciences*, 1, p. 191 - 193.
- [6] Jayakumar, P., and Shankarakalidoss, G. (2017). More on The Diophantine Equation  $47^x + 2^y = z^2$ . *International Jouranal of Innovative Research in Science and Technology*, 3, p. 82 - 85.
- [7] Khan, Md. A., Rashid, A., and Uddin, Md. S. (2016). Non-Negative Integer Solutions of Two Diophantine Equations  $2^x + 9^y = z^2$  and  $5^x + 9^y = z^2$ . *Journal of Applied Mathemtics and Physics*, 4, p. 762 - 765.
- [8] Kumar, S., Gupta, S., and Kishan, H. (2018). On The Non-Linear Diophantine Equation  $61^x + 67^y = z^2$  and  $67^x + 73^y = z^2$ . *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 18 (1), p. 91 - 94.
- [9] Laipaporn, K., Wananiyakul, S., & Khachorncharoenkul, P. (2019). On The Diophantine Equation  $3^x + p5^y = z^2$ . *Walailak Journal of Science and Technology*, 16 (9), p. 647 - 653.
- [10] Makate, N., Srimud, K., Warong, A., and Supjaroen, W. (2019). On The Diophantine Equation  $8^x + 61^y = z^2$  and  $8^x + 67^y = z^2$ . *Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty the King*, 64 (697), p. 24 - 29.

- [11] Mihailescu, P. (2004). Primary Cyclotomic Units and A Proof of Catalan's Conjecture. *Journal für die Reine and Angewandte Mathematik* , 27, p. 167 - 195.
- [12] Peker, B. and Cenberci, S. (2012). Solutions of The Diophantine Equation  $8^x + 19^y = z^2$ . *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 2, p. 31 - 34.
- [13] Qi, L., and Li, X. (2015). The Diophantine Equation  $8^x + p^y = z^2$ . *The Scientific World Journal (online)*, 22, 2015.
- [14] Rabago, J. F. T. (2013). More on Diophantine Equation of Type  $p^x + q^y = z^2$ . *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, 3, p. 15 - 16.
- [15] Sroysang, B. (2012). On The Diophantine Equation  $3^x + 5^y = z^2$ . *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 81, p. 605 - 608.
- [16] Sroysang, B. (2012). On The Diophantine Equation  $31^x + 32^y = z^2$ . *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 81, p. 609 - 612.
- [17] Sroysang, B. (2013). On The Diophantine Equation  $7^x + 8^y = z^2$ . *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 84, p. 111 - 114.
- [18] Sroysang, B. (2013). On The Diophantine Equation  $23^x + 32^y = z^2$ . *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 84, p. 231 - 234.
- [19] Sroysang, B. (2014). On The Diophantine Equation  $8^x + 13^y = z^2$ . *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 90, p.69-72.
- [20] Sroysang, B. (2014). On The Diophantine Equation  $5^x + 43^y = z^2$ . *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 91, p. 537 - 540.
- [21] Suvarnamani, A., Singta, A., and Chotchaisthit, S. (2011). On Two Diophantine Equations  $4^x + 7^y = z^2$  and  $4^x + 11^y = z^2$ . *Science and Thechology RMUTT Journal*, 1, p. 25 - 28.

## ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

### 1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

### 2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้ ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

### 3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ สรุป เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

### 4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

### 5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

### 6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

## 7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1

2.2

## 8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาติ ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ เป็นภาพขาวดำ และลายเส้นต่าง ๆ ให้ใช้เส้นสีดำ ทั้งนี้ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับใต้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป” เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อด้วยหมายเลขรูป เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ “ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

## 9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกของนามสกุลที่ปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทย ก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย



## สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาชิรณทิต คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

### วัตถุประสงค์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

### ประเภทของสมาชิก

สมาชิกมี 3 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ สมาชิกสามัญ และสมาชิกวารสาร

#### ● สมาชิกสามัญ สำหรับผู้ที่มีความสนใจ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

##### สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ
2. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

#### ● สมาชิกวารสาร สำหรับบุคคลหรือหน่วยงานที่มีความสนใจวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ เป็นประจำ

##### สิทธิของสมาชิกวารสาร

1. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
2. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นอันเป็นประโยชน์ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
3. มีสิทธิได้รับความช่วยเหลือในทางการศึกษาคณิตศาสตร์ หรือความช่วยเหลือในประการอื่นใด เท่าที่คณะกรรมการบริหารสมาคมฯ จะจัดทำได้



**ค่าสมัครสมาชิก** ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท

| ค่าสมาชิกสามัญ |           | ค่าสมาชิกวารสาร | วาระการเป็นสมาชิก (สามัญรายปี และวารสาร)<br>เริ่มในวันที่ 1 พฤษภาคม ของทุกปี<br>และสิ้นสุดในวันที่ 30 เมษายน ของปีต่อไป |
|----------------|-----------|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ตลอดชีพ        | 3,000 บาท | 250 บาทต่อปี    |                                                                                                                         |
| รายปี          | 250 บาท   |                 |                                                                                                                         |

**ดาวน์โหลด** ใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

<http://www.mathassociation.net> หัวข้อ “สมัคร”

**ใบสมัครสมาชิก**  
**สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์**

☐ สมาชิกใหม่  
☐ ต่ออายุ เลขที่สมาชิกเดิม.....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

ข้าพเจ้า (ชื่อ-นามสกุล) ..... อาชีพ .....

เบอร์โทรศัพท์ ..... อีเมล .....

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

- ☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท) ☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)  
☐ สมาชิกวารสาร (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน - 30 - บาท

รวมเป็นเงิน ..... บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์ เลขที่บัญชี 162-0-25671-1

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

- ☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์  
ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับจัดส่งวารสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ..... ซอย ..... หมู่ที่ .....

ถนน ..... ตำบล ..... อำเภอ .....

จังหวัด ..... รหัสไปรษณีย์ .....

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....

รับเงินค่าสมาชิกจำนวน .....

วันที่ .....

ลงนาม..... ผู้สมัคร

(.....)

ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน มาที่

(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตึก.ณ. 2022 ปณ.พ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332

หรือ (ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบ

## คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

### ลงนามถวายพระพร

สมเด็จพระกนิษฐาธิราชเจ้า กรมสมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี



เมื่อวันพฤหัสบดีที่ 14 มกราคม 2564 ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์ นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ และกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ทูลเกล้าฯ ถวายแจกันดอกไม้เบื้องหน้าพระฉายาลักษณ์ สมเด็จพระกนิษฐาธิราชเจ้า กรมสมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี พร้อมลงนามถวายพระพรให้ทรงหายจากพระอาการประชวรโดยเร็ววัน

## ประชุมใหญ่สามัญประจำปี 2563

### สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์



เมื่อวันพฤหัสบดีที่ 8 เมษายน 2564 ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์ นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้นำทีมคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ประจำปี 2562 – 2563 เข้าร่วมประชุมใหญ่สามัญประจำปี 2563 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ซึ่งมีวาระที่สำคัญคือ การรายงานผลการดำเนินงานประจำปี 2563 ของทางสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ และการขอมติรับรองคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ประจำปี 2564 – 2565 ทั้งนี้ คณะกรรมการบริหารชุดดังกล่าวจะเข้ามาบริหารงานของสมาคมฯ เมื่อผ่านการตรวจสอบคุณสมบัติจากทางหน่วยงานที่เกี่ยวข้องแล้ว โดยขณะนี้คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ประจำปี 2562 – 2563 จะทำหน้าที่รักษาการไปพลางก่อน



**กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2564**  
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการ  
ในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของ  
สมาคมที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์
  - วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่ม 2) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
  - Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี
2. อบรมครูคณิตศาสตร์ภาคฤดูร้อน ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา
3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี ครั้งที่ 25 ประจำปี พ.ศ.2564 ในรูปแบบผสมผสาน  
(The 25<sup>th</sup> Annual Meeting in Mathematics : AMM 2021)  
ระหว่างวันที่ 27 – 29 พฤษภาคม พ.ศ.2564  
โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ  
ร่วมกับ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า เจ้าคุณทหารลาดกระบัง เป็นเจ้าภาพ  
ข้อมูลเพิ่มเติม ได้ที่ <http://www.math.sci.kmitl.ac.th/amm2021/#/home>
5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทย  
เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
  - ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริม  
การสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)  
ดูข้อมูลและกำหนดการได้ที่ <https://www.mathassociation.net> ในหัวข้อประกวดโครงงาน
  - ประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 9  
(The 9<sup>th</sup> Undergraduate Applied Mathematics Conference : UAMC 2021)  
โดยมี ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี  
เป็นเจ้าภาพ ระหว่างวันที่ 23 – 24 เมษายน พ.ศ.2564

**สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์**

ชั้น 9 อาคารมหาชิรณิศา คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ และโทรสาร 02-252-7980



[www.mathassociation.net](http://www.mathassociation.net)



[MathThaiOrg@gmail.com](mailto:MathThaiOrg@gmail.com)