



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์

Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๕ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๔

Volume 66 Number 705 September – December 2021

บทความวิชาการ *Academic Article*

- ว่าด้วยเรื่องคณิตศาสตร์ระดับมัธยม : ภาคตัดกรวยจริงฤา? 1
Middle & High School Mathematics: Conic Section, Really? 1
จุมพฏ อินทรกุล
- อัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อบนวงกลม 18
A Ratio on The Cut Line of Butterfly's Wings on A Circle
อรรณพ แก้วขาว และ วรเชษฐ ชื่นทอง
- อัตราส่วนจำนวนเต็มของอนุกรมที่เรียงติดกัน 25
Integer Ratios of Some Consecutive Series
เสฏฐวุฒิ เพชรแก้ว และ สุภาวดี พงกษาพิทักษ์

บทความวิจัย *Research Article*

- การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 32
The Learning Management with STEM Education Concept on Statistics 1 for Grade 7 Students
วีรยา รูปหอม พรพิทักษ์ เข็มบาลัตย์ และ วรณพล พิมพ์สาลี
- เงื่อนไขของเลขโดดในหลักของจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว 52
Conditions of Digit in The Places of Positive Integers Divisible by 7
ธนชัยศ จำปาหวาย



วารสารคณิตศาสตร์

ISSN 0858-4788

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๕ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๔

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand

Under The Patronage of His Majesty The King

Volume 66 Number 705 September – December 2021

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ดร.ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

3. อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเอกชัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

พิมพ์ที่ สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร 0-2218-3562 ถึง 63

<http://www.cuprint.chula.ac.th>

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

ตั้งแต่เดือนพฤศจิกายน 2564 เป็นต้นมา สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดกิจกรรมอบรมออนไลน์ ในหลากหลายหัวข้อและต่อเนื่อง คือการอบรมชุดคณิตศาสตร์การเงิน ซึ่งมีด้วยกันทั้งหมด 10 หัวข้อ กล่าวคือ การคิดดอกเบี้ยบัตรเครดิต การคิดภาษีรายได้บุคคลธรรมดา เครดิตและภาษีหุ้น การออมเพื่อการเกษียณ IRR กับประเมินราคาทรัพย์สิน การหาผลตอบแทนของกรมธรรม์ประกันภัย ค่างวด การลงทุนเบื้องต้น ผลตอบแทน VS ความเสี่ยง และ แคลคูลัสกับการลงทุน ผู้สนใจสามารถเลือกเข้ารับการอบรมเฉพาะบางหัวข้อได้ ซึ่งระยะเวลาการอบรมแต่ละหัวข้อ 3 ชั่วโมง โดยจัดการอบรมเป็นประจำในวันเสาร์แรกของเดือน ทุกท่านสามารถดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่

https://www.mathassociation.net/view/home/page_news.php

นอกจากนี้กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร วารสารคณิตศาสตร์ ขอแจ้งให้ทุกท่านทราบว่า ตั้งแต่ พ.ศ. 2565 เป็นต้นไป สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จะยกเลิกการจัดทำวารสารคณิตศาสตร์ในรูปแบบเล่มกระดาษ (Hard copy) เพื่อเป็นการลดการใช้กระดาษ และเป็นการอนุรักษ์ธรรมชาติ และสิ่งแวดล้อม โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จะเผยแพร่วารสารคณิตศาสตร์ในช่องทางออนไลน์ โดยผ่านทาง <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/index> เพื่อเพิ่มความสะดวกและรวดเร็วในการเผยแพร่บทความ

ในวาระขึ้นปีใหม่ กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร ในนามสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ขอให้ปีใหม่นี้เป็นการนำพาการเริ่มต้นใหม่ เป้าหมายใหม่ที่สดใสมาสู่ทุกท่าน ขอให้ท่านและครอบครัวจะมีแต่ความสุขในปีใหม่นี้และตลอดไป

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ
รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล
ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์
อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเอกชัย

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ณัฐชัย สีนาวงค์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี |
| 4. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 6. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงค์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 3. รศ. ดร.กาญจน์ภา อมรัชกุล | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 4. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 6. รศ. ดร.พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 7. รศ. ดร.รณสรพร ชินรัมย์ | มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ |
| 8. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |
| 9. ผศ. ดร.กนกพร ช่างทอง | มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี |
| 10. ผศ. ดร.มนจิรา ดวงสาพล | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 11. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 12. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 13. ผศ. ดร.ศิริรัตน์ สิงห์ตัน | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 14. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว | มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ |
| 15. ผศ. ดร.สุรีย์พร ชาวแพรกน้อย | มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| 16. ผศ. ดร.อังคณา บุญยิต | มหาวิทยาลัยขอนแก่น |
| 17. ผศ. ดร.เอื้ออารี บุญเพิ่ม | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปี 2564 - 2565

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์จรจิต วัฒนสินธุ์	ที่ปรึกษา
2. ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	นายกสมาคม
3. รองศาสตราจารย์ ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	อุปนายก
4. รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ	เลขาธิการ
5. รองศาสตราจารย์ ดร.เอื้อมพร พักสุวรรณ	เหรัญญิก
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ปณิดา ศิริกุลวิเชฐ	ปฎิคม
7. อาจารย์ประไพ เสนาบุญญฤทธิ์	ประชาสัมพันธ์
8. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วราสนา สุขกระสานติ	หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหารวารสารคณิตศาสตร์
9. รองศาสตราจารย์ ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	ผู้จัดการสารสนเทศ
10. อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเออชัย	ผู้ช่วยผู้จัดการสารสนเทศ
11. ศาสตราจารย์ ดร.ยศนันต์ มีมาก	กรรมการ
12. รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์	กรรมการ
13. รองศาสตราจารย์ธีรวัฒน์ ประกอบผล	กรรมการ
14. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ	กรรมการ
15. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลีวศิริตฤตกุล	กรรมการ
16. รองศาสตราจารย์ ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
17. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
18. รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
19. รองศาสตราจารย์ ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์	กรรมการ
20. ผู้ช่วยศาสตราจารย์กรองแก้ว หวังนิเวศน์กุล	กรรมการ
21. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
22. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงศ์พล เรือนคง	กรรมการ
23. อาจารย์ ดร.ฉวีวรรณ กิตติกร	กรรมการ
24. อาจารย์นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
25. อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันทจักรุณณ์	กรรมการ
26. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการ
27. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ ที่จัดทำขึ้นโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้นจึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	<i>Mathematical Journal</i> by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของ บทความที่จะรับ ตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือ คณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น • วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี • เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย • บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน • วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่าง ถูกต้อง

การพิจารณา กลั่นกรองบทความ ของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจาก ผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้อง โดยผู้ทรงคุณวุฒิไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับ ผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จาก ผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน จาก 3 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียน ภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่ง บทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่อยู่ ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และ ภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตามข้อกำหนดใน การจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่ง กองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสาร คณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือ หน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือ กระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคม คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่
www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตาม
 ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้น
 อัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อม
 ไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความ
 MJMATH.docx) ขึ้นที่ ระบบการส่งบทความ ที่ <https://www.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการ
 วารสาร ได้ที่อีเมล MathThaiOrg@gmail.com



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King

วารสารคณิตศาสตร์

Mathematical Journal

ISSN 0858-4788

ปริมา ๖๖ ฉบับที่ ๗๐๕ กันยายน - ธันวาคม ๒๕๖๔

Volume 66 Number 705 September - December 2021

บทความวิชาการ *Academic Article*

- ว่าด้วยเรื่องคณิตศาสตร์ระดับมัธยม : ภาคตัดกรวยจริงฤา? 1
Middle & High School Mathematics: Conic Section, Really? 1
จุมพฏ อินทรนุกูล
- อัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อบนวงกลม 18
A Ratio on The Cut Line of Butterfly's Wings on A Circle
อรรณพ แก้วขาว และ วรเชษฐ ชื่นทอง
- อัตราส่วนจำนวนเต็มของอนุกรมที่เรียงติดกัน 25
Integer Ratios of Some Consecutive Series
เสฏฐวุฒิ เพชรแก้ว และ สุภาวดี พงกษาพิทักษ์

บทความวิจัย *Research Article*

- การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 32
The Learning Management with STEM Education Concept on Statistics 1 for Grade 7 Students
วีรยา รูปหอม พรพิทักษ์ เข็มบาลัตย์ และ วรณพล พิมพ์สาลี
- เงื่อนไขของเลขโดดในหลักของจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว 52
Conditions of Digit in The Places of Positive Integers Divisible by 7
ธัญยศ จำปาหวาย



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66 (705) กันยายน – ธันวาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ว่าด้วยเรื่องคณิตศาสตร์ระดับมัธยม : ภาคตัดกรวยจริงฤ? 1

Middle & High School Mathematics: Conic Section, Really? 1

จุมพฏ อินทรกุล

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต ปทุมธานี 12120

Jumpot Intrakul

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Thammasat University (Rangsit Center), Pathum Thani 12120

Email: jumpot@mathstat.sci.tu.ac.th

วันที่รับบทความ : 19 มิถุนายน 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 22 สิงหาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 16 กรกฎาคม 2564

บทคัดย่อ

บทความนี้อาศัยแนวคิดของเรขาคณิตสังเคราะห์แสดงว่า ภาคตัดกรวย (รอยตัดระหว่างกรวยกับระนาบ) ซึ่งไม่ผ่านจุดยอดของกรวยจะเป็นวงกลม วงรี พาราโบลา หรือ ไฮเพอร์โบลา เท่านั้น

คำสำคัญ: ภาคตัดกรวย วงกลม วงรี พาราโบลา ไฮเพอร์โบลา เรขาคณิตสังเคราะห์

ABSTRACT

We use the concept of synthetic geometry to show that the conic section (intersection between a cone and a plane), not containing the vertex of a cone, must be either a circle; or an ellipse; or a parabola; or a hyperbola.

Keywords: Conic section, Circle, Ellipse, Parabola, Hyperbola, Synthetic geometry

1. บทนำ

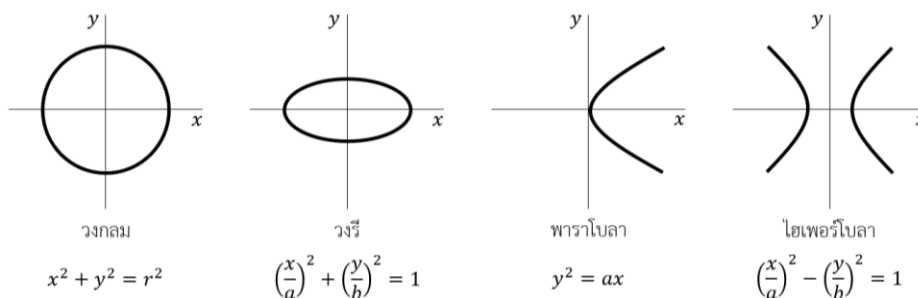
“ภาคตัดกรวย” เป็นหัวข้อหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย [1 - 3] ซึ่งปรากฏในบทเรียนเรื่อง “เรขาคณิตวิเคราะห์” โดยหนึ่งในเนื้อหาของบทเรียนดังกล่าวจะศึกษาสมการเส้นโค้ง 4 ประเภท ได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และ ไฮเพอร์โบลา พร้อมการแปลงและสมบัติเบื้องต้น สมการเส้นโค้งดังกล่าวในรูปแบบมาตรฐานอย่างง่าย (จุดยอดหรือจุดศูนย์กลางอยู่ที่พิกัด $(0,0)$ และแกนหลักอยู่ในแนวนอน) เป็นดังนี้

1. สมการวงกลม : $x^2 + y^2 = r^2$

2. สมการวงรี : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

3. สมการพาราโบลา : $y^2 = ax$

4. สมการไฮเพอร์โบลา : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



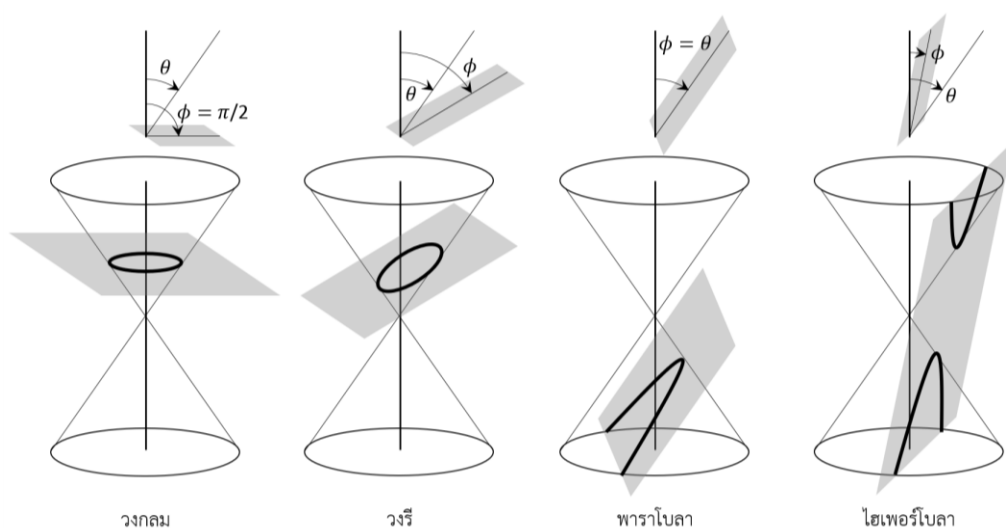
รูปที่ 1.1 ลักษณะของเส้นโค้งทั้งสี่ที่ตามรูปแบบสมการ

การศึกษาดังกล่าวโดยมากจะเป็นการศึกษาในเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์ตามชื่อบทเรียน กล่าวคืออาศัยพิกัดในการอธิบายเส้นโค้งเหล่านี้ แต่ทว่าส่วนที่ น่าสนใจ น่าสงสัย และเกี่ยวข้องกับชื่อหัวข้อที่เรียนเป็นอย่างมาก คือ

1. ภาคตัดกรวย (รอยตัดระหว่างกรวยกับระนาบ) แท้จริงแล้วเป็น “เส้นโค้งเหล่านี้” จริงหรือไม่ ?
2. เส้นโค้งเหล่านี้เป็น “ภาคตัดกรวย” จริงหรือไม่ ?

ทั้งนี้ ระนาบที่ทำให้เกิดรอยตัดดังกล่าวจะพิจารณาเพียงระนาบที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวยเท่านั้น (กรณีที่ระนาบผ่านจุดยอดของกรวย รอยตัดที่เกิดขึ้นจะมีเพียง 3 รูปแบบ คือ จุด เส้นตรง และ เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน ซึ่งทั้งสามรูปแบบนี้ได้มีการศึกษาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น)

สำหรับคำถามข้างต้น เราจะพบว่าเนื้อหาที่ปรากฏในแบบเรียนมักเป็นภาพอธิบายที่ชวนให้เชื่อว่า *เส้นโค้งทั้งสี่และภาคตัดกรวยเป็นสิ่งเดียวกัน* (รูปที่ 1.2) โดยจะมีความแตกต่างกันตามความสัมพันธ์ของมุมระหว่างแกนของกรวยกับผิวข้างของกรวย (มุม θ ในรูปที่ 1.2) และมุมระหว่างแกนของกรวยกับระนาบตัดกรวย (มุม ϕ ในรูปที่ 1.2)



รูปที่ 1.2 ภาคตัดกรวยกรณีระนาบไม่ผ่านจุดยอดของกรวย

แม้ว่าภาพประกอบการอธิบายข้างต้นจะดูมีความเป็นไปได้ แต่ส่วนใหญ่ยัง*ไม่มีการแสดงให้เห็นโดยชัดแจ้งว่าเป็นจริง*ในบทเรียน

วิธีการตอบคำถามข้างต้นทั้งสองข้อสามารถกระทำได้หลากหลายวิธี วิธีหนึ่งที่เป็นที่นิยมคือการแสดงโดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นเครื่องมือ อย่างไรก็ตามยังมีอีกวิธีที่สามารถใช้ตอบคำถามได้เช่นกัน แต่อาจจะไม่เป็นที่รู้จักในวงกว้างมากนัก นั่นคือ การแสดงโดยใช้*เรขาคณิตสังเคราะห์* (Synthetic Geometry – เรขาคณิตที่ไม่ใช้แนวคิดของระบบพิกัด) เป็นเครื่องมือ วิธีการนี้ได้รับการนำเสนอโดย เจอมีนัล ปีแอร์ ดองเดอแลง (Germinal Pierre Dandelin) ใน ค.ศ. 1822 [4 - 6] แนวคิดหลักของวิธีการนี้ คือ การสร้างทรงกลมแนบในกรวยและสัมผัสกับระนาบตัด แล้วแสดงว่า

จุดสัมผัสระหว่างทรงกลมดังกล่าวกับระนาบตัดจะเป็นจุดโฟกัสของภาคตัดกรวย ด้วยเหตุนี้ทรงกลมที่สร้างจากวิธีการดังกล่าวจึงเรียกว่า *ทรงกลมดองเดอแลง (Dandelin Spheres)* [4, 6]

ในบทความนี้จะได้นำเสนอคำตอบของคำถามข้อ 1. โดยวิธีของดองเดอแลง

2. ภาคตัดกรวยกับเส้นโค้งทั้งสี่

เพื่อความสะดวก ตลอดหัวข้อนี้กำหนดให้ :

- C เป็นกรวยกลมซึ่งมี V เป็นจุดยอด และมีผิวข้างเอียงทำมุม θ กับแกนของกรวย เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- P เป็นระนาบซึ่งไม่ผ่านจุดยอด V ของกรวย C โดยที่แกนของกรวยเอียงทำมุม ϕ กับระนาบ เมื่อ $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

บทนิยามของวงกลม วงรี พาราโบลา และ ไฮเพอร์โบลา เป็นดังนี้

บทนิยาม 2.1 [1]

1. วงกลม (circle) คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งเป็นระยะคงที่
2. วงรี (ellipse) คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดเหล่านี้แต่ละจุดไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดเป็นค่าคงตัว
3. พาราโบลา (parabola) คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน
4. ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดเหล่านี้แต่ละจุดไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดเป็นค่าคงตัว

ผลลัพธ์หลักของบทความนี้ คือ ภาคตัดกรวยในกรณีที่ระนาบตัดไม่ผ่านจุดยอดของกรวย จะต้องเป็นเส้นโค้งใดเส้นโค้งหนึ่งจากบทนิยามข้างต้น ตามความสัมพันธ์ระหว่าง ϕ กับ θ กล่าวคือ

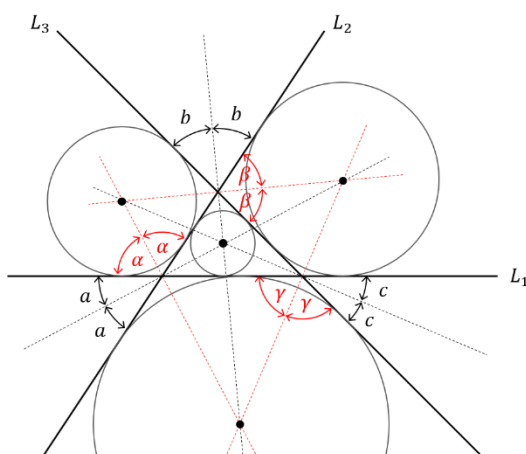
ทฤษฎีบท 2.2

1. ถ้า $\phi = \frac{\pi}{2}$ แล้ว $C \cap P$ จะเป็นวงกลม
2. ถ้า $\theta < \phi < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $C \cap P$ จะเป็นวงรี
3. ถ้า $\phi = \theta$ แล้ว $C \cap P$ จะเป็นพาราโบลา
4. ถ้า $\phi < \theta$ แล้ว $C \cap P$ จะเป็นไฮเพอร์โบลา

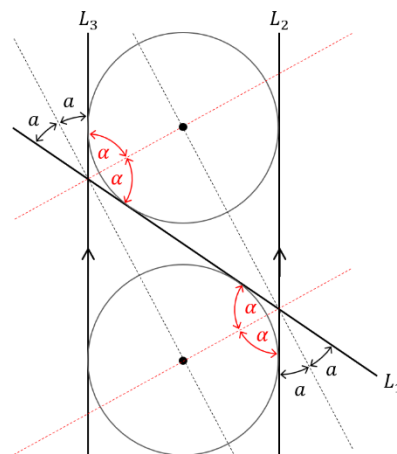
เนื่องจากระนาบ P ตั้งฉากกับแกนของกรวย $\angle MVF = \theta = \angle NVF$ และ $|VF| = |VF|$ ทำให้ $\triangle MVF \cong \triangle NVF$ โดยความสัมพันธ์ มุม-ด้าน-มุม ดังนั้น $|MF| = |NF|$ จึงสรุปว่ารอยตัด $C \cap P$ เป็นรูปวงกลมซึ่งมีจุด F เป็นจุดศูนย์กลาง $\square$

บทพิสูจน์สำหรับกรณีที่เหลือจะอาศัยการสร้างทรงกลมแนบในกรวยและสัมผัสกับระนาบตัดซึ่งไม่ผ่านจุดยอดของกรวย (นั่นคือ ทรงกลมดองเดอแลง) ซึ่งนัยของทรงกลมแนบในดังกล่าวเป็นดังนี้

ทรงกลมแนบในกรวย C ซึ่งมีจุด V เป็นจุดยอดและสัมผัสกับระนาบ P เมื่อ $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ คือ ทรงกลมซึ่งสัมผัสทุกเส้นตรงบนผิวกรวยซึ่งผ่านจุด V และสัมผัสกับระนาบ P การมีอยู่ของทรงกลมนี้เป็นผลโดยตรงจากความสมมาตรภายใต้การหมุนของกรวย C รอบแกนของกรวย และการมีอยู่ของวงกลมสัมผัสเส้นตรงที่กำหนดให้ 3 เส้น โดยเส้นตรงเหล่านี้ขนานกันเองได้ไม่เกิน 1 คู่ ทั้งนี้จุดศูนย์กลางของวงกลมดังกล่าวจะอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่างเส้นตรงที่กำหนดให้แต่ละคู่ (กรณีเส้นตรงทั้งสามไม่มีคู่ใดขนานกัน วงกลมสัมผัสนี้คือวงกลมแนบในและวงกลมแนบนอกของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดเป็นจุดตัดระหว่างเส้นตรงแต่ละคู่ ดังรูปที่ 2.3(1))



(1) กรณีไม่มีเส้นตรงคู่ใดขนานกัน



(2) กรณีมีเส้นตรงคู่หนึ่งขนานกัน

รูปที่ 2.3 วงกลมสัมผัสเส้นตรง L_1 เส้นตรง L_2 และเส้นตรง L_3 ที่กำหนดให้

การสร้างทรงกลมแนบในกรวย C และสัมผัสกับระนาบ P สามารถกระทำดังนี้

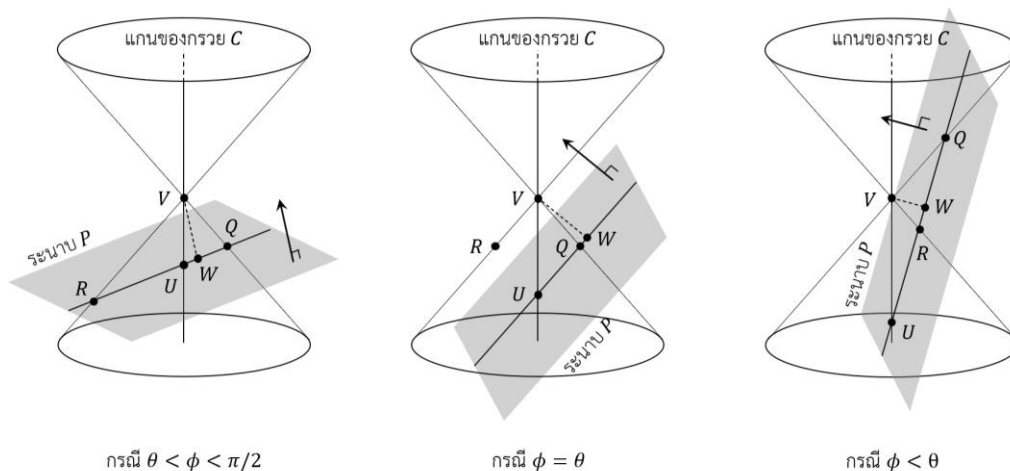
กำหนดให้จุด U เป็นจุดตัดระหว่างระนาบ P กับแกนของกรวย C และจุด W เป็นจุดเชิงตั้งฉากของจุด V บนระนาบ P (นั่นคือเส้นตรง VW ตั้งฉากกับระนาบ P) สร้างจุด Q และจุด R ดังนี้ (พิจารณารูปที่ 2.4 ประกอบ)

- กรณี $\theta < \phi < \pi/2$ หรือ $\phi < \theta$

จุด Q และจุด R เป็นจุดตัดระหว่างเส้นตรง $\overline{UW}$ และกรวย C

- กรณี $\phi = \theta$

จุด Q เป็นจุดตัดระหว่างเส้นตรง $\overline{UW}$ และกรวย C และจุด R เป็นจุดสะท้อนของจุด Q เทียบกับแกนของกรวย C ซึ่งจะได้ว่าจุด R อยู่บนผิวของกรวย C

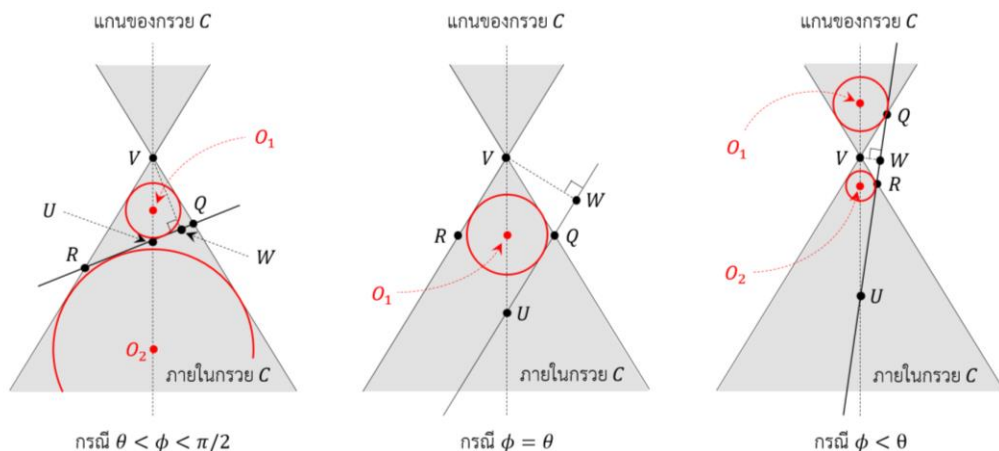


รูปที่ 2.4 จุด U จุด W จุด Q และจุด R จากการสร้างข้างต้น

สร้างวงกลม O_1 และวงกลม O_2 ภายในกรวย C และสัมผัสเส้นตรง $\overline{VQ}$, $\overline{VR}$ และ $\overline{QR}$ (กรณี $\phi = \theta$ จะแทนที่ $\overline{QR}$ ด้วย $\overline{QU}$ และจะปรากฏเพียงวงกลม O_1 เท่านั้น ดูรูปที่ 2.5 ประกอบ) จะได้ว่าวงกลมทั้งสองอยู่บนระนาบผ่าน ΔVUW สร้างทรงกลม O_1 และทรงกลม O_2 ซึ่งมีวงกลม O_1 และวงกลม O_2 เป็นวงกลมใหญ่ของทรงกลม (Great Circle of Sphere – วงกลมซึ่งเป็นรอยตัดระหว่างทรงกลมและระนาบซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม) ทั้งสองตามลำดับ (กรณี $\phi = \theta$ จะปรากฏเพียงทรงกลม O_1 เท่านั้น) จะได้ว่าทรงกลมทั้งสองสัมผัส $\overline{VQ}$ และ $\overline{VR}$ นอกจากนี้เนื่องจาก $\overline{VQ}$ และ $\overline{VR}$ อยู่บนระนาบผ่าน ΔVUW ซึ่งตั้งฉากกับระนาบ P ดังนั้นทรงกลมทั้งสองสัมผัสกับระนาบ P

เนื่องจากวงกลม O_1 และวงกลม O_2 อยู่ภายในกรวยและสัมผัส $\overline{VQ}$ และ $\overline{VR}$ โดยที่ $\overline{VQ} \cap \overline{VR} = \{V\}$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่าง $\overline{VQ}$ และ $\overline{VR}$ ซึ่งลากผ่านจุด V และอยู่ภายในกรวย C ดังนั้นจุด O_1 และจุด O_2 อยู่บนแกนของกรวย C ทำให้ทรงกลม O_1 และทรงกลม O_2 สมมาตรภายใต้การหมุนรอบแกนของกรวย C เนื่องจากกรวย C สมมาตรภายใต้การหมุนรอบแกนของกรวยเช่นเดียวกับทรงกลมทั้งสอง ทำให้การสัมผัสกันระหว่าง

วงกลม O_1 และวงกลม O_2 กับ $\overrightarrow{VQ}$ และ $\overrightarrow{VR}$ นำไปสู่ข้อสรุปว่าทรงกลม O_1 และทรงกลม O_2 สัมผัสเส้นตรงทุกเส้นที่ผ่านจุด V และอยู่บนผิวของกรวย C นั่นคือทรงกลมทั้งสองเป็นทรงกลมแนบในกรวย C และสัมผัสกับระนาบ P ตามต้องการ



รูปที่ 2.5 วงกลม O_1 และวงกลม O_2 จากการสร้างข้างต้น

ด้วยเหตุนี้ตลอดบทพิสูจน์สำหรับกรณิที่เหลือ การสร้างทรงกลมแนบในกรวย C และสัมผัสกับระนาบ P จึงสามารถกระทำได้โดยอาศัยแนวคิดดังข้างต้น

บทพิสูจน์ : กรณิ $\theta < \phi < \frac{\pi}{2}$

สมมติว่า $\theta < \phi < \frac{\pi}{2}$

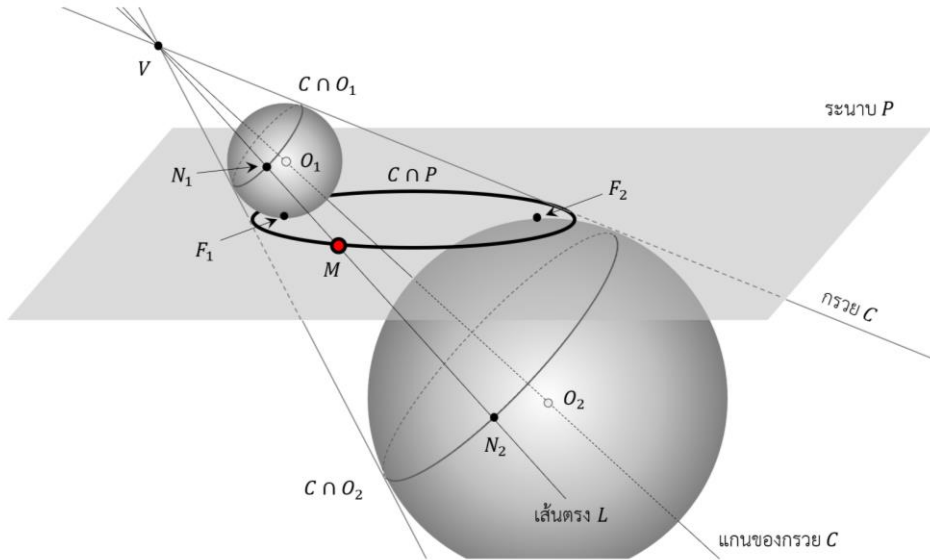
กำหนดให้จุด M เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัด $C \cap P$

สร้าง

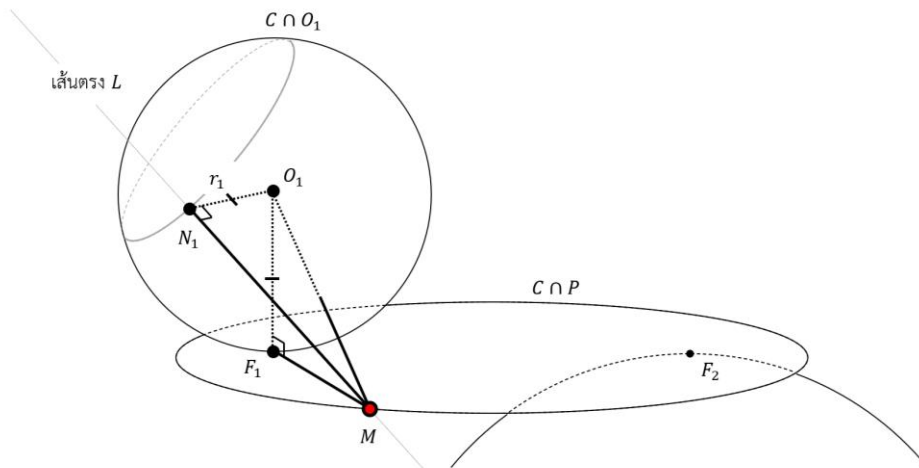
- ทรงกลม O_1 รัศมี r_1 ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F_1 และอยู่ด้านเดียวกับจุดยอด V เมื่อเทียบกับระนาบ P
- ทรงกลม O_2 รัศมี r_2 ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F_2 และอยู่ด้านตรงข้ามกับจุดยอด V เมื่อเทียบกับระนาบ P
- เส้นตรง $\overrightarrow{MV}$ ซึ่งจะเรียกว่าเส้นตรง L

สังเกตว่าเส้นตรง L เป็นเส้นตรงบน C ทำให้เส้นตรง L สัมผัสทรงกลมทั้งสอง

กำหนดให้ $L \cap O_1 = \{N_1\}$ และ $L \cap O_2 = \{N_2\}$ นอกจากนี้ สังเกตเพิ่มเติมได้ว่า $C \cap O_1$ และ $C \cap O_2$ เป็นวงกลมซึ่งวางตัวบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวยและมีจุดศูนย์กลางของวงกลมบนแกนของกรวยเหมือนกัน ดังนั้นระยะ $|N_1 N_2|$ จะเป็นค่าคงตัวเสมอโดยไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุด M ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ทรงกลม O_1 ทรงกลม O_2 และเส้นตรง L พร้อมจุดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องจากการสร้างข้างต้น



รูปที่ 2.7 ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดต่าง ๆ ภายในทรงกลม O_1

พิจารณาทรงกลม O_1 (รูปที่ 2.7) เนื่องจาก $\overrightarrow{MF_1}$ เป็นเส้นตรงบน P ซึ่งเป็นระนาบสัมผัสทรงกลม O_1 และ L เป็นเส้นสัมผัสทรงกลม O_1 จะได้ว่า

$$\angle O_1F_1M = \frac{\pi}{2} = \angle O_1N_1M$$

นอกจากนี้ เนื่องจาก $|\overline{O_1F_1}| = r_1 = |\overline{O_1N_1}|$ และ $\overline{O_1M}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก O_1F_1M และ O_1N_1M ดังนั้นจึงสรุปโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสว่า $|\overline{F_1M}| = |\overline{N_1M}|$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาทรงกลม O_2 จะพบว่า

$$\angle O_2F_2M = \frac{\pi}{2} = \angle O_2N_2M \text{ และ } |\overline{O_2F_2}| = r_2 = |\overline{O_2N_2}|$$

เนื่องจาก $\overline{O_2M}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก O_2F_2M และ O_2N_2M จึงสรุปโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้เช่นกันว่า $|\overline{F_2M}| = |\overline{N_2M}|$

จากข้อสรุปทั้งสองข้างต้น ดังนั้น

$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = |\overline{N_1M}| + |\overline{N_2M}| = |\overline{N_1N_2}| \text{ ซึ่งเป็นค่าคงตัว}$$

□

บทพิสูจน์ : กรณี $\phi < \theta$

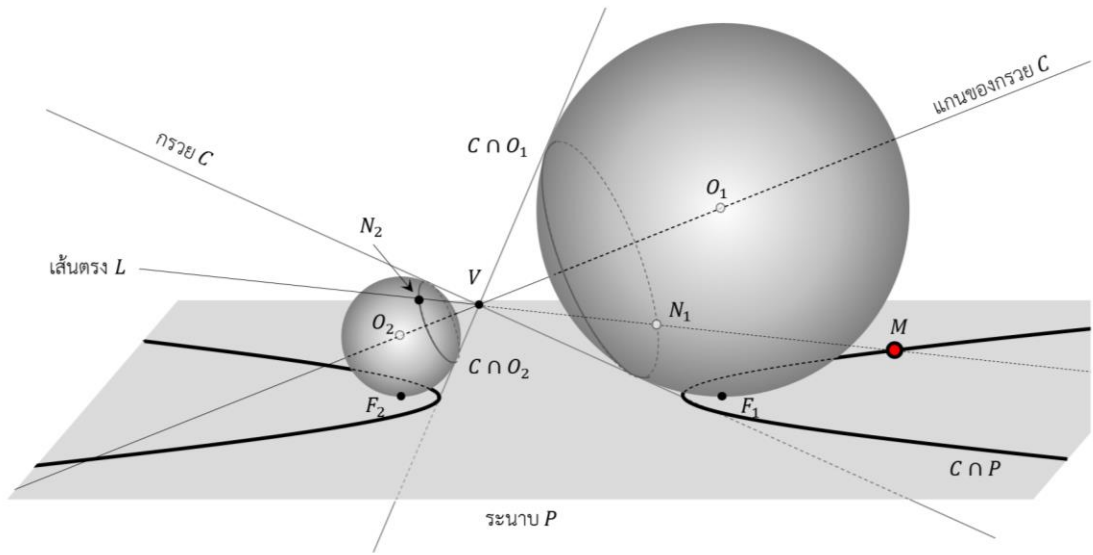
สมมติว่า $\phi < \theta$

กำหนดให้ M เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัด $C \cap P$

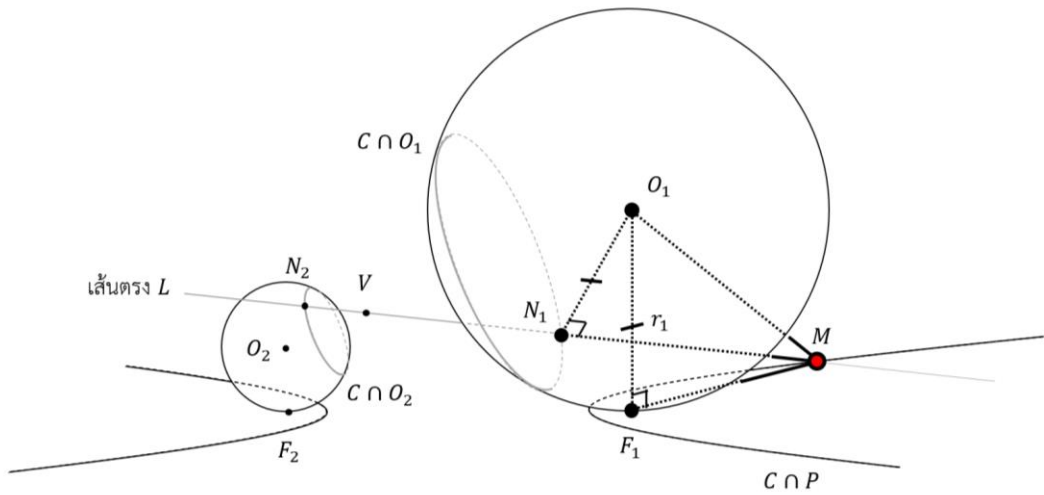
สร้าง

- ทรงกลม O_1 รัศมี r_1 ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F_1
- ทรงกลม O_2 รัศมี r_2 ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F_2 และอยู่ด้านตรงข้ามกับทรงกลม O_1 เมื่อเทียบกับจุดยอด V
- เส้นตรง $\overrightarrow{MV}$ ซึ่งจะเรียกว่าเส้นตรง L

สังเกตว่าเส้นตรง L เป็นเส้นตรงบน C ทำให้เส้นตรง L สัมผัสทรงกลมทั้งสอง กำหนดให้ $L \cap O_1 = \{N_1\}$ และ $L \cap O_2 = \{N_2\}$ นอกจากนี้ สังเกตเพิ่มเติมว่า $C \cap O_1$ และ $C \cap O_2$ เป็นวงกลมซึ่งวางตัวบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวยและมีจุดศูนย์กลางของวงกลมบนแกนของกรวยเหมือนกัน ดังนั้นระยะ $|\overline{N_1N_2}|$ จะเป็นค่าคงตัวเสมอโดยไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุด M ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 ทรงกลม O_1 ทรงกลม O_2 และเส้นตรง L พร้อมจุดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องจากการสร้างข้างต้น



รูปที่ 2.9 ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดต่าง ๆ ภายในทรงกลม O_1

พิจารณาทรงกลม O_1 (รูปที่ 2.9) เนื่องจาก $\overline{MF_1}$ เป็นเส้นตรงบน P ซึ่งเป็นระนาบสัมผัสทรงกลม O_1 และ L เป็นเส้นสัมผัสทรงกลม O_1 จะได้ว่า

$$\angle O_1 F_1 M = \frac{\pi}{2} = \angle O_1 N_1 M$$

นอกจากนี้ เนื่องจาก $|\overline{O_1F_1}| = r_1 = |\overline{O_1N_1}|$ และ $\overline{O_1M}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก O_1F_1M และ O_1N_1M ดังนั้นจึงสรุปโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสว่า $|\overline{F_1M}| = |\overline{N_1M}|$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาทรงกลม O_2 จะพบว่า

$$\angle O_2F_2M = \frac{\pi}{2} = \angle O_2N_2M \text{ และ } |\overline{O_2F_2}| = r_2 = |\overline{O_2N_2}|$$

เนื่องจาก $\overline{O_2M}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก O_2F_2M และ O_2N_2M จึงสรุปโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้เช่นกันว่า $|\overline{F_2M}| = |\overline{N_2M}|$

จากข้อสรุปทั้งสองข้างต้น ดังนั้น

$$|\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}| = |\overline{N_1M}| - |\overline{N_2M}| = |\overline{N_1N_2}| \text{ ซึ่งเป็นค่าคงตัว} \quad \square$$

บทพิสูจน์ : กรณี $\phi = \theta$

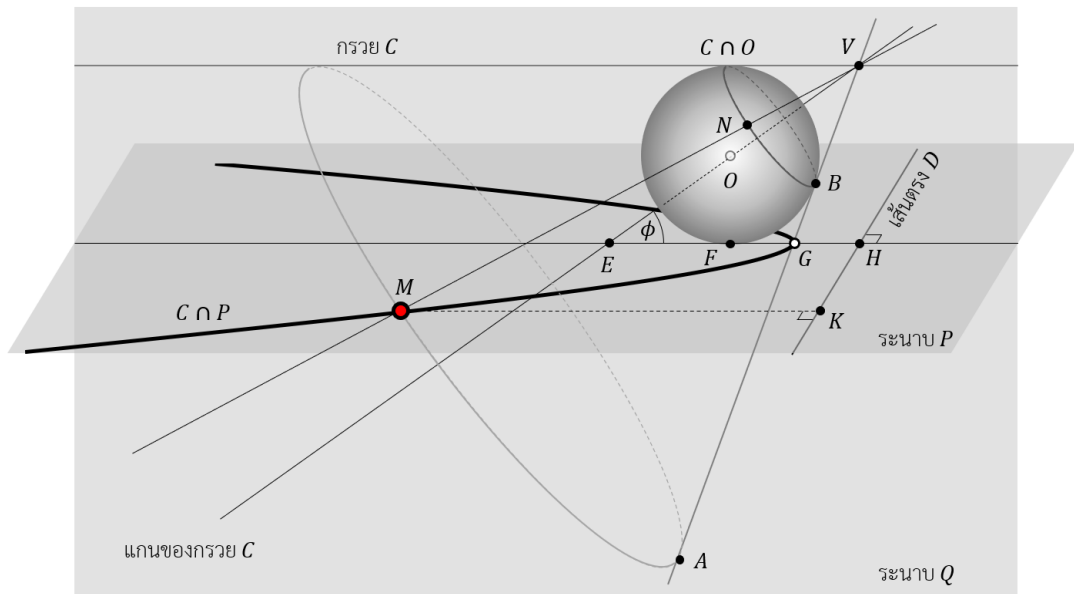
สมมติว่า $\phi = \theta$

กำหนดให้จุด M เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัด $C \cap P$

สร้าง

- ทรงกลม O รัศมี r ซึ่งเป็นทรงกลมแนบในกรวย C สัมผัสกับระนาบ P ที่จุด F
- จุด E เป็นจุดตัดระหว่างแกนของกรวย C กับระนาบ P ดังนั้น $\angle OEF = \phi = \theta$
- ระนาบ Q ซึ่งเป็นระนาบผ่านจุด V จุด O และจุด F
- จุด G บน $C \cap P$ ซึ่งอยู่บนระนาบ Q
- เส้นตรง D บนระนาบ P ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง $\overrightarrow{FG}$ และอยู่ห่างจากจุด G เป็นระยะ $|\overline{FG}|$
- จุด K บนเส้นตรง D ซึ่งเกิดจากการฉายจุด M ลงบนเส้นตรง D (นั่นคือ $\overline{MK} \perp D$)
- เส้นตรง $\overline{MV}$ บนกรวย C ซึ่งเส้นตรงนี้สัมผัสกับทรงกลม O ที่จุด N
- จุด A บนเส้นตรง $\overline{VG}$ ซึ่งมีระยะ $|\overline{AV}|$ สอดคล้องกับสมการ $|\overline{AV}| = |\overline{MV}|$

เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $\overline{FG} \cap D = \{H\}$ และ $\overline{VG} \cap (C \cap O) = \{B\}$ ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 ทรงกลม O และเส้นตรง D พร้อมจุดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องจากการสร้างข้างต้น

เนื่องจากกระนาบ P สัมผัสทรงกลม O ที่จุด F ขณะที่เส้นตรง $\overrightarrow{MV}$ สัมผัสทรงกลม O ที่จุด N ทำให้

$$\angle OFM = \frac{\pi}{2} = \angle ONM$$

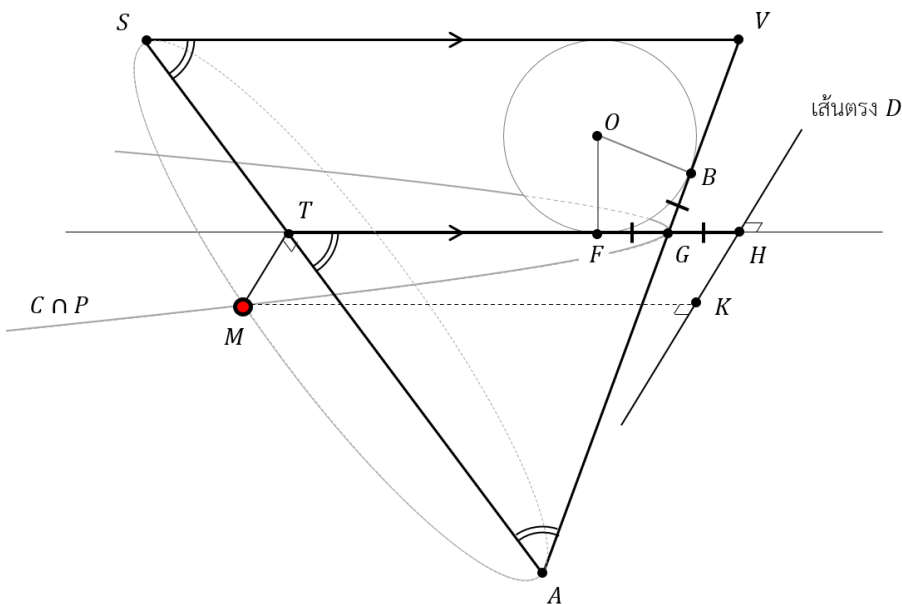
นอกจากนี้ สังเกตว่า $|\overline{OF}| = r = |\overline{ON}|$ และ $\overline{OM}$ เป็นด้าน (ตรงข้ามมุมฉาก) ร่วมของสามเหลี่ยมมุมฉาก OFM และ ONM ดังนั้นโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจึงสรุปว่า

$$|\overline{FM}| = |\overline{NM}|$$

สังเกตว่า $\overrightarrow{MV}$ และ $\overrightarrow{AV}$ ต่างเป็นเส้นสัมผัสตรงกลมนกรวย C ซึ่ง $|\overrightarrow{MV}| = |\overrightarrow{AV}|$ ดังนั้น

$$|\overline{FM}| = |\overline{NM}| = |\overline{MV}| - |\overline{NV}| = |\overline{AV}| - |\overline{BV}| = |\overline{AB}|$$

(พิจารณารูปที่ 2.11 ประกอบ)



รูปที่ 2.12 ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดต่าง ๆ บนระนาบซึ่งผ่านจุด A , จุด V และ จุด S

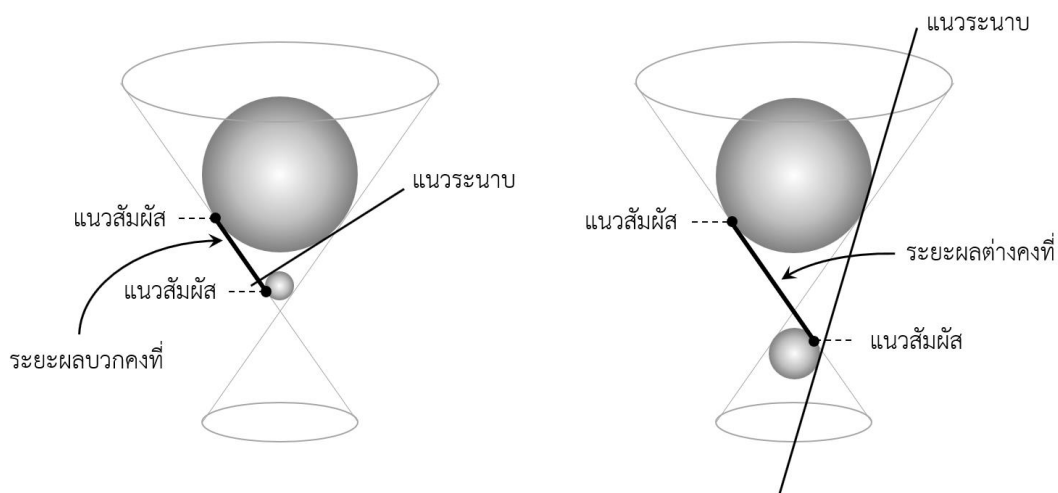
เนื่องจาก $\overrightarrow{FG}$ และ $\overrightarrow{AV}$ สัมผัสทรงกลม O ที่จุด F และจุด B ตามลำดับ และโดยสมบัติของจุด H ทำให้ทราบว่า $|\overrightarrow{HG}| = |\overrightarrow{FG}| = |\overrightarrow{BG}|$ ดังนั้น

$$|\overline{FM}| = |\overline{AB}| = |\overline{AG}| + |\overline{BG}| = |\overline{TG}| + |\overline{HG}| = |\overline{TH}| = |\overline{MK}| \quad \square$$

3. สรุป

จากบทพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2 ทั้ง 4 กรณี พบว่า ภาคตัดกรวยซึ่งเกิดจากรอยตัดระหว่างกรวยกับระนาบซึ่งไม่ผ่านจุดยอดของกรวยจะเป็น วงกลม วงรี พาราโบลา หรือ ไฮเพอร์โบลา โดยวิธีการพิสูจน์ดังกล่าวได้รับการนำเสนอโดย เจอมีนัล ปีแอร์ ดองเดอแลง ซึ่งอาศัยเพียงแนวคิดของเรขาคณิตสังเคราะห์เท่านั้น นอกจากนี้ ข้อมูลที่น่าสนใจสองประการที่ได้จากการพิสูจน์ คือ

- จุดโฟกัสของเส้นโค้งทั้งสี่กรณี แท้ที่จริงแล้ว คือ จุดสัมผัสระหว่างทรงกลมแนบในกรวยที่สัมผัสกับระนาบ
- ผลบวกคงที่ในบทนิยามของวงรี และ ผลต่างคงที่ในบทนิยามของไฮเพอร์โบลา ที่ปรากฏในเนื้อหาตามแบบเรียนว่าเท่ากับ $2a$ แท้จริงแล้ว คือ ระยะห่างระหว่างรอยสัมผัสของทรงกลมทั้งสองกับผิวของกรวยเมื่อวัดตามผิวของกรวย นั่นเอง ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ภาพแสดงระยะผลบวกคงที่กรณีวงรี และ ระยะผลต่างคงที่กรณีไฮเพอร์โบลา

เอกสารอ้างอิง

- [1] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2* (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค.

The Institute for The Promotion of Teaching Science and Technology, Ministry of Education. (2018). *Supplementary Mathematics for 10th Grade, No.2* (1st ed.). Bangkok: OTEP Press.

- [2] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2554). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค.

The Institute for The Promotion of Teaching Science and Technology, Ministry of Education. (2011). *Supplementary Mathematics for 10th - 12th Grade, No.2* (3rd ed.). Bangkok: OTEP Press.

- [3] สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม. 4 เล่ม 2*. กรุงเทพมหานคร: แม็คเอ็ดดูเคชั่น.

- Palawatchai, S. (2018). *Supplementary Mathematics for 10th Grade, No. 2*. Bangkok: Mac Education.
- [4] Bertrand, M. (2015). *Dandelin Spheres and The Conic Sections*. Retrieved 3 September 2020 from <http://nonagon.org/ExLibris/dandelin-spheres-conic-sections>.
- [5] Dandelin, G. P. (1822). Mémoire Sur Quelques Propriétés Remarquables de la Focale Parabolique (Memoir on Some Remarkable Properties of The Focus of The Parabola). *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles*, 2, p. 171 - 202.
- [6] Kendig, K. (2005). *Conics*. USA: The Mathematical Association of America.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66 (705) กันยายน – ธันวาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

อัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อบนวงกลม

A Ratio on The Cut Line of Butterfly's Wings on A Circle

อรรณพ แก้วขาว^{1,*} และ วรเชษฐ ชันทอง²

^{1,2}ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี 20131

Annop Kaewkhao^{1,*} and Warachat Khuntong²

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, Chonburi 20131

Email: ¹tor_idin@buu.ac.th ²warachat12345@gmail.com

วันที่รับบทความ : 13 พฤศจิกายน 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 26 เมษายน 2564 วันที่ตอบรับบทความ : 31 กรกฎาคม 2564

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอความสัมพันธ์ของอัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อบนวงกลม ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้สามารถนำไปพิสูจน์ทฤษฎีบทผีเสื้อ โดยใช้เพียงสมบัติพื้นฐานของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมในการพิสูจน์

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทผีเสื้อ

ABSTRACT

In this paper, we propose a relation of a ratio on the cut line of butterfly's wings on a circle using the basic properties of triangular areas to prove it. The result can be

* ผู้เขียนหลัก

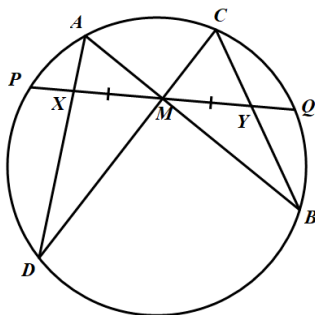
used to prove the original butterfly theorem.

Keywords: Butterfly theorem

1. ทฤษฎีบทผีเสื้อ

ในปี ค.ศ. 1805 William Wallace ได้ค้นพบความสัมพันธ์บนรูปร่างทางเรขาคณิตที่มีลักษณะคล้ายปีกผีเสื้อ (butterfly's wings) ในวงกลม ดังรูปที่ 1.1 ซึ่งต่อมาเรียกผลงานนี้ว่า ทฤษฎีบทผีเสื้อ (Butterfly theorem) ซึ่งกล่าวไว้ว่า

ทฤษฎีบท 1.1 [1] กำหนดให้ PQ , AB และ CD เป็นคอร์ดบนวงกลม ซึ่งจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ และ AB , CD ผ่านจุด M ถ้า AD และ BC ตัดคอร์ด PQ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ แล้ว $XM = MY$



รูปที่ 1.1 ปีกผีเสื้อในวงกลม

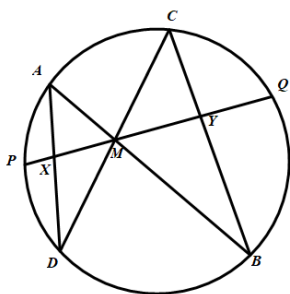
ต่อมา นักคณิตศาสตร์ที่หลงใหลในเรขาคณิตได้นำเสนอวิธีการพิสูจน์ใหม่ ดังปรากฏใน [1], [2], [4], [5] และ [7] รวมถึงมีการพิจารณาขยายทฤษฎีบทผีเสื้อในหลากหลายลักษณะ เช่น การพิจารณาเมื่อจุด M เป็นจุดภายนอกวงกลม ดังปรากฏใน [6] และ [8] การพิจารณารูปผีเสื้อบนวงรี ดังปรากฏใน [9] การพิจารณารูปผีเสื้อบนรูปสี่เหลี่ยม ดังปรากฏใน [3] ซึ่งจะเห็นได้ว่าถึงแม้ทฤษฎีบทผีเสื้อจะถูกค้นพบมาตั้งแต่ต้นทศวรรษที่ 19 แต่ในปัจจุบันก็ยังคงได้รับความสนใจที่จะศึกษา และขยายองค์ความรู้อย่างต่อเนื่อง

2. อัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อ

บทความนี้ผู้เขียนจะได้นำเสนอผลลัพธ์ซึ่งทั่วไปกว่าทฤษฎีบทผีเสื้อ โดยการพิจารณาอัตราส่วนบนเส้นตัดปีกของรูปผีเสื้อ กล่าวคือ พิจารณาเมื่อจุด M เป็นจุดใด ๆ บน PQ ดังรูปที่ 2.1

เราจะเรียกจุด M ว่า **จุดร่วมของปิก** เรียกคอร์ด PQ ว่า **เส้นตัดปิก** และเรียกอัตราส่วน

$$\frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} \text{ ว่า อัตราส่วนบนเส้นตัดปิก}$$



รูปที่ 2.1 เส้นตัดปิก

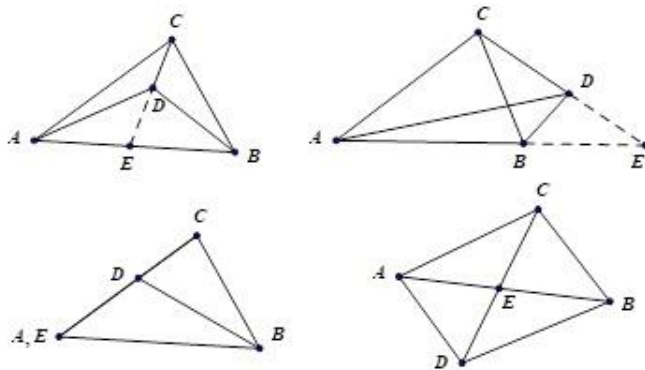
ในการพิสูจน์ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนบนเส้นตัดปิกของรูปสี่เหลี่ยมวงกลม ผู้เขียนใช้เพียงสมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมเท่านั้น กล่าวคือ

สมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

1. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะได้ว่า $[ABC] = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle CAB$
2. ให้ ABC และ ABD เป็นรูปสามเหลี่ยม ถ้า CD ตัด AB ที่จุด E แล้ว

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{CE}{DE}$$

เมื่อ $[ABC]$ แทน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

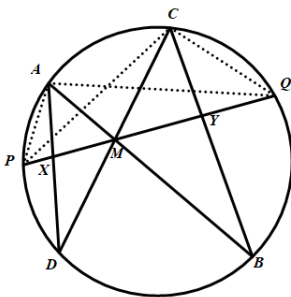


รูปที่ 2.2 ภาพประกอบสมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ข้อ 2

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ PQ , AB และ CD เป็นคอร์ดบนวงกลม ซึ่งจุด M เป็นจุดใด ๆ บน PQ และ AB, CD ผ่านจุด M ถ้า AD และ BC ตัดคอร์ด PQ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ แล้ว

$$\frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} = \frac{PM}{MQ}$$

บทพิสูจน์ ลาก AP , AQ , CP และ CQ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ประกอบบทพิสูจน์

เนื่องจาก $\angle MAX = \angle MCY$, $\angle PAX = \angle PCM$, $\angle QCY = \angle MAQ$ และ $\angle PAQ = \angle PCQ$ โดยสมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม จะได้

$$\begin{aligned} \frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} &= \frac{[PXA]}{[MXA]} \cdot \frac{[MYC]}{[QYC]} \\ &= \frac{AP \cdot AX \cdot \sin \angle PAX}{AM \cdot AX \cdot \sin \angle MAX} \cdot \frac{CM \cdot CY \cdot \sin \angle MCY}{CQ \cdot CY \cdot \sin \angle QCY} \\ &= \frac{AP \cdot \sin \angle PAX}{AM} \cdot \frac{CM}{CQ \cdot \sin \angle QCY} \\ &= \frac{AP \cdot CM \cdot \sin \angle PAX}{AM \cdot CQ \cdot \sin \angle QCY} \\ &= \frac{AP \cdot CM \cdot \sin \angle PCM}{AM \cdot CQ \cdot \sin \angle MAQ} \\ &= \frac{AP \cdot CM \cdot \sin \angle PCM}{AM \cdot CQ \cdot \sin \angle MAQ} \cdot \frac{CP}{CP} \cdot \frac{AQ}{AQ} \cdot \frac{\sin \angle PAQ}{\sin \angle PCQ} \\ &= \frac{CP \cdot CM \cdot \sin \angle PCM}{AM \cdot AQ \cdot \sin \angle MAQ} \cdot \frac{AP \cdot AQ \cdot \sin \angle PAQ}{CP \cdot CQ \cdot \sin \angle PCQ} \\ &= \frac{[PCM]}{[MAQ]} \cdot \frac{[PAQ]}{[PCQ]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[PCM]}{[PCQ]} \cdot \frac{[PAQ]}{[MAQ]} \\
 &= \frac{PM}{PQ} \cdot \frac{PQ}{MQ} \\
 &= \frac{PM}{MQ}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} = \frac{PM}{MQ}$

□

ข้อสังเกต

1. เมื่อจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ จะได้ $PM = MQ$

โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $\frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} = 1$ นั่นคือ $\frac{PX}{XM} = \frac{YQ}{MY}$ จะได้

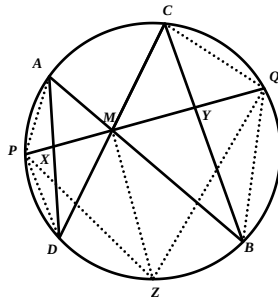
$$\begin{aligned}
 \frac{PX + XM}{XM} &= \frac{YQ + MY}{MY} \\
 \frac{PM}{XM} &= \frac{MQ}{MY}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $XM = MY$ ซึ่งก็คือทฤษฎีบทพีสัย

2. เมื่อจุด Z เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม ดังรูปที่ 2.4 โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $\frac{PX}{XM} \cdot \frac{MY}{YQ} = \frac{PM}{MQ}$

จากสมบัติพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม จะได้ความสัมพันธ์อัตราส่วนในแบบของพื้นที่ของรูป

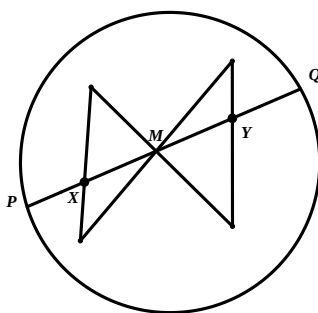
สามเหลี่ยม คือ $\frac{[PDA]}{[MDA]} \cdot \frac{[MBC]}{[QBC]} = \frac{[PZM]}{[QZM]}$



รูปที่ 2.4 รูปร่างของสามเหลี่ยม PZM และ QZM

3. ข้อเสนอแนะ

เป็นที่น่าสนใจหากสามารถพิจารณารูปแบบผีเสื้อในรูปร่างอื่น ๆ เช่น รูปแบบของผีเสื้อซึ่งอยู่เพียงภายในวงกลม ดังรูปที่ 3.1 จะมีหรือไม่ และถ้ามี จะมีเงื่อนไขอย่างไร ที่ยังคงทำให้อัตราส่วนของเส้นตัดปีกนั้นมีความสัมพันธ์กับจุดร่วมของปีก (จุด M)



รูปที่ 3.1 รูปผีเสื้อภายในวงกลม

เอกสารอ้างอิง

- [1] ภัคคินี ชิตสกุล. (2560). ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ. *วารสารคณิตศาสตร์*, 62 (691), น. 13 - 20.
Chitsakul, P. (2017). The Butterfly Theorem. *Mathematical Journal*, 62 (691), p. 13 - 20.
- [2] Celli, M. (2016). A Proof of The Butterfly Theorem Using the Similarity Factor of The Two Wings. *Forum Geometricorum*, 16, p. 337 - 338.
- [3] Cerin, Z. (2006). On Butterflies Inscribed in A Quadrilateral. *Forum Geometricorum*, 6, p. 241 - 246.
- [4] Donolato, C. (2016). A Proof of The Butterfly Theorem Using Ceva's Theorem. *Forum Geometricorum*, 16, p. 185 - 186.
- [5] Nguyen, T. D. (2017). Three Synthetic Proofs of The Butterfly Theorem. *Forum Geometricorum*, 17, p. 355 - 358.
- [6] Sledge, J. (1973). A Generalization of The Butterfly Theorem, *J. of Undergraduate Math*, 5, p. 3 - 4.

- [7] Tran, Q. H. (2016). Another Synthetic Proof of The Butterfly Theorem Using The Midline in Triangle. *Forum Geometricorum*, 16, p. 345 - 346.
- [8] Volenec, V. (2000). A Generalization of The Butterfly Theorem. *Mathematical Communications*, 5, p. 157 - 160.
- [9] Zvonko, C. (2001). A Generalization of The Butterfly Theorem from Circles to Conics. *Mathematical Communications*, 6, p. 161 - 164.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66 (705) กันยายน – ธันวาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

อัตราส่วนจำนวนเต็มของอนุกรมที่เรียงติดกัน

Integer Ratios of Some Consecutive Series

เสฐธวุธฒิ เพชรแก้ว¹ และ สุภาวดี พฤษกาพิทักษ์^{2,*}

หน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ สาขาวิทยาศาสตร์การคำนวณ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 90110

Sesthawuth Petchkaew¹ and Supawadee Prugsapitak^{2,*}

Algebra and Applications Research Unit, Division of Computational Science,

Faculty of Science, Prince of Songkla University, Songkhla 90110

Email: ¹6010210276@psu.ac.th, ²supawadee.p@psu.ac.th

วันที่รับบทความ : 7 มกราคม 2564

วันที่แก้ไขบทความ : 29 พฤษภาคม 2564

วันที่ตอบรับบทความ : 3 สิงหาคม 2564

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ ผู้ประพันธ์ได้หาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้อัตราส่วนของอนุกรมที่เรียงติดกันต่อไปนี้เป็นจำนวนเต็ม โดยอนุกรมที่สนใจได้แก่

$$B_k(n) = \frac{1}{1(1+k)} + \frac{1}{2(2+k)} + \cdots + \frac{1}{n(n+k)} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

$$C_{a,d}(n) = \sum_{i=1}^n a + (n-i)d \quad (a, d, n \in \mathbb{N}) \text{ และ}$$

$$D_{a,r}(n) = a + ar + \cdots + ar^{n-1} \quad (a, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$$

คำสำคัญ: อนุกรม อนุกรมที่เรียงติดกัน

* ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

In this article, we establish necessary and sufficient conditions for the ratio of some consecutive series to be integers. The series that we investigate in the article are as follows:

$$B_k(n) = \frac{1}{1(1+k)} + \frac{1}{2(2+k)} + \cdots + \frac{1}{n(n+k)} \quad (n, k \in \mathbb{N}),$$

$$C_{a,d}(n) = \sum_{i=1}^n a + (n-i)d \quad (a, d, n \in \mathbb{N}) \text{ and}$$

$$D_{a,r}(n) = a + ar + \cdots + ar^{n-1} \quad (a, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}).$$

Keywords: Series, Consecutive series

1. Introduction

The ratios of two consecutive powers were studied by many mathematicians [1, 3]. One of the unsolved problems is to find all positive integers k and $n > 1$ such that the ratio of the power sum $\frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k}$ is an integer. In 2019, Ioulia N. Baoulina [2] studied a ratio for consecutive alternating power sums. Namely, he gave a necessary and sufficient condition for

$$\frac{1^k - 2^k + 3^k - \cdots + (-1)^{n+1} n^k}{1^k - 2^k + 3^k - \cdots + (-1)^n (n-1)^k} \quad (n, k \in \mathbb{N} \text{ and } n > 1)$$

to be an integer. From the mentioned result, it is natural to investigate the ratios for other series. In this paper, we establish necessary and sufficient conditions for the ratio of the following consecutive series to be integers:

$$B_k(n) = \frac{1}{1(1+k)} + \frac{1}{2(2+k)} + \cdots + \frac{1}{n(n+k)} \quad (n, k \in \mathbb{N}),$$

$$C_{a,d}(n) = \sum_{i=1}^n a + (n-i)d \quad (a, d, n \in \mathbb{N}) \text{ and}$$

$$D_{a,r}(n) = a + ar + \cdots + ar^{n-1} \quad (a, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}).$$

2. Main Results

Theorem 2.1 Let k and n be positive integers. Then $\frac{B_k(n+1)}{B_k(n)}$ is never an integer for all k and n .

Proof For positive integers k and n ,

$$\begin{aligned} B_k(n) &= \frac{1}{1(1+k)} + \frac{1}{2(2+k)} + \cdots + \frac{1}{n(n+k)} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+k} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+k} \right) + \cdots + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{1+k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+k} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{B_k(n+1)}{B_k(n)} &= 1 + \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1}}{1 - \frac{1}{1+k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+k} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} - \cdots - \frac{1}{n+k}}. \end{aligned}$$

For $n=1$ and $k \geq 2$, we have $\frac{B_k(2)}{B_k(1)} = 1 + \frac{k+1}{2(k+2)}$.

Since k is a positive integer, we can see that $1 < \frac{B_k(2)}{B_k(1)} < 2$.

Therefore $\frac{B_k(2)}{B_k(1)}$ is not an integer.

For $n \geq 1$ and $k=1$,

$$\begin{aligned} \frac{2}{n+1} &< 1 + \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} &< 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Since $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0$, $1 < \frac{B_1(n+1)}{B_1(n)} < 2$. Thus $\frac{B_1(n+1)}{B_1(n)}$ is not an integer.

For $n \geq 2$ and $k \geq 2$, it suffices to show that

$$\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+n} \right) < 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n+k+1}.$$

We have

$$\begin{aligned} 2n+k+1 &< n^2+nk+n+k \\ (2n+k+1)(n+k+1) &< (n+1)(n+k)(n+k+2) \\ \frac{n+k+n+1}{(n+1)(n+k)} &< \frac{n+k+2}{n+k+1} \end{aligned}$$

Thus $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+k} < 1 + \frac{1}{n+k+1}$.

Since $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+n-1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ and $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+k} < 1 + \frac{1}{n+k+1}$, our claim holds.

Thus $0 < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} - \cdots - \frac{1}{n+k}$ and this implies that $1 < \frac{B_k(n+1)}{B_k(n)} < 2$. Therefore $\frac{B_k(n+1)}{B_k(n)}$ is not an integer. $\square$

We next consider arithmetic series.

Theorem 2.2 Let a, d and n be positive integers. Then $\frac{C_{a,d}(n+1)}{C_{a,d}(n)}$ is an integer if

and only if one of the following holds:

1. $n=1$ and a divides d .
2. $n=2$ and $a=d$.

Proof For positive integers a, d and n , we have

$$\frac{C_{a,d}(n+1)}{C_{a,d}(n)} = \frac{(a+nd) + (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \cdots + (a+d) + a}{(a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + (a+(n-3)d) + \cdots + (a+d) + a}$$

$$= 1 + \frac{a + (n)d}{\frac{n}{2}(2a + (n-1)d)} = 1 + \frac{2a + 2nd}{2na + nd(n-1)}.$$

For $n=1$, we have $\frac{C_{a,d}(2)}{C_{a,d}(1)} = 1 + \frac{2a+2d}{2a} = 1 + \frac{a+d}{a} = 2 + \frac{d}{a}.$

Thus $\frac{C_{a,d}(2)}{C_{a,d}(1)}$ is an integer if and only if a divides d .

For $n=2$, we have $\frac{C_{a,d}(3)}{C_{a,d}(2)} = 1 + \frac{2a+4d}{4a+2d} = 1 + \frac{a+2d}{2a+d} = 2 + \frac{d-a}{2a+d}.$

We first consider the case $d > a$. Since $2a+d > d-a > 0$, $2a+d$ divides $d-a$ if and only if $a=d$.

Now we assume that $d \leq a$. If $2a+d$ divides $d-a$ then $d-a = m(2a+d)$ for some integer $m \leq 0$. Then $a = \frac{d(1-m)}{2m+1}$. Since $m \leq 0$ and $a, d > 0$, $2m+1 > 0$. Thus $m=0$ and this implies that $d=a$. For the converse, it is easy to see that if $d=a$ then $2a+d$ divides $d-a$.

For $n \geq 3$, $2na + nd(n-1) > 2a + 2nd$. Therefore $\frac{C_{a,d}(n+1)}{C_{a,d}(n)}$ is never an integer. $\square$

We now consider geometric series $D_{a,r}(n)$.

Theorem 3 Let $a \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then $\frac{D_{a,r}(n+1)}{D_{a,r}(n)}$ is an integer if and

only if one of the following holds:

1. $n=1$ and $r=1$.
2. n is odd and $r=-1$.
3. $n=1$ and r is an integer.
4. $n=2$ and $r=-2$.

Proof We first consider the case $r=1$ or $r=-1$.

If $r=1$ then $\frac{D_{a,1}(n+1)}{D_{a,1}(n)} = \frac{(n+1)a}{na} = 1 + \frac{1}{n}$ which is an integer if and only if $n=1$.

If $r = -1$ and n is odd, then $\frac{D_{a,-1}(n+1)}{D_{a,-1}(n)}$ is always an integer since $D_{a,-1}(n+1) = 0$.

Thus we next consider the nontrivial case as follows.

It is easy to see that if $n=1$ and r is an integer then

$$\frac{D_{a,r}(n+1)}{D_{a,r}(n)} = \frac{a+ar}{a} = \frac{a(1+r)}{a} = 1+r$$

is an integer.

If $n=2$ and $r=-2$ then $\frac{D_{a,r}(n+1)}{D_{a,r}(n)} = \frac{a+ar+ar^2}{a+ar} = \frac{1+r+r^2}{1+r} = -3$ is an integer.

Now let $a \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0, \pm 1\}$ and $n \in \mathbb{N}$. Suppose $\frac{D_{a,r}(n+1)}{D_{a,r}(n)}$ is an integer.

Let $r = \frac{c}{d}$ where c and d are relatively prime. Then

$$\frac{D_{a,r}(n+1)}{D_{a,r}(n)} = 1 + \frac{\left(\frac{c}{d}\right)^n}{1 + \frac{c}{d} + \dots + \left(\frac{c}{d}\right)^{n-1}} = 1 + \frac{c^n}{d(d^{n-1} + cd^{n-2} + \dots + c^{n-1})}.$$

Since c and d are relatively prime and $\frac{D_{a,r}(n+1)}{D_{a,r}(n)}$ is an integer, $d=1$ and this

implies that r is an integer.

For $n=1$, $\frac{D_{a,r}(2)}{D_{a,r}(1)} = \frac{a+ar}{a} = \frac{a(1+r)}{a} = 1+r$ is an integer.

For $n=2$, $\frac{D_{a,r}(3)}{D_{a,r}(2)} = \frac{a+ar+ar^2}{a+ar} = 1 + \frac{ar^2}{a(1+r)} = 1 + \frac{r^2}{1+r} = r + \frac{1}{r+1}$ is an integer

if and only if $r = -2$.

For $n=3$, $\frac{D_{a,r}(4)}{D_{a,r}(3)} = \frac{a+ar+ar^2+ar^3}{a+ar+ar^2} = 1 + \frac{r^3}{1+r+r^2} = r + \frac{1}{r^2+r+1}$ is an integer

if and only if $r^2+r+1 = \pm 1$. Solving $r^2+r+1 = \pm 1$ yields $r = \pm 1$ or $r = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$.

It leads to a contradiction on either case.

For $n \geq 4$, suppose $\frac{r^n}{1+r+\dots+r^{n-1}} = m$ for some integer m .

Thus $r^n = m(1+r+\dots+r^{n-1})$. If p is a prime divisor of r , p does not divide $1+r+\dots+r^{n-1}$. Thus p divides m . Since all prime divisors of r divides m and $\gcd(r, 1+r+\dots+r^{n-1}) = 1$, we have $r^n = \pm m$. Thus $1+r+\dots+r^{n-1} = \pm 1$ and this implies that $r+r^2+\dots+r^{n-1} = 0$ or $r+r^2+\dots+r^{n-1} = -2$. If $r+r^2+\dots+r^{n-1} = 0$ then $r(1+r+r^2+\dots+r^{n-2}) = 0$. Thus $r = 0$ or $1+r+r^2+\dots+r^{n-2} = 0$. The latter case implies that r divides ± 1 and this is a contradiction. If $r+r^2+\dots+r^{n-1} = -2$ then $r = \pm 1$ or $r = \pm 2$. Since $r \neq \pm 1$ and $r+r^2+\dots+r^{n-1} = -2 < 0$, $r = -2$. Thus $r+r^2+\dots+r^{n-1} = r$. So $r^2+r^3+\dots+r^{n-1} = 0$. Therefore, $r = 0$ or $1+r+\dots+r^{n-3} = 0$. Since $n \geq 4$, the latter case implies that r divides 1 which is a contradiction. $\square$

Acknowledgements

We sincerely thank the referees for their valuable comments.

Reference

- [1] Baoulina, I. N., Moree, P. (2016). *Forbidden Integer Ratios of Consecutive Power Sums*. In: Sander, J., Steuding, J., Steuding, R., eds. *From Arithmetic to Zeta-Functions: Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz*, p. 1 - 30. Springer.
- [2] Baoulina, I. N. (2019). Integer Ratios of Consecutive Alternating Power Sums. *The American Mathematical Monthly*, 126 (7), p. 651 - 654.
- [3] Moree, P. (2013). Moser's Mathemagical Work on The Equation $1^k + 2^k + \dots + (m-1)^k = m^k$. *Rocky Mountain J. Math.* 43 (5), p. 1707 - 1737.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66 (705) กันยายน – ธันวาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1 ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

The Learning Management with STEM Education Concept on Statistics 1 for Grade 7 Students

วีรยา ฐูปหอม¹ พรพิทักษ์ เหมบาสัตย์² และ วรณพล พิมพะสาลี^{3,*}

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์และนวัตกรรมการศึกษา มหาวิทยาลัยกาฬสินธุ์ กาฬสินธุ์ 46000

²สาขาวิชานวัตกรรมเพื่อการพัฒนาท้องถิ่น คณะศิลปศาสตร์ มหาวิทยาลัยกาฬสินธุ์ กาฬสินธุ์ 46000

³สาขาวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสุขภาพ
มหาวิทยาลัยกาฬสินธุ์ กาฬสินธุ์ 46000

Weeraya Thoophom¹, Ponpitak Hembasat² and Wannapol Pimpasalee^{3,*}

¹Department of Mathematics, Faculty of Education and Educational Innovation,
Kalasin University, Kalasin 46000

²Department of Innovation for Local Development, Faculty of Liberal Arts,
Kalasin University, Kalasin 46000

³Department of Science and Mathematics, Faculty of Science and Health Technology,
Kalasin University, Kalasin 46000

Email: ¹oum_zazalovelove@hotmail.co.th ²hembasat_5605@hotmail.com
³pwannapol@yahoo.com

วันที่รับบทความ : 16 เมษายน 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 29 กรกฎาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 14 ธันวาคม 2564

* ผู้เขียนหลัก

บทคัดย่อ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ส่งเสริมกระบวนการคิดเพื่อวิเคราะห์และแก้ไขปัญหา การสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นบรรยายส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถมองคณิตศาสตร์อย่างเป็นรูปธรรมได้ ดังนั้นผู้สอนควรเน้นให้นักเรียนปฏิบัติและแก้ปัญหาด้วยตนเอง สะเต็มศึกษาถือเป็นการจัดการเรียนรู้เชิงรุกที่เน้นการปฏิบัติ ในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องสถิติ 1 ของนักเรียน ด้วยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา หลังเรียนเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 2) ศึกษาคะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน และ 3) ศึกษาความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งในจังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 43 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสถิติ 1 และแบบสอบถามความพึงพอใจ ผลการศึกษาพบว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน เรื่องสถิติ 1 ด้วยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 2) นักเรียนจำนวน 20 คน มีคะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์อยู่ในระดับปานกลาง คิดเป็นร้อยละ 46.51 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และ 3) ความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาของนักเรียนอยู่ในระดับความพึงพอใจมากที่สุด

คำสำคัญ: สะเต็มศึกษา ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์

ABSTRACT

Mathematics is a subject that supports thinking processes of analyses and problem solving. Mathematics teaching with emphasis on lectures results in students not being able to look at mathematics in concrete. Therefore, teachers should focus on students' practice and problem solving on themselves. STEM education is an active learning that focuses on practice. The purpose of this study were to 1) compare students learning achievement in Statistics 1 after going through STEM teaching method with 70% criterion, 2) study relative gain score of students' learning achievement, and 3) study instructional satisfaction of students. The sample of this

study was 43 grade 7 students of a school in Kalasin province studying in the second semester of the academic year 2018 drawn by cluster random sampling. Instruments were lesson plans designed based on the STEM education under the topic of Statistics 1, achievement test on Statistics 1, and instructional satisfaction test. The results of the research were shown as follows: 1) student learning achievement in Statistics 1 after going through STEM teaching method is higher than the criterion of 70% with statistical significance at the level 0.05, 2) 20 students, or 46.51% of all students, had a relative gain score in medium level and 3) students' satisfaction towards STEM education approach was classified on the highest level.

Keywords: STEM education, Learning achievement, Relative gain score

1. บทนำ

การเปลี่ยนแปลงในศตวรรษที่ 21 ส่งผลต่อวิถีชีวิตของคนในสังคม ระบบการศึกษาจึงจำเป็นต้องพัฒนา เพื่อสนองต่อการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นนี้ จากเดิมที่การศึกษามุ่งเน้นให้ผู้เรียนมีทักษะเพียงอ่านออกเขียนได้เท่านั้น แต่ในศตวรรษที่ 21 การศึกษาต้องมุ่งเน้นให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ การปฏิบัติ และการสร้างแรงบันดาลใจไปพร้อมกัน กล่าวคือ ผู้เรียนจะไม่เป็นเพียงผู้รับอีกต่อไป แต่ผู้เรียนต้องฝึกการเรียนรู้จากการลงมือปฏิบัติจริง และการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง โดยมีครูเป็นเพียง “โค้ช” ที่คอยออกแบบการเรียนรู้ เพื่อช่วยให้ผู้เรียนบรรลุผลตามต้องการได้ ประการสำคัญ คือ ครูในศตวรรษที่ 21 จะต้องไม่ตั้งตนเป็น “ผู้รู้” แต่ต้องแสวงหาความรู้ไปพร้อม ๆ กันกับผู้เรียน ในขณะเดียวกันการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐานเป็นการจัดการศึกษาเพื่อปวงชน ซึ่งรัฐจะต้องจัดให้มีการศึกษาเพื่อพัฒนาเยาวชนไทยให้มีคุณลักษณะที่พึงประสงค์ ทั้งในฐานะของพลเมืองไทยและพลเมืองโลก ทั้งนี้เพื่อเป็นรากฐานที่เพียงพอสำหรับการใฝ่รู้ ใฝ่เรียน ตลอดชีวิต รวมทั้งได้พัฒนาหน้าที่การงาน และคุณภาพชีวิตส่วนตนและครอบครัว และสร้างสรรค์สังคมไทยให้เป็นสังคมแห่งการเรียนรู้ เพื่อการพัฒนาประเทศที่ยั่งยืนในอนาคต [12]

คณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการพัฒนากระบวนการคิดของมนุษย์เป็นอย่างมาก เพราะทำให้มนุษย์ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุมีผล เป็นระบบระเบียบ มีแบบแผน สามารถคิดวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ

และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิต และช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิต แต่ปัญหาที่มักพบในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์คือ นักเรียนไม่สามารถมองเห็นเนื้อหาที่เรียนเป็นรูปธรรม และไม่สามารถเชื่อมโยงเข้ากับชีวิตประจำวันได้ ซึ่งจากการรายงานผลการทดสอบการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน หรือ O-Net ประจำปีการศึกษา 2562 ของสถาบันทดสอบการศึกษาแห่งชาติ พบว่า คะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 คือ 26.73 คะแนน จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน [11] ซึ่งถือว่าเป็นคะแนนที่อยู่ในระดับค่อนข้างต่ำและต้องได้รับการพัฒนา

สะเต็มศึกษา (STEM education) เป็นอีกหนึ่งแนวทางในการจัดการศึกษาที่ช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนมีทักษะและสมรรถนะที่สอดคล้องกับความต้องการที่เปลี่ยนแปลงไปตามสังคมปัจจุบัน และความก้าวหน้าในศตวรรษที่ 21 ดังที่นักวิจัยหลายท่านทั้งในประเทศและต่างประเทศได้ใช้สะเต็มศึกษาในการจัดการเรียนรู้ในสาขาวิชาต่าง ๆ เช่น ชญานนท์ คันทมาตย์ และมณฑา ชุ่มสุคนธ์ [4] ได้พัฒนาทักษะการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 รายวิชา ส22106 สังคมศึกษา 4 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐานร่วมกับแหล่งเรียนรู้ในชุมชนภายใต้แนวคิดสะเต็มศึกษา ขนกานต์ โฉมงาม และคณะ [5] ได้พัฒนาความคิดสร้างสรรค์และการทำงานเป็นทีมของนักเรียนห้องเรียนวิศวะ-วิทย์ ในโครงการ รวม. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ผ่านกระบวนการเรียนรู้แบบสะเต็มศึกษา Caglar และคณะ [13] ได้ศึกษาการใช้แบบจำลองเทคโนโลยี Cloud ผ่านกระบวนการเรียนรู้แบบสะเต็มศึกษา สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา และ Saxton และคณะ [19] ได้ศึกษาระบบการวัดผลทางการศึกษาของนักเรียนที่ผ่านกระบวนการเรียนรู้แบบสะเต็มศึกษา โดยสรุปจะเห็นได้ว่าสะเต็มศึกษาเป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้ที่มีการบูรณาการวิทยาศาสตร์ (Science: S) เทคโนโลยี (Technology: T) วิศวกรรมศาสตร์ (Engineering: E) และคณิตศาสตร์ (Mathematics: M) และจะต้องมีการบูรณาการพฤติกรรมที่ต้องการหรือคาดหวังให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนในการเรียนรู้เนื้อหาด้วย นอกจากนี้แล้วสะเต็มศึกษายังมีส่วนช่วยในการแก้ปัญหาการขาดกำลังคนด้านสะเต็ม รวมถึงนักเรียนที่คิดว่าวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์เป็นเรื่องไกลตัว และนักเรียนที่ขาดแรงบันดาลใจในการเรียนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์อีกด้วย

การจัดการเรียนรู้แบบสะเต็มศึกษาเป็นการเรียนรู้ผ่านกิจกรรม โดยผู้เรียนจะได้ทำกิจกรรมเพื่อพัฒนาความรู้ความเข้าใจและฝึกทักษะด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี และนำ

ความรู้มาออกแบบชิ้นงานหรือวิธีการเพื่อตอบสนองความต้องการหรือแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เพื่อให้ได้เทคโนโลยี ซึ่งเป็นผลผลิตจากกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม นอกจากนี้ สะเต็มศึกษายังเป็นรูปแบบการจัดการศึกษาที่ตอบสนองต่อการเตรียมคนไทยรุ่นใหม่ในศตวรรษที่ 21 เพราะธรรมชาติของทั้ง 4 วิชา นี้ จะส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความรู้และความสามารถที่จะดำรงชีวิตได้ดีในศตวรรษที่ 21 สามารถพัฒนาให้ผู้เรียนนำความรู้ทุกแขนงทั้งด้านความรู้ ทักษะการคิด และทักษะต่าง ๆ มาใช้ในการแก้ปัญหา ค้นคว้า สร้างและพัฒนาความคิดค้นสิ่งต่าง ๆ ในโลกปัจจุบันเน้นความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง การมีส่วนร่วมของผู้เรียนกับข้อมูล เครื่องมือทางเทคโนโลยี ความยืดหยุ่นในเนื้อหาวิชา ความท้าทาย ความสร้างสรรค์ ความแปลกใหม่ และการแก้ปัญหาในโลกอนาคตได้อย่างแท้จริง

จากบริบทของโรงเรียนแห่งหนึ่งในจังหวัดกาฬสินธุ์ ที่มีการจัดการเรียนรู้ที่ยังคงเน้นรูปแบบการบรรยายอันเนื่องมาจากระยะเวลาการเรียนการสอนที่มีจำนวนจำกัด แต่เนื้อหาในหลักสูตรที่ผู้เรียนต้องเรียนมีจำนวนมาก ผู้สอนจึงต้องจัดการเรียนการสอน เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เนื้อหาสาระวิชาครบตามที่หลักสูตรได้กำหนดไว้ จากการสอบถามผู้เรียนถึงแนวการจัดการเรียนรู้ที่ผู้เรียนต้องการ ผู้เรียนส่วนใหญ่ต้องการให้ครูผู้สอนเน้นการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการบรรยายมากกว่าการจัดการเรียนรู้ที่เน้นลงมือปฏิบัติ โดยให้เหตุผลว่า การเรียนการสอนในระดับมัธยมศึกษาผู้เรียนจำเป็นต้องเน้นเนื้อหาสาระ เพื่อใช้ในการสอบแข่งขันต่าง ๆ ทั้งการสอบวัดความรู้เนื้อหาวิชาจากกิจกรรมที่โรงเรียนจัดขึ้นหรือทางสถานศึกษาจัดแข่งขัน เป็นต้น ผู้เรียนจึงให้ความสำคัญกับเนื้อหาความรู้ในบทเรียนมากกว่าการเรียนการสอนที่เน้นทักษะกระบวนการลงมือปฏิบัติจริง จากข้อมูลที่ได้มาจะพบว่า การที่ผู้เรียนไม่เห็นความสำคัญของการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากไม่สามารถนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงได้นั้น ส่งผลให้ผู้เรียนขาดทักษะกระบวนการที่สำคัญในการนำความรู้คณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งในความเป็นจริงการเรียนเพียงเพื่อมุ่งเนื้อหาสาระ ผู้เรียนสามารถที่จะเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง เช่น การอ่านหนังสือ ทบทวน การดูสื่อการสอนในสื่อออนไลน์

จากปัญหาข้างต้น ผู้วิจัยจึงเห็นความสำคัญของการจัดการเรียนรู้ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญของคณิตศาสตร์ที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในชีวิตจริงได้ และแสดงให้เห็นถึงในความเป็นจริงในการแก้ปัญหาซึ่งไม่ได้ใช้เพียงเนื้อหาความรู้เพียงวิชาใดวิชาหนึ่งเท่านั้น จำเป็นจะต้องใช้ความรู้ในหลากหลายวิชาในการคลี่คลายปัญหาที่เกิดขึ้น

จากปัญหาและความสำคัญข้างต้น ผู้วิจัยได้สนใจศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งในจังหวัดกาฬสินธุ์ โดยการจัดการเรียนรู้ดังกล่าว สามารถเป็นแนวทางในการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาในปัจจุบัน เพื่อให้สอดคล้องกับการพัฒนานักเรียนด้านสมรรถนะและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่กำหนดไว้

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

2.1 เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องสถิติ 1 ของนักเรียน ด้วยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา หลังเรียนเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70

2.2 เพื่อศึกษาคะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน

2.3 เพื่อศึกษาความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา

3. นิยามเชิงปฏิบัติการ

3.1 การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา (learning management with STEM education concept) หมายถึง แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่บูรณาการวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ ซึ่งมุ่งแก้ปัญหาที่พบเห็นในชีวิตจริง รวมทั้งนำไปสู่การสร้างนวัตกรรม มีการบูรณาการวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และคณิตศาสตร์ ผ่านกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม ประกอบด้วย การระบุปัญหา การรวบรวมข้อมูลและแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปัญหา การออกแบบวิธีการแก้ปัญหา การวางแผนและดำเนินการแก้ปัญหา การทดสอบประเมินผลและปรับปรุงแก้ไขวิธีการแก้ปัญหา และการนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา

3.2 คะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์ (relative gain score) หมายถึง อัตราส่วนระหว่างผลต่างของคะแนนที่วัดหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษากับคะแนนวัดครั้งแรกและผลต่างระหว่างคะแนนเต็มกับคะแนนวัดครั้งแรก แล้วคูณด้วย 100

3.3 ความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา หมายถึง ความรู้สึกและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา วัดโดยแบบประเมินความพึงพอใจที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

4. ระเบียบวิธีวิจัย

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลองเบื้องต้น (pre-experimental research) มีรูปแบบการวิจัยแบบศึกษากลุ่มเดียว โดยการทดสอบก่อนและหลังการทดลอง (one group pretest-posttest design) [16] ซึ่งมีระเบียบวิธีวิจัยดังนี้

4.1 ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โรงเรียนแห่งหนึ่งในจังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 607 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โรงเรียนแห่งหนึ่งในจังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 43 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (cluster random sampling) จากประชากร

4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

4.2.1 แผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 ซึ่งผู้วิจัยศึกษาทฤษฎี แนวคิด กระบวนการ และวิธีการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา โดยศึกษาเนื้อหาจากบทเรียนในรายวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ดำเนินการวิเคราะห์มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระสำคัญของหน่วยการเรียนรู้ เพื่อแบ่งเนื้อหาที่จะนำมาออกแบบสร้างเป็นสถานการณ์ต่าง ๆ หรือนำสถานการณ์จริงที่สอดคล้องกับเนื้อหาดังกล่าวมาเป็นสถานการณ์ปัญหา เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกกระบวนการแก้ปัญหา ค้นหาคำตอบที่แท้จริง จากนั้นผู้วิจัยได้สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งประกอบไปด้วย 6 ขั้นตอน ตามกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม คือ ขั้นที่ 1 ระบุปัญหา ขั้นที่ 2 รวบรวมข้อมูลและแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ขั้นที่ 3 ออกแบบวิธีการแก้ปัญหา ขั้นที่ 4 วางแผนและดำเนินการแก้ปัญหา ขั้นที่ 5 ทดสอบประเมินผลและปรับปรุงแก้ไขวิธีการแก้ปัญหา และขั้นที่ 6 นำเสนอวิธีการแก้ปัญหา โดยได้นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นนี้ให้ผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน พิจารณาและตรวจสอบคุณภาพด้านความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา (content validity) ซึ่งผลการตรวจสอบพบว่า แผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นมีความเหมาะสมทุกแผนการจัดการเรียนรู้ จากนั้นได้นำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไขให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น และนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้จำนวน 3 แผน ใช้ระยะเวลาในการจัดการเรียนรู้ทั้งสิ้น 9 ชั่วโมง เป็นระยะเวลา 3 สัปดาห์

4.2.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสถิติ 1 เป็นแบบทดสอบแบบปรนัยเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ครอบคลุมพฤติกรรมที่ต้องการวัด 4 ด้าน คือ ความรู้ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ และการวิเคราะห์ จำนวนทั้งสิ้น 20 ข้อ โดยผู้วิจัยได้ศึกษาตัวอย่าง ทฤษฎี และเอกสารที่เกี่ยวข้อง วิเคราะห์เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด เพื่อนำไปสร้างตาราง วิเคราะห์หลักสูตร โดยกำหนดความสำคัญของเนื้อหา กำหนดน้ำหนักของข้อสอบ สร้างแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 จำนวน 25 ข้อ แล้วเสนอผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน พิจารณาและตรวจสอบความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบกับเป้าหมายการเรียนรู้ ความถูกต้องของภาษา ตัวเลือก และการใช้คำถาม แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข พบว่าแบบทดสอบนี้มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.67 ขึ้นไปทุกข้อ และเมื่อนำแบบทดสอบที่ผ่านการพิจารณาความสอดคล้องจากผู้เชี่ยวชาญ แล้ว ไปทดลองใช้ (try out) กับนักเรียนจำนวน 30 คน ที่เคยเรียนเนื้อหา เรื่องสถิติ 1 มาแล้ว นำข้อมูลที่ได้จากการทดลองสอบมาหาคุณภาพของข้อสอบ พบว่า ค่าความยากง่ายของข้อสอบอยู่ระหว่าง 0.35 - 0.73 และค่าอำนาจจำแนกมีค่าอยู่ระหว่าง 0.23 - 0.81 [17] และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้ KR-20 ของ Kuder Richardson [15] เท่ากับ 0.87 จากนั้นคัดเลือกข้อสอบ ที่มีความเหมาะสม เพื่อนำมาใช้เป็นแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจำนวน 20 ข้อ ซึ่งแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์นี้ใช้วัดผลทั้งก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา

4.2.3 แบบวัดความพึงพอใจในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เป็นแบบวัดความพึงพอใจแบบมาตราส่วนประเมินค่า 5 ระดับ (likert scale) [18] โดยผู้วิจัยศึกษาเอกสาร ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความพึงพอใจ เพื่อกำหนดกรอบแนวคิดและขอบข่ายในการวัดความพึงพอใจให้ครอบคลุมด้านกระบวนการจัดการเรียนรู้ จากนั้นดำเนินการสร้างแบบวัดความพึงพอใจในการจัดการเรียนรู้โดยให้ครอบคลุมเนื้อหาการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาในด้านบทบาทผู้สอน บทบาทผู้เรียน การจัดการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผลและประโยชน์ที่ได้รับ ซึ่งแบบวัดความพึงพอใจนี้แบ่งออกเป็น 2 ตอน คือ ตอนที่ 1 ข้อมูลทั่วไปของผู้ตอบแบบวัดความพึงพอใจในการจัดการเรียนรู้ประกอบด้วย ชื่อ - สกุล อายุ และระดับผลการเรียนภาพรวม และตอนที่ 2 ความพึงพอใจของนักเรียนต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา จำนวน 30 ข้อ โดยแบบวัดความพึงพอใจนี้ได้รับการตรวจสอบความถูกต้อง ความตรงเชิงเนื้อหาจากผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่านพบว่า ผลประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับพฤติกรรมที่ต้องการวัด มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.67 ขึ้นไปทุก

ข้อ จากนั้นนำข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญมาปรับแก้ และนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง โดยมีความเชื่อมั่นซึ่งคำนวณค่าสัมประสิทธิ์อัลฟา (alpha coefficient) [14] เท่ากับ 0.69

4.3 วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล

4.3.1 ก่อนทำการทดลอง ผู้วิจัยได้อธิบายบทบาทหน้าที่ของผู้เรียน และบทบาทของผู้วิจัย เพื่อให้กลุ่มตัวอย่างเข้าใจ และเตรียมความพร้อมของตนเองในการวิจัยครั้งนี้ หลังจากนั้นให้กลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนการจัดการเรียนรู้ เรื่องสถิติ 1 จำนวน 20 ข้อ

4.3.2 ผู้วิจัยดำเนินการสอนกลุ่มตัวอย่าง ตามแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1 เป็นระยะเวลา 9 ชั่วโมง ตัวอย่างของแผน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ระบุปัญหา

1. ครูเปิดวิดีโอเกี่ยวกับข่าวฝุ่นละอองขนาดเล็กที่จังหวัดใกล้เคียงให้นักเรียนได้ตระหนักถึงอันตราย หลังจากนั้นครูนำเข้าสู่บทเรียน เพื่อให้นักเรียนรู้จักและเห็นความสำคัญของมลพิษ โดยครูนำเสนอสถานการณ์ในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องดังตัวอย่าง

2. ครูใช้คำถามนำว่า “ถ้านักเรียนเป็นเจ้าหน้าที่ในสำนักงานจัดการคุณภาพอากาศและเสียงที่ได้รับมอบหมายหน้าที่เกี่ยวกับการเฝ้าระวังและเตือนภัยเกี่ยวกับปริมาณฝุ่นละอองขนาดเล็ก นักเรียนจะมีวิธีการเฝ้าระวังและเตือนภัยอย่างไร”

3. จากข้อมูลข้างต้น ครูให้นักเรียนออกแบบเครื่องมือเพื่อที่จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 2 รวบรวมข้อมูลและแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปัญหา

1. ครูให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มแสวงหาข้อมูลเพิ่มเติม โดยสามารถหาได้จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ เช่น ใบความรู้ หนังสือเรียน อินเทอร์เน็ต โดยครูคอยเป็นผู้ควบคุมดูแล และให้คำปรึกษากับนักเรียนแต่ละกลุ่มที่มีปัญหา

2. นักเรียนนำความรู้ที่ได้ค้นคว้าวิธีการทำแบบสอบถาม หรือแบบบันทึกการสังเกต มาแลกเปลี่ยนเรียนรู้กัน อภิปรายผลและสังเคราะห์ภายในกลุ่มว่าความรู้ที่ได้มา มีความเหมาะสมหรือไม่ เพียงพอหรือไม่ ถ้าเหมาะสมและเพียงพอก็สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหา ถ้ายังไม่เพียงพอ สมาชิกในกลุ่มต้องช่วยกันค้นคว้าเพิ่มเติมรวมถึงทบทวนข้อมูลที่ได้มาอีกครั้ง

ขั้นที่ 3 ออกแบบวิธีการแก้ปัญหา

ครูแจกกล่องอุปกรณ์ให้แต่ละกลุ่ม เพื่อให้ให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ร่วมกันและทุกคนในกลุ่มมีส่วนร่วมในการวิเคราะห์ ออกแบบและดำเนินการแก้สถานการณ์ปัญหา

ขั้นที่ 4 วางแผนและดำเนินการแก้ปัญหา

1. นักเรียนวางแผนสร้างหอคอยเตี้ย โดยมีส่วนแสดงปริมาณฝุ่น (แผนภูมิวงกลม)
2. นักเรียนร่วมกันออกแบบสรลมเตี้ย โดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์และ

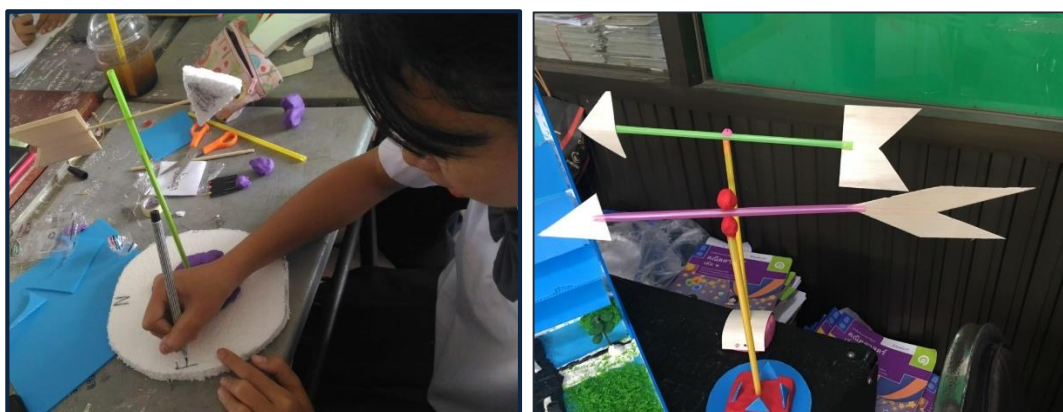
วิศวกรรมศาสตร์

ขั้นที่ 5 ทดสอบประเมินผลและปรับปรุงแก้ไขวิธีการแก้ปัญหา

ครูผู้สอนและนักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันตรวจสอบพร้อมทั้งปรับปรุงแก้ไขชิ้นงาน โดยใช้เกณฑ์การประเมินที่ครูเตรียมไว้ให้

ขั้นที่ 6 นำเสนอวิธีการแก้ปัญหา

นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอชิ้นงาน ครูผู้สอนและนักเรียนร่วมกันอภิปรายและสรุปผล



รูปที่ 4.1 ผลงานการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาของนักเรียน

4.3.3 เมื่อสิ้นสุดการจัดการเรียนรู้ตามที่กำหนด จากนั้นทำการทดสอบการจัดการเรียนรู้กับกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 จำนวน 20 ข้อ และให้กลุ่มตัวอย่างทำแบบวัดความพึงพอใจในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา จำนวน 30 ข้อ จากนั้นผู้วิจัยนำผลที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา มาคำนวณหาคะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์และนำแบบวัดความพึงพอใจมาวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ

4.4 การวิเคราะห์ข้อมูล

4.4.1 ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 โดยการหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาของกลุ่มตัวอย่าง จากนั้นวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา หลังเรียนเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้การทดสอบค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง 1 กลุ่มตามเกณฑ์ของชูศรี วงศ์รัตน์ [6]

4.4.2 วิเคราะห์คะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์ของกลุ่มตัวอย่างที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา โดยการคำนวณคะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์จากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 ก่อนเรียนและหลังเรียน โดยใช้สูตรคะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์และแปลผลคะแนนตามเกณฑ์ระดับพัฒนาการของศิริชัย กาญจนวาสี [10]

4.4.3 วิเคราะห์ระดับความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1 โดยหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับความพึงพอใจของกลุ่มตัวอย่างที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาและประเมินผลโดยใช้เกณฑ์ของบุญชม ศรีสะอาด [8]

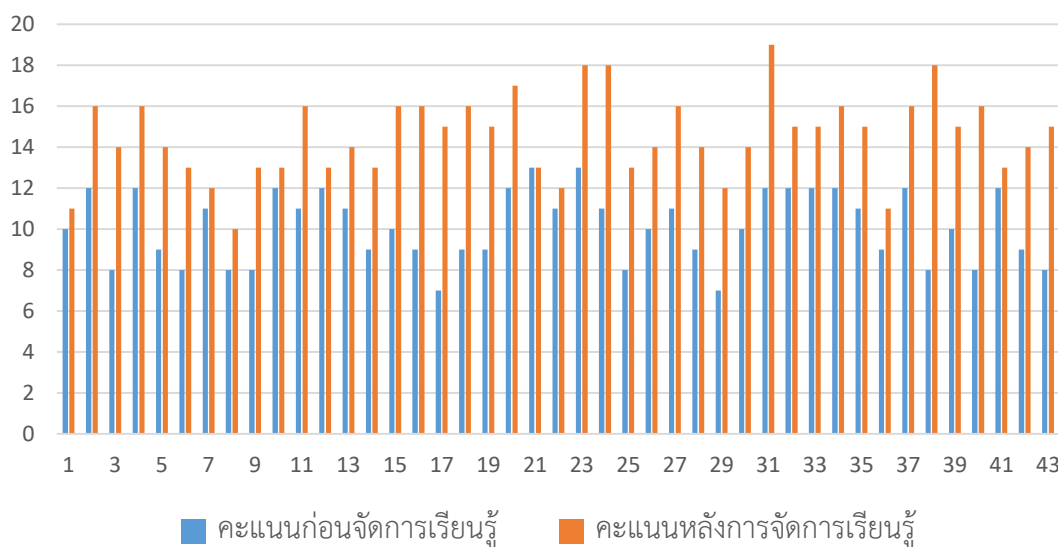
5. ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

5.1 ผลการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 ของกลุ่มตัวอย่าง จากการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา

ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 จำนวน 20 ข้อ ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง ทั้งก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา พบว่า คะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องสถิติ 1 ของกลุ่มตัวอย่างก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เท่ากับ 10.12 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1.73 แต่หลังจากการเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา พบว่า คะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องสถิติ 1 ของกลุ่มตัวอย่าง เท่ากับ 14.53 คิดเป็นร้อยละ 72.65 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.02 รายละเอียดปรากฏดังตารางที่ 5.1 และรายละเอียดคะแนนรายบุคคลแสดงดังรูปที่ 5.1 และพบว่า มีตัวอย่างจำนวน 29 คน ที่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม หรือคิดเป็นร้อยละ 67.44 ของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด และมีตัวอย่างจำนวน 14 คน ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม คิดเป็นร้อยละ 32.56

ตารางที่ 5.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา

ผลสัมฤทธิ์	จำนวน (คน)	คะแนนเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	ร้อยละคะแนนเฉลี่ย
ก่อนเรียน	43	10.12	1.73	50.60
หลังเรียน	43	14.53	2.02	72.65



รูปที่ 5.1 แผนภูมิแท่งเปรียบเทียบคะแนนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา

ตารางที่ 5.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา หลังเรียนเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70

สภาพการณ์	จำนวน (คน)	คะแนนเต็ม	ร้อยละ 70	คะแนนเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	t
หลังเรียน	43	20	14	14.53	2.02	1.72*

*มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

เมื่อวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา หลังเรียนเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 โดยใช้การทดสอบค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง 1 กลุ่ม พบว่าคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ดังแสดงในตารางที่ 5.2

5.2 ผลการศึกษาคะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์ของกลุ่มตัวอย่างที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา

ผู้วิจัยได้นำผลคะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 ของกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษามาวิเคราะห์ โดยใช้สูตรพัฒนาการสัมพัทธ์และระดับพัฒนาการตามเกณฑ์การประเมินคะแนนพัฒนาการของศิริชัย กาญจนวาสี [10] พบว่า เมื่อเรียงลำดับตามจำนวนกลุ่มตัวอย่างจากมากไปน้อยในแต่ละระดับพัฒนาการ กลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มีระดับพัฒนาการทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 อยู่ในระดับพัฒนาการระดับกลาง โดยมีจำนวนถึง 20 คน คิดเป็นร้อยละ 46.51 ระดับพัฒนาการระดับสูง มีจำนวน 11 คน คิดเป็นร้อยละ 25.58 ระดับพัฒนาการระดับต้น มีจำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 20.93 และระดับพัฒนาการระดับสูงมาก มีจำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 6.98 รายละเอียดดังตารางที่ 5.3

ตารางที่ 5.3 การวิเคราะห์ระดับพัฒนาการทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 จากการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา

คะแนนพัฒนาการสัมพัทธ์	ระดับพัฒนาการ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
76 - 100	พัฒนาการระดับสูงมาก	3	6.98
51 - 75	พัฒนาการระดับสูง	11	25.58
26 - 50	พัฒนาการระดับกลาง	20	46.51
0 - 25	พัฒนาการระดับต้น	9	20.93

5.3 ผลการศึกษาระดับความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1

ในการศึกษานี้ผู้วิจัยได้จำแนกความพึงพอใจออกเป็น 5 ด้าน คือ บทบาทผู้สอน บทบาทผู้เรียน วิธีการจัดการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล และประโยชน์ที่ผู้เรียนได้รับ โดยให้กลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถาม จากนั้นนำผลมาวิเคราะห์ ซึ่งได้ผลดังตารางที่ 5.4

จากตารางที่ 5.4 พบว่า ภาพรวมกลุ่มตัวอย่างมีระดับความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา อยู่ในระดับมากที่สุด ที่ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.78 และเมื่อพิจารณาเป็นรายด้านพบว่า บทบาทผู้เรียน มีค่าเฉลี่ยระดับความพึงพอใจสูงที่สุด ที่ 4.88 และวิธีการจัดการเรียนรู้ มีค่าเฉลี่ยระดับความพึงพอใจต่ำที่สุด ที่ 4.56 แต่ทุกองค์ประกอบมีระดับความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด

ตารางที่ 5.4 ระดับความพึงพอใจของกลุ่มตัวอย่างต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา

องค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	ระดับความพึงพอใจ
บทบาทผู้สอน	4.83	0.30	มากที่สุด
บทบาทผู้เรียน	4.88	0.22	มากที่สุด
วิธีการจัดการเรียนรู้	4.56	0.43	มากที่สุด
การวัดและประเมินผล	4.78	0.36	มากที่สุด
ประโยชน์ที่ผู้เรียนได้รับ	4.87	0.25	มากที่สุด
ภาพรวม	4.78	0.08	มากที่สุด

6. สรุปผลการวิจัย

6.1 นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1 พบว่า คะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน หลังเรียน สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ 0.05

6.2 นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา เรื่องสถิติ 1 พบว่า นักเรียนร้อยละ 20.93 มีระดับพัฒนาการอยู่ในระดับต้น นักเรียนร้อยละ 46.51 มีระดับพัฒนาการอยู่ในระดับกลาง นักเรียนร้อยละ 25.58 มีระดับพัฒนาการอยู่ในระดับสูง และนักเรียนร้อยละ 6.98 มีระดับพัฒนาการอยู่ในระดับสูงมาก

6.3 ระดับความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้ทุกด้านอยู่ในระดับความพึงพอใจมากที่สุด

7. อภิปรายผลการวิจัย

7.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 หลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา มีคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 เนื่องจากผู้วิจัยได้สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งประกอบไปด้วย 6 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 ระบุปัญหา ขั้นที่ 2 รวบรวมข้อมูลและแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ขั้นที่ 3 ออกแบบวิธีการแก้ปัญหา ขั้นที่ 4 วางแผนและดำเนินการแก้ปัญหา ขั้นที่ 5 ทดสอบประเมินผลและปรับปรุงแก้ไขวิธีการแก้ปัญหา และขั้นที่ 6 นำเสนอวิธีการแก้ปัญหา ซึ่งทำให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง ส่งผลให้นักเรียนได้เกิดความคิด

สร้างสรรค์ในการวิเคราะห์ข้อมูลและนำไปแก้ปัญหาสำคัญ ๆ ที่พบในชีวิตจริงได้ โดยที่ผู้สอนเป็นเพียงผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนและคอยให้คำแนะนำกับนักเรียนเท่านั้น ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ กมลฉัตร กล่อมอิม [1] ที่จัดการเรียนรู้แบบบูรณาการสะเต็มศึกษา สำหรับนักศึกษาวิชาชีพครู โดยการจัดการเรียนรู้มีการดำเนินการ 5 ขั้นตอน คือ ระบุปัญหา ค้นหาแนวคิดที่เกี่ยวข้อง วางแผนและพัฒนา ทดสอบและประเมินผล และนำเสนอผลลัพธ์ ซึ่งคล้ายกับการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัย ทั้งนี้ผลการวิจัยยังพบว่า สะเต็มศึกษาช่วยให้ผู้เรียนเกิดทักษะด้านความรู้ ทักษะทางปัญญา ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ ทักษะการคิดวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยี ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของเจษฎา ชวนะไพศาล, พินดา วราสุนันท์ และ สามารถ อริญารณ [3] ที่ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยบูรณาการความรู้ทางด้าน STEM ประกอบด้วย 1) เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส 2) เนื้อหาวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่อง หลักการทางพลศาสตร์ แรงยก แรงดันอากาศ 3) เนื้อหาทางด้านเทคโนโลยีในการใช้สื่ออิเล็กทรอนิกส์สืบค้นข้อมูลเนื้อหาเพิ่มเติม และ 4) เนื้อหาทางด้านหลักการทางวิศวกรรมพื้นฐาน ได้แก่ ความแข็งแรง ซึ่งการดำเนินการคล้ายกับผู้วิจัย

7.2 ระดับพัฒนาการทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ 1 อยู่ในระดับพัฒนาการระดับสูงมาก จำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 6.98 ระดับพัฒนาการระดับสูง จำนวน 11 คน คิดเป็นร้อยละ 25.58 ระดับพัฒนาการระดับกลาง จำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 46.51 และระดับพัฒนาการระดับต้น จำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 20.93 เนื่องมาจากการจัดการเรียนรู้แบบสะเต็มศึกษา มีกิจกรรมทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ที่เป็นรูปธรรมชัดเจนขึ้น ได้ฝึกฝน เรียนรู้ และลงมือปฏิบัติจริง ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ เกรียงศักดิ์ วิเชียรสร้าง, ญัฐินี โมพันธ์ และอาฟีฟ ลาเต๊ะ [2] ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับคะแนนพัฒนาการหลังจากการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาวิชาเคมี ซึ่งมีนักเรียนร้อยละ 54.67 มีระดับพัฒนาการอยู่ในระดับสูง และสอดคล้องกับงานวิจัยของ นูรออาซีกิน สาและ, ญัฐินี โมพันธ์ และมัสดี แวดราแม [7] ที่ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเคมี ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา ร้อยละ 47.62 มีระดับพัฒนาการอยู่ในระดับสูง

7.3 นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา มีระดับความพึงพอใจทั้งภาพรวมและทุกองค์ประกอบอยู่ในระดับมากที่สุด ซึ่งเป็นผลมาจากเมื่อนักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมในการ

จัดการเรียนรู้แบบสะเต็มศึกษาจริง ทุกกิจกรรมนักเรียนเป็นผู้สรุปความรู้ที่ได้รับด้วยตัวเอง โดยมีผู้สอนเป็นเพียงผู้เสริมความรู้ ส่งผลให้นักเรียนเกิดความสุขในการเรียน ไม่รู้สึกเบื่อหน่าย สอดคล้องกับงานวิจัยของ พัทมาอัสไวณี ตาเย๊ะ, ณัฐินี โมพันธ์ และมัฮดี แวดราแม [9] ที่ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิทยาศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ พบว่า ภาพรวมระดับความพึงพอใจของนักเรียนอยู่ในระดับมากที่สุด

8. ข้อเสนอแนะ

8.1 ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้

ก่อนการจัดการเรียนรู้ ครูผู้สอนควรชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจรูปแบบการจัดการเรียนรู้ และเข้าใจในบทบาทหน้าที่ของตนเองก่อน โดยครูผู้สอนมีหน้าที่เพียงคอยชี้แนะและให้คำปรึกษาอย่างใกล้ชิดเท่านั้น

8.2 ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

8.2.1 ควรศึกษาพัฒนาการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาในระดับชั้นอื่น ๆ เนื้อหาวิชาอื่น ๆ และกลุ่มสาระการเรียนรู้อื่น ๆ เพื่อศึกษาผลที่เกิดขึ้นกับนักเรียน

8.2.2 ควรมีการศึกษาการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา ซึ่งเกี่ยวข้องกับภูมิปัญญาท้องถิ่นต่อการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นภายในชุมชนของนักเรียน

เอกสารอ้างอิง

- [1] กมลฉัตร กล่อมอิม. (2560). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการสะเต็มศึกษากับการจัดการเรียนรู้ แบบปกติ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. *วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น*, 40 (2), น. 41 - 51.
- Klomim, K. (2017). The Comparision The Students with Learning Achievement with Integrated Learning Management by Using Educated STEM in The Normal Learning for The Elementary School of The Fourth Grade Students. *Journal of Education Khon Kaen University*, 40 (2), p. 41 - 51.
- [2] เกรียงศักดิ์ วิเชียรสร้าง, ณัฐินี โมพันธ์ และอาฟีฟ ลาเต๊ะ. (2561). ผลของการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษาที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเคมี ความสามารถในการแก้ปัญหาและ

ความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. *วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี*, 29 (3), น. 148 - 158.

Wicheansang, K., Mophan, N. and Lateh, A. (2018). Effect of STEM Education on Chemistry Achievement, Problem Solving Ability and Instructional Satisfaction of Grade 12 Students. *Journal of Education Prince of Songkla University*, 29 (3), p. 148 - 158.

- [3] เจษฎา ขวนะไพศาล, พินดา วราสุนันท์ และสามารถ อธิญานารณ. (2560). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดสะเต็มศึกษา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนบางเลนวิทยา. *วารสารวิชาการ Veridian E – Journal มหาวิทยาลัยศิลปากร สาขามนุษยศาสตร์ สังคมศาสตร์ และศิลปะ*, 10 (1), น. 297 - 312.

Chawanapaisarn, J., Varasunun, P., and Arunyanart, S. (2017). The Development of Mathematics Achievement on Pythagorean Theorem by Integrated STEM Education of Students in Mathayomsukasa 2 of Banglane Wittaya School. *Veridian E-Journal, Silpakorn University (Humanities, Social Sciences and Arts)*, 10 (1), p. 297 - 312.

- [4] ชญานนท์ คันทมาตย์ และมณฑา ชุ่มสุคนธ์. (2561). การพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน รายวิชา ส22106 สังคมศึกษา 4 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐานร่วมกับแหล่งเรียนรู้ในชุมชนภายใต้แนวคิดสะเต็มศึกษาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. *วารสารวิชาการแพรวกาฬสินธุ์ มหาวิทยาลัยกาฬสินธุ์*, 5 (1), น. 132 - 151.

Kuntamat, C. and Chumsukon, M. (2018). The Development of Problem Solving Skills and Learning Achievement on History Subject Soc22106 Social Studies Through Problem-Based Learning Instruction with Community Learning Resources under The STEM Education Concept for Grade 8 Students. *Prae- wa Kalasin Journal of Kalasin University*, 5 (1), p. 132 - 151.

- [5] ชนกานต์ โฉมงาม, รัฐกานต์ ณ พัทลุง, จินตนา วงศ์ดี, สุกัญญาพัฒน์ ดอกกุหลาบ, นีร วินา รัชวังค์ และวิฑูร บุญโพธิ์. (2561). การพัฒนาความคิดสร้างสรรค์และการทำงานเป็นทีมผ่าน กระบวนการเรียนรู้แบบสะเต็มศึกษาของนักเรียนห้องเรียนวิศวะ-วิทย์ (โครงการ รวมว.) มหาวิทยาลัย เทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี. *ศึกษาศาสตร์สาร มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*, 2 (1), น. 33 - 55.
- Chomngam, C., Phatthalung, R. N., Wongta, J., Dokkhularb, S., Vinarukwong N. and Boonpho, W. (2018). The Development of Creativity and Teamwork Through The STEM Education Learning Process of The Students in The Engineering Science Classroom, King Mongkut's University of Technology Thonburi (ESC-KMUTT). *CMU Journal of Education*, 2 (1), p. 33 - 55.
- [6] ชูศรี วงศ์รัตนะ. (2553). *เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย* (พิมพ์ครั้งที่ 12). นนทบุรี: ไทเนรมิต กิจ อินเตอร์ โพรเกรสซิฟ จำกัด.
- Wongrattana, C. (2010). *Techniques for Using Statistics for Research* (12th ed.). Nonthaburi: Taineramitkij Inter Progressive Co., Ltd.
- [7] นูรอซิกัน สาและ, ณัฐินี โมพันธ์ และมัยดี แวดราแม. (2560). ผลของการจัดการเรียนรู้ตาม แนวคิดสะเต็มศึกษาที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเคมี ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. *วารสารมหาวิทยาลัย นราธิวาสราชนครินทร์ สาขามนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์*, 4 (1), น. 42 - 53.
- Salaeh, N., Mophan, N., and Waedrama, M. (2017). Effect of STEM Education on Chemistry Achievement, Analytical Thinking Ability and Instructional Satisfaction of Grade 10 Students. *Princess of Naradhiwas University, Journal of Humanities and Social Sciences*, 4 (1), p. 42 - 53.
- [8] บุญชม ศรีสะอาด. (2554). *การวิจัยเบื้องต้น* (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร: สุวีริยาสาส์น.
- Srisa-ard, B. (2011). *Basic Research* (9th ed.). Bangkok: Suweeriyasan.
- [9] พัทมาอัสไวน์ ตาเย๊ะ, ณัฐินี โมพันธ์ และมัยดี แวดราแม. (2560). ผลของการจัดการเรียนรู้ตาม แนวคิดสะเต็มศึกษาที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิทยาศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ และความ พึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. *วารสารมหาวิทยาลัยนราธิวาส ราชนครินทร์ สาขามนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์*, 4 (2), น. 1 - 14.

- Tayea, F., Mophan, N., and Waedrama, M. (2017). Effect of STEM Education on Science Learning Achievement, Creative Thinking and Satisfaction of Grade 5 Students Towards The Learning Management. *Princess of Naradhiwas University, Journal of Humanities and Social Sciences*, 4 (2), p. 1 - 14.
- [10] ศิริชัย กาญจนวาสี. (2556). *ทฤษฎีการทดสอบแบบดั้งเดิม* (พิมพ์ครั้งที่ 7). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Kanjanawasee, S. (2013). *Classical Test Theory* (7th ed.). Bangkok: Chulalongkorn University Printery.
- [11] สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (องค์การมหาชน). (2563). *สรุปผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินั่นฐาน (O-Net) ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2562*. สืบค้น 9 สิงหาคม 2563, จาก http://www.newonetestresult.niets.or.th/AnnouncementWeb/PDF/SummaryONETM3_2562.pdf.
- The National Institute of Educational Testing Service (Public Organization), Thailand. (2020). *O-Net Test Results, Grade 9, Academic Year 2019* (in Thai). Retrieved 2020, August 9, from http://www.newonetestresult.niets.or.th/AnnouncementWeb/PDF/SummaryONETM3_2562.pdf.
- [12] สุคนธ์ สินธพานนท์. (2558). *การจัดการเรียนรู้ของครูยุคใหม่ เพื่อพัฒนาทักษะผู้เรียนในศตวรรษที่ 21*. กรุงเทพฯ: 9119 เทคนิคพรินติ้ง.
- Sinthapanon, S. (2015). *Management Learning of Teacher for Develop The Learners in 21th Century*. Bangkok: 9119 Technique Printing.
- [13] Caglar, F., Shekhar, S., Gokhale, A., Basu, S., Rafi, T., Kinnerbrew, J., and Biswas, G. (2015). Cloud-Hosted Simulation as A Service for High School STEM Education. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 58 (2), p. 255 - 273.
- [14] Cronbach, L. J. (1990). *Essentials of Psychological Testing* (5th ed.). New York: Harper and Row.

- [15] Ebel, R. L. and Frisbie, D. A. (1986). *Essentials of Educational Measurement*. New Jersey: Prentice-Hall.
- [16] Fraenkel, J. R. and Wallen, N. E. (2006). *How to Design and Evaluate Research in Education* (6th ed.). New York: McGraw-Hill.
- [17] Gronlund, N. E. and Linn, R. L. (1990). *Measurement and Evaluation in Teaching* (6th ed.). NewYork: Macmillan Publishing Company.
- [18] Likert, R. (1932). A Technique for The Measurement of Attitudes. *Archives of Psychology*, 140, p. 1 – 55.
- [19] Saxton, E., Burns, R., Holveck, S., Kelley, S., Prince, D., Rigelman, N., and Skinner, E. A. (2014). A Common Measurement System for K-12 STEM education: Adopting An Educational Evaluation Methodology That elevates Theoretical Foundations and Systems Thinking. *Studies in Educational Evaluation*, 40, p. 18 - 35.



วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66 (705) กันยายน – ธันวาคม 2564

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

เงื่อนไขของเลขโดดในหลักของจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

Conditions of Digit in The Places of Positive Integers Divisible by 7

ธัญยศ จำปาหวาย

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพมหานคร 10300

Thanatyod Jampawai

Division of Mathematics, Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University,
Bangkok 10300

Email: Thanatyod.ja@ssru.ac.th

วันที่รับบทความ : 20 มิถุนายน 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 21 สิงหาคม 2563

วันที่ตอบรับบทความ : 25 ธันวาคม 2563

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ศึกษาเงื่อนไขของเลขโดดในหลักต่าง ๆ ของจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว ซึ่งพบว่าผลบวกของผลคูณระหว่างเลขโดดในหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย หลักพัน หลักหมื่น หลักแสน หลักล้าน หลักสิบล้าน หลักร้อยล้าน หลักพันล้าน หลักหมื่นล้าน หลักแสนล้าน ... ของจำนวนนั้นกับ $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$ ตามลำดับ จนครบทุกหลัก ต้องหารด้วย 7 ลงตัว และนำเสนอวิธีที่ได้ไปใช้ในการหาเงื่อนไขของจำนวนเต็มบวกที่มีเลขโดดในหลักเป็นจำนวนเดียวกัน ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

คำสำคัญ: เลขโดดในหลัก จำนวนเต็มบวก การหารลงตัว

ABSTRACT

We study conditions of digit in the places of positive integers divisible by 7. We found that the sum of products of digit in the ones place, tens place, hundreds place,

thousands place, ten thousands place, hundred thousands place, millions place, ten millions place, hundred millions place, billions place, ten billions place, hundred billions place, ... and 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, ..., respectively, is divisible by 7. In addition, we study conditions of positive integers with same digits which are divisible by 7.

Keywords: Digit in the place, Positive integer, Divisibility

1. บทนำ

การศึกษาเงื่อนไขการหารลงตัวของจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนต่าง ๆ มีมากมายหลายจำนวน ดังจะปรากฏในหนังสือของ Konick และ Mercier [2] ชื่อ 1001 Problems in Classical Number Theory ปัญหาข้อที่ 323 การตรวจสอบการหารลงตัว โดยได้กล่าวถึงเงื่อนไขที่จำนวนเต็มจะหารด้วย 3, 4, 6, 7, 8, 9 และ 11 ลงตัว ซึ่งเงื่อนไขการตรวจสอบการหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนที่ไม่ใช่ 7 มีเงื่อนไขที่ไม่ซับซ้อนและถูกใช้อย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะ 3 และ 9 แต่สำหรับตัวหารที่เป็น 7 ในหนังสือเล่มนี้ได้กล่าวไว้ว่า

$$7 \text{ หาร } N \text{ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ } (100a_2 + 10a_1 + a_0) - (100a_5 + 10a_4 + a_3) + (100a_8 + 10a_7 + a_6) - \dots \equiv 0 \pmod{7}$$

เมื่อ $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ โดยที่ $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ และ $a_n \neq 0$

ตัวอย่างการตรวจสอบ 135,487 จะหารด้วย 7 ลงตัวหรือไม่ ซึ่งพบว่า

$$((100 \cdot 4) + (10 \cdot 8) + 7) - ((100 \cdot 1) + (10 \cdot 3) + 5) = 487 - 135 = 352 \equiv 2 \pmod{7}$$

ดังนั้น 7 หาร 135,487 ไม่ลงตัว ซึ่งวิธีดังกล่าว คือการลดจำนวนหลักที่เหลือเพียง 3 หลักเท่านั้น โดย Nahir [3 - 4] ได้นำเสนอวิธีลดจำนวนหลักของจำนวนเต็มไว้ดังนี้

$$7 \text{ หาร } abcdf \text{ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ } 7 \text{ หาร } abcd - 2f \text{ ลงตัว}$$

$$7 \text{ หาร } xyzw \text{ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ } 7 \text{ หาร } xyz - 2w \text{ ลงตัว}$$

$$7 \text{ หาร } stu \text{ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ } 7 \text{ หาร } st - 2u \text{ ลงตัว}$$

โดยที่ $abcdf$, $xyzw$ และ stu เป็นจำนวนเต็มบวกห้าหลัก สี่หลัก และสามหลัก ตามลำดับ

ตัวอย่างการตรวจสอบ 35,487 ว่าหารด้วย 7 ลงตัวหรือไม่ จะพิจารณาโดย

$$3548 - 2(7) = 3534$$

$$353 - 2(4) = 345$$

$$34 - 2(5) = 24$$

จะพบว่า 7 หาร 24 ไม่ลงตัว ดังนั้น 7 หาร 35,487 ไม่ลงตัว

จะเห็นได้ว่ารูปแบบทั้งสองมีความยุ่งยากในการคำนวณ เมื่อจำนวนเต็มเป็นจำนวนขนาดใหญ่ แต่ Nahir [3] ได้นำเสนออีกหนึ่งวิธีเกี่ยวกับการหารด้วย 7 ลงตัวของจำนวนเต็มบวกแปดหลัก $abcdefgh$ โดยมีเงื่อนไขว่า

$$7 \text{ หาร } a - 2b - 3c - d + 2f + 3g + h \text{ ลงตัว}$$

และอธิบายการตรวจสอบจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 7 ลงตัว โดยการพิจารณาผลบวกลักษณะดังกล่าว โดยแบ่งเป็นเซต เซตละ 3 จำนวน เช่น $ab\{cde\}\{fgh\}$ เมื่อ $N = abcdefgh$ จะเห็นว่าวิธีนี้จะอาศัยผลบวกของผลคูณระหว่างเลขโดดในแต่ละหลักกับ $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$ แต่ยังไม่รู้รูปแบบทั่วไป ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจการเขียนรูปแบบทั่วไปและการพิสูจน์เงื่อนไขดังกล่าว

ในงานวิจัยนี้ ตัวแปรที่จะกล่าวถึงจะเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด และเพื่อความสะดวกในการเขียนบทความ กำหนดให้จำนวนเต็มบวก $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ มีความหมายเดียวกับ $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ และ N แทนเซตของจำนวนนับ จากที่งานวิจัยนี้มุ่งเน้นที่การหารลงตัวของจำนวนเต็ม จึงจะขอเริ่มต้นจากการทบทวนบทนิยามของการหารลงตัว [5] ก่อน กล่าวคือ a หาร b ลงตัว เมื่อ $a \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $b = ak$ เขียนแทนด้วย $a \mid b$ และถ้า a หาร b ไม่ลงตัว จะเขียนแทนด้วย $a \nmid b$ โดยมีสมบัติบางประการเช่น

1. ถ้า $a \mid (b + c)$ และ $a \mid b$ แล้ว $a \mid c$
2. ถ้า $a \mid bc$ และ $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $a \mid c$ เมื่อ $\gcd(a, b)$ คือตัวหารร่วมมากของ a และ b

บทนิยาม 1.1 [1] จะกล่าวว่า a สมภาค b มอดุโล m เมื่อ $m > 0$ ก็ต่อเมื่อ $m \mid (b - a)$ เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{m}$ ซึ่งสมบัติของสมภาคบางประการ ได้แก่

1. ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
2. ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม c
3. ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $ac \equiv bc \pmod{m}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม c
4. ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 0$

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้า $a_j \equiv b_j \pmod{m}$ เมื่อ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^n a_j \equiv \sum_{j=1}^n b_j \pmod{m}$$

บทพิสูจน์ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน n ให้ $P(n)$ แทนข้อความของทฤษฎีบท 1.1

เห็นได้ชัด $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง และสมมติว่า $a_j \equiv b_j \pmod{m}$ เมื่อ $j = 1, 2, 3, \dots, k, k+1$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^k a_j \equiv \sum_{j=1}^k b_j \pmod{m}$$

เนื่องจาก $a_{k+1} \equiv b_{k+1} \pmod{m}$ ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{k+1} a_j = \sum_{j=1}^k a_j + a_{k+1} \equiv \sum_{j=1}^k b_j + b_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} b_j \pmod{m}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า ทฤษฎีบท 1.1 เป็นจริง $\square$

2. จำนวนเต็มบวกในรูป 10^k ที่ 7 หารลงตัว

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่า

$$10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{7}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$ โดยสมบัติของสมภาคท้ายบทนิยาม 1.1 ข้อ 4 จะได้ว่า

$$10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{7} \quad \square$$

บทแทรก 2.1 ให้ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่า

$$1. 10^{3k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{7}$$

$$2. 10^{3k+2} \equiv 2(-1)^k \pmod{7}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $10 \equiv 3 \pmod{7}$ และ $10^2 \equiv 2 \pmod{7}$ โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า

$$10^{3k} \cdot 10 \equiv (-1)^k \cdot 10 \pmod{7}$$

$$10^{3k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{7}$$

และ

$$10^{3k} \cdot 10^2 \equiv (-1)^k \cdot 10^2 \pmod{7}$$

$$10^{3k+2} \equiv 2(-1)^k \pmod{7}$$

ดังนั้นบทแทรก 2.1 เป็นจริง $\square$

3. จำนวนเต็มบวก n หลักซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

ในกรณีที่จำนวนเต็มบวก 1 หลัก เราจะไม่กล่าวถึงเนื่องจากง่ายต่อการพิจารณา ดังนั้นเราจะพิจารณากรณี $n \geq 2$ โดยที่จำนวนเต็มบวก 2 หลักที่ 7 หารลงตัว มีเงื่อนไขดังทฤษฎีบท 3.1 และจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 หลักที่ 7 หารลงตัว มีเงื่อนไขดังทฤษฎีบท 3.2

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $N = a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก 2 หลัก โดยที่ $a_0, a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ และ $a_1 \neq 0$ จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a_0 + 3a_1)$$

บทพิสูจน์ พิจารณา $N = 10a_1 + a_0 = 7a_1 + (3a_1 + a_0)$

ถ้า $7 \mid N$ จะได้ว่า $7 \mid (a_0 + 3a_1)$ ในทางกลับกัน ถ้า $7 \mid (a_0 + 3a_1)$ จะสรุปได้ว่า $7 \mid N$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $N = a_na_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n+1$ หลัก เมื่อ $0 < a_n \leq 9$ และ $0 \leq a_j \leq 9$ โดยที่ $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ และ $n \geq 2$

1. ถ้า $n \equiv 0 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n}{3}} a_n$$

2. ถ้า $n \equiv 1 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n-1}{3}} a_{n-1} + 3(-1)^{\frac{n-1}{3}} a_n$$

3. ถ้า $n \equiv 2 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{3}} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}]$$

บทพิสูจน์ ให้ $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ เมื่อ $j = 0, 1, 2, \dots, n$ และ $a_n \neq 0$ โดยทฤษฎีบท 2.1 และ

บทแทรก 2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_{3j} 10^{3j} &\equiv (-1)^j a_{3j} \pmod{7} \\ a_{3j+1} 10^{3j+1} &\equiv 3(-1)^j a_{3j+1} \pmod{7} \\ a_{3j+2} 10^{3j+2} &\equiv 2(-1)^j a_{3j+2} \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2} \\ \equiv (-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2} \pmod{7} \end{aligned}$$

1. สมมติว่า $n \equiv 0 \pmod{3}$ นั่นคือ มี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = 3k$ โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] \\ \equiv \sum_{j=0}^{k-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] \pmod{7} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_{3k}10^{3k} \equiv (-1)^k a_{3k} \pmod{7}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] + a_{3k}10^{3k} \\ \equiv \sum_{j=0}^{k-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^k a_{3k} \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 \\ \equiv \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n}{3}} a_n \pmod{7} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n}{3}} a_n$$

2. สมมติว่า $n \equiv 1 \pmod{3}$ นั่นคือ มี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = 3k + 1$ โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] \\ \equiv \sum_{j=0}^{k-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] \pmod{7} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_{3k}10^{3k} \equiv (-1)^k a_{3k} \pmod{7}$ และ $a_{3k+1}10^{3k+1} \equiv 3(-1)^k a_{3k+1} \pmod{7}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] + a_{3k}10^{3k} + a_{3k+1}10^{3k+1} \\ & \equiv \sum_{j=0}^{k-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^k a_{3k} + 3(-1)^k a_{3k+1} \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} & a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 \\ & \equiv \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n-1}{3}} a_{n-1} + 3(-1)^{\frac{n-1}{3}} a_n \pmod{7} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n-1}{3}} a_{n-1} + 3(-1)^{\frac{n-1}{3}} a_n$$

3. สมมติว่า $n \equiv 2 \pmod{3}$ นั่นคือ มี $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ซึ่ง $n = 3k + 2$ โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k [a_{3j}10^{3j} + a_{3j+1}10^{3j+1} + a_{3j+2}10^{3j+2}] \\ & \equiv \sum_{j=0}^k [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 \equiv \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{3}} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] \pmod{7}$$

สรุปได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{3}} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}]$$

ดังนั้นทฤษฎีบท 3.2 เป็นจริง

□

ตัวอย่าง 3.1 จงหาจำนวนพาลินโดรม 3 หลักทั้งหมด ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

หมายเหตุ จำนวนพาลินโดรม (Palindrome) หมายถึงจำนวนเต็มบวกที่อ่านจากด้านซ้ายไปขวา เหมือนกับด้านขวาไปซ้าย เช่น 11, 121, 2552

วิธีทำ ให้ aba เป็นจำนวนพาลินโดรม 3 หลัก

จากทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 3. จะได้ว่า $7 \mid aba$ ก็ต่อเมื่อ $7 \mid (a + 3b + 2a)$

นั่นคือ $7 \mid 3(a + b)$

เนื่องจาก $\gcd(7, 3) = 1$ จะได้ว่า

$$7 \mid aba \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a + b)$$

ดังนั้น จำนวนพาลินโดรม 3 หลักทั้งหมด ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว คือ

161	252	343	434	525	616	707
595	686	777	868	959		

ตัวอย่าง 3.2 จงหาจำนวนพาลินโดรม 4 หลักทั้งหมด ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

วิธีทำ ให้ $abba$ เป็นจำนวนพาลินโดรม 4 หลัก

จากทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 1. จะได้ว่า $7 \mid abba$ ก็ต่อเมื่อ $7 \mid (a + 3b + 2b - a)$

นั่นคือ $7 \mid 5b$

เนื่องจาก $\gcd(7, 5) = 1$ จะได้ว่า

$$7 \mid abba \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid b$$

ดังนั้น จำนวนพาลินโดรม 4 หลักทั้งหมด ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัวคือ

1,001	2,002	3,003	4,004	5,005	6,006
7,007	8,008	9,009	1,771	2,772	3,773
4,774	5,775	6,776	7,777	8,778	9,779

จากทฤษฎีบท 3.2 ถ้า $N = a_4a_3a_2a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก 5 หลัก จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4)$$

หรือ ถ้า $N = a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก 8 หลัก จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7)$$

เราอาจกล่าวได้โดยย่อว่า N เป็นจำนวนเต็มบวก n หลัก ที่หารด้วย 7 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ ผลบวกของผลคูณระหว่างเลขโดดในหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย หลักพัน หลักหมื่น หลักแสน หลักล้าน หลักสิบล้าน หลักร้อยล้าน หลักพันล้าน หลักหมื่นล้าน หลักแสนล้าน ... กับ $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$ ตามลำดับ จนครบ n จำนวน หารด้วย 7 ลงตัว นั่นเอง

ให้ K_n แทนผลบวกดังกล่าวของจำนวนเต็มบวก n หลัก และจากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.2 ทำให้ได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.1 ให้ N เป็นจำนวนเต็มบวก n หลัก จะได้ว่า

7 หาร N และ K_n ได้เศษเหลือเท่ากัน

ตัวอย่าง 3.3 จงตรวจสอบว่า 12,356,489 หารด้วย 7 ลงตัว หรือไม่ ถ้าไม่ลงตัวมีเศษเหลือเท่าใด

วิธีทำ จะเห็นว่า 12,356,489 เป็นจำนวนเต็ม 8 หลัก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} K_8 &= 9 + 3(8) + 2(4) - 6 - 3(5) - 2(3) + 2 + 3(1) \\ &\equiv 2 + 3 + 1 + 1 - 1 + 1 + 2 + 3 \pmod{7} \\ &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น 7 หาร 12,356,489 ไม่ลงตัว และมีเศษเหลือเท่ากับ 5

ตัวอย่าง 3.4 จงหาเลขโดด a ทั้งหมด ที่ทำให้ 499, a 12 หารด้วย 7 ลงตัว เมื่อ 499, a 12 เป็นจำนวนเต็มบวก 6 หลัก

วิธีทำ พิจารณา K_6 ของ 499, a 12 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} K_6 &= 2 + 3(1) + 2a - 9 - 3(9) - 2(4) \equiv 2 + 3 + 2a - 2 + 1 - 1 \pmod{7} \\ &\equiv 2a + 3 \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 2$ และ 9

4. จำนวนเต็มบวก n หลักที่ทุกหลักซ้ำกันซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $N = 111 \dots 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n + 1$ หลัก เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 6 \mid (n + 1)$$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $6 \nmid (n + 1)$

กรณี 1 $n + 1 = 6k + 1$ สำหรับบางจำนวนนับ k

จะได้ว่า $n = 6k$ นั่นคือ $n \equiv 0 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\sum_{j=0}^{\frac{6k}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] + (-1)^{\frac{6k}{3}} = \sum_{j=0}^{2k-1} 6(-1)^j + (-1)^{2k} = 0 + 1 = 1$$

จาก $7 \nmid 1$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 1. จะได้ว่า $7 \nmid N$

กรณี 2 $n + 1 = 6k + 2$ สำหรับบางจำนวนนับ k

จะได้ว่า $n = 6k + 1$ นั่นคือ $n \equiv 1 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\frac{(6k+1)-1}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] + (-1)^{\frac{(6k+1)-1}{3}} + 3(-1)^{\frac{(6k+1)-1}{3}} \\ &= \sum_{j=0}^{2k-1} 6(-1)^j + (-1)^{2k} + 3(-1)^{2k} = 0 + 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

จาก $7 \nmid 4$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2. จะได้ว่า $7 \nmid N$

กรณี 3 $n + 1 = 6k + 3$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

จะได้ว่า $n = 6k + 2$ นั่นคือ $n \equiv 2 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\sum_{j=0}^{\frac{(6k+2)-1}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] = \sum_{j=0}^{2k} 6(-1)^j = 6(-1)^{2k} = 6$$

จาก $7 \nmid 6$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 3. จะได้ว่า $7 \nmid N$

กรณี 4 $n + 1 = 6k + 4$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

จะได้ว่า $n = 6k + 3$ นั่นคือ $n \equiv 0 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\frac{6k+3}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] + (-1)^{\frac{6k+3}{3}} \\ &= \sum_{j=0}^{2k} 6(-1)^j + (-1)^{2k+1} = 6(-1)^{2k} - 1 = 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

จาก $7 \nmid 5$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 1. จะได้ว่า $7 \nmid N$

กรณี 5 $n + 1 = 6k + 5$ สำหรับจำนวนเต็ม $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

จะได้ว่า $n = 6k + 4$ นั่นคือ $n \equiv 1 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\frac{(6k+4)-1}{3}-1} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] + (-1)^{\frac{(6k+4)-1}{3}} + 3(-1)^{\frac{(6k+4)-1}{3}} \\ &= \sum_{j=0}^{2k} 6(-1)^j + (-1)^{2k+1} + 3(-1)^{2k+1} = 6(-1)^{2k} - 1 - 3 = 2 \end{aligned}$$

จาก $7 \nmid 2$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2. จะได้ว่า $7 \nmid N$

ในทางกลับกัน สมมติว่า $6 \mid (n+1)$ นั่นคือ มี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n+1 = 6k$ หรือ $n = 6k-1$
จะได้ว่า $n \equiv 2 \pmod{3}$

พิจารณา

$$\sum_{j=0}^{\frac{(6k-1)-2}{3}} [(-1)^j + 3(-1)^j + 2(-1)^j] = 6 \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j = 0$$

จาก $7 \mid 0$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2. จะได้ว่า $7 \mid N$

□

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ และ $N = aaa \dots a$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n+1$ หลัก
เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 7 \text{ หรือ } 6 \mid (n+1)$$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $7 \mid N$ และ $a \neq 7$

$$\text{จะได้ว่า } \gcd(a, 7) = 1$$

$$\text{เนื่องจาก } N = aaa \dots a = a \times (111 \dots 1) \text{ ดังนั้น } 7 \mid 111 \dots 1$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า } 6 \mid (n+1)$$

ในทางกลับกัน ในกรณีที่ $a = 7$ เห็นได้ชัดว่า $7 \mid N$

$$\text{สมมติว่า } 6 \mid (n+1) \text{ นั่นคือ มี } k \in \mathbb{N} \text{ ซึ่ง } n+1 = 6k \text{ หรือ } n = 6k-1$$

$$\text{จะได้ว่า } n \equiv 2 \pmod{3}$$

พิจารณา

$$\sum_{j=0}^{\frac{(6k-1)-2}{3}} [(-1)^j a + 3(-1)^j a + 2(-1)^j a] = 6a \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j = 0$$

จาก $7 \mid 0$ และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2. จะได้ว่า $7 \mid N$

□

5. สรุป

ให้ $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n + 1$ หลัก

ถ้า N เป็นจำนวนเต็มบวก 2 หลัก จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } 7 \mid (a_0 + 3a_1)$$

ถ้า N เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 2 หลัก จะแบ่งได้ 3 กรณีดังนี้

กรณี 1 ถ้า $n \equiv 0 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n}{3}} a_n$$

กรณี 2 ถ้า $n \equiv 1 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{3}-1} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}] + (-1)^{\frac{n-1}{3}} a_{n-1} + 3(-1)^{\frac{n-1}{3}} a_n$$

กรณี 3 ถ้า $n \equiv 2 \pmod{3}$ จะได้ว่า $7 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ

$$7 \mid \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{3}} [(-1)^j a_{3j} + 3(-1)^j a_{3j+1} + 2(-1)^j a_{3j+2}]$$

และถ้าค่าประจำหลักเป็นตัวเดียวกัน คือ $a_j = a$ เมื่อ $j = 0, 1, 2, \dots, n$ จะได้ว่า

$$7 \mid N \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 7 \text{ หรือ } 6 \mid (n + 1)$$

เอกสารอ้างอิง

- [1] อัจฉรา หาญชูวงศ์. (2542). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Harnchoowong, A. (1999). *Theory of Numbers*. Bangkok: Chulalongkorn University Printing House.
- [2] Konick, J.-M. D. and Mercier, A. (2007). *1001 Problems in Classical Number Theory*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- [3] Nahir, Y. (2003). Tests of Divisibility. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 34, p. 581 - 591.

- [4] Nahir, Y. (2008). On Divisibility Tests and The Curriculum Dilemma. *Sutra: International Journal of Mathematical Science Education*, 1 (1), p. 16 - 29.
- [5] Niven, I., Zuheman, H. S. and Montgomery, H. L. (1991). *An Introduction to The Theory of Numbers* (5th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้ ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ สรุป เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1

2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาต ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ เป็นภาพขาวดำ และลายเส้นต่าง ๆ ให้ใช้เส้นสีดำ ทั้งนี้ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับได้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป” เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ “ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nSTRU.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกของนามสกุลที่ปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทย ก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2564

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ร่วมกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้จัดการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ขึ้น โดยรอบตัดสินได้จัดในวันที่ 9 พฤศจิกายน 2564 ในระหว่างงานมหกรรมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ ประจำปี 2564 ณ ศูนย์แสดงสินค้าและการประชุม อิมแพ็ค เมืองทองธานี โดยมีผลการประกวดดังนี้



ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2564 ระดับประถมศึกษา

รางวัลที่ 1	ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล 8,000 บาท
โครงงาน	อัตราส่วนของค่ามหัศจรรย์ สร้างสรรค์ศาสตร์และศิลป์
สมาชิก	เด็กหญิงอริษา เอี่ยมละออ เด็กหญิงพรชรินทร์ จันทมา เด็กหญิงสุทัตดา พรหมวันนา โรงเรียนบ้านนาข้าว จ.เลย
รางวัลที่ 3	ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล 4,000 บาท
โครงงาน	คณิตศาสตร์ลวดลายกับดอกไม้แกะสลัก
สมาชิก	เด็กชายภาณุวิชญ์ หนูไหม เด็กชายนครินทร์ ชูทอง เด็กหญิงเยาวเรศ ดำกลิ่น เด็กหญิงชลธิชา ตั้งเคียน โรงเรียนบ้านโคกม่วง (ดำประชาอุทิศ) จ.พัทลุง
รางวัลชมเชย	ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล 2,000 บาท มี 2 รางวัล
(1) โครงงาน	อัตราส่วนของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมเมื่อต่อความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
สมาชิก	เด็กชายบัญญัติ หนูฤกษ์ เด็กชายกันตวิชญ์ ชูดำ เด็กหญิงณัฐกาญจน์ จันทร์จำปา โรงเรียนอนุบาลป่าพะยอม จ.พัทลุง
(2) โครงงาน	การหาสูตรทั่วไปของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและรูปสามเหลี่ยม- แนบใน โดยอาศัยความสัมพันธ์ของแบบรูป
สมาชิก	เด็กชายสุกฤต สิงห์ไธวะนา เด็กหญิงณัฐพร สุวีรรณ เด็กหญิงอนุธิดา สังขระ เด็กหญิงพรทิวา นิตดา โรงเรียนอนุบาลลำพูน จ.ลำพูน

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2564 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

รางวัลที่ 1	ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล 8,000 บาท
โครงงาน	รูปทั่วไปของหลุมปลูกข้าวไร่
สมาชิก	เด็กหญิงอลิษา เชื้อทะเล เด็กหญิงนิสริน มามาตย์ เด็กหญิงอันดามัน หวันด้าเห่ เด็กชายพิสิฐกร ชื้อตรง โรงเรียนคลองยางประชานุสรณ์ จ.กระบี่

รางวัลที่ 2	ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล 6,000 บาท
โครงงาน	การลดและเพิ่มจำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยมโดยพื้นที่ยังคงเท่าเดิม
สมาชิก	เด็กหญิงปิวิภา คำบุตร เด็กหญิงรมย์ธิดา สุขสัมพันธ์ เด็กหญิงภคพร หลวงนุช โรงเรียนบ้านไร่พิทยาคม จ.สุโขทัย

รางวัลที่ 3	ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล 4,000 บาท
โครงงาน	ทอระบายน้ำพลังโซลลอยด์
สมาชิก	เด็กชายฐนันต์ นุ่มเกตุ เด็กชายพสุธร แสงแก้ว นายยศุตมาศ แป้นไทย โรงเรียนสภาราชนี จ.ตรัง

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2564 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

รางวัลที่ 2	ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล 6,000 บาท
โครงงาน	ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่มีค่านอร์มน้อยที่สุด ของสมการไดโอแฟนไทน์ เชิงเส้น n ตัวแปร
สมาชิก	นายภูริณัฐ ช่วยศรี นายศรชัย สมสกุล นายศุภวิชญ์ ณ ถลาง โรงเรียนภูเก็ตวิทยาลัย จ. ภูเก็ต

รางวัลที่ 3	ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล 4,000 บาท มี 3 รางวัล
(1) โครงงาน	การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่เกิดจากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดของ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วในชั้นที่ n
สมาชิก	นายเนออัน อมรวิญญูเกียรติ นายรณกฤต รัตตมณี นายพันธวัช สามัคคี โรงเรียนบูรณะรำลึก จ.ตรัง
(2) โครงงาน	การสร้างตัวแบบความต้องการปริมาณน้ำแข็งสำหรับจำหน่าย ด้วยพฤติกรรมเชิงความน่าจะเป็น
สมาชิก	นายภูมิ คลังทอง นางสาวพุดตา ยางงาม นางสาวอรุณรัศมี สัตนาโค นางสาวทิพย์ปิยะดา ใจดี โรงเรียนสือคำหาญวารินชำราบ จ.อุบลราชธานี
(3) โครงงาน	รูปแบบผลเฉลยของอนุกรมผสมอนันต์
สมาชิก	นายเกรียงศักดิ์ เสนกือ นางสาวภรณ์นภัส ไชยรัตน์ธนโชค นางสาวอักษร หมาดสตูล โรงเรียนตะกั่วป่า “เสนานุกูล” จ. พังงา

ในโอกาสนี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ขอแสดงความยินดีกับทุกท่านที่ได้รางวัล
มา ณ ที่นี้ด้วย



ประกาศ

ขอแจ้งยกเลิกการจัดทำวารสารคณิตศาสตร์ ในรูปแบบเล่มฉบับกระดาษ

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ขอแจ้งให้ทราบว่า ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2565 เป็นต้นไป สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ขอยกเลิกการจัดพิมพ์วารสารคณิตศาสตร์ เป็นรูปแบบเล่มฉบับกระดาษ (Hard copy) เพื่อเป็นการลดปริมาณการใช้กระดาษ และเพื่อความสะดวกรวดเร็วในการเผยแพร่บทความ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จะเผยแพร่วารสารคณิตศาสตร์ในช่องทางออนไลน์แทน โดยท่านสามารถเข้าถึงวารสารได้ที่เว็บไซต์ของวารสารคณิตศาสตร์ที่

<https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMath/index>

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ อยู่ระหว่างการปรับปรุงข้อกำหนด และสิทธิประโยชน์ของสมาชิกสมาคมฯ หากท่านมีข้อเสนอแนะอันจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาวารสารคณิตศาสตร์ สามารถส่งความเห็นของท่านมาที่อีเมล MathThaiOrg@gmail.com ภายในเดือนมีนาคม 2565 เพื่อนำเข้าพิจารณาในการประชุมใหญ่สามัญประจำปีของสมาคมฯ ต่อไป

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2564

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการ ในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของ สมาคมที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่ม 2) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
 - Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี
2. อบรมความรู้คณิตศาสตร์
ดูข้อมูล รายละเอียด และกำหนดการ ได้ที่ <https://www.mathassociation.net>
3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
-- งดการสอบแข่งขัน ประจำปี พ.ศ. 2564 --
4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี ครั้งที่ 25 ประจำปี พ.ศ. 2564 ในรูปแบบผสมผสาน
(The 25th Annual Meeting in Mathematics : AMM 2021)
ระหว่างวันที่ 27 – 29 พฤษภาคม พ.ศ. 2564
โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ
ร่วมกับ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เป็นเจ้าภาพ
5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทย
เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
ดูข้อมูลและกำหนดการได้ที่ <https://www.mathassociation.net> ในหัวข้อประกวดโครงงาน
 - ประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 9
(The 9th Undergraduate Applied Mathematics Conference : UAMC 2021)
ระหว่างวันที่ 23 – 24 เมษายน พ.ศ. 2564 โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เป็นเจ้าภาพ

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

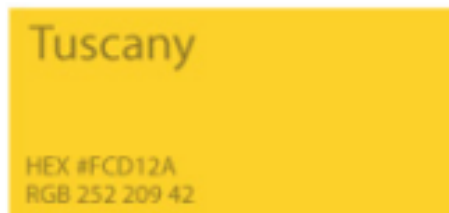
ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัยจิตรนุทิศ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ และโทรสาร 02-252-7980



สี Tuscany
HEX #FCD12A
RGB 252 209 42



Mathematical Journal

Volume 66 Number 705 September - December 2021

สีปก