



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์ *Mathematical Journal*

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๔ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๔

Volume 66 Number 704 May – August 2021

บทความทั่วไป *General Article*

- คำคม คณิตศาสตร์ เบลส์ ปาสกาล : รูปสามเหลี่ยมของปาสกาล 1
Mathematician Quote Blaise Pascal : Pascal's Triangle
จินตนิษฏ์ ละออปักชิน และ รตินันท์ บุญเคลือบ

บทความวิชาการ *Academic Article*

- การประยุกต์ใช้วอลเปเปอร์กรุปประเภท P6m สร้างลวดลายผ้ามัดหมี่ทอมือ 7
Application of Wallpaper Group P6m to Creation of Handwoven Mudmee Silk Patterns
สำคัญ ฮ่อบรรทัด และ สมบัติ ประจัญคานต์
- ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู 26
Mathematical Problem Posing Abilities of Preservice Teachers
วีรวัฒน์ ไทยคำ และ ทรงชัย อักษรคิด

บทความวิจัย *Research Article*

- การกำกับเอตจ์-ออตเกรซฟูลของกราฟที่เกิดจากการลบจุดยอดบนกราฟโคมบ์ 46
Edge-Odd Graceful Labeling of Graph Obtained from A Vertex Deletion on A Comb Graph
ศิวพร แสงวัน และ จิตสุภา หนูศิริ
- ตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ 63
สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ
The First Order Integer-Valued Autoregressive Models with The Two-Parameter Generalized Poisson-Lindley Distribution Based on The Negative Binomial Thinning Operator
สุชีราภรณ์ บุญยะริส และ จิราพรรณ สุนทรโชติ



วารสารคณิตศาสตร์

ISSN 0858-4788

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๔ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๔

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand

Under The Patronage of His Majesty The King

Volume 66 Number 704 May – August 2021

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาชิรฐานิศา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

พิมพ์ที่ สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร 0-2218-3562 ถึง 63

<http://www.cuprint.chula.ac.th>

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

เดือนมิถุนายนที่ผ่านมา สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้รับการจัดทะเบียนคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี 2564 – 2565 เป็นที่เรียบร้อยแล้ว โดยมี ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช ดำรงตำแหน่งนายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตามที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้กำหนดจัดการประกวดโครงงานทางคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา ขึ้นระหว่างงานมหกรรมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ ประจำปี 2564 แต่จากสถานการณ์การแพร่ระบาดของโรคติดเชื้อไวรัสโคโรนา 2019 ทำให้มีการเลื่อนการจัดงานมหกรรมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ ประจำปี 2564 ออกไปเป็นวันที่ 9 ถึง 19 พฤศจิกายน 2564 ดังนั้นสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จึงเห็นควรขยายเวลาการจัดส่งรูปเล่มโครงงานทางคณิตศาสตร์รอบแรกออกไปจนถึงวันที่ 30 กันยายน พ.ศ. 2564 ทั้งนี้สามารถติดตามรายละเอียดได้ที่ https://www.mathassociation.net/view/home/page_news.php

อนึ่ง ตามที่วารสารคณิตศาสตร์ได้เข้าร่วมรับการประเมินเพื่อรับรองคุณภาพวารสารวิชาการในฐานข้อมูล TCI รอบที่ 4 พ.ศ. 2563 – 2567 ครั้งที่ 2 นั้น ขณะนี้วารสารคณิตศาสตร์ได้รับแจ้งผลการประเมินฯ แล้ว โดย วารสารคณิตศาสตร์ ได้รับการจัดให้เป็นวารสารกลุ่มที่ 2 พวกเราทีมบรรณาธิการฝ่ายบริหารวารสารคณิตศาสตร์ขอยืนยันและให้ความมั่นใจแก่ทุกท่านว่า เราจะจัดทำวารสารที่มีคุณภาพ และก่อประโยชน์แก่ผู้สนใจทุกท่านตลอดไป

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ
รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล
ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิช์

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ณัฐชัย ลีนาวงศ์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี |
| 4. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 6. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงศ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 3. รศ. ดร.กาญจน์ภา อมรัชกุล | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 4. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 6. รศ. ดร.พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 7. รศ. ดร.รณสรพร ชินรัมย์ | มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ |
| 8. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |
| 9. ผศ. ดร.กนกพร ช่างทอง | มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี |
| 10. ผศ. ดร.มนจิรา ดวงสาพล | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 11. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 12. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 13. ผศ. ดร.ศิริรัตน์ สิงห์ตัน | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 14. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว | มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ |
| 15. ผศ. ดร.สุรีย์พร ชาวแพรกน้อย | มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| 16. ผศ. ดร.อังคณา บุญยิต | มหาวิทยาลัยขอนแก่น |
| 17. ผศ. ดร.เอื้ออารี บุญเพิ่ม | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |

สารจากนายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

เรียน ท่านสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ และท่านผู้มีเกียรติทุกท่าน



ตลอดระยะเวลา 63 ปี ที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อตั้งมา สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้รับการสนับสนุนและความร่วมมือร่วมใจจากสมาชิกทุกท่าน ด้วยดีเสมอมา ทำให้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ สามารถดำเนินกิจกรรมให้บรรลุผลตามวัตถุประสงค์ของการก่อตั้งสมาคม ทุกประการ ในนามของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ดิฉันจึงขอขอบพระคุณทุกท่านมา ณ โอกาสนี้

ด้วยสถานการณ์การแพร่ระบาดของโรคติดเชื้อไวรัสโคโรนา 2019 ในประเทศไทย ตั้งแต่ต้นปี พ.ศ. 2563 ส่งผลกระทบต่อการจัดกิจกรรมต่าง ๆ ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ประจำปี 2563 และต่อเนื่องมาถึงปี 2564 อย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ อาทิเช่น การสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี การประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ประจำปี การอบรมครูคณิตศาสตร์

แต่ท่ามกลางวิกฤติที่ย่อมจะมีโอกาสเสมอ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จึงได้พิจารณา แผนงานที่จะนำเทคโนโลยีการสื่อสารออนไลน์มาช่วยสนับสนุนการดำเนินกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อให้สมาชิกรวมถึงผู้สนใจทุกท่านได้รับข้อมูลที่เป็นประโยชน์อย่างเหมาะสมกับสถานการณ์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ดำเนินการเพิ่มช่องทางออนไลน์ในการเผยแพร่วารสารคณิตศาสตร์ เป็นขั้นต้น และกำลังดำเนินการศึกษาเพื่อปรับใช้เทคโนโลยีการสื่อสารออนไลน์กับกิจกรรมอื่นต่อไป โดยคำนึงถึงประโยชน์ของสมาชิกที่จะได้รับเป็นสำคัญ

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ยังคงยึดมั่นต่อปณิธานที่จะดำเนิน กิจกรรมตามวัตถุประสงค์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ เพื่อส่งเสริมและสนับสนุน การศึกษาและการวิจัยทางคณิตศาสตร์ พัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์ เผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และสร้างความสัมพันธ์กับ องค์กรคณิตศาสตร์ทั้งในประเทศและต่างประเทศอย่างแน่วแน่สืบไป

ท้ายที่สุดนี้ในนามของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ในพระบรมราชูปถัมภ์ ดิฉันหวังเป็นอย่างยิ่งว่าทุกท่านจะมีสุขภาพร่างกายและจิตใจที่เข้มแข็ง ผ่านพ้นภัยอันตรายทั้งปวงได้โดยสวัสดิ

ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช

นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ในพระบรมราชูปถัมภ์

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปี 2564 - 2565

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์จรจิต วัฒนสินธุ์	ที่ปรึกษา
2. ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	นายกสมาคม
3. รองศาสตราจารย์ ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	อุปนายก
4. รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ	เลขาธิการ
5. รองศาสตราจารย์ ดร.เอื้อมพร พักสุวรรณ	เหรัญญิก
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ปณิดา ศิริกุลวิเชฐ	ปฎิคม
7. อาจารย์ประไพ เสนาบุญญฤทธิ์	ประชาสัมพันธ์
8. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วาศนา สุขกระสานติ	หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหารวารสารคณิตศาสตร์
9. รองศาสตราจารย์ ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	ผู้จัดการสารสนเทศ
10. อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเออชัย	ผู้ช่วยผู้จัดการสารสนเทศ
11. ศาสตราจารย์ ดร.ยศนันต์ มีมาก	กรรมการ
12. รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์	กรรมการ
13. รองศาสตราจารย์ธีรวัฒน์ ประกอบผล	กรรมการ
14. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ	กรรมการ
15. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลีวศิริตฤตกุล	กรรมการ
16. รองศาสตราจารย์ ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
17. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
18. รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
19. รองศาสตราจารย์ ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์	กรรมการ
20. ผู้ช่วยศาสตราจารย์กรองแก้ว หวังนิเวศน์กุล	กรรมการ
21. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
22. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงศ์พล เรือนคง	กรรมการ
23. อาจารย์ ดร.ฉวีวรรณ กิตติกร	กรรมการ
24. อาจารย์นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
25. อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์	กรรมการ
26. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการ
27. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ ที่จัดทำขึ้นโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้นจึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	<i>Mathematical Journal</i> <i>by The Mathematical Association of Thailand</i> <i>Under The Patronage of His Majesty The King</i>
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของ บทความที่จะรับ ตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น • วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี • เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย • บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน • วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง

การพิจารณา กลั่นกรองบทความ ของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณาจากกลั่นกรองจาก ผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้อง โดยผู้ทรงคุณวุฒิไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับ ผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จาก ผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่ง บทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่อยู่ ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และ ภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตามข้อกำหนดใน การจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่ง กองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสาร คณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือ หน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือ กระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคม คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่
www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตาม
 ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้น
 อัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อม
 ไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความ
 MJMATH.docx) ขึ้นที่ ระบบการส่งบทความ ที่ <https://www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการ
 วารสาร ได้ที่อีเมล MathThaiOrg@gmail.com



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์

Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๔ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๔

Volume 66 Number 704 May – August 2021

บทความทั่วไป *General Article*

- คำคม คณิตศาสตร์ เบลส์ ปาสกาล : รูปสามเหลี่ยมของปาสกาล 1
Mathematician Quote Blaise Pascal : Pascal's Triangle
จิณดิษฐ์ ละออปักชิน และ รตินันท์ บุญเคลือบ

บทความวิชาการ *Academic Article*

- การประยุกต์ใช้วอลเปเปอร์กรุปประเภท P6m สร้างลวดลายผ้ามัดหมี่ทอมือ 7
Application of Wallpaper Group P6m to Creation of Handwoven Mudmee Silk Patterns
สำคัญ ฮ่อบรรทัด และ สมบัติ ประจัญคานต์
- ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู 26
Mathematical Problem Posing Abilities of Preservice Teachers
วีรวัฒน์ ไทยคำ และ ทรงชัย อักษรคิด

บทความวิจัย *Research Article*

- การกำกับเอดจ์-ออตเกรซฟูลของกราฟที่เกิดจากการลบจุดยอดบนกราฟโคมบ์ 46
Edge-Odd Graceful Labeling of Graph Obtained from A Vertex Deletion on A Comb Graph
คิวพร แสงวัน และ จิตสุภา หนูศิริ
- ตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ 63
สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ
The First Order Integer-Valued Autoregressive Models with The Two-Parameter Generalized
Poisson-Lindley Distribution Based on The Negative Binomial Thinning Operator
สุชีราภรณ์ บุญยะริส และ จิราพรรณ สุนทรโชติ



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

คำคม คณิตศาสตร์

เบลล์ ปาสกาล : รูปสามเหลี่ยมของปาสกาล

Mathematician Quote

Blaise Pascal : Pascal's Triangle

จินตดิษฐ์ ละออปักษิน^{1,*} และ รตินันท์ บุญเคลือบ²

¹สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพมหานคร 10330

²ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพมหานคร 10330

Jinnadit Laorpaksin^{1,*} and Ratinan Boonklurb²

¹Division of Mathematics Education, Department of Curriculum and Instruction,
Faculty of Education, Chulalongkorn University, Bangkok 10330

²Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: ¹jinnadit.l@chula.ac.th ²ratinan.b@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 31 กรกฎาคม 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 24 เมษายน 2564

วันที่ตอบรับบทความ : 27 พฤษภาคม 2564

* ผู้เขียนหลัก

บทคัดย่อ

บทความทั่วไปเรื่องนี้ นำเสนอเกร็ดชีวประวัติที่น่าสนใจของ เบลส์ ปาสกาล และคำคมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ปาสกาลเคยบันทึกไว้

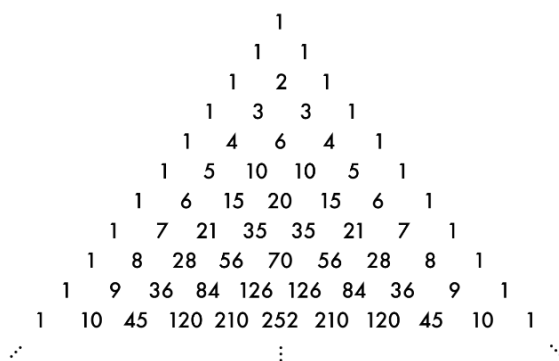
คำสำคัญ: ปาสกาล ชีวประวัติ คำคมคณิตศาสตร์

ABSTRACT

This general article presents an interesting part of Blaise Pascal's biography and his mathematical quote.

Keywords: Pascal, Biography, Mathematician quote

หนึ่งในแบบรูปของจำนวนนับที่มีชื่อเสียงในประวัติศาสตร์ของคณิตศาสตร์ และเป็นที่รู้จักโดยทั่วไปก็คือ รูปสามเหลี่ยมของปาสกาล (Pascal's Triangle) [8]



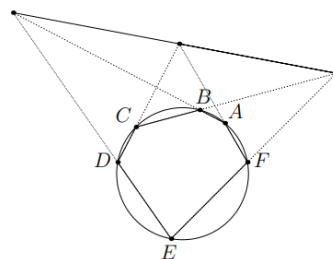
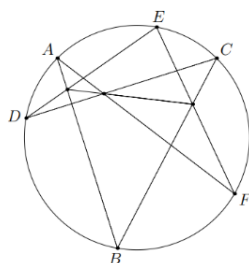
รูปที่ 1 รูปสามเหลี่ยมของปาสกาล (ที่มา <https://stackoverflow.com>)

แม้ก่อนหน้านี้จะมีหลักฐานปรากฏชัดว่า แบบรูปลักษณะนี้ได้เคยถูกนำเสนอมาก่อนแล้วในหลากหลายมุมโลก เช่น ในชิ้นส่วนคัมภีร์ภาษาสันสกฤต เมื่อราว 500 ปีก่อนคริสตกาล หรือการค้นพบโดยโอมาร์ คัยยาม (Omar Khayyam ค.ศ. 1048 - 1131) กวีและนักคณิตศาสตร์ชาวเปอร์เซีย เมื่อ ค.ศ. 1100 ที่รู้จักในชื่อ รูปสามเหลี่ยมของคัยยาม [4] หรือจากงานเขียนเรื่องคั่นฉ่องหยกแห่งจตุรธาตุ ของ จูชีเอเจีย (Zhu Shijie ค.ศ. 1249 - 1314) ใน ค.ศ. 1303 [1, 7] แต่ชื่อของปาสกาลก็ยังคงได้รับเกียรติให้เคียงคู่ไปกับแบบรูปนี้ต่อไป ซึ่งอาจเป็นเพราะจังหวะเวลาในการนำเสนอของปาสกาล ที่ทำให้ผลงานของเขาได้รับการยอมรับและถูกนำไปเผยแพร่ในวงกว้าง และที่สำคัญคือการค้นพบสมบัติต่าง ๆ จากแบบรูปนี้ รวมถึงการประยุกต์ใช้สมบัติเหล่านั้น [6]



รูปที่ 2 เบลส์ ปาสกาล

ปาสกาล (Blaise Pascal ค.ศ. 1623 – 1662) เกิดที่เมืองทางตอนกลางของประเทศฝรั่งเศส ในครอบครัวผู้พิพากษาซึ่งมีฐานะร่ำรวย เขาเป็นเด็กอัจฉริยะผู้มีความสามารถทางคณิตศาสตร์อย่าง ล้นเหลือ เชื่อกันว่าตั้งแต่ในวัยเยาว์ ปาสกาลสามารถค้นพบทฤษฎีบททางเรขาคณิตพื้นฐานต่าง ๆ แบบยุคลิดได้ด้วยตนเอง สามารถสร้างสรรค์ผลงานวิชาการที่เกี่ยวกับภาคตัดกรวยและเรขาคณิต ขั้นสูง และยังได้เข้าร่วมการอภิปรายเชิงวิชาการกับนักคณิตศาสตร์ชั้นนำของฝรั่งเศสอีกด้วย ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ของปาสกาล ได้ค่อย ๆ สัมผัส บ่มเพาะ จนก่อเกิดเป็นผลงานทาง คณิตศาสตร์ที่รู้จักกันในนามของเขามากมาย เช่น “ทฤษฎีบทปาสกาล” ซึ่งเป็นทฤษฎีบททาง เรขาคณิตเชิงภาพฉายที่ว่า “หากกำหนดรูปหกเหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมมา ให้ เมื่อต่อต้านของ รูปหกเหลี่ยมนั้นจนเกิดจุดตัด จะได้ว่า จะมีจุดตัด 3 จุด ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันเสมอ” และเรียก เส้นตรงนั้นว่า “เส้นปาสกาล” และหากสร้างเส้นทแยงมุมของรูปหกเหลี่ยม แทนการต่อต้านออกไป ก็ยังได้ผลลัพธ์เดียวกัน นอกจากนี้ เมื่อเปลี่ยนวงกลมเป็นวงรี หรือพาราโบลา ข้อค้นพบของปาสกาลก็ ยังคงเป็นจริงด้วย [4]

รูปที่ 3 ทฤษฎีบทปาสกาล (ที่มา <https://cjquines.com/files/pascals.pdf>)

อีกหนึ่งภาพลักษณ์ที่โดดเด่นไม่แพ้ความเป็นนักคณิตศาสตร์ของปาสกาล ก็คือความเป็นนักปรัชญาที่มีชื่อเสียง ดังเห็นได้จากผลงานเขียนเรื่อง *Lettres Provinciales Et Pensées* [2] แม้เขาจะมีอายุแค่เพียง 39 ปี ภายใต้งานที่อ่อนแอและเสื่อมถอยเร็วกว่าคนปกติทั่วไป แต่ผลงานวิเศษต่าง ๆ ในหลากหลายสาขาของปาสกาล ก็สะท้อนให้เราเห็นถึงความเยียบคมและการมองโลกในฐานะของผู้โล่ล่าค้นหาทั้งองค์ความรู้และความจริงอันเที่ยงแท้ รวมถึงทัศนะในการเข้าถึงความจริงเหล่านั้น ดังคำคมที่ว่า

Contradiction is not a sign of falsity, nor the lack of contradiction a sign of truth. [3]

ความไม่คล่อง ข้อเท็จจริง ... สิ่งขัดแย้ง

ใช้สำแดง แห่งสัญญาณ งานสลาย

ความไร้แฝง สิ่งแย้งขัด ขัดทำลาย

ใช้จะหมาย สื่อแสดง ว่าแจ้งจริง

เอกสารอ้างอิง

- [1] เทมเพิล อาร์. (2554). *The Genius of China ตำนานกำเนิด 100 สิ่งแรกของโลก* (พงศาล มีคุณสมบัติ, ผู้แปล). กรุงเทพมหานคร: มติชน. (ต้นฉบับพิมพ์ปี 2549).
- Temple, R. (2011). *The Genius of China: 3,000 Years of Science, Discovery, and Invention* (Translated by Pongsan Mekhunsombat). Bangkok: Matichonbook. (Original edition was printed in 2006).
- [2] Bell, E. T. (2014). *Men of Mathematics*. Simon and Schuster.
- [3] Blaise Pascal Quotes. (n.d.). *Quotes.net*. Retrieved July 31, 2020, from <https://www.quotes.net/quote/43686>.
- [4] Crilly, T. (2007). *50 Maths Ideas You Really Need to Know*. UK: Hachette.
- [5] Dunham, W. (1947). *The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey Through The Great Proofs, Problems, and Personalities*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [6] Eves, H. (1958). *An Introduction to The History of Mathematics*. New York: Rinehart and company, Inc.

- [7] Hosch, W. L. (2009). *Pascal's Triangle*. Retrieved April 25, 2021, from <https://www.britannica.com/science/Pascals-triangle>.
- [8] Pickover, C. A. (2013). *The Math Book: 250 Milestones in the History of Mathematics*. New York: Barnes & Noble, Inc.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การประยุกต์ใช้วอลเปเปอร์กรุปประเภท P6m สร้างลวดลายผ้ามัดหมี่ทอมือ Application of Wallpaper Group P6m to Creation of Handwoven Mudmee Silk Patterns

สำคัญ ฮ่อบรรทัด^{1,*} และ สมบัติ ประจัญสานต์²

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ บุรีรัมย์ 31000

²สาขาวิชาเทคโนโลยีสถาปัตยกรรม คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ บุรีรัมย์ 31000

Samkhan Hobanthad^{1,*} and Sombat Prajongsant²

¹Department of Mathematics, Faculty of Science, Buriram Rajabhat University, Buriram, 31000

²Department of Architectural Technology, Faculty of Industrial Technology,
Buriram Rajabhat University, Buriram, 31000

Email: ¹samkan.hb@bru.ac.th ²sombat.pj@bru.ac.th

วันที่รับบทความ : 2 ธันวาคม 2562

วันที่แก้ไขบทความ : 17 เมษายน 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 23 กรกฎาคม 2563

บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอการสร้างลวดลายผ้ามัดหมี่ทอมือให้มีความสมมาตรประเภท P6m โดยพัฒนา
บนวอลเปเปอร์กรุป แม่ลายที่ใช้พัฒนามาจากส่วนหนึ่งของลายดั้งเดิมที่ใช้ทอผ้ามัดหมี่ในพื้นที่จังหวัด
บุรีรัมย์ ประเทศไทย ซึ่งใช้วิธีการเลือกลายแบบเจาะจงทั้งหมด 2 ลาย ได้แก่ ลายโคมประทีป และ
ลายขอบินไทย ผลการศึกษาพบว่า ทั้งสองแม่ลายสามารถพัฒนาสู่ลายมัดหมี่ที่มีความสมมาตร

* ผู้เขียนหลัก

ประเภท P6m ได้โดยใช้เทคนิคการค้นหามีแบบมัลติสแควร์ร่วมกับการใช้เทคนิคการมัดหมี่แบบสะท้อนลาย

คำสำคัญ: วอลเปเปอร์กรุป ลวดลาย มัดหมี่ ผ้าทอ

ABSTRACT

This article presents the creation of wallpaper which are classified as Mudmee group P6m. Motifs used for pattern development are the original patterns used in Mudmee weaving in Buriram Province, Thailand. Two patterns, Khom Prateep and Khor Bin Thai, are specifically chosen. Results of the study reveal that both primary patterns can be developed into Mudmee fabric pattern having the symmetry of group P6m, using point group P6m in combination with tie-dyeing (IKAT) technique and “Mee Luad” technique.

Keywords: Wallpaper group, Patterns, Mudmee, Woven textile

1. Introduction

Patterns are an art form which has been practiced by many people groups for millennium. Patterns are found everywhere in nature, artwork and handicrafts, architecture, and mathematics. Some mathematicians are interested in patterns employing repetitions and have tried classifying patterns using geometric principles of rotation, reflection, translation, and glide-reflection which is consistent with group theory concepts.

Fedorov [3] and Polya [10] proved that there are only 17 equivalence classes of wallpaper groups. Mathematicians have been interested in and study knowledge related to ancient patterns of handwoven textiles, which also includes architecture, to determine similarities within the 17 groups of wallpaper patterns [1 4 6 7 9 12]. Different wallpaper groups are found in the patterns of textiles and architectures studied; patterns with three and six fold rotations occur with a lesser frequency.

Wallpaper pattern $P6m$ is a symmetrical six-fold rotation on hexagonal lattice and rarely found in ancient architecture or woven textiles. This includes a pattern known as Mudmee, which employs resistant dyeing on yarn prior to the dyeing and weaving process for fabrics. The symmetrical types often found in Mudmee textiles are Cm , Cmm and Pm . Moreover, Thai Mudmee fabric is a handicraft that uses a very complicated technique in creating patterns on the selected cloth. Thus, there is a question whether it is possible to create Mudmee fabric with wallpaper group $P6m$.

One purpose of this article seeks to determine how to create the Mudmee pattern with wallpaper group $P6m$ using primary patterns derived from the original ones to preserve the uniqueness of local art. The patterns would be created on the basis of wallpaper groups. Results of the study would assist understanding related to the possibility of wallpaper group $P6m$ being woven into Mudmee fabric; and if so, how to create those patterns. The resulting patterns will contribute to a diversity of patterns in the market and may also affect the diversity of Mudmee products.

2. Wallpaper Groups

A group $(G, *)$ is a nonempty set G together with a binary operation $*: G \times G \rightarrow G$ that satisfies three properties: associative, identity, and inverse properties. If B is a nonempty subset of G and $(B, *)$ is a group; then, B is called a subgroup of G . In particular, let X be the set of all bijections of the plane $\mathbb{R}^2$ onto itself. If $\circ$ is the composition; then, $(X, \circ)$ is a group [8]. We now define and investigate the class of functions that we will use to model symmetries.

Definition 2.1 [2] An **isometry** $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a distance-preserving function from the plane to itself. This means that $\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|$ for all $a, b \in \mathbb{R}^2$. The set of all isometries is denoted by $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

It was shown in [2] that if a function $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is an isometry; then, f is a bijection from the plane onto itself. Thus, $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ is a subgroup of X . Moreover,

there are only three basic types of isometries: translations (τ), rotations (r) and reflections (m). A glide-reflections (g) is an isometry that consists of a reflection over a line and then translation along that line.

Definition 2.2 [8] Let P be any nonempty subset of points in the plane. Define a subset $\text{Sym}(P)$ of $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ by $\text{Sym}(P) = \left\{ \alpha \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2) \mid \alpha(P) = P \right\}$. That is $\alpha(p) \in P$ for all $p \in P$.

Example 2.1 Let $P = \left\{ m \left(\cos \frac{n\pi}{3}, \sin \frac{n\pi}{3} \right) \mid n \in \{1, 2, \dots, 6\} \text{ and } m \in \{0, 0.2, 0.4, \dots, 1\} \right\}$.

Define the function $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ by

$$r(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ for all } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Let $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Consider,

$$\begin{aligned} \|r(x_1, y_1) - r(x_2, y_2)\| &= \left\| \left((x_1 - x_2) \cos \frac{\pi}{3} + (y_1 - y_2) \sin \frac{\pi}{3}, (x_1 - x_2) \sin \frac{\pi}{3} + (y_1 - y_2) \cos \frac{\pi}{3} \right) \right\| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} \right) + (y_1 - y_2)^2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} \right)} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|. \end{aligned}$$

Hence, $r \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

Moreover, $r(x, y) \in P$ for all $(x, y) \in P$. Therefore, $r \in \text{Sym}(P)$.

The finding demonstrated in [2] that $\text{Sym}(P)$ is a subgroup of $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$

Definition 2.3 Let O_2 be the set of all matrices of the form

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ or } M_{\frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

where R_θ is the function of rotation θ counter-clockwise around the origin and

$M_{\frac{\theta}{2}}$ is the function of reflection on a straight line through the origin such that the line is at $\frac{\theta}{2}$ -degree angle on x-axis.

Noting that the function r in Example 2.1 is $R_{\frac{\pi}{3}} \in O_2$ in Definition 2.3.

Proposition 2.1 [2] Let $A \in O_2$, $z, b \in \mathbb{R}^2$ and let the function $\pi: \text{Isom}(\mathbb{R}^2) \rightarrow O_2$ be given by $\pi(f) = A$ if $f(z) = Az + b$. Then, π is a surjective mapping from $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ onto O_2 and π is a homomorphism.

The finding demonstrated in [2] that if H is a subgroup of $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, let $T_H = T \cap H$ where T is the set of all translations in $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. The function $\pi: \text{Isom}(\mathbb{R}^2) \rightarrow O_2$ restricts to a function with the smaller domain H . The kernel of this restricted function is the subgroup T_H . Thus, from the First Isomorphism Theorem, $\pi(H) \cong H/T_H$ and $\pi(H)$ is called the point group of H .

Definition 2.4 [2] A subgroup H of $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ is a **wallpaper group** if the translation subgroup T_H of H is generated by translations by two linear vectors: $T_H = \langle \tau_a, \tau_b \rangle$ where a and b are linearly independent vectors in the plane and the point group $\pi(H)$ is finite.

Example 2.2 Consider the set P in Example 2.1.

Let $P' = \{(x + 2h + k, y + \sqrt{3}k) \mid (x, y) \in P \text{ and } h, k \in \mathbb{Z}\}$ as shown in Figure 2.1 (a).

Then P' is a wallpaper group where

$$\pi(P') = \left\{ R_0, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\pi}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}, M_0, M_{\frac{\pi}{6}}, M_{\frac{\pi}{3}}, M_{\frac{\pi}{2}}, M_{\frac{2\pi}{3}}, M_{\frac{5\pi}{6}} \right\}$$

as shown in Figure 2.1 (b) and $T_{P'} = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(1,\sqrt{3})} \rangle$.

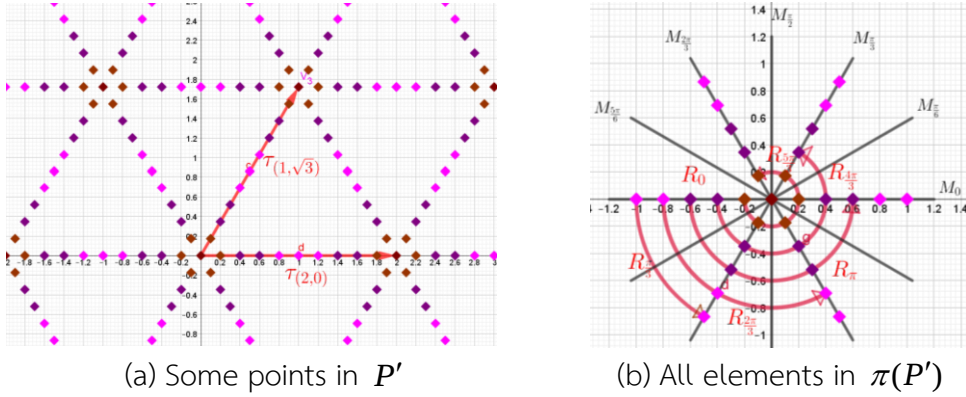


Figure 2.1 Example of wallpaper group

Theorem 2.1 ([3] and [10]) There are seventeen equivalence classes of wallpaper groups.

In this paper, we use their IUCr (International Union of Crystallography) symbols and classify wallpaper groups as shown in Table 2.1.

Table 2.1 Seventeen wallpaper groups and their symmetries (adopted from [1])

IUCr Notation	Lattice	Highest Order of Rotation	Reflection	Non-Trivial Glide Reflection
P1	parallelogram	1	no	no
P2	parallelogram	2	no	no
Pm	rectangular	1	yes	no
Pg	rectangular	1	no	yes
Cm	rhombic	1	yes	yes
Pmm	rectangular	2	yes	no
Pmg	rectangular	2	yes	yes
Pgg	rectangular	2	no	yes
Cmm	rhombic	2	yes	yes
P4	square	4	no	no

IUCr Notation	Lattice	Highest Order of Rotation	Reflection	Non-Trivial Glide Reflection
P4m	square	4	yes	yes
P4g	square	4	yes	yes
P3	hexagonal	3	no	no
P3m1	hexagonal	3	yes	yes
P31m	hexagonal	3	yes	yes
P6	hexagonal	6	no	no
P6m	hexagonal	6	yes	yes

3. Development of Original Patterns into Wallpaper Group P6m

Creation of the wallpaper group P6m patterns can be done using Doris Schattschneider's method [13] that consists of two steps. The first step generates a primitive cell as shown in Figure 3.1 (a). Then, the primitive cell generated in the first step is glided along vector direction on the hexagonal lattice as shown in Figure 3.1 (b).

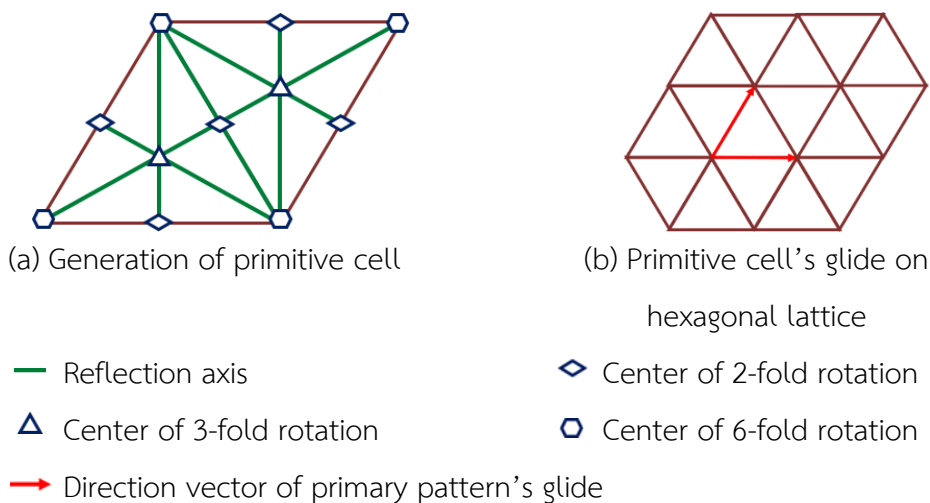


Figure 3.1 Method for creating patterns of wallpaper group P6m

The original motifs used to form wallpaper patterns include “Khom Prateep” and “Khor Bin Thai”, which are local Mudmee patterns woven in Buriram Province. The chosen patterns and drafted motifs are shown in Figure 3.2.

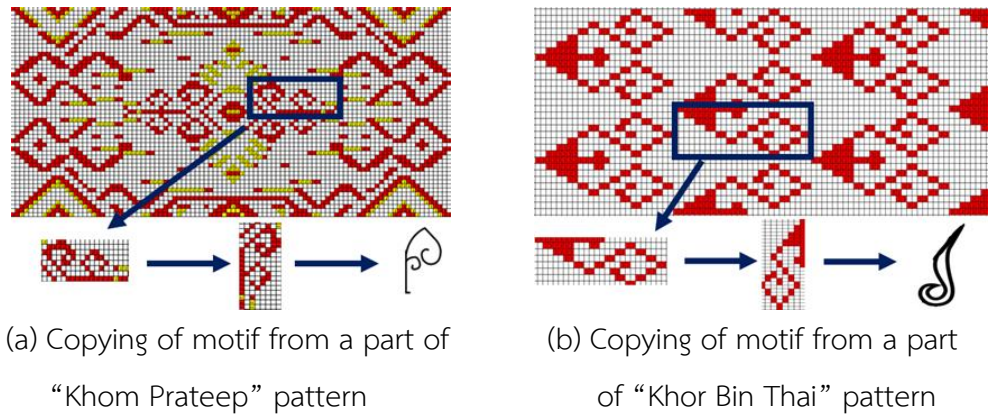


Figure 3.2 A step of copying motifs from a part of “Khom Prateep” and “Khor Bin Thai” patterns

The motif obtained from a part of “Khom Prateep” pattern is used to produce a primitive cell in accordance with the method for creating wallpaper group P6m as shown in Figure 3.3.

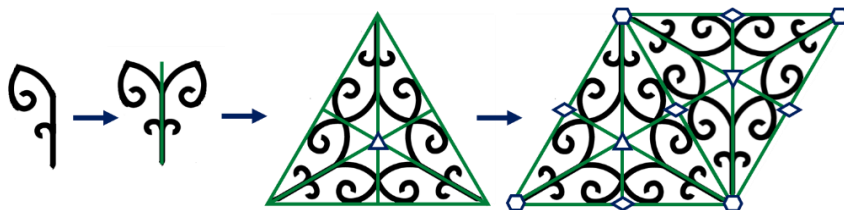
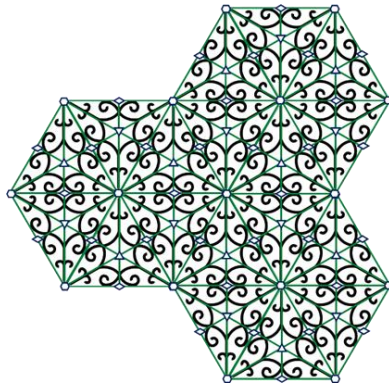
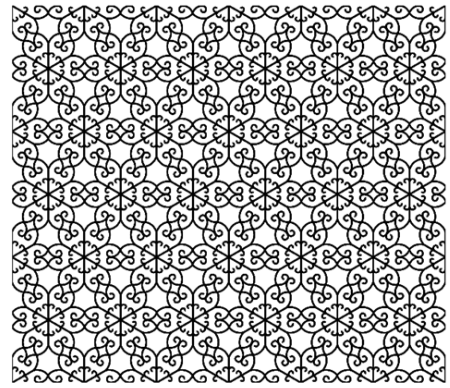


Figure 3.3 Process of creating a primitive cell of wallpaper group P6m from the motif obtained from “Khom Prateep” pattern

After obtaining the primitive cell, glide it along the hexagonal lattice as shown in Figure 3.4 (a) and continue to glide the primitive cell along the hexagonal lattice until the pattern of wallpaper group P6m is created as shown in Figure 3.4 (b).



(a) Gliding the primitive cell along the hexagonal lattice



(b) Pattern of wallpaper group P6m

Figure 3.4 Process of gliding the primitive cell along the hexagonal lattice until a pattern of wallpaper group P6m is obtained

Repeat the same process for the pattern created from a part of “Khor Bin Thai” pattern, starting with creation of the primitive cell as shown in Figure 3.5.

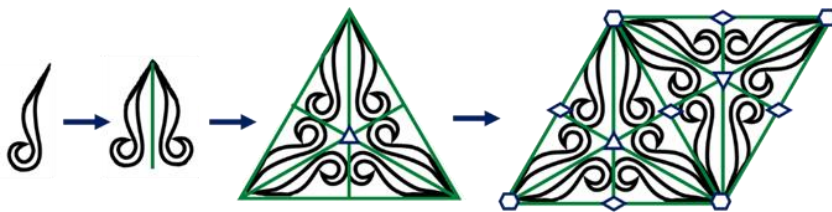


Figure 3.5 Process of creating a primitive cell of wallpaper group P6m from the motif obtained from “Khor Bin Thai” pattern

Keep gliding the primitive cell along the hexagonal lattice as shown in Figure 3.6 (a) to obtain a pattern of wallpaper group P6m as shown in Figure 3.6 (b).

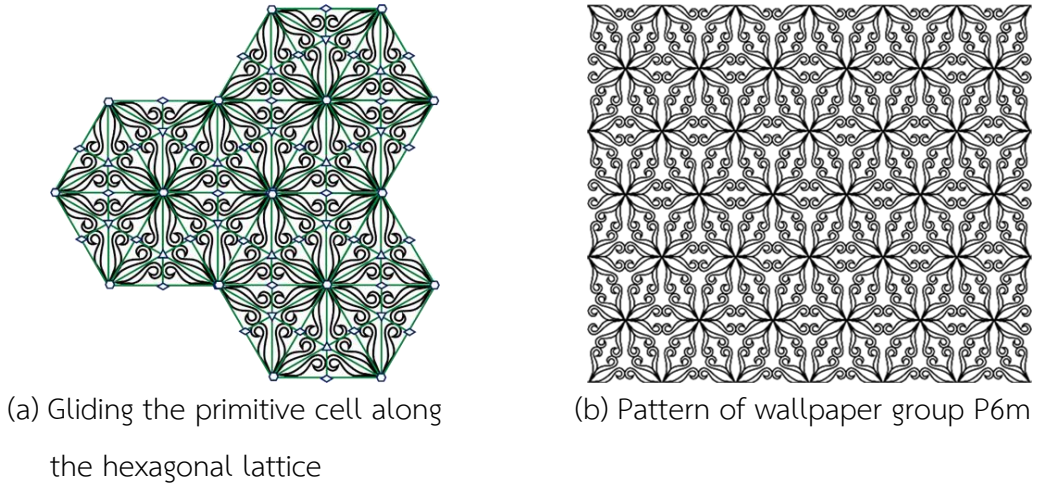
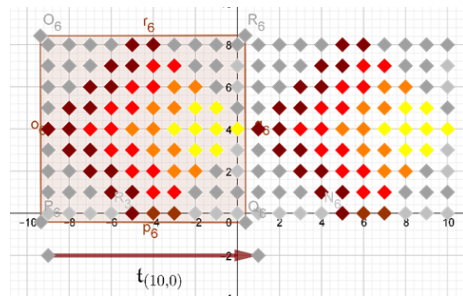


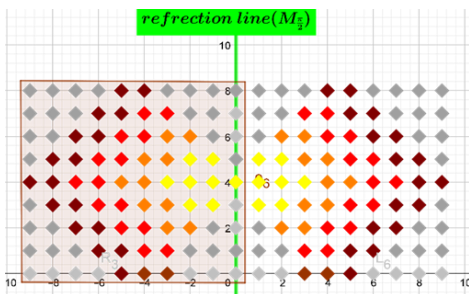
Figure 3.6 Gliding the primitive cell along the hexagonal lattice until a pattern of wallpaper group P6m is obtained

4. Applying Wallpaper Group P6m to Weaving Processes

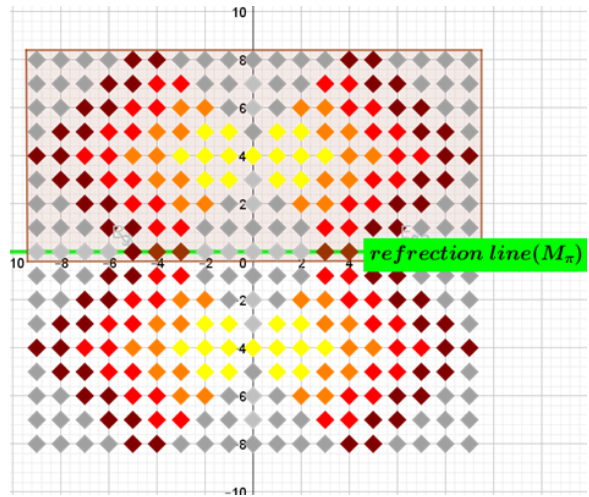
Hobanthad, Prajongsant and Vongpramate [5] found that the skills for creating Mudmee patterns is developed from tie-dyeing process to make differences on the weft. By representing the colored positions with numeric codes on the matrix, the Mudmee formation process is presented; then, the formation of the pattern is explained by using the matrix transformation which consists of two steps. The two steps are use of matrix transformation for reflection of motif generated by the tie-dyeing technique and the matrix transformation for reflection of the motif generated by the “Mee Luad” technique. In this paper, the Mudmee formation process will be represented again by elements of $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Let P be a nonempty subset of points in the plane. If P is a motif, then tie-dyeing translation technique, tie-dyeing reflection technique and Mee-Luad technique are τ_a , $M_{\frac{\pi}{2}}$ and M_{π} , respectively (see Figure 4.1).



(a) Tie-dyeing by translation technique



(b) Tie-dyeing by reflection technique



(c) Tie-dyeing by reflection technique in combination with Mee-Luad technique

Figure 4.1 Mudmee formation process

When weavers have been given tables determining the positions for dyeing that have been thoroughly analyzed relative to the pattern formation process and how to dye the selected yarn to create the desired symmetrical patterns, it will give the weavers significant guidelines in the dyeing process. After reviewing $P6m$ patterns from the two motifs, patterns will be entered into the table created by the GeoGebra program by specifying the positions of colors in Mudmee patterns tied with wefts. This is accomplished in accordance with coloring positions in the program and taking into account the order of double dyeing. Let P be a nonempty subset of points in the plane such that P is the motif in right triangle shape (Figure 4.2) from a part of hexagonal lattice. This starts from creation of the set P' using point group $P6m$ as follows:

$$P' = \bigcup_{i=1}^6 P_i \quad \text{where}$$

$$P_1 = \left\{ (a, b) \mid \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & -\cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ and } (x, y) \in P \right\},$$

$$P_2 = \left\{ (a, b) \mid \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ and } (x, y) \in P \cup P_1 \right\},$$

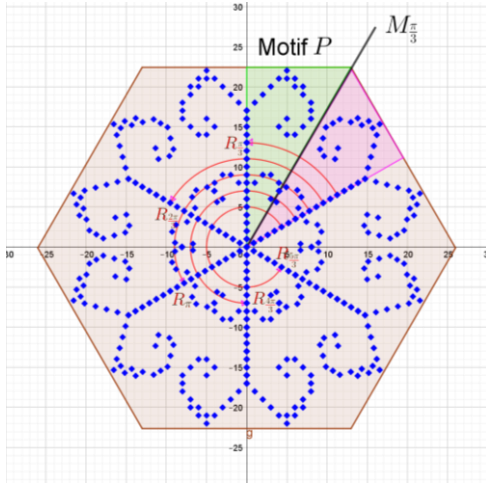
$$P_3 = \left\{ (a, b) \mid \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ and } (x, y) \in P \cup P_1 \right\},$$

$$P_4 = \left\{ (a, b) \mid \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ and } (x, y) \in P \cup P_1 \right\},$$

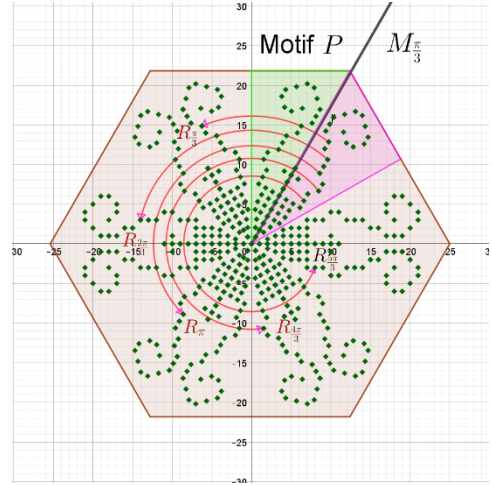
$$P_5 = \left\{ (a, b) \mid \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} & -\sin \frac{4\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ and } (x, y) \in P \cup P_1 \right\},$$

$$\text{and } P_6 = \left\{ (a, b) \mid \begin{pmatrix} \cos \frac{5\pi}{3} & -\sin \frac{5\pi}{3} \\ \sin \frac{5\pi}{3} & \cos \frac{5\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ and } (x, y) \in P \cup P_1 \right\}$$

as shown in Figure 4.2.



(a) Creation of P' from motif obtained from “Khom Prateep” pattern



(b) Creation of P' from motif obtained from “Khor Bin Thai” pattern

Figure 4.2 Creation of P' from motif using point group P6m

If τ_a and τ_b are translation vectors where a and b are linearly independent vectors in the plane, then translation of all elements in P' by $\langle \tau_a, \tau_b \rangle$ on hexagonal lattice is shown in Figure 4.3.

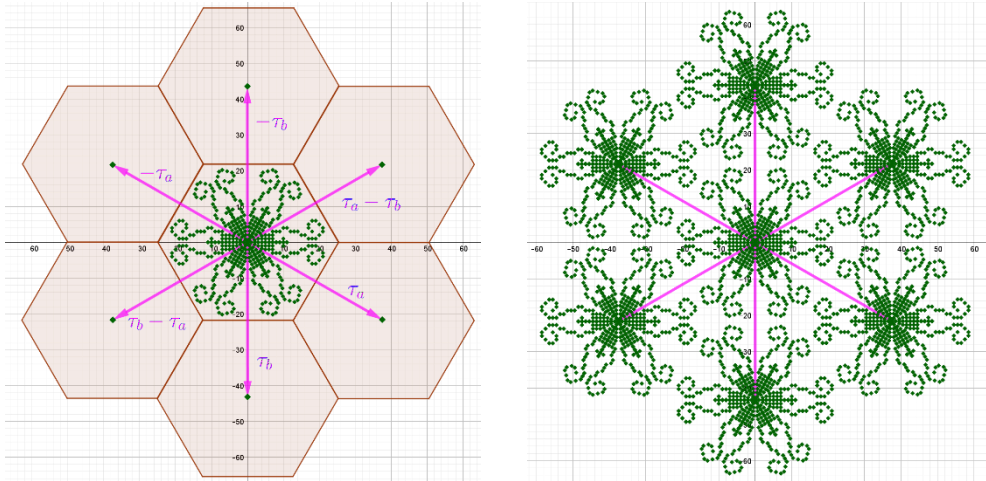
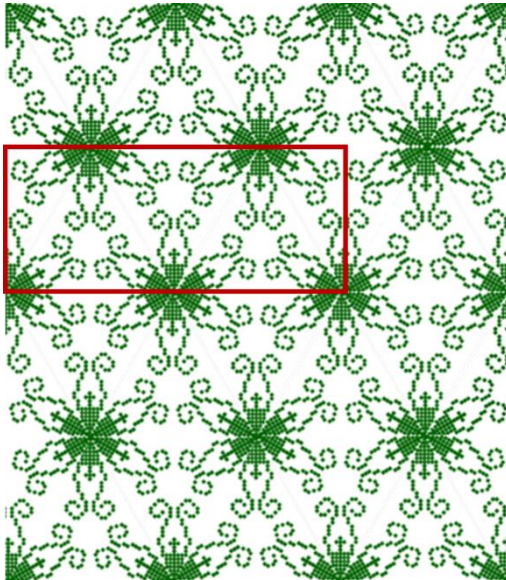


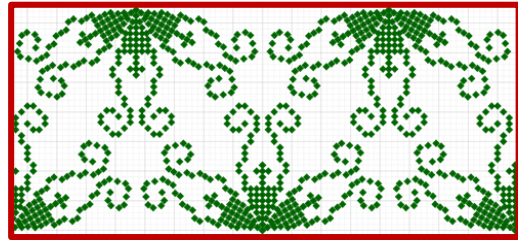
Figure 4.3 Translation P' by $\langle \tau_a, \tau_b \rangle$ on hexagonal lattice

If P'' is the result of translation P' by $\langle \tau_a, \tau_b \rangle$ on hexagonal lattice, then P'' is a wallpaper group P6m pattern as shown in Figure 4.4 (a) and the rectangle is cropped

from a part of P'' such that rectangle is on a reflection line of wallpaper group P6m pattern (Figure 4.4 (b)) for tie-dyeing process as shown in Figure 4.4 (c).



(a) Wallpaper group P6m of P''



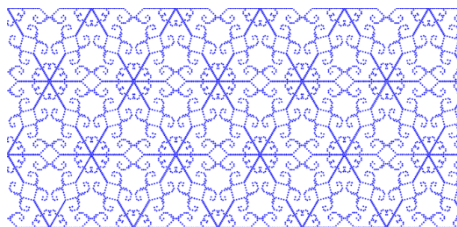
(b) Crop rectangle from a part of P''



(c) tie-dyeing process

Figure 4.4 Wallpaper group P6m pattern to tie-dyeing process

From recording the pattern developed from a part of “Khom Prateep” pattern in the table with the pattern laid down in a manner that corresponds to the width of the cloth, which is about 100 centimeters, to the process of simulation of the Mudmee pattern with the pattern of the reflection technique and the Mee Luad technique, a simulated P6m pattern using the GeoGebra program is obtained as shown in Figure 4.5 (a). When weavers from Ban Non Samran in Muang District of Buriram Province perform the tie-dyeing and weaving process, the pattern matching the simulated image is obtained as shown in Figure 4.5 (b).



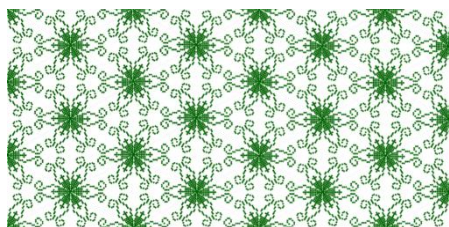
(a) Simulation of Mudmee pattern formed by Mee Luad technique and tie-dyeing technique of pattern reflection



(b) Result of actual weaving using the design technique to obtain the pattern of wallpaper group P6m

Figure 4.5 A comparison of simulated pattern and the actual pattern of handwoven Mudmee developed from a part of “Khom Prateep” pattern

Likewise, the pattern developed from a part of “Khor Bin Thai” pattern is recorded in the table created by the GeoGebra program before undergoing the process of simulation of Mudmee pattern using the pattern reflection technique and the Mee Luad technique to obtain a simulated pattern of wallpaper group P6m as shown in Figure 4.6 (a). When the actual tie-dyeing and weaving process is performed by weavers from Ban Nong Tad Noy in Muang District from Buriram Province, the pattern that matches the simulated image is obtained as shown in Figure 4.6 (b).



(a) Simulation of Mudmee pattern formed by Mee Luad technique and tie-dyeing technique of pattern reflection



(b) Result of actual weaving using the design technique to obtain the pattern of wallpaper group P6m

Figure 4.6 A comparison of simulated pattern and the actual pattern of handwoven Mudmee developed from a part of “Khor Bin Thai” pattern

Consider, the results of actual weaving have maximum order of six rotations and have an axis reflection as shown in Figure 4.7.

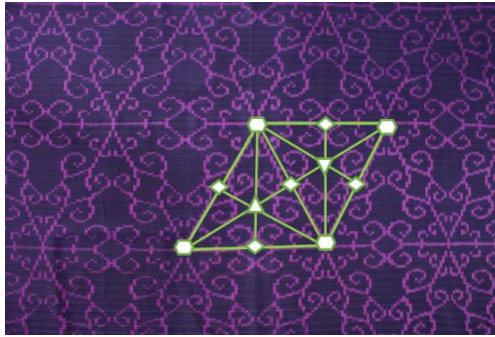


Figure 4.7 Result of actual weaving obtain the pattern of wallpaper group P6m

From Table 2.1 and Figure 3.1, the result of actually weaving obtains the P6m pattern. Besides, pattern simulation yields the same result with a research study that develops a program to simulate Mudmee pattern using Mee Luad technique [14]. However, it cannot be said that the two patterns created by actually weaving are truly symmetrical P6m patterns, because the resulting patterns do not actually resemble the models in every side and corner due to the number of yarns used as wefts are not in proportion to the warps [11] and that tie-dyeing technique requires a high level of expertise to determine the distance of each position of yarn tying. Therefore, it is difficult to actually obtain symmetrical P6m pattern. However, symmetry of the developed patterns is very close with that of wallpaper group P6m and absolutely different from that of the original patterns. Thus, new patterns are created as per the desired outcome as shown in Figure 4.8.

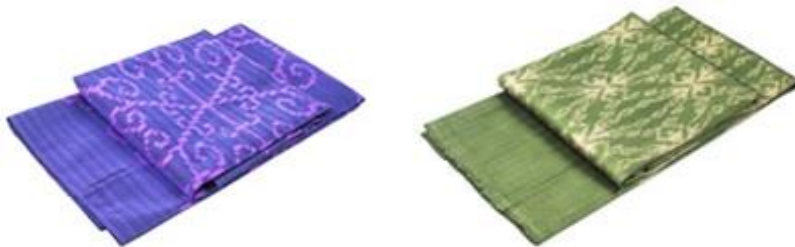


Figure 4.8 Handwoven fabrics developed from original patterns to obtain wallpaper group P6m

5. Conclusion

This article presented the procedures for creating handwoven Mudmee P6m wallpaper pattern from original fabric patterns. Results of the study revealed that parts of the original patterns can be used to create the patterns of wallpaper group P6m. When the simulated patterns are used in the weaving process, it was found that the Mee Luad technique and the tie-dyeing technique of pattern reflection must be used. Regarding the process for generating the primitive cell, the positions of the pattern in the table must be determined for the purpose of tying and dyeing before weaving by the weavers. The weaving results matched the simulated patterns in GeoGebra program. However, the patterns obtained from the actual weaving process are not consistent in every side and corner due to disproportion between the numbers of wefts and warps and the weavers' technique to determine the positions to tie the yarns. However, the patterns obtained from this research are considered original, because there have been no similar patterns of this symmetrical group which have been identified to date. Thus, this is a way to improve the diversity of patterns and may further lead to a diversity of products.

6. Acknowledgement

We would like to express our sincere thanks to the National Research Council of Thailand for funding this research, the weaving group of Ban Nong Tad Noy, Muang District, Buriram Province, and the weaving group of Ban Non Samran in Muang District of Buriram Province, the producers of prototype fabrics, as well as Buriram Rajabhat University for their support with site and facilities.

References

- [1] Bodner B. L. (2013). The Planar Crystallographic Groups Represented at The Alhambra. *Proceeding of Bridges 2013: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (p. 255 - 232). Enschede, Netherlands.

- [2] Cohen M. M. and Pilgrim K. M. (2004). *Groups and Geometry: A Bridge to The Math Major*. Retrieved from <https://pi.math.cornell.edu/~marshall/book04-1.pdf>
- [3] Fedorov E. S. (1891). The Symmetry of Real Systems of Configurations. *Zap. Min. Obshch.*, 28, p. 1 - 146.
- [4] Glenn R. L., Haftamu M. G. Y. and Fahad M. H. K. (2014). Symmetry Groups of Islamic Patterns at The Sultan Qaboos Grand Mosque. *Proceeding of Bridges 2014: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (p. 183 - 190). Seoul, Korea.
- [5] Hobanthad S., Prajongsant S. and Vongpramate D. (2017) Matrix Transformation Analysis of Mee Laud Technique in Mudmee Pattern. *Proceedings of 55th KU Annual Conference, Science Technology and Environment* (p. 1 - 10). Bangkok, Thailand.
- [6] Lekka L. and Dascalopoulos S. (2008). Motifs and Symmetry Characteristics of The Ornamentation on Traditional Greek Woven Textiles from The Area of The Aegean. *Fibres and Textiles in Eastern Europe*, 68, p. 74 - 68.
- [7] Malouise A. N. L. P. and Analyn V. S. A. (2016). Mathematical and Anthropological Analysis of Northern Luzon Funeral Textile. *Philipp. J. Sci.*, 145, p. 89 - 103.
- [8] Nagpaul S. R. and Jain S. K. (2005). *Topics in Applied Abstract Algebra. The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics*. CA, USA: Thomson Learning.
- [9] Perez-Gomez R. (1987). The Four Regular Mosaic Missing in The Alhumbra. *Computer and Mathematics with Application*, 14, p. 133 - 137.
- [10] Polya G. (1924). Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. *Zeitschrift für Kristallograpie-Crystalline Materials*, 60, p. 278 - 282.
- [11] Prajongsant S. (2018). Pojakapat, Thai Traditional Floral Mobiles : From Fine Arts to Mudmee Motifs. *Proceedings of Thailand Design & Research Conference* (p. 266 - 232). Khon Kaen, Thailand.

- [12] Reinhardt P. A. and Welter L. (1999). Symmetry Analysis of Embroideries on Greek Women's Chemises. *Clothing and Textiles Research Journal*, 17, p. 176 - 190.
- [13] Schattschneider D. (1978). The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *The American Mathematical Monthly*, 85, p. 439 - 450.
- [14] Vongpramate D., Hobanthad S. and Prajongsant S. (2018). Development of Simulation Software for Mudmee Silk from Buriam Local Wisdom. *Thai Science Technology Journal*, 26, p. 1264 - 1272.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู Mathematical Problem Posing Abilities of Preservice Teachers

วีรวัฒน์ ไทยชำ^{1,*} และ ทรงชัย อักษรคิด²

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ นครสวรรค์ 60000

²ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพมหานคร 10900

Weerawat Thaikam^{1,*} and Songchai Ugsonkid²

¹Division of Mathematics, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education,

Nakhon Sawan Rajabhat University, Nakhon Sawan, 60000

²Department of Education, Faculty of Education, Kasetsart University, Bangkok, 10900

Email: ¹weerawattk29@gmail.com ²feduscu@ku.ac.th

วันที่รับบทความ : 4 พฤษภาคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 29 กรกฎาคม 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 28 มกราคม 2564

บทคัดย่อ

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่สำคัญอีกความสามารถหนึ่งที่ ควรส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนในทุกระดับการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับนักศึกษาครู หากนักศึกษาครูมีความสามารถดังกล่าวแล้วจะตั้งปัญหาที่ส่งเสริมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนในอนาคต

* ผู้เขียนหลัก

ต่อไปได้ จากการศึกษาและรวบรวมงานวิจัยเกี่ยวกับความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู สามารถแบ่งได้เป็น 5 ประเภท ได้แก่ (1) ความสามารถในการตั้งปัญหาตามเทคนิคหรือยุทธวิธีการตั้งปัญหาที่กำหนดให้ (2) ความสามารถในการตั้งปัญหาให้สอดคล้องกับลักษณะของเงื่อนไขหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ (3) ความสามารถในการตั้งปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้ (4) ความสามารถในการตั้งปัญหาแบบบูรณาการและเชื่อมโยงกับบริบทจริง และ (5) ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับผู้เรียน ผู้เขียนได้นำเสนอรายละเอียดและตัวอย่างประกอบของความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ในแต่ละประเภท และหวังว่าบทความนี้จะเป็แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กับนักศึกษาครูต่อไป

คำสำคัญ: ความสามารถในการตั้งปัญหา การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาครู

ABSTRACT

Mathematical problem posing is another important ability that should be promoted to learners at all levels of education. Especially preservice teachers, if they have this ability, they can pose problems that will support mathematical learning for students in the future. From studying and collecting research on mathematical problem posing ability of preservice teachers can be divided into 5 categories which are (1) the ability to pose problems according to the techniques or strategies for problem posing (2) the ability to pose problems in accordance with the nature of the conditions or situations given (3) the ability to pose problems using the strategy to solve the given problems (4) the ability to pose problems integrated and connected to real contexts and (5) the ability to pose mathematical problems suitable for students. The author presents details and examples of the ability to pose mathematical problems in each category and hopes that this article can be a guideline to further develop the ability to pose mathematical problems for preservice teachers.

Keywords: Problem posing ability, Mathematical problem posing, Preservice teacher

1. บทนำ

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ไม่น้อยกว่าการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งกระบวนการทั้งสองเป็นกระบวนการที่ไม่สามารถแยกออกจากกันได้ การตั้งปัญหาสามารถทำได้ทั้งก่อน ระหว่าง และหลังการดำเนินการแก้ปัญหา การตั้งปัญหาก่อนการดำเนินการแก้ปัญหจะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจถึงปัญหา บริบท และเงื่อนไขที่กำหนดให้ หากปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนที่ผู้เรียนไม่สามารถแก้ได้แล้ว การตั้งปัญหาย่อยระหว่างการดำเนินการแก้ปัญหจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถวางแผนทางในการแก้ปัญหาได้ และหากผู้เรียนแก้ปัญหาได้สำเร็จแล้ว การตั้งปัญหาย่อยยังช่วยให้ผู้เรียนได้ขยายแนวคิดของปัญหาเดิมเพื่อนำไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ต่อไปได้ [11] นอกจากการตั้งปัญหาจะช่วยส่งเสริมกระบวนการแก้ปัญหาของผู้เรียนแล้วยังช่วยพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และเสริมสร้างเจตคติที่ดีของผู้เรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ได้อีกด้วย

ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรได้รับการส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับครูผู้สอนด้วย ไม่ใช่แค่ผู้เรียนเท่านั้น เนื่องจากเป็นหน้าที่หลักของครูที่ต้องสร้างสรรค์ปัญหาให้กับผู้เรียน [6] หากครูมีความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้วจะสามารถตั้งปัญหาให้เหมาะสมกับผู้เรียนได้ทั้งระดับความรู้ ความสามารถ และความสนใจของผู้เรียน โดยการเชื่อมโยงบริบทในชีวิตจริงของผู้เรียนให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายและสามารถที่จะตรวจสอบ วินิจฉัยข้อผิดพลาด หรือความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน ตลอดจนส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เช่น การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มากกว่าการใช้ปัญหาที่มีลักษณะเหมือนแบบฝึกหัดที่เน้นให้ผู้เรียนได้ทำตามขั้นตอนวิธีเท่านั้น จากการศึกษาที่ผ่านมา [8] พบว่าครูที่ไม่มีประสบการณ์ในการตั้งปัญหาตั้งแต่ตอนเป็นนักเรียนหรือเป็นนักศึกษาครู มักจะหลีกเลี่ยงการตั้งปัญหาให้กับนักเรียนหรือเลือกปัญหาที่เป็นเพียงแค่แบบฝึกหัดให้กับนักเรียนเท่านั้น ดังนั้นการเตรียมความพร้อมโดยการจัดประสบการณ์ให้กับนักศึกษาครูให้มีความรู้ความเข้าใจ และมีความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นสิ่งสำคัญเพื่อที่จะนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนอย่างมีประสิทธิภาพให้กับนักเรียนต่อไปในอนาคต

2. ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู

ความสามารถในการตั้งปัญหาของนักศึกษาครูเป็นความสามารถที่นักศึกษาครูจะแสดงออกมาผ่านปัญหาที่ตั้งขึ้น การพิจารณาว่านักศึกษาครูมีความสามารถในการตั้งปัญหาหรือไม่ จะพิจารณาจากปัญหาที่ตั้งขึ้นว่าเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์หรือไม่ แก้ได้หรือไม่ ความซับซ้อนของปัญหามากน้อยเพียงใด หรือปัญหานั้นเหมาะสมกับผู้เรียนหรือไม่ ซึ่งล้วนขึ้นอยู่กับเกณฑ์ในการพิจารณาที่กำหนดขึ้นมา จากการศึกษาและการรวบรวมงานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวกับความสามารถในการตั้งปัญหาของนักศึกษาครู สามารถแบ่งได้เป็น 5 ประเภท โดยในแต่ละประเภทจะขอเสนอรายละเอียด พร้อมกับยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งบางตัวอย่างได้มีการดัดแปลงเพื่อให้เข้ากับบริบทของไทยมากขึ้นแต่ยังคงลักษณะโครงสร้างของปัญหาไว้ ดังนี้

2.1 ความสามารถในการตั้งปัญหาตามเทคนิคหรือยุทธวิธีการตั้งปัญหาที่กำหนดให้

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถทำได้ใน 2 ลักษณะคือ การตั้งปัญหาจากปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว (problem reformulation) และการตั้งปัญหาขึ้นมาใหม่จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ (problem generation) การจะตั้งปัญหาทั้งสองลักษณะได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้นนักศึกษาครูจำเป็นต้องมีเทคนิคหรือยุทธวิธีที่จะนำไปใช้ในการตั้งปัญหา การตั้งปัญหาตามเทคนิคหรือยุทธวิธีที่กำหนดจึงถือว่าเป็นความสามารถเริ่มต้นที่นักศึกษาครูพึงมี การตั้งปัญหาประเภทนี้จะพิจารณาจากผลของการตั้งปัญหาของนักศึกษาครูว่าสอดคล้องตามเทคนิคหรือยุทธวิธีในการตั้งปัญหาที่กำหนดหรือไม่ สำหรับเทคนิคแรกเป็นเทคนิคที่ใช้กับการตั้งปัญหาจากปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว ซึ่ง Grundmeier [4] ได้เสนอเทคนิคในการตั้งปัญหาไว้ 2 เทคนิค ได้แก่

1) *เทคนิคการปรับเปลี่ยนข้อมูล (surface technique)* เป็นเทคนิคในการตั้งปัญหาที่จะยังคงบริบทและโครงสร้างของปัญหาเดิมไว้ ซึ่งประกอบด้วย (1) การเพิ่มข้อมูล (2) การเปลี่ยนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (3) การเปลี่ยนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา และ (4) การเปลี่ยนข้อความใหม่

2) *เทคนิคการปรับเปลี่ยนโครงสร้างของปัญหา (structure technique)* ซึ่งประกอบด้วย (1) การสลับระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยยังคงบริบทของปัญหาเดิมไว้ (2) การเปลี่ยนบริบท โดยยังคงโครงสร้างของปัญหาเดิมไว้ และ (3) การขยายปัญหาจากปัญหาเดิม

ผู้เขียนขอเสนอตัวอย่างของการตั้งปัญหาของนักศึกษาครูทั้ง 2 เทคนิคนี้ โดยนำเสนอสถานการณ์ที่กำหนดและผลจากการตั้งปัญหาของนักศึกษาครู ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 การตั้งปัญหาโดยใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนข้อมูลและโครงสร้างของปัญหา

สถานการณ์ที่กำหนด

“ลูกบอลยางตกจากด้านบนของกำแพงที่มีความสูง 16 ฟุต โดยแต่ละครั้งที่ลูกบอลกระทบกับพื้นแล้ว ลูกบอลจะเด้งขึ้นด้วยระยะห่างที่เป็นครึ่งหนึ่งของระยะที่ตกลงมา และลูกบอลจะถูกคว้าไว้เมื่อลูกบอลเด้งขึ้นที่ระยะห่างจากพื้น 1 ฟุต อยากทราบว่าลูกบอลกระทบพื้นจำนวนกี่ครั้ง”
จงแก้ปัญหาคำหนดให้หลังจากนั้นตั้งปัญหาจากปัญหาที่แก้ไปแล้ว

ผลการตั้งปัญหาโดยใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนข้อมูล (การเปลี่ยนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้)

ลูกบอลยางตกจากด้านบนของกำแพงที่มีความสูง 768 ฟุต โดยแต่ละครั้งที่ลูกบอลกระทบกับพื้นแล้ว ลูกบอลจะเด้งขึ้นด้วยระยะที่เป็นหนึ่งในสี่ของระยะที่ตกลงมา และลูกบอลจะถูกคว้าไว้เมื่อลูกบอลเด้งขึ้นที่ระยะห่างจากพื้น 3 ฟุต อยากทราบว่าลูกบอลกระทบพื้นจำนวนกี่ครั้ง

ผลการตั้งปัญหาโดยใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนโครงสร้างของปัญหา (การสลับระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้)

ถ้าลูกบอลตกจากกำแพงโดยไม่ทราบความสูงของกำแพง ซึ่งกระทบกับพื้นจำนวน 4 ครั้ง และคว้าลูกบอลไว้ได้เมื่อกระทบกับพื้นครั้งที่ 4 ที่มีระยะห่างจากพื้น 2 ฟุต เมื่อเราทราบว่าในทุกครั้งที่ลูกบอลจะกระทบกับพื้นแล้ว ลูกบอลเด้งขึ้นมาด้วยระยะที่เป็นครึ่งหนึ่งของระยะเดิม อยากทราบว่าลูกบอลตกลงมาจากกำแพงที่มีความสูงกี่ฟุต

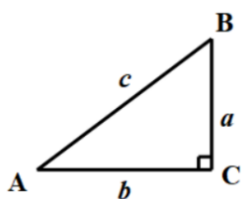
จากตัวอย่างปัญหาที่ตั้งด้วยเทคนิคการปรับเปลี่ยนข้อมูล จะเปลี่ยนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้โดยเปลี่ยนความสูงของกำแพง ระยะห่างจากพื้นกับลูกบอลในการเด้งแต่ละครั้ง และระยะของครั้งสุดท้ายก่อนที่จะคว้าลูกบอลไว้ แต่ยังคงคำถามไว้เหมือนเดิม คือการหาจำนวนครั้งที่ลูกบอลกระทบกับพื้น ส่วนปัญหาที่ตั้งด้วยเทคนิคการปรับเปลี่ยนโครงสร้างของปัญหาโดยการสลับระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือโจทย์เดิมกำหนดความสูงของกำแพง ระยะห่างจากพื้นกับลูกบอลในการเด้งแต่ละครั้ง และระยะของครั้งสุดท้ายก่อนที่จะคว้าลูกบอลไว้มาให้ แล้วให้หาจำนวนครั้งที่ลูกบอลที่กระทบกับพื้น แต่โจทย์ที่ตั้งขึ้นใหม่กำหนดจำนวนครั้งที่ลูกบอลกระทบกับพื้น ระยะของครั้งสุดท้ายก่อนที่จะคว้าลูกบอลไว้ ระยะห่างจากพื้นกับลูกบอลในการเด้งแต่ละครั้ง แล้วถามความสูงของกำแพง

นอกจากเทคนิคการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอไปข้างต้นแล้วยังมียุทธวิธีการตั้งปัญหาที่สามารถนำมาใช้ได้ทั้งกับการตั้งปัญหาจากปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว และการตั้งปัญหาขึ้นมาใหม่ โดย

Brown และ Walter [1] ได้เสนอยุทธวิธีการเปลี่ยนเงื่อนไข (what if not) ในการตั้งปัญหา ซึ่งมีขั้นตอน 5 ขั้นตอน ผู้เขียนขอนำเสนอขั้นตอนของยุทธวิธีดังกล่าวพร้อมยกตัวอย่างซึ่งเป็นการตั้งปัญหาขึ้นมาใหม่จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.2 การตั้งปัญหาโดยใช้อุทธวิธีการเปลี่ยนเงื่อนไข

ขั้นตอนที่ 1 เลือกประเด็นเริ่มต้นเพื่อให้ได้มาซึ่งปัญหา เช่น ทฤษฎีบทพีทาโกรัส



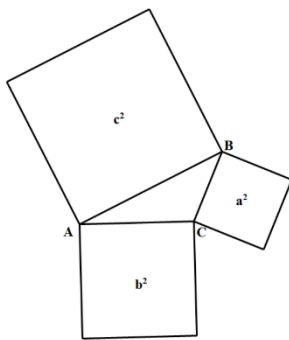
กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก โดยที่ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้าน จะเห็นว่า $c^2 = a^2 + b^2$

ขั้นตอนที่ 2 เขียนสมบัติหรือข้อสังเกตที่ได้จากประเด็นที่เลือกมา เช่น ทฤษฎีนี้เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีนี้เกี่ยวกับพื้นที่ มีการใช้เครื่องหมายบวกระหว่างสองตัวแปร ตัวแปรที่ใช้เกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ

ขั้นตอนที่ 3 เขียนประโยคในลักษณะ อะไรจะเกิดขึ้น ถ้าไม่เป็นไปตามสมบัติหรือข้อสังเกตต่าง ๆ เช่น ถ้ารูปสามเหลี่ยมนี้ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน หรือรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ถ้าเป็นเรื่องที่สัมพันธ์กับปริมาตร ถ้าไม่ใช่เครื่องหมายบวกระหว่างตัวแปรสองตัวแปร เช่น $c^2 = a^2 - b^2$ หรือ $c^2 = a^2 \times b^2$ ถ้าไม่ใช่เครื่องหมายเท่ากับ เช่น $c^2 > a^2 + b^2$ หรือ $c^2 < a^2 + b^2$

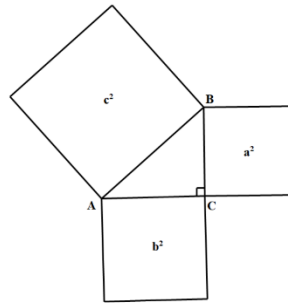
ขั้นตอนที่ 4 ถามคำถามหรือตั้งปัญหา เช่น มีรูปเรขาคณิตใดที่สอดคล้องกับ $c^2 > a^2 + b^2$ หรือ $c^2 < a^2 + b^2$

ขั้นตอนที่ 5 วิเคราะห์ปัญหาจากปัญหาที่ตั้งขึ้นในขั้นตอนที่ 4 เป็นการวิเคราะห์ความเป็นไปได้ของปัญหาว่าจะสามารถหาคำตอบได้หรือไม่ มีแนวทางหรือวิธีการใดที่จะทำให้ได้มาซึ่งคำตอบ เช่น จากปัญหาข้อดังกล่าวพบว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน เมื่อ $c^2 > a^2 + b^2$ และเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม เมื่อ $c^2 < a^2 + b^2$ แสดงดังรูปที่ 2.1 ต่อไปนี้



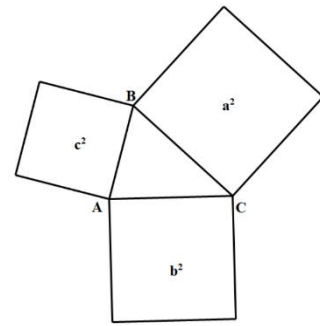
(ก) $\angle ACB > 90^\circ$ และ

$$c^2 > a^2 + b^2$$



(ข) $\angle ACB = 90^\circ$ และ

$$c^2 = a^2 + b^2$$



(ค) $\angle ACB < 90^\circ$ และ

$$c^2 < a^2 + b^2$$

รูปที่ 2.1 การวิเคราะห์ปัญหาจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

การฝึกตั้งปัญหาโดยใช้เทคนิคการเปลี่ยนเงื่อนไข นอกจากจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจในโมทัศน์ของเรื่องนั้น ๆ แล้วยังสามารถส่งเสริมความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ซึ่งจะนำไปสู่ข้อค้นพบ แนวคิด หรือ ทฤษฎีใหม่ สามารถต่อยอดทำเป็นโครงงานคณิตศาสตร์ต่อไปได้อีกด้วย

2.2 ความสามารถในการตั้งปัญหาให้สอดคล้องกับลักษณะของเงื่อนไขหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ประเภทนี้จะกำหนดเงื่อนไขหรือสถานการณ์ที่แตกต่างกันให้นักศึกษาครูแล้วพิจารณาผลจากการตั้งปัญหาด้วยเกณฑ์การประเมินที่ผู้วิจัยกำหนด การตั้งปัญหาตามลักษณะของสถานการณ์ที่กำหนดสามารถแบ่งเป็น 3 ลักษณะ ได้แก่ (1) การตั้งปัญหาแบบโครงสร้าง (structured problem) เป็นการตั้งปัญหาโดยการกำหนดสถานการณ์ปัญหาที่มีโครงสร้างให้หรือจากปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว (2) การตั้งปัญหาแบบกึ่งโครงสร้าง (semi-structured problem) เป็นการตั้งปัญหาโดยกำหนดสถานการณ์ปลายเปิดมาให้ เช่น การกำหนดรูปภาพ กราฟ ตาราง หรือสมการ แล้วให้ผู้เรียนตั้งปัญหา และ (3) การตั้งปัญหาแบบอิสระ (free problem) เป็นการตั้งปัญหาโดยกำหนดเรื่องหรือหัวข้อให้ผู้เรียนตั้งได้อย่างอิสระ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างจากงานวิจัยของ Silber และ Cai [12] ที่ได้ให้นักศึกษาครูตั้งปัญหาใน 2 ลักษณะ คือ การตั้งปัญหาแบบมีโครงสร้างและการตั้งปัญหาแบบอิสระ โดยใช้สถานการณ์ปัญหาเดียวกัน และเกณฑ์ในการประเมินผลการตั้งปัญหาโดยพิจารณาจากความซับซ้อนของปัญหา ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.3 การตั้งปัญหาให้สอดคล้องกับลักษณะของเงื่อนไขหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้**สถานการณ์ที่กำหนด**

“เจม อิน และอาร์ท ขับรถกลับบ้านจากการไปเที่ยว โดยอาร์ทขับระยะทางน้อยกว่าอิน 120 กิโลเมตร ส่วนอินขับเป็นระยะทาง 12 เท่าของเจม ซึ่งเจมขับได้ระยะทาง 50 กิโลเมตร ”
จงตั้งปัญหาจากข้อมูลที่กำหนดให้

จากตัวอย่าง กลุ่มที่ตั้งปัญหาแบบอิสระจะตั้งปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้เลยจำนวน 3 ข้อ ส่วนกลุ่มที่ตั้งปัญหาแบบมีโครงสร้างจะเพิ่มขึ้นตอนก่อนการตั้งปัญหา โดยให้ตั้งปัญหาที่มีผลลัพธ์เท่ากับ 1,130 กิโลเมตร ก่อน จากนั้นค่อยตั้งปัญหาอีก 2 ข้อ ซึ่ง 1,130 กิโลเมตร เกิดจากผลรวมของระยะทางทั้งหมดในการขับรถของทั้งสามคน การกำหนดผลลัพธ์ให้กับนักศึกษาครูได้ตั้งปัญหาในข้อนี้ เพื่อที่จะให้นักศึกษาครูได้คำนวณระยะทางของแต่ละคนแล้วใช้การดำเนินการเพื่อจะหาผลลัพธ์ให้ได้ตามที่กำหนด หลังจากนี้นักศึกษาครูหาระยะทางของแต่ละคนได้แล้วนักศึกษาครูก็จะสามารถตั้งปัญหาโดยใช้ข้อมูลของระยะทางการขับรถของแต่ละคนในการตั้งปัญหาต่อไปได้

เกณฑ์ในการประเมินผลการตั้งปัญหา พิจารณาจากความซับซ้อนของปัญหา หากจำนวนความสัมพันธ์ของปัญหามากแสดงว่าปัญหานั้นมีความซับซ้อนมาก โดยความสัมพันธ์ในปัญหาที่ตั้งขึ้น (semantic structural relation) พิจารณาได้ 4 ลักษณะ ได้แก่ ความสัมพันธ์แบบกลุ่ม (group) ความสัมพันธ์แบบเปรียบเทียบ (compare) ความสัมพันธ์แบบเพิ่มเติมข้อมูล (restate) และความสัมพันธ์แบบเปลี่ยนเงื่อนไข (vary) โดยมีรายละเอียดและตัวอย่างประกอบดังตารางที่ 2.1 และ 2.2

ตารางที่ 2.1 การพิจารณาความสัมพันธ์ของปัญหาที่ตั้งขึ้น

ความสัมพันธ์	คำอธิบาย	ตัวอย่างปัญหา
แบบไม่มีความสัมพันธ์	ถามโดยใช้ข้อมูลที่กำหนดให้	อินขับได้ระยะทางมากกว่าอาร์ทกี่กิโลเมตร
แบบกลุ่ม	รวมข้อมูลสองข้อมูลด้วยกัน	ระยะทางรวมของเจม อิน และอาร์ทเป็นเท่าไร
แบบเปรียบเทียบ	เปรียบเทียบข้อมูลสองข้อมูล	อาร์ทขับได้ระยะทางมากกว่าเจมกี่กิโลเมตร

ความสัมพันธ์	คำอธิบาย	ตัวอย่างปัญหา
แบบเพิ่มเติมข้อมูล	การเพิ่มข้อมูลที่ไม่ได้กำหนดให้	อินขับได้ระยะทางกี่กิโลเมตร
แบบเปลี่ยนเงื่อนไข	เปลี่ยนเงื่อนไขที่กำหนดให้	ถ้าเจม อิน และอาร์ท ต้องการขับรถใน ระยะทางที่เท่ากัน พวกเขาจะต้องขับ ด้วยระยะทางคนละกี่กิโลเมตร

ตารางที่ 2.2 การพิจารณาความซับซ้อนของปัญหาจากจำนวนความสัมพันธ์

จำนวนของ ความสัมพันธ์	ตัวอย่างปัญหา	คำอธิบาย
0	อินขับได้ระยะทางมากกว่าอาร์ท กี่กิโลเมตร (แบบไม่มีความสัมพันธ์)	ถามโดยใช้ข้อมูลที่กำหนดให้
1	อินขับได้ระยะทางกี่กิโลเมตร (แบบเพิ่มเติมข้อมูล)	ระยะทางของอินไม่ได้กำหนดไว้ใน โจทย์จะต้องหาโดยอาศัยข้อมูลของ ระยะทางของเจม
2	อินขับได้ระยะทางมากกว่าเจม กี่กิโลเมตร (แบบเปรียบเทียบ และแบบเพิ่มเติมข้อมูล)	หาระยะทางของอิน (แบบเพิ่มเติมข้อมูล) เปรียบเทียบกับระยะทางของเจม (แบบ เปรียบเทียบ)
3	ระยะทางรวมของเจม อินและอาร์ท เป็นเท่าไร (แบบกลุ่ม และแบบเพิ่มเติมข้อมูล)	หาระยะทางของอิน (แบบเพิ่มเติมข้อมูล) หาระยะทางของอาร์ท (แบบเพิ่มเติม ข้อมูล) หาระยะทางรวม (แบบกลุ่ม)
4	พวกเขาจะต้องเติมแก๊สกี่ครั้งถ้าพวก เขาต้องเติมแก๊สทุก 60 กิโลเมตร (แบบเปลี่ยนเงื่อนไข แบบกลุ่ม และแบบ เพิ่มเติมข้อมูล)	หาระยะทางของอิน (แบบเพิ่มเติมข้อมูล) หาระยะทางของอาร์ท (แบบเพิ่มเติม ข้อมูล) หาระยะทางรวม (แบบกลุ่ม) คำนวณการเติมแก๊สซึ่งมีเงื่อนไขที่ เปลี่ยนไป (แบบเปลี่ยนเงื่อนไข)

2.3 ความสามารถในการตั้งปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้

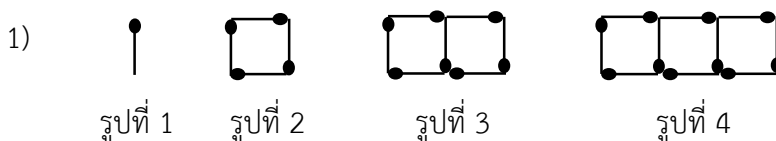
การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ประเภทนี้ มุ่งส่งเสริมให้ผู้เรียนแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยเลือกใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาให้เหมาะสม ยุทธวิธีในการแก้ปัญหานั้นมาใช้ในการวางแผน การแก้ปัญหา ทำให้สามารถดำเนินการแก้ปัญหาได้สำเร็จ ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา ประกอบด้วย การลองผิดลองถูก การวาดภาพ การสร้างแบบจำลอง การค้นหาแบบรูป การสร้างรายการ ตาราง และแผนภูมิ การทำงานย้อนกลับ การใช้ปัญหาที่คุ้นเคยและง่ายกว่า การใช้เหตุผลเชิงตรรกะ การแจกแจงที่เป็นไปได้ทั้งหมด การเปลี่ยนมุมมอง และการให้เหตุผลทางอ้อม จากงานวิจัยของ Kiliç [5] ได้ให้นักศึกษาครูได้ตั้งปัญหาที่สามารถแก้ด้วยยุทธวิธีการค้นหาแบบรูป ผู้เขียนขอนำเสนอ ตัวอย่าง สถานการณ์ที่กำหนด และผลการตั้งปัญหาของนักศึกษาครู ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.4 การตั้งปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้

สถานการณ์ที่กำหนด

จงตั้งปัญหาที่ใช้ยุทธวิธีการค้นหาแบบรูปในการแก้ปัญหา

ผลการตั้งปัญหา



จากรูปแสดงการต่อกันไม้ขีด โดยรูปที่ 1 มีก้านไม้ขีด จำนวน 1 ก้าน รูปที่ 2 มีก้านไม้ขีด จำนวน 4 ก้าน รูปที่ 3 มีก้านไม้ขีด จำนวน 7 ก้าน และ รูปที่ 4 มีก้านไม้ขีด จำนวน 10 ก้าน

ถ้าต่อแบบนี้ไปเรื่อย ๆ จงหาจำนวนก้านไม้ขีดที่ต่อกันในรูปที่ 40

2) ทหารคนหนึ่งประจำการที่ค่ายทหาร โดยอีก 57 วัน เขาจะได้กลับบ้าน ถ้าหากวันนี้เป็นวันอาทิตย์ อยากทราบว่าวันที่เขาจะได้กลับบ้านตรงกับวันใดในสัปดาห์

จากตัวอย่างที่ 2.4 ปัญหาในข้อที่ 1) เป็นปัญหาแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้น (growing pattern) โดยจำนวนก้านไม้ขีดจะเพิ่มขึ้นทีละ 3 ก้าน เท่า ๆ กัน ส่วนปัญหาในข้อที่ 2) เป็นปัญหาแบบรูปซ้ำ (repeating pattern) โดยทุก 7 วัน จะเวียนบรรจบมายังวันเดิม นั่นคือวันอาทิตย์ ปัญหาทั้งสองข้อที่นักศึกษาครูตั้งขึ้นจะต้องใช้ยุทธวิธีการค้นหาแบบรูปในการหาคำตอบ การตั้งปัญหาเรื่องแบบรูปทั้งสองลักษณะ จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้เข้าใจในมโนทัศน์เรื่องแบบรูปและฝึกการใช้ยุทธวิธีการค้นหาแบบรูปในการแก้ปัญหา

2.4 ความสามารถในการตั้งปัญหาแบบบูรณาการและเชื่อมโยงกับบริบทจริง

การตั้งปัญหาสำหรับผู้เรียนแบบบูรณาการและเชื่อมโยงกับบริบทจริง จะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย ผู้ตั้งปัญหาจะต้องเข้าใจถึงบริบทที่ใกล้ชิดกับผู้เรียน สิ่ง que ผู้เรียนพบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน หรือสิ่งที่อยู่ในความสนใจของผู้เรียน จากการศึกษางานวิจัย [9, 13] พบว่า การตั้งปัญหาของนักศึกษาครูมีอยู่ใน 2 ลักษณะ คือปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical modelling) ซึ่งจะนำไปสู่การแก้ปัญหาโดยใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไป และปัญหาที่นำบริบทจริงมาใช้เป็นเพียงสถานการณ์ในการตั้งปัญหาเท่านั้น ไม่ได้นำไปสู่กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่มาจากบริบทจริงที่ผู้เรียนสามารถพบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน ลักษณะของปัญหาจะมีความคลุมเครือ ข้อมูลที่กำหนดมาให้ไม่ชัดเจน จึงจำเป็นต้องใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการแก้ปัญหา เริ่มจากการทำความเข้าใจปัญหาในบริบทของชีวิตจริง เพื่อเชื่อมโยงข้อมูลที่มีอยู่มาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หาความสัมพันธ์และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากนั้นอนุมานผลลัพธ์ที่ได้ ตีความกลับไปยังบริบทของชีวิตจริง และทำการตรวจสอบผล ผู้เขียนขอยกตัวอย่างปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นักศึกษาครูตั้งขึ้นให้กับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น [13] ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.5 การตั้งปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

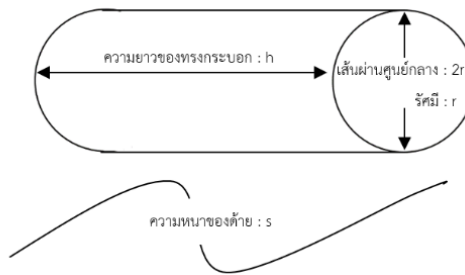
สถานการณ์ที่กำหนด

จงตั้งปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยสามารถเลือกเนื้อหาใดก็ได้

ผลการตั้งปัญหา

หลอดด้ายเป็นวัสดุสำคัญในอุตสาหกรรมสิ่งทอ จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงจำนวนชั้นของด้ายที่ใช้ในการพันหลอดด้ายเหล่านี้ จากชั้นในถึงชั้นนอกสุด และแก้ปัญหาจากแบบจำลองที่สร้างขึ้น





รูปที่ 2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

จากตัวอย่างที่ 2.5 นักเรียนต้องใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ซึ่งสามารถสร้างเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังรูปที่ 2.2 โดยที่ h แทนความยาวของทรงกระบอก r แทนรัศมี s แทนความหนาของด้าย และ n แทนจำนวนชั้นของด้ายที่ใช้ในการพันหลอด

ปัญหาในอีกลักษณะหนึ่งเป็นการนำบริบทจริงมาใช้ แต่ไม่ได้นำไปสู่กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ปัญหาลักษณะนี้ข้อมูลหรือเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มีความชัดเจน สามารถนำไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาได้ ผู้เขียนขอเสนอตัวอย่างเป็นปัญหาปลายเปิดที่ใช้ภาพถ่ายของรั้วมาเป็นบริบทของปัญหา [9] ปัญหาข้อนี้ นักศึกษาครูได้ตั้งขึ้นสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.6 การตั้งปัญหาแบบบูรณาการและเชื่อมโยงกับบริบทจริง

สถานการณ์กำหนด

จงตั้งปัญหาปลายเปิดจากภาพถ่ายที่กำหนดให้สำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา



ผลการตั้งปัญหา

- 1) จงเขียนแบบรูปของถุงมือที่สังเกตได้จากภาพที่กำหนดให้ พร้อมทั้งอธิบายประกอบ
- 2) เชือกที่เชื่อมระหว่างแผงกันรั้วโรงเรียนมีความยาวรวมทั้งหมด 300 เมตร หากต้องการนำเชือกดังกล่าวมาล้อมทำเป็นรั้วของสนามโรงเรียนสามารถล้อมสนามที่มีรูปร่างลักษณะใดได้บ้าง โดยวาดภาพประกอบ พร้อมทั้งระบุความยาวแต่ละด้าน และคำนวณหาความยาวรอบรูป

จากตัวอย่างที่ 2.6 จะเห็นความแตกต่างของปัญหาทั้งสองข้อที่สร้างขึ้น โดยปัญหาข้อที่ 1) เป็นปัญหาที่บริบทมีความสำคัญในการแก้ปัญหา นั่นคือ ข้อมูลที่อยู่ในภาพถ่ายจะต้องนำมาใช้ในการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องสังเกตถุงมือที่ติดอยู่กับรั้วที่มีสีต่างกันเพื่อให้ได้แบบรูป ส่วนปัญหาข้อที่ 2) เป็นปัญหาที่บริบทช่วยกระตุ้นความสนใจหรือทำให้นักเรียนเห็นภาพ แต่ไม่มีความสำคัญในการแก้ปัญหา โดยรั้วจากภาพนำมาเป็นบริบท แต่ไม่ได้ใช้ข้อมูลจากในภาพเพื่อแก้ปัญหา

2.5 ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับผู้เรียน

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ข้อเดียวกัน อาจจะไม่ใช่ปัญหาสำหรับผู้เรียนทุกคน เนื่องจากผู้เรียนบางคนอาจมีประสบการณ์เกี่ยวกับปัญหาที่กำหนดให้มาแล้ว จึงสามารถแก้ปัญหาได้ในทันที ดังนั้น การตั้งปัญหาจึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาถึงผู้แก้ปัญหาหรือผู้เรียนว่า ปัญหานั้นเหมาะสมกับผู้เรียนหรือไม่ จากการศึกษางานวิจัย [2 - 3 ,7] พบว่า มีการพิจารณาการตั้งปัญหาที่เหมาะสมกับผู้เรียนจากเกณฑ์การประเมินของผู้วิจัย จากผู้ตั้งปัญหา หรือจากผู้แก้ปัญหา

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับผู้เรียนในมุมมองของผู้ตั้งปัญหานั้น จะพิจารณาว่า ปัญหาที่ตั้งขึ้นนั้นเป็นปัญหาที่มีคุณค่า (worthwhile problems) สำหรับผู้แก้ปัญหาหรือไม่ ปัญหาที่มีคุณค่า [7] เป็นปัญหาที่ต้องใช้ขั้นตอนหลายขั้นตอนในการแก้ปัญหา หรือเป็นปัญหาที่มีคำตอบหลายคำตอบ หรือเป็นปัญหาที่มีการเพิ่มข้อมูลที่ให้มา แต่ไม่ได้นำมาใช้ในการแก้ปัญหา (extraneous information) เพื่อทดสอบว่าผู้เรียนเข้าใจปัญหาหรือไม่ และสามารถเลือกข้อมูลมาใช้ในการแก้ปัญหาได้หรือไม่ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างปัญหานั้นที่นักศึกษาครูตั้งขึ้นสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 – 4 ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.7 การตั้งปัญหาที่มีคุณค่า

สถานการณ์กำหนด

จงตั้งปัญหาที่มีคุณค่าให้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 – 4

ผลจากการตั้งปัญหา

1) โชคชัยเป็นเจ้าของฟาร์มแห่งหนึ่ง เขาเลี้ยงวัวและไก่ไว้จำนวนหนึ่ง เมื่อนับขาของวัวและไก่รวมกันได้ 30 ขา โดยเลี้ยงวัวและไก่อย่างน้อยชนิดละ 4 ตัว จงหาจำนวนวัวและไก่ที่โชคชัยเลี้ยงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

2) ชาญอายุ 11 ปี เป็นพี่ชายของบาส เขาจัดงานเลี้ยงฉลองวันเกิดครบรอบ 8 ปี ให้กับบาส โดยเป่าลูกโป่งเพื่อตกแต่งสถานที่จำนวน 22 ลูก แต่ลูกโป่งแตกไปครึ่งหนึ่ง อยากทราบว่าเหลือลูกโป่งกี่ลูก

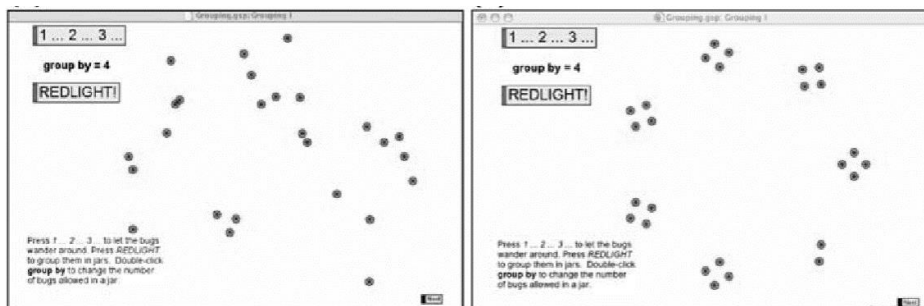
จากผลการตั้งปัญหา ในตัวอย่างที่ 2.7 พบว่า ปัญหาข้อที่ 1) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ขั้นตอนหลายขั้นตอนในการแก้ปัญหา นั่นคือขั้นตอนแรกจะต้องหาจำนวนขาของวัวและไก่ ซึ่งจากจำนวนวัวและไก่อย่างน้อยชนิดละ 4 ตัว จะสามารถหาจำนวนขาของวัว 4 ตัวได้ 16 ขา และขาของไก่ 4 ตัว ได้ 8 ขา จากนั้นในขั้นตอนต่อไปจะนำขาทั้งหมดที่นับรวมได้ของสัตว์ทั้งสองชนิดมาหักออกจาก 30 ขา ก็จะเหลือ 6 ขา เกิดขึ้นได้ 2 กรณี คือ กรณีที่ขาที่เหลือทั้งหมดเป็นขาของไก่ ซึ่งจะคิดเป็นไก่ 3 ตัว ทำให้ได้ว่า จะมีวัว 4 ตัว และไก่ 7 ตัว หรือกรณีที่ขาที่เหลือเป็นขาของวัวและของไก่ ซึ่งจะว่าเป็นขาของวัวได้ 4 ขา หรือคือวัว 1 ตัว และเป็นขาของไก่ได้ 2 ขา หรือคือไก่ 1 ตัว ทำให้ได้ว่า จะมีวัวและไก่อย่างละ 5 ตัว ส่วนปัญหาข้อที่ 2) เป็นปัญหาที่มีการเพิ่มข้อมูลที่ให้มา แต่ไม่ได้นำมาใช้ในการแก้ปัญหา คือ อายุของชาญและบาส แต่เพื่อเป็นการตรวจสอบว่าผู้เรียนเข้าใจในปัญหาและสามารถเลือกข้อมูลที่กำหนดให้มาใช้ในการแก้ปัญหาได้หรือไม่ นอกจากนี้ยังสามารถใช้วิธีในการแก้ปัญหาได้หลากหลายวิธี เช่น การวาดรูปลูกโป่ง จำนวน 22 ลูก แล้วขีดทับครึ่งหนึ่งแทนจำนวนลูกโป่งที่แตก ก็จะได้จำนวนลูกโป่งที่เหลือ การหาจำนวนครึ่งหนึ่งของ 22 การหาจำนวนที่เป็นสองเท่าของตัวมันเอง แล้วได้ผลลัพธ์เป็น 22 การแบ่งจำนวนโดยคิดว่าครึ่งหนึ่งของ 20 คือ 10 และครึ่งหนึ่งของ 2 คือ 1 แล้วนำทั้งสองจำนวนมารวมกัน นั่นคือ 10 มาบวกกับ 1

การตั้งปัญหาเปรียบเสมือนตั้งอาหาร นั่นคือ **ปัญหาที่ดีมีคุณค่า** เปรียบเสมือนกับอาหารที่มีคุณค่าทางโภชนาการ ดังตัวอย่างปัญหาที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น แต่ **ปัญหาน่าสนใจ** เปรียบเสมือนตั้งอาหารที่มีรสชาติอร่อย ซึ่งจะเป็นการมองปัญหาให้เหมาะสมกับผู้เรียนในมิติของความงาม หรือความน่าสนใจของปัญหา ผู้เขียนขอยกตัวอย่างการตั้งปัญหาที่พิจารณาถึงความน่าสนใจของปัญหา ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.8 การตั้งปัญหาที่น่าสนใจ

สถานการณ์ที่กำหนด

ให้สำรวจจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เมื่อแทนแมลง จำนวน 26 ตัว ด้วยจุด 26 จุด ดังภาพ (ก) สามารถกดปุ่มเพื่อเลือกจำนวนสมาชิกของแมลงในแต่ละกลุ่ม และกดปุ่ม REDLIGHT! แมลงก็จะจัดกลุ่มตามจำนวนที่เลือกดังภาพ (ข) จากนั้นตั้งปัญหาที่น่าสนใจ



(ก)

(ข)

ผลการตั้งปัญหา

- 1) ถ้านักเรียนเพิ่มหรือลดจำนวนสมาชิกในกลุ่มของแมลงแล้ว ผลที่ได้จะเป็นอย่างไร
- 2) นักเรียนสามารถจัดกลุ่มแมลงอย่างไรได้บ้าง เพื่อไม่ให้เหลือจำนวนแมลงเป็นจำนวนคี่

จากผลการตั้งปัญหา ในตัวอย่างที่ 2.8 พบว่า ปัญหาข้อที่ 1) เป็นปัญหาการเพิ่มหรือลดจำนวนสมาชิกในกลุ่มของการจัดกลุ่มแมลง ซึ่งการจัดกลุ่มที่มีจำนวนสมาชิกเป็น 1 2 13 หรือ 26 นั้นจะสามารถจัดกลุ่มได้พอดี แต่ถ้าจัดกลุ่มเป็นจำนวนอื่นจะมีแมลงเหลืออยู่ ปัญหาที่ตั้งขึ้นนี้เป็นปัญหาที่แปลกใหม่ (novelty) สามารถนำไปสู่ความเข้าใจในการหารลงตัว การหารไม่ลงตัว และการหาตัวประกอบได้ และอาจจะได้คำตอบที่ไม่คาดคิด จากการเพิ่มหรือลดจำนวนสมาชิกของการจัดกลุ่มแมลง ส่วนปัญหาข้อที่ 2) เป็นปัญหาการหาวิธีในการจัดกลุ่มแมลง เพื่อไม่ให้เหลือแมลงเป็นจำนวนคี่ ซึ่งเป็นปัญหาที่มีความน่าสนใจ เนื่องจากเป็นปัญหาที่นำไปสู่การทำความเข้าใจกับประเภทของจำนวน นั่นคือ จำนวนคู่ จำนวนคี่ ก่อนจึงจะสามารถแก้ปัญหานี้ได้

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่พิจารณาความเหมาะสมกับผู้เรียนว่าเป็นปัญหาที่ดีมีคุณค่าและน่าสนใจจากมุมมองของผู้ตั้งปัญหานั้น อาจจะไม่ตรงกับมุมมองของผู้แก้ปัญหานั้น มีงานวิจัยที่เปรียบเทียบมุมมองระหว่างนักเรียนกับนักศึกษาครูเกี่ยวกับความน่าสนใจของปัญหา [10] โดยนำปัญหาไปให้นักเรียนได้แก้และพิจารณาว่าปัญหาใดเป็นปัญหาที่ตนสนใจ แล้วนำมาเปรียบเทียบกับ

คำตอบของนักศึกษาครูที่พิจารณาปัญหาว่าปัญหาใดเป็นปัญหาที่นักเรียนสนใจ ผลการวิจัยพบว่า มีมุมมองที่แตกต่างกัน โดยนักศึกษาครูคิดว่าปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาที่นักเรียนสนใจ แต่ความเป็นจริงแล้วนักเรียนไม่ได้สนใจที่จะแก้ปัญหาลักษณะดังกล่าว ดังนั้นการตั้งปัญหาโดยให้ตรงกับผู้แก้ปัญหาก็จะทำให้ได้เรียนรู้ว่าปัญหานั้นมีความเหมาะสมกับผู้เรียนจริงหรือไม่ ซึ่ง Crespo [2] ได้ให้นักศึกษาครูตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยมีการเขียนจดหมายโต้ตอบกันระหว่างนักเรียนและนักศึกษาครู สิ่งที่พบในการตั้งปัญหาของนักศึกษาครูผ่านจดหมายฉบับแรก ๆ พบว่า นักศึกษาครูตั้งปัญหาใน 3 ลักษณะ ได้แก่ 1) การตั้งปัญหาให้ง่ายต่อการแก้ มีการแบ่งข้อคำถามย่อย ๆ เพื่อเป็นแนวทางในการหาคำตอบ 2) การตั้งปัญหาที่คุ้นเคยเหมือนกับแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน และ 3) การตั้งปัญหาที่ผู้ตั้งปัญหาไม่ได้ตรวจสอบคำตอบของปัญหา หลังจากมีการส่งจดหมายไปกลับหลายฉบับ ในจดหมายฉบับท้าย ๆ ได้เห็นการเปลี่ยนแปลงของการตั้งปัญหาของนักศึกษาครู โดยมีการตั้งปัญหาใน 3 ลักษณะ ได้แก่ 1) การตั้งปัญหาที่ไม่คุ้นเคย คือเป็นปัญหาหลายขั้นตอน หรือเป็นปัญหาปลายเปิด 2) การตั้งปัญหาที่ท้าทายและกระตุ้นการคิดของนักเรียน และ 3) การตั้งปัญหาเพื่อเรียนรู้วิธีการคิดของนักเรียน ผู้เขียนขอยกตัวอย่างปัญหาทั้ง 3 ลักษณะ ดังนี้

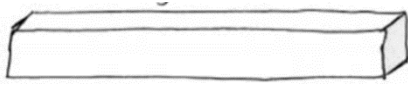
ตัวอย่างที่ 2.9 การตั้งปัญหาที่ไม่คุ้นเคย

กาลครั้งหนึ่งนานมาแล้ว มีราชินี 2 องค์ คือ เอลซ่า และอานนา โดย เอลซ่า ปกครองประเทศขนาดเล็ก แต่ร่ำรวย เธอจึงให้ออกแบบธงที่มีเส้นรอบรูปยาว 20 เมตร แต่ให้มีขนาดเล็กที่สุดเพื่อที่จะไม่ให้ประเทศอื่น ๆ รัับรู้ว่าประเทศของตนนั้นร่ำรวย ส่วน อานนา ปกครองประเทศขนาดใหญ่แต่ประเทศยากจน เธอจึงให้ออกแบบธงที่มีเส้นรอบรูปเท่ากับประเทศของเอลซ่า แต่ให้มีขนาดใหญ่ที่สุด เพื่อที่จะให้ประเทศอื่น ๆ รัับรู้ว่าประเทศของตนนั้นเป็นประเทศมหาอำนาจ จงหารูปร่างของธงทั้งสองประเทศ โดยมีเชือกยาว 20 เซนติเมตร ให้นักเรียนได้ทดลองออกแบบธงทั้งสองขนาด และติดเชือกดังกล่าวลงบนตารางกริด พร้อมทั้งอธิบายประกอบ

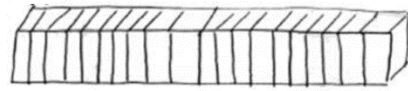
ตัวอย่างที่ 2.10 การตั้งปัญหาที่ท้าทายและกระตุ้นการคิดของนักเรียน

ขณะที่มาจากกระดาศบรรจุภัณฑ์ที่ใช้ในการห่อหุ้มสินค้าทำให้เกิดปัญหาสิ่งแวดล้อม ซึ่งหากบริษัทหรือโรงงานในการผลิตสินค้าสามารถที่จะลดปริมาณของการใช้กระดาศบรรจุภัณฑ์ แต่ยังคงสามารถบรรจุสินค้าที่มีปริมาณเท่าเดิมได้ ก็จะช่วยลดปัญหาสิ่งแวดล้อม โรงงานน้ำตาลแห่งหนึ่ง

ต้องการบรรจุน้ำตาลก้อนทรงลูกบาศก์จำนวน 20 ก้อนใน 1 กล่อง ดังรูป (ก) โดยน้ำตาลทั้ง 20 ก้อนได้มีการจัดเรียงเป็นแถวเดียวดังรูป (ข)



(ก)



(ข)

นักเรียนจะมีวิธีการจัดเรียงน้ำตาลก้อนอย่างไร เพื่อให้มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด โดยพื้นที่ผิวหาได้จากจำนวนหน้าของลูกบาศก์ที่มองเห็น เช่น น้ำตาล 1 ก้อน มีพื้นที่ผิวที่มองเห็น 6 หน้า นั่นคือการจัดเรียงในลักษณะใดจะทำให้มองเห็นหน้าได้จำนวนน้อยที่สุด พร้อมทั้งอธิบายว่าโจทย์นี้ยากหรือง่ายอย่างไร และคิดว่าควรทำอย่างไรให้โจทย์นี้ท้าทายมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 2.11 การตั้งปัญหาเพื่อเรียนรู้วิธีการคิดของนักเรียน

จิงโจ้ตัวหนึ่งยืนอยู่ข้างต้นไม้ต้องการกระโดดไปหากระต่ายซึ่งยืนอยู่ไม่ไกลจากจิงโจ้ แต่จิงโจ้สามารถกระโดดได้แต่ละครั้งเป็นระยะทางครึ่งหนึ่งของระยะทางของครึ่งก่อนหน้า อยากทราบตำแหน่งในการกระโดดของจิงโจ้ในครั้งที่ 1 ครั้งที่ 2 และครั้งที่ 7 และจิงโจ้สามารถไปถึงที่กระต่ายยืนอยู่ได้หรือไม่

- 1) นักเรียนคิดอย่างไรเมื่อได้อ่านปัญหานี้
- 2) นักเรียนทราบหรือไม่ว่าจะเริ่มต้นในการแก้ปัญหานี้อย่างไร และคิดหาวิธีการแก้ในทันทีหรือไม่
- 3) นักเรียนสามารถคิดในใจได้ทันที หรือมีการทดเพื่อแก้ปัญหานี้
- 4) นักเรียนได้เรียนรู้อะไรจากการแก้ปัญหานี้

ตัวอย่างที่ 2.9 เป็นตัวอย่างของการตั้งปัญหาที่ไม่คุ้นเคย เนื่องจากนักเรียนจะคุ้นเคยกับธงที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งปัญหาข้อนี้จะส่งเสริมให้นักเรียนได้พิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวรอบรูปกับพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ส่วนตัวอย่างที่ 2.10 เป็นตัวอย่างของการตั้งปัญหาที่ท้าทายและกระตุ้นการคิดของนักเรียน โดยจะต้องหาวิธีการจัดเรียงน้ำตาลก้อนทั้ง 20 ก้อนให้มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด และตัวอย่างที่ 2.11 เป็นการตั้งปัญหาเพื่อเรียนรู้วิธีการคิดของนักเรียนโดยมีคำถามต่อจากปัญหาที่นักศึกษาครูได้ตั้งให้กับนักเรียน โดยถามถึงวิธีการคิดเพื่อที่จะแก้ปัญหานี้ตลอดจนสิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้หลังจากที่แก้ปัญหานี้แล้ว

3. สรุป

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถหนึ่งที่มีความสำคัญและควรส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับนักศึกษาครู การตั้งปัญหาเป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้นักศึกษาครูสามารถที่จะสร้างสรรค์ปัญหาให้กับนักเรียนของตนเองในอนาคตต่อไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ การพัฒนาความสามารถในการตั้งปัญหาควรให้นักศึกษาครูได้มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับเทคนิคและยุทธวิธีในการตั้งปัญหา และมีโอกาสในการฝึกตั้งปัญหาตามเทคนิคและยุทธวิธีที่กำหนด ผ่านสถานการณ์หรือเงื่อนไขที่หลากหลาย ซึ่งจะช่วยให้นักศึกษาครูได้ประยุกต์ใช้เทคนิคและยุทธวิธีต่าง ๆ ตลอดจนสามารถมองเห็นแนวทางในการตั้งปัญหาของตนเองได้ นอกจากนี้ควรให้นักศึกษาครูได้ตระหนักถึงคุณค่าของปัญหาที่ตนเองตั้งขึ้น และสามารถตั้งปัญหาที่จะช่วยส่งเสริมการเรียนรู้ให้กับนักเรียนได้ อันได้แก่ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเจตคติที่ดีต่อรายวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เขียนได้ศึกษาและรวบรวมมาทั้ง 5 ประเภทนี้ ความสามารถแต่ละประเภทที่เกิดขึ้นนั้นเปรียบเสมือนความสำเร็จของการก้าวบันไดในแต่ละขั้น โดยเริ่มต้นก้าวแรกจากการฝึกฝนความสามารถในตัวของนักศึกษาครูด้วยเทคนิคและยุทธวิธีการตั้งปัญหาก่อนจนไปถึงปลายทางก้าวสุดท้ายที่เป็นความสามารถในการตั้งปัญหาที่เหมาะสม มีคุณค่าและน่าสนใจสำหรับตัวผู้เรียน ผู้อ่านสามารถนำไปเป็นแนวทางในการส่งเสริมและพัฒนา นักศึกษาครู ตลอดจนการฝึกอบรมครู ให้สามารถตั้งปัญหาที่ส่งเสริมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนต่อไปได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Brown, S. I., and Walter, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing*. Psychology Press.
- [2] Crespo, S. (2003). Learning to Pose Mathematical Problems: Exploring Changes in Preservice Teachers' Practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), p. 243 - 270.
- [3] Crespo, S., and Sinclair, N. (2008). What Makes A Problem Mathematically Interesting? Inviting Prospective Teachers to Pose Better Problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11 (5), p. 395 - 415.

- [4] Grundmeier, T. A. (2015). Developing The Problem-Posing Abilities of Prospective Elementary and Middle School Teachers. *Mathematical Problem Posing* (p. 411 - 431). Springer, New York.
- [5] Kılıç, Ç. (2017). A New Problem-Posing Approach Based on Problem-Solving Strategy: Analyzing Pre-service Primary School Teachers' Performance. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 17 (3), p. 771 – 789.
- [6] Lappan, G. (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. *Reston (Virginia): National Council for Teachers of Mathematics*. Houston.
- [7] Leavy, A., and Hourigan, M. (2020). Posing Mathematically Worthwhile Problems: Developing The Problem-Posing Skills of Prospective Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, p. 1 - 21.
- [8] Lee, Y., Capraro, R. M., and Capraro, M. M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13 (2), p. 75 - 90.
- [9] Nicol, C., and Bragg, L. (2009). Designing Problems: What Kinds of Open-Ended Problems Do Preservice Teachers Pose?. *Proceedings of 33rd Annual Meeting of The International Group for The Psychology of Mathematics Education* (p. 225 - 232). Thessaloniki, Greece.
- [10] Rellensmann, J., and Schukajlow, S. (2017). Does Students' Interest in A Mathematical Problem Depend on The Problem's Connection to Reality? An Analysis of Students' Interest and Pre-service Teachers' Judgments of Students' Interest in Problems With and Without A Connection to Reality. *ZDM – Mathematics Education*, 49 (3), p. 367 - 378.
- [11] Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For The Learning of Mathematics*, 14 (1), p. 19 - 28.

- [12] Silber, S., and Cai, J. (2017). Pre-service Teachers' Free and Structured Mathematical Problem Posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48 (2), p. 163 - 184.
- [13] Unver, S. K., Hidiroglu, C. N., Dede, A. T., and Guzel, E. B. (2018). Factors Revealed while Posing Mathematical Modelling Problems by Mathematics Student Teachers. *European Journal of Educational Research*, 7 (4), p. 941 - 952.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การกำกับเอตจ์-ออดเกรชฟูลของกราฟที่เกิดจากการลบจุดยอดบน กราฟโคมบ์

Edge-Odd Graceful Labeling of Graph Obtained from A Vertex Deletion on A Comb Graph

ศิวพร แซ่วัน^{1,*} และ จิตสุภา หนูศิริ²

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93210

²โรงเรียนบ้านหนองจูด กระบี่ 81120

Siwaporn Saewan^{1,*} and Jitsupa Hnusi²

¹Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Thaksin University,
Phatthalung 93210

²Bannongjud School, Krabi 81120

Email: ¹si_wa_pon@hotmail.com ²jesupa8@gmail.com

วันที่รับบทความ : 19 กรกฎาคม 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 22 ตุลาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 7 สิงหาคม 2564

บทคัดย่อ

การกำกับเอตจ์-ออดเกรชฟูลของกราฟ G ซึ่งมีเส้นเชื่อม q เส้น คือ ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง f จากเซตของเส้นเชื่อมของกราฟ G ไปยังเซต $\{1, 3, 5, \dots, 2q-1\}$ โดยที่จุดยอดแต่ละจุดกำกับด้วยผลรวมของการกำกับเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอดนั้น มอดุโล $2q$ และผลลัพธ์ของการกำกับจุดยอดต้องแตกต่างกัน ถ้ากราฟ G มีการกำกับเอตจ์-ออดเกรชฟูล f ของกราฟ G แล้วจะเรียก

* ผู้เขียนหลัก

กราฟ G ว่า กราฟเอตจ์-ออดเกรซฟูล ในงานวิจัยนี้จะแสดงว่า กราฟใหม่ที่ได้จากการลบจุดยอดเพนแดนต์ออก จำนวน 1 จุด บนกราฟโคมบ์ เป็นกราฟเอตจ์-ออดเกรซฟูล

คำสำคัญ: กราฟเอตจ์-ออดเกรซฟูล การลบจุดยอด กราฟโคมบ์

Abstract

An edge-odd graceful labeling of a graph G with q edges is a bijection f from the set of edges of the graph to the set $\{1, 3, 5, \dots, 2q-1\}$ such that each vertex is assigned the sum of labels of all edges incident to it modulo $2q$ and the resulting vertex labels must be distinct. A graph G is called an edge-odd graceful graph if it admits an edge-odd graceful labeling f . In this paper, we show that the new graphs obtained by deleting a pendant vertex of the comb graph are edge-odd graceful graphs.

Keywords: Edge-odd graceful graph, Vertex deletion, Comb graph

1. บทนำ

กราฟจำกัดเชิงเดียว $G=(V(G),E(G))$ ประกอบด้วยเซตจำกัดของจุดยอด $V(G)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ซึ่งเป็นเซตของคู่ไม่เป็นอันดับของสมาชิกที่แตกต่างกันใน $V(G)$ เพื่อความสะดวกจะเขียนแทนกราฟ $G=(V(G),E(G))$ ด้วยกราฟ G สำหรับจุดยอด u และ v เป็นจุดยอดในกราฟ G และเส้นเชื่อม e เชื่อมระหว่างจุดยอด u และจุดยอด v จะเขียนแทนด้วย $e=uv$ ถ้ากราฟ G มีจำนวนจุดยอด p จุด แล้วจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|V(G)|=p$ ถ้ากราฟ G มีจำนวนเส้นเชื่อม q เส้น แล้วจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|E(G)|=q$ ถ้าจุดยอด u และ v เป็นจุดยอดในกราฟ G และ $e=uv$ เป็นเส้นเชื่อมในกราฟ G แล้วจะกล่าวว่า

- 1) จุดยอด u ประชิด (adjacent) กับจุดยอด v
- 2) เส้นเชื่อม e กระทบ (incident) กับจุดยอด u (หรือจุดยอด v) และกล่าวว่า จุดยอด u (หรือจุดยอด v) กระทบกับเส้นเชื่อม e
- 3) เส้นเชื่อม e เชื่อมจุดยอด u และจุดยอด v
- 4) จุดยอด u และ v เป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อม e

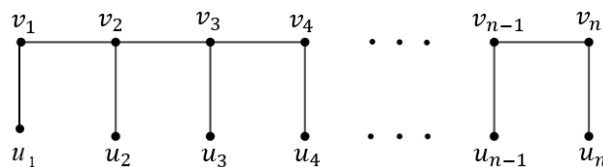
ดีกรี (degree) ของจุดยอด v ในกราฟ G คือจำนวนเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด v สำหรับจุดยอดที่มีดีกรี 1 จะเรียกว่า จุดยอดเพนแดนต์ (pendant vertex) เส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด

เพนแดนต์ เรียกว่า เส้นเชื่อมเพนแดนต์ (pendant edge) กำหนดให้ $u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = v$ เป็นจุดยอดของกราฟ G และ $v_k v_{k+1}$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ เป็นเส้นเชื่อมซึ่งเชื่อมจุดยอด v_k และจุดยอด v_{k+1} ในกราฟ G วิถี (path) จากจุดยอด v_0 และจุดยอด v_n ในกราฟ G คือ ลำดับจำกัดที่สลับกันของจุดยอดและเส้นเชื่อม $v_0, v_0 v_1, v_1, v_1 v_2, v_2, \dots, v_{n-1}, v_{n-1} v_n, v_n$ ซึ่งจุดยอดทุกจุดในลำดับต้องแตกต่างกัน

สำหรับจุดยอด u และ v ในกราฟ G ถ้าวิถีเริ่มต้นจากจุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v แล้วเขียนแทนวิถีด้วยสัญลักษณ์ วิถี $u-v$ ถ้ามีวิถี $u-v$ ในกราฟ G แล้วจะกล่าวว่า จุดยอด u เชื่อมโยง (connect) กับจุดยอด v หรือกล่าวว่า จุดยอด u และ จุดยอด v เชื่อมโยงกัน ถ้าจุดยอดสองจุดใด ๆ ในกราฟ G เชื่อมโยงกัน แล้วจะเรียกกราฟ G ว่า กราฟเชื่อมโยง (connected graph) วิถีปิดในกราฟ G คือวิถีที่มีจุดยอดเริ่มต้นและจุดยอดสิ้นสุดในวิถีเป็นจุดยอดเดียวกัน วงในกราฟ G (cycle in the graph G) คือวิถีปิดในกราฟ G

กราฟต้นไม้ (tree) คือกราฟเชื่อมโยงและไม่มีวงในกราฟ กราฟวิถี (path graph) คือกราฟเชื่อมโยงที่จุดยอดแต่ละจุดในกราฟมีดีกรีอย่างมากที่สุดคือ 2 กราฟวิถีที่มีจุดยอดจำนวน n จุด จะมีเส้นเชื่อมจำนวน $n-1$ เส้น เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P_n กราฟแบบบริบูรณ์ (complete graph) คือกราฟที่จุดยอดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกันในกราฟเป็นจุดยอดประชิดกัน เขียนแทนกราฟแบบบริบูรณ์ที่มีจุดยอด n จุดด้วยสัญลักษณ์ K_n กราฟโคมบ์ (comb graph) คือกราฟที่สร้างโดยการเชื่อมแต่ละจุดยอดของกราฟวิถี P_n ด้วยเส้นเชื่อมเพนแดนต์ เขียนแทนกราฟโคมบ์ด้วยสัญลักษณ์ $P_n \odot K_1$ ดังนั้นกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ เป็นกราฟต้นไม้

ให้ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ เป็นจุดยอดที่เรียงลำดับกันของกราฟวิถี P_n และ $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ เป็นจุดยอดซึ่งเชื่อมกับจุดยอด $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ตามลำดับ กราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ แสดงดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 กราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$

สำหรับจุดยอด u ในกราฟ G กราฟ $G-u$ หมายถึงกราฟ G ที่ลบจุดยอด u และลบเส้นเชื่อมทั้งหมดซึ่งกระทบกับจุดยอด u

สำหรับกราฟเชื่อมโยง G ที่มีเส้นเชื่อมจำนวน q เส้น การกำกับ (labeling) บนกราฟ G คือ การกำหนดชื่อให้จุดยอด หรือเส้นเชื่อม หรือทั้งจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟ G ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด Rosa [8] ได้นำเสนอแนวคิดการกำกับกราฟเรียกว่า การกำกับ $-\beta$ (β – labeling) ต่อมา Golomb [5] ได้เรียกการกำกับดังกล่าวว่า การกำกับเกรชฟูล (graceful labeling) โดยกำกับจุดยอดในกราฟ G ด้วยจำนวนเต็มที่แตกต่างกันภายใน $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ และกำกับเส้นเชื่อมในกราฟ G ด้วยจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันใน $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ ซึ่งการกำกับเส้นเชื่อมแต่ละเส้น คือค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของการกำกับจุดยอดซึ่งเป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อมนั้น มีนักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาการกำกับเกรชฟูลของกราฟ G เช่น Cattell [3] ศึกษาการกำกับเกรชฟูลบนกราฟซึ่งสร้างขึ้นใหม่ และหาการกำกับเกรชฟูลในรูปแบบทั่วไปสำหรับกราฟวิถี P_n Kaneria และ คณะ [6] ได้ศึกษาการกำกับเกรชฟูลบนกราฟใหม่ที่ได้จากการดำเนินการบนกราฟวง (cycle graph) และการดำเนินการบนกราฟสองส่วนบริบูรณ์ (complete bipartite graph) Boxwala และ Vashishta [2] ศึกษาการกำกับเกรชฟูลบนกราฟใหม่โดยกราฟใหม่สร้างจากการดำเนินการบนกราฟวง Koh และคณะ [7] ศึกษาการกำกับเกรชฟูลบนกราฟใหม่ที่ได้จากการเชื่อมกราฟแบบบริบูรณ์ กราฟว่าง และกราฟวง ศิวพร และคณะ [1] ได้ศึกษาการกำกับเกรชฟูลในบริบทการทำซ้ำสมาชิกของกราฟวิถี และใน ค.ศ. 2009 Solairaju และ Chithra [12] ได้นำเสนอแนวคิดการกำกับกราฟแบบใหม่เรียกว่า การกำกับเอดจ์-ออดเกรชฟูล (edge-odd graceful labeling) ดังนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้กราฟ G มีเส้นเชื่อม $q > 0$ เส้น ถ้ามีฟังก์ชันกำกับเส้นเชื่อมซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $f : E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q-1\}$ และฟังก์ชันกำกับจุดยอด

$$f^+ : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q-1\} \text{ ซึ่งกำหนดโดย}$$

$$f^+(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \pmod{2q}$$

สำหรับจุดยอด u ทุกจุดซึ่งประชิดกับจุดยอด v ในกราฟ G และผลลัพธ์ของการกำกับจุดยอดต้องแตกต่างกัน แล้วเรียก f ว่าการกำกับเอดจ์-ออดเกรชฟูลของกราฟ G และเรียกกราฟ G พร้อมด้วยการกำกับเอดจ์-ออดเกรชฟูล f ว่ากราฟเอดจ์-ออดเกรชฟูล (edge-odd graceful graph)

Solairaju และ Chithra [12] ได้แสดงว่ากราฟต้นไม้ฮอฟแมน (hoffman tree) หรือกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ กราฟไบสตาร์ (bistar) $B_{n,n}$ กราฟ n -ไบสตาร์ (n -bistar) $\langle K_{1,n} : 2 \rangle$ มีการกำกับเอดจ์-ออดเกรชฟูล มีนักวิจัยทางทฤษฎีกราฟหลายท่านได้ศึกษาการกำกับเอดจ์-ออดเกรชฟูลของกราฟ เช่น

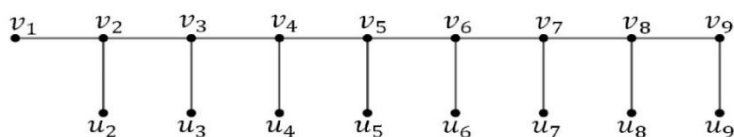
Singhun [10] ได้แสดงว่ากราฟวงล้อ W_{n+1} เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ มีการกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูล Tirasuwanwasee [14] ได้แสดงว่ากราฟคล้ายปริซึมมีการกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูล Seoud และ Salim [9] ได้แสดงว่ากราฟวงล้อ W_n เมื่อ $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ มีการกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูล Daoud [4] ได้แสดงว่ากราฟเฟรนด์ชิป (friendship graph) กราฟเฮล์ม (helm graph) กราฟเว็บ (web graph) กราฟดับเบิลแฟน (double fan) มีการกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูล Solairaju และคณะ [11] ได้แสดงว่ากราฟ $P_m + P_n$ เมื่อ $m = 2, 3, 4, 5, 6$ มีการกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูล Tamilarasan และคณะ [13] ได้แสดงว่ากราฟดัตช์วินด์มิลล์ (dutch windmill) D_5^m และ D_4^m และกราฟเชอคิวลาร์แลดเดอร์ (circular ladder) CL_n มีการกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูล

สำหรับในงานวิจัยนี้จะสร้างกราฟใหม่ด้วยการดำเนินการทางทฤษฎีกราฟด้วยการลบจุดยอด เพนแดนต์ออก จำนวน 1 จุด บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ ซึ่งกราฟใหม่ประกอบด้วย 1) การลบจุดยอด เพนแดนต์ u_1 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ จะได้กราฟใหม่ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ 2) การลบจุดยอด เพนแดนต์ u_2 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ จะได้กราฟใหม่ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ หลังจากนั้นหา การกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูลในรูปแบบทั่วไปของกราฟใหม่ พร้อมพิสูจน์ว่าการกำกับที่ได้เป็น การกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูลของกราฟใหม่

2. การกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูล

จากการศึกษาวิธีดำเนินการทางทฤษฎีกราฟเพื่อสร้างกราฟใหม่ โดยการลบจุดยอดเพนแดนต์ออก จำนวน 1 จุด บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ และหาการกำกับเอดจ์-ออกเกรซฟูลสำหรับกราฟใหม่ ทำให้ ได้ทฤษฎีบทใหม่ 2 ทฤษฎีบท

ทฤษฎีบทแรกจะแสดงว่ากราฟใหม่ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ ที่สร้างจากการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_1 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ เป็นกราฟเอดจ์-ออกเกรซฟูล ตัวอย่างกราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_1$ แสดงดัง รูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 กราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_1$

ทฤษฎีบท 2.1 กราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ เป็นกราฟเอดจ์-ออกเกรซฟูล

บทพิสูจน์ ให้ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ เป็นจุดยอดที่เรียงลำดับกันของกราฟวิถี P_n และ $u_2, u_3, u_4, \dots, u_n$ เป็นจุดยอดเพนแดนต์ที่เชื่อมกับจุดยอด $v_2, v_3, v_4, \dots, v_n$ ตามลำดับ

จะได้ว่าจำนวนจุดยอดของกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ คือ $|V(G)| = 2n-1$ และจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ G คือ $q = |E(G)| = 2n-2$

กำหนดการกำกับ $f : E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q-1=4n-5\}$ ดังนี้

$$f(u_i v_i) = 2i-3 \quad \text{สำหรับ } i = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 4n-2i-3 \quad \text{สำหรับ } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กรณี 1 สมมติให้ $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n$ และ $j = 2, 3, 4, \dots, n$

จะได้ว่า $2i-3 = 2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_i v_i = u_j v_j$

กรณี 2 สมมติให้ $f(v_i v_{i+1}) = f(v_j v_{j+1})$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$

จะได้ว่า $4n-2i-3 = 4n-2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$

กรณี 3 สมมติให้ $f(u_i v_i) = f(v_j v_{j+1})$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$

จะได้ว่า $2i-3 = 4n-2j-3$ ดังนั้น $i+j = 2n$

แต่เนื่องจาก $i \leq n$ และ $j \leq n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ $f(u_i v_i) \neq f(v_j v_{j+1})$ หรือการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_i v_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_j v_{j+1} \mid j = 1, 2, 3, \dots, n-1\}$

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจากกราฟ G มีจำนวนเส้นเชื่อม $2n-2$ เส้น และจำนวนเต็มบวกที่กำกับให้กับเส้นเชื่อมมี $2n-2$ จำนวน และจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จากการกำหนดการกำกับ f จะได้การกำกับ $f^+ : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q-1=4n-5\}$ ดังนี้

$$f^+(u_i) = f(u_i v_i) \pmod{4n-4} = (2i-3) \pmod{4n-4} = 2i-3 \quad \text{สำหรับ } i = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$f^+(v_1) = f(v_1 v_2) \pmod{4n-4} = (4n-2(1)-3) \pmod{4n-4} = 4n-5$$

$$\begin{aligned} f^+(v_i) &= (f(v_{i-1} v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(u_i v_i)) \pmod{4n-4} \\ &= ((4n-2(i-1)-3) + (4n-2i-3) + (2i-3)) \pmod{4n-4} \end{aligned}$$

$$= 4n - 2i - 3 \text{ สำหรับ } i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} f^+(v_n) &= (f(u_n v_n) + f(v_{n-1} v_n)) \pmod{4n-4} \\ &= ((2n-3) + (4n-2(n-1)-3)) \pmod{4n-4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \{f^+(u_i) \mid i = 2, 3, 4, \dots, n\} &= \{2i-3 \mid i = 2, 3, 4, \dots, n\} = \{1, 3, 5, \dots, 2n-3\} \\ \{f^+(v_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n-1\} &= \{4n-2i-3 \mid i = 1, 2, 3, \dots, n-1\} \\ &= \{4n-5, 4n-7, 4n-9, \dots, 2n+3, 2n+1, 2n-1\} \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่าการกำกับ f^+ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนี้

กรณี 1 สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(u_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n$ และ $j = 2, 3, 4, \dots, n$

จะได้ว่า $2i-3 = 2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_i = u_j$

กรณี 2 สมมติให้ $f^+(v_i) = f^+(v_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ และ $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$

จะได้ว่า $4n-2i-3 = 4n-2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $v_i = v_j$

กรณี 3 สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(v_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n$ และ $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$

จะได้ว่า $2i-3 = 4n-2j-3$ ดังนั้น $i+j = 2n$

แต่เนื่องจาก $i \leq n$ และ $j \leq n-1$ ทำให้ได้ว่า $2n = i+j \leq 2n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i) \neq f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$

กรณี 4 สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(v_n)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n$

จะได้ว่า $2i-3 = 0$ ดังนั้น $i = \frac{3}{2}$ เกิดข้อขัดแย้งกับการกำหนด $i = 2, 3, 4, \dots, n$

ดังนั้น $f^+(u_i) \neq f^+(v_n)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ บน $\{v_n\}$

กรณี 5 สมมติให้ $f^+(v_i) = f^+(v_n)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$

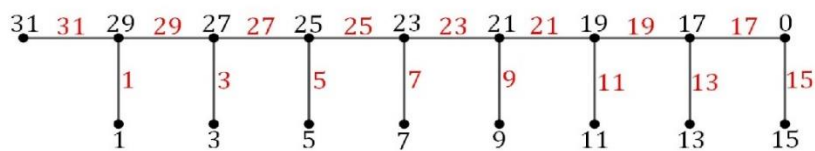
จะได้ว่า $4n-2i-3 = 0$ ดังนั้น $2n - \frac{3}{2} = i$ เกิดข้อขัดแย้งเนื่องจาก $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$

ดังนั้น $f^+(v_i) \neq f^+(v_n)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ บน $\{v_n\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 4 และ กรณี 5 สามารถแสดงได้ว่าการกำกับ f^+ บน $\{v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$ และการกำกับ f^+ บน $\{v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i = 2, 3, 4, \dots, n\}$

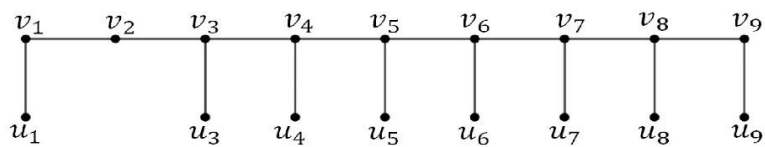
เพราะฉะนั้นการกำกับจุดยอด f^+ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทำให้ได้ว่าการกำกับจุดยอดแตกต่างกัน ดังนั้นการกำกับ f เป็นการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ นั่นคือ กราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_1$ เป็นกราฟกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล $\square$

ตัวอย่าง 2.1 การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลของกราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_1$ โดยใช้การกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล ตามทฤษฎีบท 2.1 แสดงดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 กราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_1$ พร้อมการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูล

ทฤษฎีบทถัดไปจะแสดงว่ากราฟใหม่ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ ซึ่งสร้างจากการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_2 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ เป็นกราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล ตัวอย่างกราฟซึ่งสร้างจากการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_2 บนกราฟโคมบ์ $P_9 \odot K_1$ แสดงดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 กราฟ $P_9 \odot K_1 - u_2$

พบว่าการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลในทฤษฎีบทที่ 2.1 ไม่สามารถใช้กับกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ ได้ ดังนั้นเราต้องหาการกำกับเอดจ์-ออดเกรซฟูลสำหรับ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ ใหม่ซึ่งเป็นดังทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 2.2 กราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ เป็นกราฟเอดจ์-ออดเกรซฟูล

บทพิสูจน์ ให้ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ เป็นจุดยอดที่เรียงลำดับกันของกราฟวิถี P_n และ $u_1, u_3, u_4, u_5, \dots, u_n$ เป็นจุดยอดเพนแดนต์ที่ประชิดกับ $v_1, v_3, v_4, v_5, \dots, v_n$ ตามลำดับ

จะได้จำนวนจุดยอดของกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ คือ $|V(G)| = 2n - 1$ และจำนวนเส้นเชื่อม คือ $q = |E(G)| = 2n - 2$

กำหนดการกำกับ $f : E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1 = 4n - 5\}$ ดังนี้

$$f(v_1v_2) = 1$$

$$f(u_1v_1) = 2n + 1$$

กรณี n เป็นจำนวนคู่

$$f(u_nv_n) = 4n - 5$$

$$f(u_iv_i) = 2n + 2i - 3 \quad \text{สำหรับ } i = 4, 6, 8, \dots, n - 2$$

$$f(u_iv_i) = 2n + 2i - 7 \quad \text{สำหรับ } i = 3, 5, 7, \dots, n - 1$$

$$f(v_iv_{i+1}) = 2n - 2i + 1 \quad \text{สำหรับ } i = 2, 3, 4, \dots, n - 1$$

กรณี n เป็นจำนวนคี่

$$f(u_nv_n) = 4n - 7$$

$$f(u_iv_i) = 2n + 2i - 3 \quad \text{สำหรับ } i = 4, 6, 8, \dots, n - 1$$

$$f(u_iv_i) = 2n + 2i - 7 \quad \text{สำหรับ } i = 3, 5, 7, \dots, n - 2$$

$$f(v_iv_{i+1}) = 2n - 2i + 1 \quad \text{สำหรับ } i = 2, 3, 4, \dots, n - 1$$

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนี้

กรณี 1 สมมติให้ $f(v_iv_{i+1}) = f(v_jv_{j+1})$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n - 1$ และ $j = 2, 3, 4, \dots, n - 1$

จะได้ว่า $2n - 2i + 1 = 2n - 2j + 1$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $v_iv_{i+1} = v_jv_{j+1}$

กรณี 2 สมมติให้ $f(u_iv_i) = f(u_jv_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n - 1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n - 1$

จะได้ว่า $2n + 2i - 3 = 2n + 2j - 3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_iv_i = u_jv_j$

กรณี 3 สมมติให้ $f(u_iv_i) = f(u_jv_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n - 1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n - 1$

จะได้ว่า $2n + 2i - 7 = 2n + 2j - 7$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_iv_i = u_jv_j$

กรณี 4 สมมติให้ $f(u_iv_i) = f(u_jv_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n - 1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n - 1$

จะได้ว่า $2n + 2i - 3 = 2n + 2j - 7$ ดังนั้น $j - i = 2$

เนื่องจาก i เป็นจำนวนคู่ และ j เป็นจำนวนคี่ จึงเป็นไปได้ว่า $j-i=2$

นั่นคือ $f(u_i v_i) \neq f(u_j v_j)$ หรือการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_i v_i \mid 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกัน สำหรับ i เป็นจำนวนคู่ และ i เป็นจำนวนคี่

กรณี 5 สมมติให้ $f(v_i v_{i+1}) = f(u_j v_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

ดังนั้น $2n-2i+1=2n+2j-7$ ทำให้ได้ว่า $j+i=4$ แต่เนื่องจาก $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ และ $j = 3, 5, 7, \dots, n-2$ ทำให้ได้ว่า $j+i > 4$ เกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ $f(v_i v_{i+1}) \neq f(u_j v_j)$ หรือการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_i v_{i+1} \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_j v_j \mid j \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq j \leq n-1\}$

กรณี 6 สมมติให้ $f(v_i v_{i+1}) = f(u_j v_j)$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-2$

จะได้ว่า $2n-2i+1=2n+2j-3$ ดังนั้น $j+i=2$ แต่เนื่องจาก $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ และ $j = 4, 6, 8, \dots, n-2$ จะได้ว่า $j+i > 2$ เกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ $f(v_i v_{i+1}) \neq f(u_j v_j)$ หรือการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_i v_{i+1} \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_j v_j \mid j \text{ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง } 3 \leq j \leq n-1\}$

กรณี 7 สมมติให้ $f(v_1 v_2) = f(v_i v_{i+1})$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$

จะได้ว่า $1=2n-2i+1$ ดังนั้น $0=2n-2i$ หรือ $2n=2i$

แต่เนื่องจาก $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ $f(v_1 v_2) \neq f(v_i v_{i+1})$ เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ หรือการกำกับ f บน $\{v_1 v_2\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_i v_{i+1} \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 7 สามารถแสดงได้ว่า การกำกับ f บน $\{u_1 v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_i v_{i+1} \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$ การกำกับ f บน $\{u_n v_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_i v_{i+1} \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$ และการกำกับ f บน $\{u_n v_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{v_i v_{i+1} \mid i = 2, 3, 4, \dots, n-1\}$

กรณี 8 สมมติให้ $f(v_1 v_2) = f(u_i v_i)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$

จะได้ว่า $1=2n+2i-3$ ดังนั้น $2=n+i$ แต่เนื่องจาก $3 \leq i \leq n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ $f(v_1v_2) \neq f(u_iv_i)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ หรือการกำกับ f บน $\{v_1v_2\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_iv_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 8 สามารถแสดงได้ว่า การกำกับ f บน $\{u_1v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_iv_i \mid i = 4, 6, 8, \dots, n-2\}$ การกำกับ f บน $\{u_nv_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_iv_i \mid i = 4, 6, 8, \dots, n-2\}$ และ การกำกับ f บน $\{u_nv_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ แตกต่างกับการกำกับ f ทั้งหมดบน $\{u_iv_i \mid i = 4, 6, 8, \dots, n-2\}$

จาก $f(v_1v_2)=1$ $f(u_1v_1)=2n+1$ $f(u_nv_n)=4n-5$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ และ $f(u_nv_n)=4n-7$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ จะเห็นว่าการกำกับ f แตกต่างกันทั้งหมดบนเซต $\{v_1v_2, u_1v_1, u_nv_n\}$

เพราะฉะนั้นการกำกับ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจากกราฟ G มีเส้นเชื่อมจำนวน $2n-2$ เส้น และจำนวนเต็มบวกที่กำกับให้กับเส้นเชื่อมมี $2n-2$ จำนวน และจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จากการกำหนดการกำกับ f จะได้การกำกับ $f^+ : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q-1=4n-5\}$ ดังนี้

$$f^+(u_1) = f(u_1v_1) \pmod{4n-4} = 2n+1$$

$$f^+(v_1) = (f(u_1v_1) + f(v_1v_2)) \pmod{4n-4} = ((2n+1)+1) \pmod{4n-4} = 2n+2$$

$$f^+(v_2) = (f(v_1v_2) + f(v_2v_3)) \pmod{4n-4} = (1+(2n-3)) \pmod{4n-4} = 2n-2$$

สำหรับ n เป็นจำนวนคี่ จะได้

$$f^+(u_n) = f(u_nv_n) \pmod{4n-4} = 4n-7$$

$$f^+(v_n) = (f(v_{n-1}v_n) + f(u_nv_n)) \pmod{4n-4} = (3+(4n-7)) \pmod{4n-4} = 0$$

สำหรับ n เป็นจำนวนคู่ จะได้

$$f^+(u_n) = f(u_nv_n) \pmod{4n-4} = 4n-5$$

$$f^+(v_n) = (f(v_{n-1}v_n) + f(u_nv_n)) \pmod{4n-4} = (3+(4n-5)) \pmod{4n-4} = 2$$

สำหรับ $3 \leq i \leq n-1$ จะได้

เมื่อ i เป็นจำนวนคู่

$$f^+(u_i) = f(u_iv_i) \pmod{4n-4} = 2n+2i-3$$

$$\begin{aligned}
f^+(v_i) &= (f(v_{i-1}v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(u_iv_i)) \pmod{4n-4} \\
&= ((2n+2(i-1)+1) + (2n+2i+1) + (2n+2i-3)) \pmod{4n-4} \\
&= 2n-2i+5
\end{aligned}$$

เมื่อ i เป็นจำนวนคี่

$$\begin{aligned}
f^+(u_i) &= f(u_iv_i) \pmod{4n-4} = 2n+2i-7 \\
f^+(v_i) &= (f(v_{i-1}v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(u_nv_n)) \pmod{4n-4} \\
&= ((2n-2(i-1)+1) + (2n-2i+1) + (2n+2i-7)) \pmod{4n-4} \\
&= 2n-2i+1
\end{aligned}$$

จากการกำกับจุดยอด f^+ จะได้ว่า

เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

$$\begin{aligned}
\{f^+(u_i) \mid i = 4, 6, 8, \dots, n-1\} &= \{2n+5, 2n+9, 2n+13, \dots, 4n-9, 4n-5\} \\
\{f^+(v_i) \mid i = 4, 6, 8, \dots, n-1\} &= \{2n-3, 2n-7, 2n-11, \dots, 11, 7\} \\
\{f^+(u_i) \mid i = 3, 5, 7, \dots, n-2\} &= \{2n-1, 2n+3, 2n+7, \dots, 4n-15, 4n-11\} \\
\{f^+(v_i) \mid i = 3, 5, 7, \dots, n-2\} &= \{2n-5, 2n-9, 2n-13, \dots, 9, 5\}
\end{aligned}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

$$\begin{aligned}
\{f^+(u_i) \mid i = 4, 6, 8, \dots, n-2\} &= \{2n+5, 2n+9, 2n+13, \dots, 4n-11, 4n-7\} \\
\{f^+(v_i) \mid i = 4, 6, 8, \dots, n-2\} &= \{2n-3, 2n-7, 2n-11, \dots, 13, 9\} \\
\{f^+(u_i) \mid i = 3, 5, 7, \dots, n-1\} &= \{2n-1, 2n+3, 2n+7, \dots, 4n-13, 4n-9\} \\
\{f^+(v_i) \mid i = 3, 5, 7, \dots, n-1\} &= \{2n-5, 2n-9, 2n-13, \dots, 7, 3\}
\end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่าการกำกับ f^+ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กรณี 1 สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(u_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3 = 2n+2j-3$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_i = u_j$

กรณี 2 สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(u_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-7 = 2n+2j-7$ ดังนั้น $i = j$ นั่นคือ $u_i = u_j$

กรณี 3 สมมติให้ $f^+(v_i) = f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n-2i+5=2n-2j+5$ ดังนั้น $i=j$ นั่นคือ $v_i=v_j$

กรณี 4 สมมติให้ $f^+(v_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n-2i+1=2n-2j+1$ ดังนั้น $i=j$ นั่นคือ $v_i=v_j$

กรณี 5 สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(u_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3=2n+2j-7$ ดังนั้น $j-i=2$

แต่เนื่องจาก i เป็นจำนวนคู่ และ j เป็นจำนวนคี่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i) \neq f^+(u_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_j \mid j \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq j \leq n-1\}$

กรณี 6 สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3=2n-2j+5$ ดังนั้น $i+j=4$

แต่เนื่องจาก $4 \leq i$ และ $4 \leq j$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i) \neq f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j \text{ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง } 3 \leq j \leq n-1\}$

กรณี 7 สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-3=2n-2j+1$ ดังนั้น $i+j=2$

แต่เนื่องจาก i เป็นจำนวนคู่ และ j เป็นจำนวนคี่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i) \neq f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq j \leq n-1\}$

กรณี 8 สมมติให้ $f^+(u_i)=f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-7=2n-2j+5$ ดังนั้น $i+j=6$

เนื่องจาก i เป็นจำนวนคี่ และ j เป็นจำนวนคู่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i) \neq f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j \text{ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง } 3 \leq j \leq n-1\}$

กรณี 9 สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+2i-7 = 2n-2j+1$ ดังนั้น $i+j=4$

แต่เนื่องจาก $i \geq 3$ และ $j \geq 3$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i) \neq f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$

แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq j \leq n-1\}$

กรณี 10 สมมติให้ $f^+(v_i) = f^+(v_j)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$ และ j เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq j \leq n-1$

จะได้ว่า $2n-2i+5 = 2n-2j+1$ ดังนั้น $i-j=2$

แต่เนื่องจาก i เป็นจำนวนคี่ และ j เป็นจำนวนคี่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(v_i) \neq f^+(v_j)$ นั่นคือการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$

แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_j \mid j \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq j \leq n-1\}$

กรณี 11 สมมติให้ $f^+(u_i) = f^+(v_i)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+1 = 2n-2i+5$ ดังนั้น $1 = 5-2i$

เนื่องจาก $3 \leq i \leq n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^+(u_i) \neq f^+(v_i)$ นั่นคือการกำกับ f^+ บน $\{v_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 11 สามารถแสดงได้ว่า การกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$ และการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{v_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_1, u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$

กรณี 12 สมมติให้ $f^+(u_1) = f^+(u_i)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $3 \leq i \leq n-1$

จะได้ว่า $2n+1 = 2n+2i-3$ ดังนั้น $4 = 2i$

แต่เนื่องจาก $3 \leq i \leq n-1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

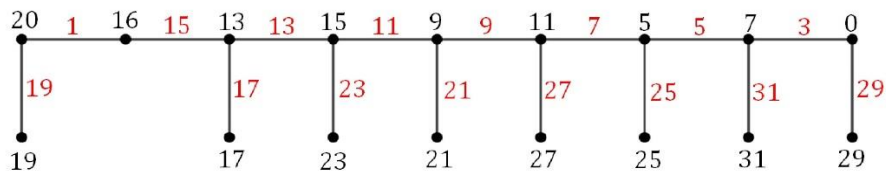
ดังนั้น $f^+(u_1) \neq f^+(u_i)$ นั่นคือการกำกับ f^+ บน $\{u_1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$

ในทำนองเดียวกับกรณี 12 สามารถแสดงได้ว่า การกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$ และการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_i \mid i \text{ เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง } 3 \leq i \leq n-1\}$ แตกต่างกับการกำกับ f^+ ทั้งหมดบน $\{u_1, u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$

เนื่องจาก เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ $f^+(u_1)=2n+1$ $f^+(v_1)=2n+2$ $f^+(v_2)=2n-2$
 $f^+(u_n)=4n-7$ $f^+(v_n)=0$ และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ $f^+(u_n)=4n-5$ $f^+(v_n)=2$
 จะเห็นว่าการกำกับ f^+ แตกต่างกันทั้งหมดบนเซต $\{u_1, u_2, v_1, v_2, u_n, v_n\}$

จากการแสดงข้างต้น จะได้ว่า f^+ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือการกำกับจุดยอดแตกต่างกัน
 ดังนั้น f เป็นการกำกับเอตจ์-ออกเกรซฟูของกราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$
 นั่นคือ กราฟ $G = P_n \odot K_1 - u_2$ เป็นกราฟเอตจ์-ออกเกรซฟู □

ตัวอย่าง 2.2 การกำกับเอตจ์-ออกเกรซฟูของกราฟ $G = P_9 \odot K_1 - u_2$ โดยใช้การกำกับเอตจ์-ออกเกรซฟูตามทฤษฎีบท 2.2 แสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 กราฟ $P_9 \odot K_1 - u_2$ พร้อมด้วยการกำกับเอตจ์-ออกเกรซฟู

3. สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้สร้างทฤษฎีบทใหม่จำนวน 2 ทฤษฎีบท ซึ่งบ่งกล่าวถึงการกำกับเอตจ์-ออกเกรซฟูในรูปแบบทั่วไปของกราฟใหม่ซึ่งสร้างจากการลบจุดยอดเพนแดนต์ออก จำนวน 1 จุด บนกราฟโคมบ์ พบว่าการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_1 และการลบจุดยอดเพนแดนต์ u_2 บนกราฟโคมบ์ $P_n \odot K_1$ ทำให้กราฟ $P_n \odot K_1 - u_1$ และกราฟ $P_n \odot K_1 - u_2$ มีการกำกับเอตจ์-ออกเกรซฟู โดยการกำกับเอตจ์-ออกเกรซฟูของทั้งสองกราฟแตกต่างกัน

เอกสารอ้างอิง

- [1] ศิวพร แซ่วัน, ธนาภา ขาวมัน, วราภรณ์ แดงนาพรกุล และสุมิตา แก้วทอง. (2563). การกำกับแบบเกรซฟูลในบริบทการทำซ้ำองค์ประกอบของกราฟ. *วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ*, 23 (1), หน้า 11 – 19.
- Saewan, S., Khawman, T., Dangnapaponkul, W. and Kaewthong, S. (2020). Graceful Labeling in The Context of Duplication of Graph Element. *Thaksin Journal*, 23 (1), p. 11 – 19.
- [2] Boxwala, S. A. and Vashishta, P. (2015). Some New Families of Graceful Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 48, p. 127 – 133.
- [3] Cattell, R. (2007). Graceful Labellings of Paths. *Discrete Mathematics*, 307 (24), p. 3161 – 3176.
- [4] Daoud, S. N. (2017). Edge-Odd Graceful Labeling of Some Path and Cycle Related Graph. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 14, p. 178 – 203.
- [5] Golomb, S. W. (1972). How to Number A Graph. In R. C. Read (Ed.). *Graph Theory and Computing*. p. 23 – 37. New York, U. S. A. Academic Press.
- [6] Kaneria, V. J., Makadia, H. M. and Jariya, M. M. (2014). Graceful Labeling for Cycle of Graph. *International Journal of Mathematics Research*, 6 (2), p. 173 – 178.
- [7] Koh, K. M., Phoon, L. Y. and Soh, K. W. (2015). The Gracefulness of The Join of Graphs (II). *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 12 (2 – 3), p. 180 – 185.
- [8] Rosa, A. (1967). *On Certain Valuations of The Vertices of A Graph*. (In Theory of Graphs, International Symposium, Rome, July, 1966), New York: Gordon and Breach.
- [9] Seoud, M. and Salim, M. (2016). Further Results on Edge-Odd Graceful Graphs. *Turkish Journal of Mathematics*, 40, p. 647 – 656.
- [10] Singhun, S. (2013). Graphs with Edge-Odd Graceful Labelings. *International Mathematical Forum*, 8 (12), p. 577 – 582.

- [11] Solairaju, A., Balasubramanian, G. and Ambika, B. (2017). Edge-Odd Graceful Labeling for Sum of A Path and A Finite Path. *Global Journal of Mathematical Science: Theory and Practical*, 9 (3), p. 323 – 335.
- [12] Solairaju, A. and Chithra, K. (2009). Edge-Odd Graceful Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 33, p. 15 – 20.
- [13] Tamilarasan, T., Rajeswari, V. and Thiagarajan. (2018). Edge-Odd Graceful Labeling of Some Special Graphs. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 56 (2). p. 109 – 112.
- [14] Tirasuwanwasee, A. (2015). *Edge-Odd Graceful Labelings of Prism-Like Graphs of Cycles*. (Master's thesis). Chulalongkorn University. Faculty of Science.
Retrieved from: <http://cuir.car.chula.ac.th/handle/123456789/61639>.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(704) พฤษภาคม – สิงหาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วย
การแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นำไปบนฐานของตัวดำเนินการ
ทำให้บางทวินามลบ

The First Order Integer-Valued Autoregressive Models with
The Two-Parameter Generalized Poisson-Lindley Distribution
Based on The Negative Binomial Thinning Operator

สุชีราภรณ์ บุญยรรี¹ และ จิราพรรณ สุนทรโชติ^{2,*}

^{1,2}ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพมหานคร 10330

Suchiraporn Bunyaris¹ and Jiraphan Suntornchost^{2,*}

^{1,2}Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Bangkok 10330

Email: ¹framesuchiraporn@gmail.com ²jiraphan.s@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 21 ตุลาคม 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 24 ธันวาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 30 มีนาคม 2564

* ผู้เขียนหลัก

บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้นำเสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และศึกษาสมบัติที่สำคัญทางความน่าจะเป็นและสถิติ เช่น ฟังก์ชันก่อกำเนิด ค่าคาดหวัง และความแปรปรวน โดยสุดท้ายได้พิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบที่สร้างขึ้น

คำสำคัญ: การแจกแจงไม่ต่อเนื่อง การแจกแจงปัวซองแบบผสม การแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์
ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ

ABSTRACT

In this study, we introduce the first order integer-valued autoregressive models for count data with the two-parameter generalized Poisson-Lindley distribution based on negative binomial thinning operator. Some important probabilistic and statistical properties such as generating function, expectation and variance are derived. Finally, parameter estimations are discussed.

Keywords: Discrete distributions, Mixed Poisson distributions, Poisson-Lindley distribution, Negative binomial thinning operator

1. บทนำ

ข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series data) คือ ชุดของข้อมูลที่เก็บรวบรวมตามระยะเวลาเป็นช่วง ๆ อย่างต่อเนื่องกัน โดยการนับข้อมูลเกิดขึ้นในหลายบริบท เช่น จำนวนอุบัติเหตุ [9] จำนวนผู้ป่วย จำนวนข้อความ จำนวนการซื้อขายหุ้นรายวัน และจำนวนการเอาประกันของกรมธรรม์ประกันชีวิต ดังนั้นตัวแบบอนุกรมเวลาสำหรับข้อมูลการนับ จึงมีความสำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาและสร้างตัวแบบสำหรับปรากฏการณ์ต่าง ๆ กลุ่มของตัวแบบสำหรับข้อมูลการนับที่มีการศึกษาอย่างกว้างขวางในงานวิจัย คือ ตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม (INAR) ซึ่งถูกสร้างขึ้นครั้งแรกโดย McKenzie [12] จากนั้น Alzaid และ Al-Osh [3] ได้สร้างตัวแบบทั่วไปขึ้นตามการแจกแจงของปัวซอง โดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางทวินาม (binomial thinning operator) ที่ถูกแนะนำโดย Steutel และ Van-Harn [15] และตัวแบบนี้ได้ถูกนำไปใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวางในหลายสถานการณ์ เช่น Marcelo และคณะ [11] ได้ประยุกต์ใช้ในการคาดการณ์การเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรายเดือน Xiang และคณะ

[16] ได้ประยุกต์ใช้ในการรวมความเสี่ยงตามตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซอง

ตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง (PINAR) นั้น ได้รับความนิยมอย่างมากในการศึกษาเชิงการนับ เพราะสูตรมีความซับซ้อนน้อยและเป็นการประยุกต์จากการแจกแจงปัวซองซึ่งเป็นการแจกแจงที่นิยมสำหรับข้อมูลเชิงการนับ อย่างไรก็ตามการแจกแจงปัวซองมีข้อจำกัดคือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนมีค่าเท่ากัน ซึ่งอาจไม่สามารถใช้ได้บางสถานการณ์ที่ข้อมูลไม่ได้อยู่ในสถานะสมดุล ดังนั้นจึงมีการศึกษาการแจกแจงทางเลือกสำหรับข้อมูลประเภทนี้อย่างกว้างขวางเพื่อลดข้อจำกัดนี้ในทศวรรษที่ผ่านมา เช่น กลุ่มการแจกแจงปัวซองน้อยทั่วไปถูกใช้โดย Alzaid และ Al-Osh [4] จากนั้น Aghababaei และคณะ [1] ได้แนะนำตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซองที่มีค่าศูนย์เพื่อ Bakouch และคณะ [6] ได้เสนอตัวแบบการถดถอยในตัวที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงเรขาคณิต ในบรรดาตัวแบบที่กล่าวมานั้นสร้างบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ (negative binomial thinning operator)

การแจกแจงปัวซองน้อยทั่วไปที่ศึกษาอย่างกว้างขวางอย่างหนึ่ง คือ กลุ่มของการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ ที่ถูกนำเสนอในบทความของ Sankaran [13] โดยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์เป็นการแจกแจงปัวซองผสมโดยมีพารามิเตอร์เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลินด์เลย์ จากนั้น Bakouch และคณะ[5] ได้ใช้การแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์มาสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงน้อยทั่วไปของปัวซอง-ลินด์เลย์ และ Mahmoudi และคณะ [9] ได้เสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มสำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงน้อยทั่วไปของปัวซอง-ลินด์เลย์แบบใหม่ โดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางแบบทวินามและทวินามลบ

การแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ได้ถูกขยายอย่างแพร่หลายในทศวรรษที่ผ่านมา ตัวอย่างเช่น Ghitany และคณะ [8] ได้ทำการขยายตัวแบบโดยใช้การแจกแจงปัวซองที่ไม่เป็นศูนย์ จากนั้น Mahmoudi และคณะ [10] ได้ทำการขยายตัวแบบโดยใช้การแจกแจงปัวซองน้อยทั่วไปได้เป็นครั้งแรก เพื่อรองรับข้อมูลได้หลากหลายมากขึ้น

Bhati และคณะ [7] ได้นำเสนอการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์แบบสองพารามิเตอร์น้อยทั่วไป โดยพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซองแบบผสมเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลินด์เลย์สองพารามิเตอร์ที่เสนอใน Shanker และ Sharma [14] ซึ่งเป็นการเพิ่มพารามิเตอร์อีกหนึ่งตัวเข้าไปในการแจกแจงลินด์เลย์ โดย Bhati และคณะ [7] แสดงให้เห็นว่า พฤติกรรมหางขวาของกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นที่

แสดงความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไปเข้าสู่ศูนย์ในอัตราที่เร็วกว่าหรือช้ากว่าการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ แสดงให้เห็นถึงความยืดหยุ่น ดังนั้นการแจกแจงนี้จึงใช้งานได้ดีกับข้อมูลที่มีหางทางขวาของฟังก์ชันความหนาแน่นเข้าสู่ศูนย์ ซึ่งชุดข้อมูลดังกล่าวมักพบในอุตสาหกรรมประกันภัย และยิ่งกว่านั้นการจำลองเชิงตัวเลขของพวกเขาแสดงให้เห็นว่าการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไป จะดีกว่าการแจกแจงอื่น ๆ สำหรับข้อมูลการนับ โดยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไป ที่แสดงไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 [7] ตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์ θ และ β น้อยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim NGPL(\theta, \beta)$ มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

$$P(X = x) = \frac{\theta^2}{(\theta + \beta)(1 + \theta)^{x+1}} \left(1 + \frac{\beta(x + 1)}{1 + \theta}\right)$$

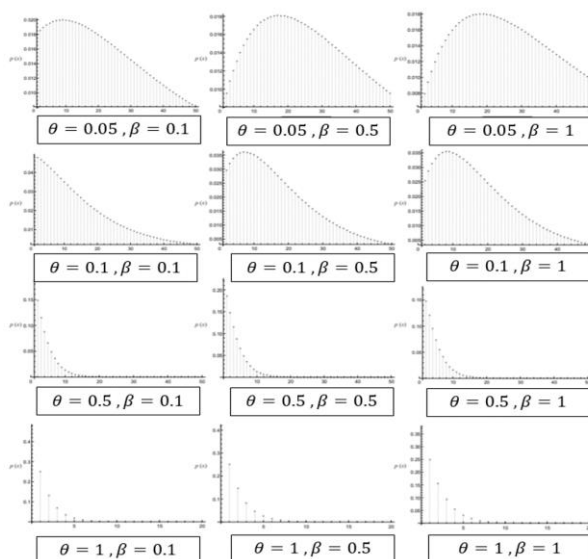
เมื่อ $x = 0, 1, 2, \dots$ และ $\beta, \theta > 0$

ทฤษฎีบท 1.1 [7] คุณสมบัติของการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์ θ และ β น้อยทั่วไป ที่ระบุไว้ในบทนิยาม 1.1 มีดังนี้

1. ค่าคาดหวัง คือ $E(X) = \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)}$
2. ความแปรปรวน คือ $Var(X) = \frac{2\beta^2(1 + \theta) + \theta^2(1 + \theta) + \beta\theta(4 + 3\theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2}$
3. ฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ $\Phi_X(s) = \frac{\theta^2(\beta + \theta - s + 1)}{(\beta + \theta)(\theta - s + 1)^2}$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$
4. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ คือ $M_X(s) = \frac{\theta^2(\beta + \theta - e^s + 1)}{(\beta + \theta)(\theta - e^s + 1)^2}$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$

ในบทความนี้ได้นำเสนอตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์ พารามิเตอร์ θ และ β น้อยทั่วไป โดยใช้ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ในหัวข้อที่ 2 ของบทความนี้คือ สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม สำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และทำการหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของกระบวนการนวัตกรรม จากนั้นในหัวข้อที่ 3 ได้ทำการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญทางสถิติและความน่าจะเป็นของตัวแบบ ได้แก่ ค่าคาดหวัง ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข ค่าความแปรปรวน ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข ฟังก์ชันค่าสหสัมพันธ์ในตัว และฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัวของตัวแบบ และในหัวข้อที่ 4 ผู้วิจัยได้สร้างสูตรสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข และวิธียูล-วอล์กเกอร์ ซึ่งในส่วน

สุดท้ายคือข้อสรุปและอภิปรายการสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ



รูปที่ 1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปสำหรับค่าต่าง ๆ ของพารามิเตอร์ θ และ β

2. การสร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ($NLINAR(1)$) ผู้วิจัยได้ให้คำจำกัดความของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบและตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม นอกจากนั้นได้ทำการหากระบวนการนวัตกรรม (innovation process) ของตัวแบบเพื่อให้เป็นไปตามคุณสมบัติของตัวแบบอนุกรมเวลา

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ $\alpha * \text{นิยามดังนี้}$

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^X Z_i$$

เมื่อ $0 < \alpha < 1$ และ $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันที่มีการแจกแจงแบบเรขาคณิต โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\frac{1}{1+\alpha}$ และเป็นอิสระจาก X

ทฤษฎีบท 2.1 คุณสมบัติของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ $\alpha *$ ที่ระบุไว้ในบทนิยาม 2.1 มีดังนี้

1. ค่าคาดหวัง คือ $E(\alpha * X) = \alpha E(X)$
2. ความแปรปรวน คือ $Var(\alpha * X) = \alpha(1 - \alpha)E(X) + \alpha^2 Var(X)$
3. ฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ $\Phi_{\alpha * X}(s) = \Phi_X((1 + \alpha - \alpha s)^{-1})$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$
4. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ คือ $M_{\alpha * X}(s) = M_X((1 + \alpha - \alpha e^s)^{-1})$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$

บทนิยาม 2.2 ตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $NLINAR(1)$ โดย $\{X_t\}_{t \geq 1}$ นิยามด้วยสมการดังนี้

$$X_t = \alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t$$

โดยที่ $\alpha *$ คือตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ ซึ่งถูกนิยามไว้ในบทนิยาม 2.1 และ $\{X_t\}_{t \geq 1}$ เป็นกระบวนการคงที่ (stationary process) โดย X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์น้อยทั่วไป ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim NGPL(\theta, \beta)$ และกระบวนการนวัตกรรม $\{\varepsilon_t\}_{t \geq 1}$ เป็นลำดับที่เป็นอิสระ และมีการแจกแจงเดียวกันกับ $\alpha * X_{t-1}$ และ ε_t เป็นอิสระต่อกัน

จากสมมติฐานทั่วไปของตัวแบบอนุกรมเวลา มักจะทำการสร้างตัวแบบคงที่ ดังนั้นในส่วนถัดไป ผู้วิจัยจะทำการพิจารณาการแจกแจงและคุณสมบัติของกระบวนการนวัตกรรม $\{\varepsilon_t\}_{t \geq 1}$ ที่ทำให้ตัวแบบ $NLINAR(1)$ คงที่

ทฤษฎีบท 2.2 จากบทนิยาม 2.2 เมื่อ $\{X_t\}_{t \geq 1}$ เป็นกระบวนการที่คงที่ โดยมีการแจกแจง $NGPL(\theta, \beta)$ ดังนั้นกระบวนการนวัตกรรม $\{\varepsilon_t\}$ มีฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$\Phi_{\varepsilon_t}(s) = \frac{(\beta + \theta - s + 1)(\theta + \alpha\theta - \alpha\theta s + \alpha - \alpha s)^2}{(\theta - s + 1)^2(1 + \alpha - \alpha s)(\theta + \beta + \alpha + \alpha\theta + \alpha\beta - \alpha(\beta + \theta + 1)s)}$$

เมื่อ $s \in \mathbb{R}$

บทพิสูจน์ จาก $\{X_t\}_{t \geq 1}$ คือกระบวนการคงที่ โดยมีการแจกแจง $NGPL(\theta, \beta)$ จากบทนิยาม 2.2 คุณสมบัติที่ $\alpha * X_{t-1}$ และ ε_t อิสระต่อกัน และทฤษฎีบท 2.1 (3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Phi_{X_t}(s) &= E(s^{X_t}) \\ &= E(s^{\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t}) \\ &= E(s^{\alpha * X_{t-1}} s^{\varepsilon_t}) \\ &= E(s^{\alpha * X_{t-1}}) E(s^{\varepsilon_t}) \\ &= \Phi_{\alpha * X_{t-1}}(s) \Phi_{\varepsilon_t}(s) \\ &= \Phi_{X_t}((1 + \alpha - \alpha s)^{-1}) \Phi_{\varepsilon_t}(s) \end{aligned}$$

ดังนั้นกระบวนการนวัตกรรมมีฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\varepsilon_t}(s) &= \frac{\Phi_{X_t}(s)}{\Phi_{X_t}((1 + \alpha - \alpha s)^{-1})} \\
 &= \frac{\theta^2(\beta + \theta - s + 1)}{(\beta + \theta)(\theta - s + 1)^2} \times \frac{(\beta + \theta)(\theta - (1 + \alpha - \alpha s)^{-1} + 1)^2}{\theta^2(\theta - (1 + \alpha - \alpha s)^{-1} + 1 + \beta)} \\
 &= \frac{\beta + \theta - s + 1}{(\theta - s + 1)^2} \times \frac{(\theta + \alpha\theta - \alpha\theta s - 1 + 1 + \alpha - \alpha s)^2}{(1 + \alpha - \alpha s)(\beta + \alpha\beta - \alpha\beta s + \theta + \theta\alpha - \alpha\theta s - 1 + 1 + \alpha - \alpha s)} \\
 &= \frac{(\beta + \theta - s + 1)(\theta + \alpha\theta - \alpha\theta s + \alpha - \alpha s)^2}{(\theta - s + 1)^2(1 + \alpha - \alpha s)(\theta + \beta + \alpha + \alpha\theta + \alpha\beta - \alpha(\beta + \theta + 1)s)}
 \end{aligned}$$

□

3. คุณสมบัติความน่าจะเป็นของตัวแบบ $NLINAR(1)$

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาคุณสมบัติบางประการของตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นัยทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว ค่าคาดหวัง และความแปรปรวน

ทฤษฎีบท 3.1 ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว (γ_k) และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว (ρ_k) ที่สอดคล้องกันกับตัวแบบ $NLINAR(1)$ สำหรับ k ($k \geq 1$) หน่วยเวลาถูกนิยามตามลำดับดังนี้

$$1. \gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = \alpha^k \gamma_0 \text{ เมื่อ } \gamma_0 \text{ คือความแปรปรวนของ } X_t$$

$$2. \rho_k = \alpha^k$$

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 2.2 และคุณสมบัติของ ε_t และ X_{t-k} เป็นอิสระสำหรับ $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= Cov(X_t, X_{t-k}) \\
 &= Cov(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t, X_{t-k}) \\
 &= Cov(\alpha * X_{t-1}, X_{t-k}) + Cov(\varepsilon_t, X_{t-k}) \\
 &= \alpha Cov(X_{t-1}, X_{t-k}) \\
 &= \alpha Cov(\alpha * X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, X_{t-k}) \\
 &= \alpha^k Cov(\alpha * X_{t-k}, X_{t-k}) \\
 &= \alpha^k \gamma_0
 \end{aligned} \tag{*}$$

จากบทนิยาม 2.2 เมื่อทำซ้ำจะได้ดังสมการ (*)

ดังนั้น ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว (ρ_k) สามารถเขียนได้ว่า

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \alpha^k$$

□

ข้อสังเกต 3.1 จากทฤษฎีบท 3.1 ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว ρ_k จะลดลงแบบทวีคูณ เมื่อ k เข้าสู่อนันต์

ต่อไปจะพิจารณาคุณสมบัติที่มีเงื่อนไขบางอย่าง เช่น ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของกระบวนการนวัตกรรม ε_t และฟังก์ชันความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะของตัวแบบคุณสมบัติเหล่านี้ได้มาจากการใช้นิพจน์ของ $NLINAR(1)$ ที่กำหนดในบทนิยาม 2.2 ดังนั้นก่อนอื่นจะต้องพิจารณาค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวนของ X_t สำหรับตัวแบบ $NLINAR(1)$ ซึ่งได้ว่า

$$\begin{aligned} 1. E(X_t) &= \frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \\ 2. Var(X_t) &= \frac{2\beta^2(1+\theta) + \theta^2(1+\theta) + \beta\theta(4+3\theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวนของ ε_t จึงถูกกำหนดไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวนของ ε_t ที่นิยามไว้ในบทนิยาม 2.2 สำหรับ ตัวแบบ $NLINAR(1)$ จะถูกนิยามตามลำดับโดย

$$\begin{aligned} 1. E(\varepsilon_t) &= (1 - \alpha) \left(\frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right) \\ 2. Var(\varepsilon_t) &= \frac{(1 - \alpha^2) \left(2\beta^2(1+\theta) + \theta^2(1+\theta) + \beta\theta(4+3\theta) \right) - \alpha\theta(1 - \alpha)(\beta + \theta)(2\beta + \theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2} \end{aligned}$$

โดยที่ $E(X_t)$ นิยามดังข้างต้น

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 2.2 จะได้ว่า $\{X_t\}_{t \geq 1}$ เป็นกระบวนการคงที่โดยมีการแจกแจง $NGPL(\theta, \beta)$

และจากคุณสมบัติว่า $\alpha * X_{t-1}$ และ ε_t เป็นอิสระต่อกัน และทฤษฎีบท 1.1 ข้อ 1. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \alpha E(X_t) + E(\varepsilon_t) \\ &= \alpha \left(\frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right) + E(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } E(\varepsilon_t) = (1 - \alpha) \left(\frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right)$$

พิจารณาความแปรปรวนของ ε_t ในทำนองเดียวกันจากคุณสมบัติว่า $\alpha * X_{t-1}$ และ ε_t เป็นอิสระต่อกัน และทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Var(\alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= Var(\alpha * X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \\ &= \alpha(1 - \alpha)E(X_{t-1}) + \alpha^2 Var(X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

จากนั้นจะได้ว่า $(1 - \alpha^2)Var(X_t) = \alpha(1 - \alpha)E(X_t) + Var(\varepsilon_t)$ ดังนั้น

$$Var(\varepsilon_t) = (1 - \alpha^2)Var(X_t) - \alpha(1 - \alpha)E(X_t)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \alpha^2) \left(\frac{2\beta^2(1 + \theta) + \theta^2(1 + \theta) + \beta\theta(4 + 3\theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2} \right) - \alpha(1 - \alpha) \left(\frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right) \\
&= \frac{(1 - \alpha^2)(2\beta^2(1 + \theta) + \theta^2(1 + \theta) + \beta\theta(4 + 3\theta)) - \alpha\theta(1 - \alpha)(\beta + \theta)(2\beta + \theta)}{\theta^2(\beta + \theta)^2}
\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.3 ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของตัวแบบ $NLINAR(1)$ ล่วงหน้า $k + 1$ หน่วยเวลา คือ

$$E(X_{t+k} | X_{t-1} = x) = \alpha^{k+1} x + (1 - \alpha^{k+1}) \left(\frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right)$$

สำหรับ $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$

บทพิสูจน์ จาก $E(X_{t+k} | X_{t-1} = x) = E(\alpha * X_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x)$

$$= E(\alpha * (\alpha * X_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k-1}) + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x)$$

และจากบทนิยาม 2.2 เมื่อแทนค่า $\{X_t\}_{t \geq 1}$ เข้าจนได้สมการสุดท้ายเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
E(X_{t+k} | X_{t-1} = x) &= E(\alpha^{k+1} * X_{t-1} + \alpha^k * \varepsilon_t + \alpha^{k-1} * \varepsilon_{t+1} + \dots + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
&= E(\alpha^{k+1} * X_{t-1} | X_{t-1} = x) + \sum_{h=0}^k E(\alpha^h * \varepsilon_{t+k-h} | X_{t-1} = x) \\
&= \alpha^{k+1} x + \sum_{h=0}^k \alpha^h E(\varepsilon_{t+k-h}) \\
&= \alpha^{k+1} x + \left(\frac{1 - \alpha^{k+1}}{1 - \alpha} \right) E(\varepsilon_t) \\
&= \alpha^{k+1} x + (1 - \alpha^{k+1}) \left(\frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)} \right)
\end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต 3.2 ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข $E(X_{t+k} | X_{t-1} = x)$ จะลู่เข้าหาค่าคาดหวังแบบไม่มีเงื่อนไข คือ $\frac{2\beta + \theta}{\theta(\beta + \theta)}$ เมื่อ k เข้าสู่นันต์

ทฤษฎีบท 3.4 ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของตัวแบบ $NLINAR(1)$ ล่วงหน้า $k + 1$ หน่วยเวลา คือ

$$\begin{aligned}
&Var(X_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
&= \alpha^{k+1} (1 - \alpha^{k+1}) x + \frac{1 - \alpha^{2(k+1)}}{1 - \alpha^2} Var(\varepsilon_t) + \frac{\alpha(1 - \alpha^k)(1 - \alpha^{k+1})}{1 - \alpha^2} E(\varepsilon_t)
\end{aligned}$$

สำหรับ $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned}
&Var(X_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
&= Var(\alpha * X_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Var}(\alpha * (\alpha * X_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k-1}) + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
 &= \text{Var}(\alpha^{k+1} * X_{t-1} + \alpha^k * \varepsilon_t + \alpha^{k-1} * \varepsilon_{t+1} + \dots + \varepsilon_{t+k} | X_{t-1} = x) \\
 &= \text{Var}(\alpha^{k+1} * X_{t-1} | X_{t-1} = x) + \sum_{h=0}^k \text{Var}(\alpha^h * \varepsilon_{t+k-h} | X_{t-1} = x) \\
 &= \alpha^{k+1}(1 - \alpha^{k+1})x + \sum_{h=0}^k \text{Var}(\alpha^h * \varepsilon_{t+k-h}) \\
 &= \alpha^{k+1}(1 - \alpha^{k+1})x + \sum_{h=0}^k (\alpha^h(1 - \alpha^h)E(\varepsilon_{t+k-h}) + \alpha^{2h} \text{Var}(\varepsilon_{t+k-h})) \\
 &= \alpha^{k+1}(1 - \alpha^{k+1})x + \text{Var}(\varepsilon_t) \sum_{h=0}^k \alpha^{2h} + E(\varepsilon_t) \sum_{h=0}^k \alpha^h (1 - \alpha^h) \\
 &= \alpha^{k+1}(1 - \alpha^{k+1})x + \frac{1 - \alpha^{2(k+1)}}{1 - \alpha^2} \text{Var}(\varepsilon_t) + \frac{\alpha(1 - \alpha^k)(1 - \alpha^{k+1})}{1 - \alpha^2} E(\varepsilon_t)
 \end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต 3.3 ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข $\text{Var}(X_{t+k} | X_{t-1} = x)$ ถ้าเข้าหาความแปรปรวนแบบไม่มีเงื่อนไขคือ $\frac{2\beta^2(1+\theta)+\theta^2(1+\theta)+\beta\theta(4+3\theta)}{\theta^2(\beta+\theta)^2}$ เมื่อ k เข้าสู่อินฟินิตี้

4. การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ $NLINAR(1)$

การประมาณค่าเป็นวิธีการใช้ค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่างไปประมาณค่าพารามิเตอร์ เป็นการหาข้อสรุปที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์ ในลักษณะของการประมาณ โดยจะนำพารามิเตอร์ที่ประมาณได้ไปใช้ในตัวแบบเพื่อพยากรณ์แนวโน้มของเหตุการณ์ต่าง ๆ ในอนาคต และในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะพิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบทั้ง 2 วิธี ซึ่งเป็นวิธีที่นิยม ได้แก่ การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข (conditional least square: CLS) และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธียูลวอล์กเกอร์ (Yule-Walker: YW)

4.1. การประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข

ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ α และ μ ของตัวแบบ $NLINAR(1)$ ได้มาจากการแทนค่า $k = 0$ ในทฤษฎีบท 3.3 ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข คือ

$$E(X_t | X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + \mu(1 - \alpha)$$

โดยที่ $\mu = E(X_t)$

ดังนั้น สมการกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข คือ

$$Q_n = \sum_{t=2}^n (X_t - E(X_t | X_{t-1}))^2 = \sum_{t=2}^n (X_t - \alpha X_{t-1} - \mu(1 - \alpha))^2$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ Q_n เทียบกับพารามิเตอร์ μ และ α และกำหนดให้เท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\left. \frac{\partial Q_n}{\partial \mu} \right|_{\mu=\hat{\mu}, \alpha=\hat{\alpha}} = - \sum_{t=2}^n 2(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))(1 - \hat{\alpha}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\left. \frac{\partial Q_n}{\partial \alpha} \right|_{\mu=\hat{\mu}, \alpha=\hat{\alpha}} = \sum_{t=2}^n 2(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))(\hat{\mu} - X_{t-1}) = 0 \quad (4.2)$$

จาก (4.1) จัดรูปได้ดังนี้

$$\sum_{t=2}^n X_t - \hat{\alpha} \sum_{t=2}^n X_{t-1} - \hat{\mu}(n-1)(1 - \hat{\alpha}) = 0$$

แก้สมการข้างต้นจะได้ค่าประมาณของ $\hat{\mu}$ มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^n X_t - \hat{\alpha} \sum_{t=2}^n X_{t-1}}{(n-1)(1 - \hat{\alpha})}$$

จาก (4.2) จัดรูปได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{\mu} \sum_{t=2}^n X_t - \hat{\alpha} \hat{\mu} \sum_{t=2}^n X_{t-1} - \hat{\mu}^2(n-1)(1 - \hat{\alpha}) - \sum_{t=2}^n X_{t-1}X_t + \hat{\alpha} \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 \\ + (1 - \hat{\alpha})\hat{\mu} \sum_{t=2}^n X_{t-1} = 0 \end{aligned}$$

แก้สมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\alpha}$ มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\alpha} = \frac{(1-n) \sum_{t=2}^n X_{t-1}X_t + \sum_{t=2}^n X_t \sum_{t=2}^n X_{t-1}}{(n-1) \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^n X_{t-1})^2}$$

จากค่าคาดหวังของ X_t และสูตร $\hat{\mu}$ ข้างต้น จะได้ว่า

$$\frac{2\hat{\beta}_{CLS} + \hat{\theta}_{CLS}}{\hat{\theta}_{CLS}(\hat{\beta}_{CLS} + \hat{\theta}_{CLS})} = \hat{\mu}_{CLS} = \frac{\sum_{t=2}^n X_t - \hat{\alpha}_{CLS} \sum_{t=2}^n X_{t-1}}{(n-1)(1 - \hat{\alpha}_{CLS})}$$

พิจารณาตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ σ^2

จากฟังก์ชันที่กำหนดไว้ใน Alzaid และคณะ [2] และการแทนค่า $k = 0$ ในทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

$$\text{Var}(X_t | X_{t-1}) = \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \text{Var}(\varepsilon_t)$$

แทน $\text{Var}(\varepsilon_t)$ จากทฤษฎีบท 3.2 ลงในสมการข้างต้น จะได้ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข คือ

$$Var(X_t | X_{t-1}) = \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + (1 - \alpha^2)\sigma^2 - \alpha(1 - \alpha)\mu$$

หาค่าประมาณของ σ^2 โดยพิจารณาจากบทความของ Alzaid และคณะ [2] ซึ่งเริ่มจากสมการกำลังสองน้อยสุด ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{t=2}^n [(X_t - E(X_t | X_{t-1}))^2 - Var(X_t | X_{t-1})]^2 \\ &= \sum_{t=2}^n [(X_t - \alpha X_{t-1} - \mu(1 - \alpha))^2 - \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} - (1 - \alpha^2)\sigma^2 + \alpha(1 - \alpha)\mu]^2 \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ S_n เทียบกับพารามิเตอร์ σ^2 และกำหนดให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_n}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma^2=\hat{\sigma}, \mu=\hat{\mu}, \alpha=\hat{\alpha}} &= \sum_{t=2}^n 2 [(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))^2 - \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})X_{t-1} - (1 - \hat{\alpha}^2)\hat{\sigma}^2 + \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})\hat{\mu}]^2 (\hat{\alpha}^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

จัดรูปสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$\sum_{t=2}^n [(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))^2 - \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})X_{t-1} - (1 - \hat{\alpha}^2)\hat{\sigma}^2 + \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})\hat{\mu}] = 0$$

แก้สมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ σ^2 มีสูตรดังนี้

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=2}^n [(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))^2 - \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})X_{t-1} + \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})\hat{\mu}]}{(1 - \hat{\alpha}^2)(n - 1)}$$

จากค่าคาดหวังของ X_t และสูตร $\hat{\sigma}^2$ ข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{2\beta^2(1 + \hat{\theta}) + \hat{\theta}^2(1 + \hat{\theta}) + \beta\hat{\theta}(4 + 3\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2(\beta + \hat{\theta})^2} &= \hat{\sigma}_{CLS}^2 \\ &= \frac{\sum_{t=2}^n [(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1} - \hat{\mu}(1 - \hat{\alpha}))^2 - \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})X_{t-1} + \hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})\hat{\mu}]}{(1 - \hat{\alpha}^2)(n - 1)} \end{aligned}$$

4.2 การประมาณค่าแบบยูล-วอล์กเกอร์

ในส่วนนี้จะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ α , μ และ σ^2 ของตัวแบบ $NLINAR(1)$ ด้วยการประมาณค่าแบบยูล-วอล์กเกอร์ โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว (γ_k)

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$$

โดยที่ $0 \leq k < n$ และ $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$ คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

จากสมการยูล-วอล์กเกอร์ และสมการข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\alpha}$ มีสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\alpha}_{YW} = \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})^2}$$

ให้ $\hat{\mu} = E(X_t)$ และ $\hat{\sigma}^2 = Var(X_t)$ นิยามตามในข้างต้นของหัวข้อที่ 3 โดยที่ $S^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{n-1}$ จะได้ค่าประมาณของ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ด้วยวิธีแบบยูล-วอล์กเกอร์ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{YW} &= \bar{X} = \frac{2\hat{\beta} + \hat{\theta}}{\hat{\theta}(\hat{\beta} + \hat{\theta})} \\ \hat{\sigma}_{YW}^2 &= S^2 = \frac{2\hat{\beta}^2(1 + \hat{\theta}) + \hat{\theta}^2(1 + \hat{\theta}) + \hat{\beta}\hat{\theta}(4 + 3\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2(\hat{\beta} + \hat{\theta})^2}\end{aligned}$$

5. สรุป

ในบทความนี้ได้สร้างตัวแบบการถดถอยในตัวอันดับหนึ่งที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม สำหรับข้อมูลการนับด้วยการแจกแจงปัวซอง-ลินด์เลย์สองพารามิเตอร์นี้ทั่วไปบนฐานของตัวดำเนินการทำให้บางทวินามลบ และทำการหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของกระบวนการนวัตกรรม $\{e_t\}$ จากนั้นได้ทำการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญทางสถิติและความน่าจะเป็นของตัวแบบ ได้แก่ ค่าคาดหวัง ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข ค่าความแปรปรวน ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข ฟังก์ชันค่าสหสัมพันธ์ในตัว ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมในตัว ของตัวแบบ $NLINAR(1)$ และสุดท้ายได้พิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี วิธีแรก คือการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข ซึ่งเริ่มจากการหารูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์ α และ μ จากการหาอนุพันธ์ของสมการกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขเทียบกับพารามิเตอร์ จากนั้นทำการหารูปแบบเฉพาะของ σ^2 ซึ่งเงื่อนไขที่มีอยู่ไม่เพียงพอที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงศึกษาแนวคิดเพิ่มเติมจากบทความของ Alzaid และคณะ [2] ซึ่งได้รูปแบบเฉพาะของ σ^2 แต่ไม่สามารถหารูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์ β และ θ ได้ และวิธีที่สอง คือการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธียูล-วอล์กเกอร์ โดยวิธีนี้จะใช้สมการยูล-วอล์กเกอร์ในการประมาณค่า α โดยใช้ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างในการประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และใช้ค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างในการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ^2 โดยจะได้นำรูปแบบเฉพาะของพารามิเตอร์ที่ได้ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อพยากรณ์แนวโน้มค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของเหตุการณ์ต่าง ๆ ในอนาคตต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] Aghababaei, J., Jones, M. and Lai, C.D. (2012). First-Order Integer Valued AR Processes with Zero Inflated Poisson Innovations. *Journal of Time Series Analysis*, 33 (6), p. 954 - 963.
- [2] Alzaid, A. A., Abdulhamid, A. and Omair, A. (2014). Poisson Difference Integer Valued Autoregressive Model of Order One. *Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society*, 37 (2), p. 465 - 485.
- [3] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A. (1988). First-Order Integer-Valued Autoregressive (INAR(1)) Process: Distributional and Regression Properties. *Statistica Neerlandica*, 42, p. 53 - 61.
- [4] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A. (1993). Some Autoregressive Moving Average Processes with Generalized Poisson Marginal Distributions. *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, 45, p. 223 - 232.
- [5] Bakouch, H. S., Mohammadpour, M. and Shirozhan, M. (2019). Poisson-Lindley INAR(1) Model with Applications. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 32, p. 262 - 280.
- [6] Bakouch, H. S. Ristic, M. M. and Nastic, A. S. (2009). A New Geometric First Order Integer-Valued Autoregressive (NGINAR(1)) Process. *Statistical Planning and Inference*, 139, p. 2218 - 2226.
- [7] Bhati, D., Sastry, D. and Qadri, P. (2015). New Generalized Poisson-Lindley Distribution: Applications and Properties. *Austrian Journal of Statistics*, 44 (4), p. 35 - 51.
- [8] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Nadarajah, S. (2008). Zero-Truncated Poisson-Lindley Distribution and Its Application. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, p. 279 - 287.
- [9] Mahmoudi, E., Rostami, A. and Roozegar, R. (2018). A New Integer-Valued AR(1) Process with Poisson-Lindley Innovation. *Statistics Applications*, ArXiv:1802.00994v1.

- [10] Mahmoudi, E. and Zakerzadeh, H. (2010). Generalized Poisson–Lindley Distribution. *Communications in Statistics*, 39 (10), p. 1785 - 1798.
- [11] Marcelo, B., Klaus, L. P. and Vasconcellos, V. (2016). A Poisson INAR(1) Process with A Seasonal Structure. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 86 (2), p. 373-387.
- [12] McKenzie, E. (1985). Some Simple Models for Discrete Variate Time Series. *Journal of the American Water Resources Association*, 21, p. 645 - 650.
- [13] Sankaran, M. (1970). The Discrete Poisson-Lindley Distribution. *Biometrics*, 26, p. 145-149.
- [14] Shanker, R. and Sharma, S. (2013). A Two-Parameter Lindley Distribution for Modeling Waiting and Survival Times Data. *Applied Mathematics*, 4, p. 363 - 368.
- [15] Steutel, F. W. and Van-Harn, K. (1979). Discrete Analogues of Self-Decomposability and Stability. *The Annals of Probability*, 7 (5), p. 893 - 899.
- [16] Xiang, H., Nannan, Y. and Mi, C. (2018). Risk Aggregation Based on The Poisson INAR(1) Process with Periodic Structure. *Lithuanian Mathematical Journal*, 58, p. 505 - 515.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้ ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ สรุป เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1

2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาต ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ เป็นภาพวาดคำ และลายเส้นต่าง ๆ ให้ใช้เส้นสีดำ ทั้งนี้ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับได้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป” เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ “ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกของนามสกุลที่ปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทย ก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

ประเภทของสมาชิก

สมาชิกมี 3 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ สมาชิกสามัญ และสมาชิกวารสาร

● สมาชิกสามัญ สำหรับผู้ที่มีความสนใจ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ
2. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

● สมาชิกวารสาร สำหรับบุคคลหรือหน่วยงานที่มีความสนใจวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ เป็นประจำ

สิทธิของสมาชิกวารสาร

1. มีสิทธิได้รับวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ ตลอดระยะเวลาที่เป็นสมาชิก
2. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นอันเป็นประโยชน์ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
3. มีสิทธิได้รับความช่วยเหลือในทางการศึกษาคณิตศาสตร์ หรือความช่วยเหลือในประการอื่นใด เท่าที่คณะกรรมการบริหารสมาคมฯ จะจัดทำได้

ค่าสมัครสมาชิก ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท

ค่าสมาชิกสามัญ		ค่าสมาชิกวารสาร	วาระการเป็นสมาชิก (สามัญรายปี และวารสาร) เริ่มในวันที่ 1 พฤษภาคม ของทุกปี และสิ้นสุดในวันที่ 30 เมษายน ของปีต่อไป
ตลอดชีพ	3,000 บาท	250 บาทต่อปี	
รายปี	250 บาท		

ดาวน์โหลด ใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

<http://www.mathassociation.net> หัวข้อ “สมัคร”

ใบสมัครสมาชิก
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

☐ สมาชิกใหม่
☐ ต่ออายุ เลขที่สมาชิกเดิม.....

วันที่ เดือน พ.ศ.

ข้าพเจ้า (ชื่อ-นามสกุล) อาชีพ

เบอร์โทรศัพท์ อีเมล

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

- ☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท) ☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)
☐ สมาชิกวารสาร (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน - 30 - บาท

รวมเป็นเงิน บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์ เลขที่บัญชี 162-0-25671-1

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

- ☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับจัดส่งวารสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ซอย หมู่ที่

ถนน ตำบล อำเภอ

จังหวัด รหัสไปรษณีย์

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....

รับเงินค่าสมาชิกจำนวน

วันที่

ลงนาม..... ผู้สมัคร

(.....)

ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน มาที่

(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตึก.ณ. 2022 ปณ.พ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332

หรือ (ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบ

★★ ผลการประเมิน “วารสารคณิตศาสตร์” โดย TCI ★★

ตามที่วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้เข้ารับการประเมินเพื่อรับรองคุณภาพวารสารวิชาการในฐานข้อมูล TCI รอบที่ 4 พ.ศ. 2563 – 2567 ครั้งที่ 2 จากศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai-Journal Citation Index Centre : TCI) นั้น

ขณะนี้ทางวารสารคณิตศาสตร์ ได้รับแจ้งผลการประเมินจากทางศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทยเรียบร้อยแล้ว โดย **วารสารคณิตศาสตร์ ได้รับการจัดให้เป็นวารสารกลุ่มที่ 2**

กองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์ ขอยืนยันและให้ความมั่นใจแก่ทุกท่านว่า เราจะจัดทำวารสารที่มีคุณภาพ และก่อประโยชน์ต่อผู้อ่านทุกท่านตลอดไป โดยติดตามบทความในวารสารได้ที่

<https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH>

หรือที่

Facebook: วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ขยายเวลาการจัดส่งรูปเล่ม สำหรับพิจารณาโครงการทางคณิตศาสตร์

ประจำปีการศึกษา 2564 รอบแรก

ตามที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) จัดการประกวดโครงการทางคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา ขึ้นระหว่างงานมหกรรมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ ประจำปี 2564

แต่จากสถานการณ์การแพร่ระบาดของโรคติดเชื้อไวรัสโคโรนา 2019 และการเลื่อนการจัดงานมหกรรมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ ประจำปี 2564 ออกไปเป็นในช่วงเดือนพฤศจิกายน 2564 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จึงเห็นควร**ขยายเวลาการจัดส่งรูปเล่มโครงการทางคณิตศาสตร์รอบแรกออกไปจนถึงวันที่ 30 กันยายน พ.ศ. 2564** ทั้งนี้สามารถดูข้อมูลและรายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่

<https://www.mathassociation.net> หัวข้อ “ประกวดโครงการ”

ตารางการอบรม ประจำปี พ.ศ. 2564
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

การอบรม		ช่วงเวลา	รูปแบบการอบรม
1	เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ออนไลน์	วันเสาร์ที่ 9 ตุลาคม 2564 เวลา 09.00 – 12.00 น.	ออนไลน์
2	อัตราส่วน ร้อยละ และการประยุกต์ ระดับชั้นประถมศึกษา	วันเสาร์ที่ 16 ตุลาคม 2564 เวลา 09.00 – 12.00 น.	ออนไลน์
3	ตัวแปรสุมในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	วันเสาร์ที่ 16 ตุลาคม 2564 เวลา 13.00 – 16.00 น.	ออนไลน์
4	ชุดการอบรมคณิตศาสตร์การเงิน ในชีวิตประจำวัน	ทุกวันเสาร์แรกของเดือน เวลา 09.00 – 12.00 น. ระหว่างเดือนพฤศจิกายน 2564 ถึง เดือนสิงหาคม 2565 (10 ครั้ง)	ออนไลน์

สามารถดูข้อมูลและรายละเอียดการอบรมเพิ่มเติมได้ที่ www.mathassociation.net

ทำบุญวันคล้ายวันก่อตั้งสมาคมคณิศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี 2564



เมื่อวันศุกร์ที่ 21 พฤษภาคม พ.ศ. 2564 เวลา 7.00 น. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ปณิดา ศิริกุลวิเชฐ เจริญญิกสมาคมคณิศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ และผู้ช่วยศาสตราจารย์วาสนา สุขกระสานติ หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหารวารสารคณิศาสตร์ เป็นผู้แทนคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ทำบุญ ถวายภัตตาหารเพล ถวายสังฆทาน และปัจจัย แต่พระภิกษุสงฆ์ จำนวน 9 รูป ณ ตึกเวชชาครังค์ โรงพยาบาลจุฬาลงกรณ์ สภากาชาดไทย เนื่องในโอกาสวันคล้ายวันก่อตั้งสมาคมคณิศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2564

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการ ในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของ สมาคมที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่ม 2) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
 - Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี
2. อบรมความรู้คณิตศาสตร์
ดูข้อมูล รายละเอียด และกำหนดการ ได้ที่ <https://www.mathassociation.net>
3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
-- งดการสอบแข่งขัน ประจำปี พ.ศ. 2564 --
4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี ครั้งที่ 25 ประจำปี พ.ศ. 2564 ในรูปแบบผสมผสาน
(The 25th Annual Meeting in Mathematics : AMM 2021)
ระหว่างวันที่ 27 – 29 พฤษภาคม พ.ศ. 2564
โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ
ร่วมกับ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เป็นเจ้าภาพ
5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทย
เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
ดูข้อมูลและกำหนดการได้ที่ <https://www.mathassociation.net> ในหัวข้อประกวดโครงงาน
 - ประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 9
(The 9th Undergraduate Applied Mathematics Conference : UAMC 2021)
ระหว่างวันที่ 23 – 24 เมษายน พ.ศ. 2564 โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เป็นเจ้าภาพ

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวชิราวุธ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ และโทรสาร 02-252-7980



สี Laguna

HEX #FBE473

RGB 248 228 115

Laguna

HEX #F8E473

RGB 248 228 115

Mathematical Journal

Volume 66 Number 704 May - August 2021

สีปก