ISSN XXXX-XXXX (Online)

วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๖๗ ฉบับที่ ๗๐๗ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๕ Volume 67 Number 707 May – August 2022

บทความวิจัย Research Article

www.mathassociation.net MathThaiOrg@gmail.com

ศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย Thai-Journal Citation Index Centre

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา ๖๗ ฉบับที่ ๗๐๗ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๕

ISSN XXXX-XXXX (Online)

Mathematical Journal
by The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King
Volume 67 Number 707 May – August 2022

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวชิรุณหิศ
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เล็งเห็นความสำคัญของการส่งเสริมและสนับสนุนให้มีการเผยแพร่ผลงานที่เกี่ยวเนื่องกับคณิตศาสตร์ ซึ่งจะก่อให้เกิดประโยชน์ต่อวงการการศึกษาคณิตศาสตร์ในวงกว้าง จึงได้จัดทำวารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ขึ้น โดยกำหนดเผยแพร่ปีละ 3 ฉบับ วารสารคณิตศาสตร์ ฉบับนี้เป็นฉบับที่ 2 ที่เผยแพร่ในรูปแบบออนไลน์ โดยท่านสามารถอ่านบทความต่าง ๆ ได้ที่

https://www.mathassociation.net หัวข้อ วารสารคณิตศาสตร์

ในการนี้ขอเชิญชวน ครู อาจารย์ นักวิจัย นิสิต นักศึกษา นักเรียน และบุคคลทั่วไป ส่งบทความเพื่อเผยแพร่ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยอาจจะเป็นบทความทั่วไป หรือ บทความวิชาการ หรือ บทความวิจัย ที่เกี่ยวเนื่องกับคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถดาวน์โหลดเอกสารข้อกำหนดการจัดทำบทความ Template บทความ และแบบฟอร์มส่งบทความ ได้ที่

https://www.mathassociation.net/view/home/page_paper.php ในหัวข้อ user_Manual

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหารหวังเป็นอย่างยิ่งว่าบทความทุกบทความจะก่อประโยชน์และพัฒนางานด้านคณิตศาสตร์ให้ก้าวหน้าต่อ ๆ ไป หากท่านมีคำติชมหรือข้อเสนอแนะเกี่ยวกับวารสาร สามารถส่งมาได้ที่ MathThaiOrg@gmail.com

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์

อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเอกชัย

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี 2564 - 2565

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้น จึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	**วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์**
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	*Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King*
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของบทความที่จะรับตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตรศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น • วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี • เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย • บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน • วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง

การพิจารณากลั่นกรองบทความของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้องจำนวน 3 ท่าน โดยไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จากผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่งบทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ใดมาก่อน และต้องไม่อยู่ระหว่างพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตามข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่งกองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือหน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือกระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่ https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATh/index หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตามข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้นอัพโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อมไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความMJMATH.docx) ขึ้นที่ระบบการส่งบทความ ที่ https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATh/about/submissions หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการฝ่ายบริหารของวารสาร ได้ที่ MathThaiOrg@gmail.com

ISSN XXXX-XXXX (Online)

วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๖๗ ฉบับที่ ๗๐๗ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๕ Volume 67 Number 707 May – August 2022

บทความวิจัย Research Article

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 707 พฤษภาคม – สิงหาคม 2565
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่สร้างจากค่าของพหุนาม

On Determinants of Matrices Generated From Values of Polynomials

DOI: 10.14456/mj-math.2022.4

ธนวัต ปาลกะวงศ์[1] และ เดชชาติ สามารถ[2,*]
[1]โรงเรียนชลราษฎรอำรุง ชลบุรี 20000
[2]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี 20131

Thanawat Palakawong [1] and Detchat Samart[2,*]
[1] Chonradsadornumrung School, Chonburi, 20000
[2] Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, Chonburi, 20131

Email: [1]Thanawat.palakawong03@gmail.com [2]petesamart@gmail.com

วันที่รับบทความ : 23 พฤศจิกายน 2564 วันที่แก้ไขบทความ : 10 พฤษภาคม 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 12 กรกฎาคม 2565

บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นค่าของพหุนาม ผู้เขียนแสดงว่าดีเทอร์มิแนนต์มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อดีกรีของพหุนามไม่เกิน $n-2$ และพิสูจน์สูตรทั่วไปสำหรับดีเทอร์มิแนนต์ในกรณีที่พหุนามมีดีกรีเป็น $n-1$ ซึ่งผลที่ได้สามารถนำไปอธิบายการเป็น

[*] ผู้เขียนหลัก

อิสระเชิงเส้นต่อกันของเซตของพหุนามที่เกิดจากการเลื่อนและการสเกลตัวแปรภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมบางประการ

คำสำคัญ: เมทริกซ์แวนเดอร์มอนด์ ดีเทอร์มิแนนต์ การประมาณพหุนาม

ABSTRACT

We consider a certain class of $n \times n$ matrices whose elements are given by values of polynomials. We show that their determinants vanish if the degree of the corresponding polynomial does not exceed $n-2$ and give a general formula for their determinants when the corresponding polynomial has degree $n-1$. As an immediate consequence, we deduce linear independence of sets of translations and scalings of a polynomial under suitable assumptions.

Keywords: Vandermonde matrix, Determinant, Polynomial interpolation

1. Introduction and The Main Results

Students learn from an elementary linear algebra class that, for any positive integer n, a system of n linear equations over the complex numbers with n unknowns has either a unique solution, infinitely many solutions, or no solutions. The first case occurs if and only if the matrix of coefficients of the system is nonsingular; i.e., it has nonzero determinant. Therefore, it is an interesting problem to determine whether the determinant of a given matrix vanishes. There are various of classes of matrices with zero determinant. Simple examples include those whose entries, enumerated in a zig-zag direction, form an arithmetic sequence, a geometric sequence, or a homogeneous linear recursive sequence, as illustrated below:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 11 & 14 & 17 \\ 20 & 23 & 26 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -6 & 18 \\ -54 & 162 & -486 \\ 1458 & -4374 & 13122 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 16 & 25 & 41 \\ 66 & 107 & 173 \end{pmatrix}$$

It is easily seen from their construction that the row (or column) vectors of these matrices are linearly dependent, so they all have zero determinant. In fact, the rank (i.e., the dimension of the row space) or an upper bound of the rank of each matrix in these classes is explicitly known [2]. A less obvious example is the following matrix

$$\begin{pmatrix} 3^2 & 4^2 & 6^2 & 8^2 \\ 4^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 \\ 5^2 & 6^2 & 8^2 & 10^2 \\ 6^2 & 7^2 & 9^2 & 11^2 \end{pmatrix}$$

The fact that its determinant is zero is an immediate consequence of a result due to Yandl and Swenson [5].

Proposition 1.1 [3, Prop.1, Prop.2] Let k and n be positive integers. For real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ define

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)^k & (a_1+b_2)^k & (a_1+b_3)^k & \cdots & (a_1+b_n)^k \\ (a_2+b_1)^k & (a_2+b_2)^k & (a_2+b_3)^k & \cdots & (a_2+b_n)^k \\ (a_3+b_1)^k & (a_3+b_2)^k & (a_3+b_3)^k & \cdots & (a_3+b_n)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n+b_1)^k & (a_n+b_2)^k & (a_n+b_3)^k & \cdots & (a_n+b_n)^k \end{pmatrix}$$

Then

$$\det(\mathrm{C}) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \le n-2, \\ (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \prod_{1\le i<j\le n} \left(a_j - a_i\right) \prod_{1\le i<j\le n} \left(b_j - b_i\right) & \text{if } k = n-1, \end{cases} \tag{1}$$

where $\lfloor\cdot\rfloor$ is the floor function.

Yandl and Swenson [5] gave a simple proof of Proposition 1.1 by rewriting the matrix $\mathbf{C}$ as a product of two matrices involving Vandermonde matrices, whose determinants are well-known. It turns out that one can use the same approach to extend Proposition 1.1 to a much larger class of matrices. In particular, we have the following result.

Theorem 1.1 Let $n \geq 2$ be an integer. For each $l \in \{1,2,\dots,n\}$, let $f_l(x) \in \mathbb{C}[x]$ be a polynomial of degree not exceeding $n-2$. For any $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, let $\mathrm{A} = \left[f_j\left(a_i + b_j\right)\right]_{1\leq i,j\leq n}$ and $\mathrm{B} = \left[f_j\left(a_i \cdot b_j\right)\right]_{1\leq i,j\leq n}$. Then $\mathbf{det}(\mathrm{A}) = \mathbf{det}(\mathrm{B}) = 0$.

To illustrate Theorem 1.1, we randomly choose $n = 4, f_1(x) = -x^2 + 4,$ $f_2(x) = x^2 - x + 1, f_3(x) = x + 3, f_4(x) = 4x^2 - 5x, a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = 4,$ $a_4 = -8, b_1 = -7, b_2 = 5, b_3 = 4$ and $b_4 = 2$. Then the matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} f_1(a_1+b_1) & f_2(a_1+b_2) & f_3(a_1+b_3) & f_4(a_1+b_4) \\ f_1(a_2+b_1) & f_2(a_2+b_2) & f_3(a_2+b_3) & f_4(a_2+b_4) \\ f_1(a_3+b_1) & f_2(a_3+b_2) & f_3(a_3+b_3) & f_4(a_3+b_4) \\ f_1(a_4+b_1) & f_2(a_4+b_2) & f_3(a_4+b_3) & f_4(a_4+b_4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -32 & 31 & 8 & 21 \\ -96 & 3 & 4 & 9 \\ -5 & 73 & 11 & 114 \\ -221 & 13 & -1 & 174 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} f_1(a_1b_1) & f_2(a_1b_2) & f_3(a_1b_3) & f_4(a_1b_4) \\ f_1(a_2b_1) & f_2(a_2b_2) & f_3(a_2b_3) & f_4(a_2b_4) \\ f_1(a_3b_1) & f_2(a_3b_2) & f_3(a_3b_3) & f_4(a_3b_4) \\ f_1(a_4b_1) & f_2(a_4b_2) & f_3(a_4b_3) & f_4(a_4b_4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -45 & 21 & 7 & 6 \\ -437 & 241 & -9 & 174 \\ -780 & 381 & 19 & 216 \\ -3132 & 1641 & -29 & 1104 \end{pmatrix}$$

both have zero determinant. It is clear that one can deduce [5, Prop. 1] from Theorem 1.1 by choosing $f_j(x) = x^k$ for all $1 \leq j \leq n$.

Proof of Theorem 1.1 For each $l \in \{1,2,\dots,n\}$, let

$$f_l(x) = c_{l,n-2}x^{n-2} + c_{l,n-1}x^{n-1} + \cdots + c_{l,1}x + c_{l,0}.$$

Then by expanding and rearranging terms we have

$$f_j\left(a_i + b_j\right) = a_i^{n-2}c_{j,n-2}\binom{n-2}{0} + a_i^{n-3}\left(c_{j,n-2}\binom{n-2}{1}b_j + c_{j,n-3}\binom{n-3}{0}\right) + \cdots$$
$$+ \left(c_{j,n-2}\binom{n-2}{n-2}b_j^{n-2} + \cdots + c_{j,1}\binom{1}{1}b_j + c_{j,0}\binom{0}{0}\right).$$

Therefore, we can write the matrix A as $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, where A_1 and A_2 are $n \times n$ matrices given by

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1^{n-2} & a_1^{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_2^{n-2} & a_2^{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-2} & a_n^{n-3} & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

and the j^{th} column of A_2 is

$$\begin{pmatrix} c_{j,n-2}\binom{n-2}{0} \\ c_{j,n-2}\binom{n-2}{1} + c_{j,n-3}\binom{n-3}{0} \\ \vdots \\ c_{j,n-2}\binom{n-2}{n-2} b_j^{n-2} + \cdots + c_{j,1}\binom{1}{1} b_j + c_{j,0}\binom{0}{0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Similarly, the matrix B can be decomposed into the product of A_1 and another matrix whose j^{th} column is

$$\begin{pmatrix} c_{j,n-2}b_j^{n-2} \\ c_{j,n-3}b_j^{n-3} \\ \vdots \\ c_{j,0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Since $\det(\mathrm{A}_1) = 0$, it follows from the multiplicativity of the determinant that $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{B}) = 0$. ☐

We also generalize [5, Prop. 2], which corresponds to the case $k = n - 1$ in (1), as follows.

Theorem 1.2 Let $n \geq 2$ be an integer and let $f(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1x + c_0 \in \mathbb{C}[x]$. For any $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, let $\mathrm{D} = \left[f\left(a_i + b_j\right)\right]_{1\leq i,j\leq n}$ and $\mathrm{E} = \left[f\left(a_i \cdot b_j\right)\right]_{1\leq i,j\leq n}$. Then we have

$$\det(\mathrm{D}) = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} c_{n-1}^{n} \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \prod_{1 \le i < j \le n} \left(a_j - a_i\right) \prod_{1 \le i < j \le n} \left(b_j - b_i\right), \qquad (2)$$

$$\det(\mathrm{E}) = \prod_{k=0}^{n-1} c_k \prod_{1 \le i < j \le n} \left(a_j - a_i\right) \prod_{1 \le i < j \le n} \left(b_j - b_i\right). \qquad (3)$$

Remark 1.1 It should be noted that we require a *single polynomial* to generate all elements of each matrix in Theorem 1.2, while the polynomials involved in Theorem 1.1 could vary from columns to columns. We attempted to generalize formulas (2) and (3) to matrices whose elements are generated from polynomials which vary from columns to columns but never succeeded since the calculations involved became too complicated to be handled systematically.

Recall that a *Vandermonde matrix* is a matrix of the form

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

If $\mathbf{V}$ is a square matrix (i.e., $m = n$), we have the following formula for its determinant:

$$\det(\mathrm{V}) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

which is famously known as the *Vandermonde determinant*. Before proving Theorem 1.2, we shall prove the following lemma, which can be seen as a modest generalization of the Vandermonde determinant.

Lemma 1.1 Let $n \ge 2$ be an integer. For $b_1, \ldots, b_n, r_{11}, r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32}, r_{33}, \ldots, r_{n1}, r_{n2}, \ldots, r_{nn} \in \mathbb{C}$ define an $n \times n$ matrix $\mathbf{M}$ by

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21}b_1 + r_{22} & r_{31}b_1^2 + r_{32}b_1 + r_{33} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} r_{nj}b_1^{n-j} \\ r_{11} & r_{21}b_2 + r_{22} & r_{31}b_2^2 + r_{32}b_1 + r_{33} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} r_{nj}b_2^{n-j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{11} & r_{21}b_n + r_{22} & r_{31}b_n^2 + r_{32}b_1 + r_{33} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} r_{nj}b_n^{n-j} \end{pmatrix}.$$

Then

$$\det(\mathrm{M}) = r_{11}r_{21} \cdots r_{n1} \prod_{1 \le i < j \le n} (b_j - b_i).$$

Proof Assume first that $r_{j1} \neq 0$ for all $1 \le j \le n$. Then we can perform column operations to get rid of the small powers of b_i in each column as follows:

$$\mathrm{M} \xrightarrow{c_2 - \frac{r_{22}}{r_{11}}c_1} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21}b_1 & r_{31}b_1^2 + r_{32}b_1 + r_{33} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} r_{nj}b_1^{n-j} \\ r_{11} & r_{21}b_2 & r_{31}b_2^2 + r_{32}b_1 + r_{33} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} r_{nj}b_2^{n-j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{11} & r_{21}b_n & r_{31}b_n^2 + r_{32}b_1 + r_{33} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} r_{nj}b_n^{n-j} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - \frac{r_{32}}{r_{21}}c_2 - \frac{r_{33}}{r_{11}}c_1} \cdots$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21}b_1 & r_{31}b_1^2 & \cdots & r_{n1}b_1^{n-1} \\ r_{11} & r_{21}b_2 & r_{31}b_2^2 & \cdots & r_{n1}b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{11} & r_{21}b_n & r_{31}b_n^2 & \cdots & r_{n1}b_n^{n-1} \end{pmatrix} := \widetilde{\mathrm{M}}.$$

Observe that the matrix $\widetilde{\mathrm{M}}$ is a Vandermonde matrix with the j^{th} column multiplied by the constant r_{j1}. Since the determinant is invariant under column operations, we have

$$\det(\mathrm{M}) = \det\left(\widetilde{\mathrm{M}}\right) = r_{11}r_{21} \cdots r_{n1} \prod_{1 \le i < j \le n} (b_j - b_i).$$

If $r_{j1} = 0$ for some $1 \leq j \leq n$, then either the j^{th} column of M is zero or it is a linear combination of the previous columns. Therefore, we have $\det(\mathrm{M}) = 0$ in this case and the proof is complete. □

Proof of Theorem 1.2 Following the argument in the proof of Theorem 1.1, we express the matrix D as a product of $n \times n$ matrices D_1 and D_2, where

$$\mathrm{D}_1 = \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

and the j^{th} column of D_2 is

$$\begin{pmatrix} c_{n-1}\binom{n-1}{0} \\ c_{n-1}\binom{n-1}{1} b_j + c_{n-2}\binom{n-2}{0} \\ \vdots \\ c_{n-1}\binom{n-1}{n-1} b_j^{n-1} + \cdots + c_1\binom{1}{1} b_j + c_0\binom{0}{0} \end{pmatrix}.$$

By switching $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pairs of columns in D_1, we transform it into a Vandermonde matrix. Hence we have

$$\det(\mathrm{D}_1) = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \tag{4}$$

On the other hand, we apply Lemma 1.1 to the transpose of D_2 to obtain

$$\det(\mathrm{D}_2) = c_{n-1}^{n} \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i). \tag{5}$$

Then (2) follows from (4) and (5). Next, we write the matrix E as $\mathrm{E} = \mathrm{D}_1 \mathrm{E}_2$, where

$$\mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} c_{n-1} b_1^{n-1} & c_{n-1} b_2^{n-1} & \cdots & c_{n-1} b_{n-1}^{n-1} & c_{n-1} b_n^{n-1} \\ c_{n-2} b_1^{n-2} & c_{n-2} b_2^{n-2} & \cdots & c_{n-2} b_{n-1}^{n-2} & c_{n-2} b_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_0 & c_0 & \cdots & c_0 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Consider

$$\mathrm{E}_2^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} c_{n-1}b_1^{n-1} & c_{n-2}b_1^{n-2} & \cdots & c_0 \\ c_{n-1}b_2^{n-1} & c_{n-2}b_2^{n-2} & \cdots & c_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1}b_n^{n-1} & c_{n-2}b_n^{n-2} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

We again switch columns of $\mathrm{E}_2^{\mathrm{t}}$ and take the determinant to obtain

$$\det(\mathrm{E}_2) = \det(\mathrm{E}_2^{\mathrm{t}}) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{k=0}^{n-1} c_k \prod_{1 \le i < j \le n} (b_j - b_i).$$

Therefore, we have

$$\det(\mathrm{E}) = \det(\mathrm{D}_1)\det(\mathrm{E}_2) = \prod_{k=0}^{n-1} c_k \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i) \prod_{1 \le i < j \le n} (b_j - b_i)$$

as desired. □

2. Application and Further Discussions

As an easy application of Theorem 1.2, we deduce the linear independence of sets of functions constructed from a single polynomial by translation and scaling.

Corollary 2.1 Let k be a positive integer, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ a polynomial of degree k, and let $b_0, b_1, \dots, b_k$ be complex numbers which are all distinct.

(i) The set $\mathrm{B}_1 = \{ f(x + b_0), f(x + b_1), \dots, f(x + b_k)\}$ is linearly independent.

(ii) If the coefficients of $f(x)$ are all nonzero, then the set $\mathrm{B}_2 = \{ f(b_0 x), f(b_1 x), \dots, f(b_k x)\}$ is linearly independent.

In particular, under the assumptions above, the sets B_1 and B_2 form bases for the subspace P_k of $\mathbb{C}[x]$ consisting of the polynomials of degree not exceeding k.

Proof Let $c_0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ such that

$$c_0 f(x + b_0) + c_1 f(x + b_1) + \cdots + c_k f(x + b_k) = 0.$$

Let $a_0, a_1, \dots, a_k$ be distinct complex numbers. Then for each integer i such that $0 \le i \le k$ we have

$$c_0 f(a_i + b_0) + c_1 f(a_i + b_1) + \cdots + c_k f(a_i + b_k) = 0,$$

which can be written in terms of matrices as follows:

$$\begin{pmatrix} f(a_0 + b_0) & f(a_0 + b_1) & \cdots & f(a_0 + b_k) \\ f(a_1 + b_0) & f(a_1 + b_1) & \cdots & f(a_1 + b_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(a_k + b_0) & f(a_k + b_1) & \cdots & f(a_k + b_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

By Theorem 1.2, we have that the coefficient matrix has nonzero determinant, so it is nonsingular. This implies that $c_0 = c_1 = \cdots = c_k = 0$. Hence B_1 must be linearly independent.

One can use the same argument to show that B_2 is linearly independent. (The assumption that the coefficients of $f(x)$ do not vanish is required in this case since the determinant of the corresponding coefficient matrix involves the product of these quantities.) □

As closing remarks, we propose a few questions which might be of interest to the reader.

Question 2.1 There are several results in the literature concerning ranks of matrices whose determinants are zero. What can we say about the ranks of matrices A and B in Theorem 1.1 ?

Using our results and some basic facts in linear algebra, we can partially answer this question. For example, let $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ be a polynomial of degree $n-k$ where $2 \le k \le n$ and, for $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, let $\mathrm{A} = \left[f\left(a_i + b_j\right)\right]_{1 \le i,j \le n}$. Then it is clear from Theorem 1.1 that all $(n-k+2) \times (n-k+2)$ minors of A vanish. It is a well-known fact that the rank of a matrix $\mathbf{M}$ is the largest order of any nonvanishing minor in $\mathbf{M}$ (see, for example, [3, Sec. 5.2]). Therefore, we can conclude that $\mathrm{rank(A)} \le n-k+1$.

Similarly, if $\mathrm{B} = \left[f\left(a_i \cdot b_j\right)\right]_{1 \le i,j \le n}$, then $\mathrm{rank(B)} \le n-k+1$.

Question 2.2 It is natural to ask whether there exist formulas similar to (2) and (3) for $n \times n$ matrices whose elements are values of polynomials of degree n or higher.

The reader should notice immediately that the strategy employed in the proof of Theorem 1.2 is not applicable in these cases due to limitation on sizes of matrices in the decomposition. A possible approach to tackle this problem, which is kindly suggested by one of the referees, is to apply the *Cauchy-Binet formula* [4, Sect. 3.2]. To demonstrate this formula, consider *the* following matrix:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)^2 & (a_1+b_2)^2 \\ (a_2+b_1)^2 & (a_2+b_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2b_1 & 2b_2 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}.$$

Using the Cauchy-Binet formula, we have

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 \\ a_2^2 & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2b_1 & 2b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2b_1 & 2b_2 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2 & 1 \\ a_2^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix}.$$

Then by some manipulations and the Vandermonde determinant one can deduce

$$\det(\mathrm{A}) = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)\big(2(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)\big).$$

It would definitely be desirable to extend this formula to more general cases.

Question 2.3 Corollary 2.1 gives an affirmative answer to a problem in interpolation theory (see, for example, [1, Problem 2, p. 75]). It implies that given a degree k polynomial $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ and distinct real numbers $x_0, x_1, \ldots, x_k$, any polynomial $p(x) \in P_k$ can be written uniquely as

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(x - x_i),$$

where $\alpha_i \in \mathbb{R}, 0 \le i \le k$. For a given set of k points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ in $\mathbb{R}^2$, can one develop a method for constructing a polynomial which interpolates this data set using k distinct shifts of a single polynomial $f(x)$?

This approach is quite different from the classical methods such as Newton polynomial interpolation and Lagrange’s interpolation formula [1, Chapter 9 – 10].

Acknowledgements

This article grew out of a research project initiated by the first author, who was a high school student in the Junior Science Talent Project (JSTP), under the supervision of the second author. The authors would like to thank the National Science and Technology Development Agency (NSTDA) of Thailand for their generous support. The authors are also thankful to the anonymous referees for their insightful comments, which greatly help to improve the exposition of this paper.

References

[1] Cheney, E. W., and Light, W. A. (2009). *A Course in Approximation Theory*. Providence, R. I.: American Mathematical Society.

[2] Lee, C., and Peterson, V. (2014). The Rank of Recurrence Matrices. *College Mathematics Journal,* 45 (3), p. 207 – 215.

[3] Mirsky, L. (1990). *An Introduction to Linear Algebra*. Reprint of the 1972 edition. New York, N. Y.: Dover Publications, Inc.

[4] Tao, T. (2012). *Topics in Random Matrix Theory*. Providence, R. I.: American Mathematical Society.

[5] Yandl, A. L., and Swenson, C. (2012). A Class of Matrices with Zero Determinant. *Mathematics Magazine,* 85 (2), p. 126 – 130.

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 707 พฤษภาคม – สิงหาคม 2565
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$

On The Diophantine Equation $2^x + p^y = z^2$ where $x \neq 1$ and $p \equiv 3 \pmod 4$

DOI: 10.14456/mj-math.2022.5

สุธน ตาดี
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี 15000

Suton Tadee
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Thepsatri Rajabhat University, Lopburi 15000

Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th

วันที่รับบทความ : 6 กุมภาพันธ์ 2565 วันที่แก้ไขบทความ : 19 สิงหาคม 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 24 สิงหาคม 2565

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$ คือ

$$(x, p, y, z) \in \{(3, p, 0, 3)\} \cup \{(0, 3, 1, 2)\} \cup \left\{\left(2 + \log_2(p+1), p, 2, p+2\right) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\right\}$$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ข้อความคาดการณ์กาตาลัน

ABSTRACT

In this paper, we show that all non-negative integer solutions of the Diophantine equation $2^x + p^y = z^2$, where $x \neq 1$, p is prime and $p \equiv 3 \pmod 4$, are

$$(x,p,y,z) \in \{(3,p,0,3)\} \cup \{(0,3,1,2)\} \cup \{\left(2+\log_2(p+1), p, 2, p+2\right) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$$

Keywords: Diophantine equation, Catalan's conjecture

1. บทนำ

ในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $2^x + p^y = z^2$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p เป็นจำนวนเฉพาะนั้น ได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง เช่น ในปี ค.ศ.2007 Acu [1] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x,y,z) \in \{(3,0,3),(2,1,3)\}$ ต่อมาในปี ค.ศ.2011 Suvarnamani, Singta และ Chotchaisthit [13] พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + 7^y = z^2$ และ $4^x + 11^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ต่อมาในปี ค.ศ.2012 Chotchaisthit [3] ได้ค้นพบผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ หลังจากนั้นในปี ค.ศ.2013 Sroysang [11] ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสามผลเฉลย คือ $(x,y,z) \in \{(0,1,2),(3,0,3),(4,2,5)\}$ ในปีเดียวกัน Chotchaisthit [4] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 11^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z) = (3,0,3)$

ในปี ค.ศ.2013 Rabaga [9] ได้แสดงว่า $(x,y,z) \in \{(3,0,3),(3,1,5),(6,1,9),(9,1,23)\}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 17^y = z^2$ ในปีต่อมา Sroysang [12] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 13^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z) = (3,0,3)$ และ Tanakan [14] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $19^x + 2^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z) = (0,3,3)$

ในปี ค.ศ.2015 Qi และ Li [8] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + p^y = z^2$ เมื่อ $p \neq 2$ พบว่าสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี กรณีที่ 1 $p \equiv \pm 3 \pmod 8$ พบว่า

สมการไดโอแฟนไทน์นี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก กรณีที่ 2 $p \equiv 7 \pmod 8$ พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์นี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, x, y, z) = \left(2^q - 1, \frac{q+2}{3}, 2, 2^q + 1\right)$ เมื่อ q เป็นจำนวเฉพาะคี่ซึ่ง $q \equiv 1 \pmod 3$ และกรณีที่ 3 $p \equiv 1 \pmod 8$ และ $p \neq 17$ พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์นี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกได้ไม่เกินสองผลเฉลย ต่อมาในปี ค.ศ.2016 Rabago [10] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 17^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงห้าผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) \in \{(3,1,5), (5,1,7), (6,1,9), (7,3,71), (9,1,23)\}$ และ Puangjumpa [7] ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 47^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(3,0,3), (1,1,7)\}$

ในปี ค.ศ.2018 Burshtein [2] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $y = 1$ และ $p = 7, 13, 29, 37$ และ 257 มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้ กรณีที่ $p = 7$ จะได้ว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1,1,3)$ กรณีที่ $p = 13, 29, 37$ จะได้ว่าสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลย และกรณีที่ $p = 257$ จะได้ว่าสมการดังกล่าวมีเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(14,1,129), (5,1,17)\}$

ในงานวิจัยนี้จะหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$

2. ผลลัพธ์หลัก

ทฤษฎีบท 2.1 [6] (ข้อความคาดการณ์กาตาลัน)
ให้ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ จะได้ว่า
สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3,2,2,3)$

ทฤษฎีบท 2.2 [14] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, z) = (3,3)$

ทฤษฎีบท 2.3 [5] ถ้า $p \neq 2$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + p^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, y, z) = (3,1,2)$

ทฤษฎีบท 2.4 [3] ถ้า x เป็นจำนวนคู่ และ $p \neq 2$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x, p, y, z) \in \{(4, 3, 2, 5), (2r, 2^{r+1} + 1, 1, 2^r + 1)\}$$

เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 2.5 [11] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (0, 1, 2), (4, 2, 5)\}$

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$2^x + p^y = z^2 \tag{1}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$(x, p, y, z) \in \{(3, p, 0, 3)\} \cup \{(0, 3, 1, 2)\} \cup \{(2 + \log_2(p + 1), p, 2, p + 2) : \log_2(p + 1) \in \mathbb{Z}\}$

บทพิสูจน์ ให้ $x \neq 1$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$ ดังนั้น $p \neq 2$

ถ้า $p = 3$ จากทฤษฎีบท 2.5 จะได้ว่า $(x, p, y, z) \in \{(3, 3, 0, 3), (0, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 5)\}$

เพราะฉะนั้นเหลือเพียงพิสูจน์กรณีที่ $p \neq 3$ ซึ่งจากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $x \neq 0$

<u>กรณี 1</u> x เป็นจำนวนคู่

จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $x = 2n$

จากทฤษฎีบท 2.4 และ $p \notin \{2, 3\}$ จะได้ว่า $p = 2^{n+1} + 1$ ดังนั้น $p \equiv 1 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 3 \pmod 4$

<u>กรณี 2</u> x เป็นจำนวนคี่

กรณีย่อย 2.1 $y = 0$

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $(x, p, y, z) = (3, p, 0, 3)$

กรณีย่อย 2.2 $y \geq 1$ เป็นจำนวนคู่

จะมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่งทำให้ $y = 2k$

จาก (1) จะได้ว่า

$$2^x = z^2 - p^{2k} = (z - p^k)(z + p^k)$$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้

$$z - p^k = 2^v \tag{2}$$

และ

$$z + p^k = 2^{x-v} \tag{3}$$

จาก (2) และ (3) จะได้ว่า

$$2 \cdot p^k = 2^v(2^{x-2v} - 1) \tag{4}$$

และเนื่องจาก $p \neq 2$ และจาก (4) จะได้ว่า $v = 1$ และ

$$2^{x-2} - p^k = 1 \tag{5}$$

สมมติว่า $x = 3$ จาก (5) จะได้ว่า $k = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $y \neq 0$ ดังนั้น $x > 3$

พิจารณา $k > 1$ จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า (5) ไม่มีผลเฉลย

ดังนั้น $k = 1$ ทำให้ได้ว่า $y = 2$

จาก (2) จะได้ว่า $z = p + 2$ และจาก (5) จะได้ว่า $x = 2 + \log_2(p+1)$ เมื่อ $\log_2(p+1)$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $(x, p, y, z) = (2 + \log_2(p+1), p, 2, p+2)$ เป็นผลเฉลยของ (1) เมื่อ $\log_2(p+1)$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีย่อย 2.3 $y \geq 1$ เป็นจำนวนคี่

จาก $x \neq 0$ และ $p \neq 2$ โดย (1) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv 1 \pmod 4$

จาก $p \equiv 3 \pmod 4$ จะได้ว่า $p^y \equiv -1 \pmod 4$

จาก $x \neq 1$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $x \geq 3$ ทำให้ $2^x \equiv 0 \pmod 4$

เพราะฉะนั้น $2^x + p^y \equiv -1 \pmod 4$

จาก (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv -1 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ □

3. สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ กรณีที่ $x \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$ ซึ่งได้ว่า ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์นี้อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ

$$(x, p, y, z) \in \{(3, p, 0, 3)\} \cup \{(0, 3, 1, 2)\} \cup \{(2 + \log_2(p+1), p, 2, p+2) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$$

เอกสารอ้างอิง

[1] Acu, D. (2007). On A Diophantine Equation $2^x + 5^y = z^2$. *General Mathematics*, 15 (4), p. 145 – 148.

[2] Burshtein, N. (2018). All The Solutions to An Open Problem of S. Chotchaisthit on The Diophantine Equation $2^x + p^y = z^2$ when p are Particular Primes and $y = 1$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 16 (1), p. 31 – 35.

[3] Chotchaisthit, S. (2012). On The Diophantine Equation $4^x + p^y = z^2$ where p isA Prime Number. *American Journal of Mathematics and Sciences*, 1 (1), p. 191 – 193.

[4] Chotchaisthit, S. (2013). On The Diophantine Equation $2^x + 11^y = z^2$. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 7 (2), p. 291 – 293.

[5] Khan, M., Rashid, A. and Uddin, M .S. (2016). Non-Negative Integer Solutions of Two Diophantine Equations $2^x + 9^y = z^2$ and $5^x + 9^y = z^2$. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4, p. 762 – 765.

[6] Mihailescu, P. (2004). Primary Cyclotomic Units and A Proof of Catalan's Conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 572, p. 167 – 195.

[7] Puangjumpa, P. (2016). Possible Solution of the Diophantine Equation $2^x + 47^y = z^2$. *Academic Journal URU*, 11 (3) (special), p. 36 – 42.

[8] Qi, L. and Li, X. (2015). The Diophantine Equation $8^x + p^y = z^2$. *The Scientific World Journal*, 2015, Article ID 306590, 3 pages.

[9] Rabago, J. F. T. (2013). On An Open Problem by B. Sroysang. *Konuralp Journal of Mathematics*, 1 (2), p. 30 – 32.

[10] Rabago, J. F. T. (2016). On The Diophantine Equation $2^x + 17^y = z^2$. *Journal of The Indonesian Mathematical Society*, 22 (2), p. 85 – 88.

[11] Sroysang, B. (2013). More on The Diophantine Equation $2^x + 3^y = z^2$. *Internationa lJournal of Pure and Applied Mathematics*, 84 (2), p. 133 – 137.

[12] Sroysang, B. (2014). On The Diophantine Equation $8^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 90 (1), p. 69 – 72.

[13] Suvarnamani, A., Singta, A. and Chotchaisthit, S. (2011). On Two Diophantine Equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$. *Science and Technology RMUTT Journal*, 1 (1), p. 25 – 28.

[14] Tanakan, S. (2014). On The Diophantine Equation $19^x + 2^y = z^2$. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 9 (4), p. 159 – 162.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ใน วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลด ได้ที่ http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้ ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ เนื้อหา สรุป : ภาษาไทย หรือ ภาษาอังกฤษ อย่างใดอย่างหนึ่ง

เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า "**คำสำคัญ**:"

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า "**Keywords**:"

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1 2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ <u>ไม่อนุญาต</u>ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ เป็นภาพขาวดำ และลายเส้นต่าง ๆ ให้ใช้เส้นสีดำ ทั้งนี้ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับใต้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป” เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ “ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิงให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกที่ปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทยก่อนจนครบแล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวชิรุณหิศ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

สมาชิกของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

มี 2 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ และสมาชิกสามัญ

สมาชิกสามัญ ได้แก่ ผู้ที่มีความสนใจทางคณิตศาสตร์ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ เมื่อได้รับหนังสืออนุญาตจากสมาคมฯ เป็นลายลักษณ์อักษร
2. มีสิทธิเข้าถึงวารสารคณิตศาสตร์ ฉบับเต็มในรูปแบบออนไลน์
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

ค่าสมัครสมาชิก ประกอบด้วย

1. ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท
2. ค่าสมาชิกสามัญ ตลอดชีพ 3,000 บาท และ รายปี 250 บาท

วาระการเป็นสมาชิกสามัญรายปี *เริ่มตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม ถึงวันที่ 31 ธันวาคม ของปี*

ดาวน์โหลด ใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

http://www.mathassociation.net หัวข้อ “สมัคร”

ใบสมัครสมาชิก
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

☐ สมาชิกใหม่
☐ ต่ออายุ เลขสมาชิกเดิม................

วันที่ .... เดือน .... พ.ศ. ....

ข้าพเจ้า (ชื่อ - สกุล) .... อาชีพ ....

เบอร์โทรศัพท์ .... อีเมล ....

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท) ☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน 30 บาท

รวมเป็นเงิน .... บาท (...)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังบัญชีเลขที่ 162-0-25671-1 ธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์
ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ชั้น 9 อาคารมหาวชิรุณหิศ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับการจัดส่งเอกสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ...

เลขที่ .... ซอย .... หมู่ที่ ....

ถนน .... ตำบล .... อำเภอ ....

จังหวัด .... รหัสไปรษณีย์ ....

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.........................
รับเงินค่าสมาชิกจำนวน...................................
วันที่...

ลงนาม.. ผู้สมัคร
(..)

สมัครสมาชิก โดย (1) สแกน QR-Code หรือเข้าลิงค์ https://bit.ly/37yC835
หรือ **(2) ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน** มาที่
(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ตู้ ป.ณ. 2022 ปณฝ.จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332 หรือ
(ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com
แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบต่อไป

งานทำบุญสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี 2565

เมื่อวันจันทร์ที่ 23 พฤษภาคม 2565 เวลา 7.00 น. ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ และกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดงานทำบุญถวายภัตตาหารเพล ถวายสังฆทาน แด่พระภิกษุสงฆ์ จำนวน 9 รูป ณ ตึกวชิราลงกรณ์ โรงพยาบาลจุฬาลงกรณ์ สภากาชาดไทย เนื่องในโอกาสวันคล้ายวันก่อตั้งสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ และทำบุญอุทิศส่วนกุศลให้แก่กรรมการบริหารและสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ที่ล่วงลับไปแล้ว

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ร่วมกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565 ขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นักเรียนมีโอกาสแสดงความรู้ทางคณิตศาสตร์และรู้จักนำเสนอความรู้ในลักษณะโครงงานคณิตศาสตร์
2. เพื่อให้นักเรียนได้แสดงความสามารถในการคิดเชิงวิเคราะห์ การคิดริเริ่มสร้างสรรค์ การแก้ปัญหา การใช้เหตุผล การเชื่อมโยงความรู้ และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
3. เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีวิสัยทัศน์ทางคณิตศาสตร์
5. เพื่อส่งเสริมการทำกิจกรรมเป็นกลุ่ม

ในปี พ.ศ. 2565 นี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้ดำเนินการประกาศเชิญชวนนักเรียนและโรงเรียนที่สนใจจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์เข้าร่วมการประกวด โดยแบ่งเป็นสามระดับคือ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งมีโครงงานที่ส่งเข้าประกวดกว่า 150 โครงงานในสามระดับชั้น ทางคณะกรรมการตัดสินโครงงานได้พิจารณาตัดสินและคัดเลือกโครงงานที่ผ่านเข้ารอบสุดท้ายจำนวน 13 โครงงาน โดยกำหนดให้มีการนำเสนอโครงงานในช่วงงานมหกรรมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ ประจำปี 2565 ในวันที่ 20 สิงหาคม 2565 ณ ศูนย์แสดงสินค้าและการประชุม อิมแพ็ค เมืองทองธานี

สุดท้ายนี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ขอแสดงความยินดีกับทุกโครงงานที่ได้รางวัล มา ณ ที่นี้ และเป็นกำลังใจให้โครงงานที่ไม่ได้ผ่านเข้ารอบสุดท้ายเพราะอย่างน้อยก็ได้เริ่มก้าวเดินในหนทางของคณิตศาสตร์แล้ว ขอให้นำประสบการณ์ต่าง ๆ ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตต่อไป

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565 ระดับประถมศึกษา

รางวัลที่ 1	*ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 8,000 บาท*
โครงงาน **The Life Saving Bottles**	
	เด็กหญิงพัทธวรรณ นาคกร
	เด็กหญิงอภิชญา รายะรุจิ
	เด็กหญิงตรงฤทัย กลิ่นสาคร
	เด็กหญิงกัลยกร แก้วบัวดี
	โรงเรียนอนุบาลด่านช้าง จังหวัดสุพรรณบุรี
	อาจารย์ที่ปรึกษา นางสาวศิรินันท์ วรรัตนกิจ และ นายมานะ มาเสมอ

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565 ระดับประถมศึกษา (ต่อ)

รางวัลที่ 2 *ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 6,000 บาท*

โครงงาน **ไขปัญหาการหาปริมาตรวัตถุในธรรมชาติ**

เด็กชายไชยพัฒน์ เกตุจุนา
เด็กชายเสฏฐวุฒิ บุญรอด
เด็กหญิงธนาภา เนตรพิน
เด็กหญิงธนภรณ์ พึ่งพร
โรงเรียนปากคลองชวดใหญ่ จังหวัดสมุทรปราการ
อาจารย์ที่ปรึกษา นายณัญชกร ปีมะแม

รางวัลที่ 3 *ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 4,000 บาท*

โครงงาน **การหาความสูงวัตถุจากความยาวของเงาวัตถุแบบง่าย ๆ สไตล์การใช้บัญญัติไตรยางศ์**

เด็กหญิงสิรินนภารัตน์ หาญบุญศรี
เด็กหญิงปรมาภรณ์ แซ่ซ้ง
เด็กหญิงกัลญา เฮ้อสุวรรณ์
โรงเรียนบ้านก๊อน้อย จังหวัดพะเยา
อาจารย์ที่ปรึกษา นางแสงทิพย์ อภิวงค์

รางวัลชมเชย *ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 2,000 บาท*

โครงงาน **รูปแบบที่แตกต่างของรูปสามเหลี่ยม**

เด็กหญิงฮาณา นาคสง่า
เด็กหญิงณิชาภัทร บินต่วน
เด็กหญิงจันทิมา ศรีวาจา
เด็กหญิงรสนันท์ จรรยา
โรงเรียนบ้านคลองย่าหนัด จังหวัดกระบี่
อาจารย์ที่ปรึกษา นางสาวจารุณี ปุตสะ และ นางสาวจำปา หลีเหล็ก

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

รางวัลที่ 2	*ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 6,000 บาท* *มี 2 รางวัล*
(1) โครงงาน **เรียงให้สวยด้วยแบบรูปและสัมพันธ์ สร้างกำไรไม่ขาดทุน** นางสาวปัณฑิตา คำทิพย์ นางสาวปิยาภรณ์ ศรีใจวงศ์ นางสาวปนัดดา ถุงพลอย **โรงเรียนนารีรัตน์ จังหวัดแพร่** **อาจารย์ที่ปรึกษา** นางสาวณัฐกานต์ ภูมิคอนสาร และ นางนันท์มนัส ปิยรัตน์เจริญ	
(2) โครงงาน **สมบัติบางประการของรูปสามเหลี่ยมจากจุดเซนทรอยด์** นายปณิธิ แก่นหิน เด็กชายพศวีร์ เกรวัล นางสาวทรรณรต มณีสม **โรงเรียนภูเก็ตวิทยาลัย จังหวัดภูเก็ต** **อาจารย์ที่ปรึกษา** นายณัฐวุฒิ ดุมลักษณ์ และ นายภูเบศ พนานุรักษ์	

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (ต่อ)

รางวัลชมเชย	*ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 2,000 บาท* *มี 2 รางวัล*
(1) โครงงาน **Soma Cube มหัศจรรย์ แปลงสวยสัมพันธ์ด้วย GeoGebra** เด็กหญิงศิรินันท์ ทับทิมงาม เด็กหญิงสุรภา อาภรณ์พงษ์ เด็กหญิงธัญวรัตน์ อารีรัมย์ **โรงเรียนนางรอง จังหวัดบุรีรัมย์** **อาจารย์ที่ปรึกษา** นางสาวดวงพร เทียนทอง และ นายสุทิน บุบภาวะตา	
(2) โครงงาน **คู่อันดับและกราฟมหัศจรรย์ สร้างพัดสานจากไม้ไผ่ ออกแบบลอดลายด้วย GSP** เด็กหญิงรุ่งอรุณ พลวงค์ษา เด็กหญิงกัลยรัตน์ ลือเลื่อง เด็กหญิงจิราพรรณ ชั้นน้อย เด็กหญิงวิลาศิณี ถิ่นสืบ **โรงเรียนสกลทวาปี จังหวัดสกลนคร** **อาจารย์ที่ปรึกษา** นางวงเดือน วงษ์รัตนะ นางสาววัชรินทร์ มงคลสุภา และ นายกมลรัตน์ ใยวังหน้า	

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

รางวัลที่ 2	*ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 6,000 บาท*

โครงงาน **จำนวนวิธีที่ผลบวกแต้มบนลูกเต๋าเท่ากับค่าที่กำหนด**

นายชัยวุฒิ เจริญศรีสันต์

นายณัฐธนษว์ ภวังคนันท์

นายธนกฤต รัตติกาลชลากร

นายพงษ์พิชญะ ใจดี

โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย จังหวัดกรุงเทพมหานคร

อาจารย์ที่ปรึกษา นายณัญชกร ปิมะแม

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (ต่อ)

รางวัลที่ 3	*ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 4,000 บาท มี 2 รางวัล*

(1) โครงงาน **Battle Conic Classroom Board Game :**

การสร้างนวัตกรรมบอร์ดเกมด้วยการเก็บข้อมูลเชิงสถิติผ่านกระบวนการคิดเชิงออกแบบ

นายกฤษณ์ ลี้ตระกูล

นายณภัทร พรหมมาก

นายสิรวิชญ์ ม้าทองคำกุล

นายเสฏฐ์พงศ์ ปิยะพฤกษพรรณ

โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร

อาจารย์ที่ปรึกษา นายวีรยุทธ วิริยะศิริพจน์ และ ดร.รัชนิกร ชลไชยะ

(2) โครงงาน **การศึกษาและวิเคราะห์รูปทั่วไปของสมการของส่วนเว้าโค้งและปริมาตรของไข่ไก่ในเชิงภาคตัดกรวยและแคลคูลัส**

นายรวิภาส ถึงสุข

นายภูรีรัฐ จุ่นน้อย

นายปิยะพัสตร์ ไหมทอง

โรงเรียนนครสวรรค์ จังหวัดนครสวรรค์

อาจารย์ที่ปรึกษา นายสมัย จันทร์เหลือง และ นายพงษ์วสุ เนียมสำเภา

ผลการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประจำปี 2565 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (ต่อ)

รางวัลชมเชย	*ได้รับโล่ พร้อมเกียรติบัตร และเงินรางวัล จำนวน 2,000 บาท มี 2 รางวัล*
(1) โครงงาน **ความงามของคณิตศาสตร์ในผลคูณคาร์ทีเซียน** นางสาวชฎาพร น้อยฤทธิ์ นางสาวพัชราภรณ์ ขอนสี นางสาวพัชรา ไชยรบ นางสาวชรินทิพย์ ศรีสุขสาม **โรงเรียนเดื่อศรีไพรวัลย์ จังหวัดสกลนคร** **อาจารย์ที่ปรึกษา** นายยุทธนันต์ งามนา และ นางสาวลำพูน อาแพงพันธ์	
(2) โครงงาน **มัดหมี่ลายผ้า ภูมิปัญญาไทย By Magic Mathematics Board** นางสาวปวริศา อัมภะวา นางสาววีรดา บ่อคำเกิด นางสาวธนภรณ์ พลลม **โรงเรียนเทศบาล 3 บ้านเหล่า จังหวัดอุดรธานี** **อาจารย์ที่ปรึกษา** นางดรุณี พลลม	

การอบรมด้านคณิตศาสตร์ ช่วงเดือนพฤษภาคม - สิงหาคม 2565

ในช่วงเดือนพฤษภาคมถึงสิงหาคม 2565 ที่ผ่านมา สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ จัดกิจกรรมอบรมด้านคณิตศาสตร์ในรูปแบบออนไลน์ หัวข้อต่าง ๆ ดังนี้

วันที่	หัวข้อ	วิทยากร
7 พฤษภาคม 2565	Active Math กิจกรรมสร้างสรรค์ใน ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา	อ.ดร.กฤษฎา วรพิน อ.บุษกร เอี๊ยวเจริญ
28 พฤษภาคม 2565	สร้างกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับชั้นเรียน คณิตศาสตร์ ในยุค Next Normal ด้วย โปรแกรม Desmos	อ.วุฒิชัย ภูดี อ.พฤฒิพงศ์ โลหะสุวรรณ
18 มิถุนายน 2565	อะไรจะเกิดขึ้น ถ้า...ไม่ (What IF...NOT) เทคนิคการสร้างสรรค์โจทย์ปัญหาสำหรับครู คณิตฯ ระดับประถมศึกษา	ผศ.ดร.ทรงชัย อักษรคิด อ.วรีวัฒน์ ไทยขำ

การอบรมคณิตศาสตร์การเงินในชีวิตประจำวัน
ช่วงเดือนพฤษภาคม - สิงหาคม 2565

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ร่วมกับ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี และศูนย์ความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ จัดโครงการอบรมคณิตศาสตร์การเงินในชีวิตประจำวัน รูปแบบออนไลน์ ทุกวันเสาร์แรกของเดือน เวลา 9.00 – 12.00 น. โดยในช่วงเดือนพฤษภาคมถึงสิงหาคม 2565 ที่ผ่านมาเป็นการอบรมในครั้งที่ 7 ถึงครั้งที่ 10 ซึ่งถือเป็นครั้งสุดท้ายของโครงการอบรมนี้ โดยมีหัวข้อการอบรมแต่ละครั้งดังนี้

วันที่	หัวข้อ	วิทยากร
7 พฤษภาคม 2565	ค่างวด	รศ. ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
4 มิถุนายน 2565	การลงทุนเบื้องต้น	ผศ. ดร.ดาวุด ทองทา
2 กรกฎาคม 2565	ผลตอบแทน VS ความเสี่ยง	ผศ. ดร.ดาวุด ทองทา
6 สิงหาคม 2565	แคลคูลัสกับการลงทุน	รศ. ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ.2565

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของสมาคมที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์
   - *วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่ม 2) จำนวน 3 ฉบับต่อปี*
   - *Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี*

2. อบรมความรู้คณิตศาสตร์

   ดูข้อมูล รายละเอียด และกำหนดการ ได้ที่ https://www.mathassociation.net

3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย

   -- งดการสอบแข่งขัน ประจำปี พ.ศ. 2565 --

4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี ครั้งที่ 26 ประจำปี พ.ศ. 2565 ในรูปแบบออนไลน์

   (The 26th Annual Meeting in Mathematics : AMM 2022)

   ระหว่างวันที่ 18 – 20 พฤษภาคม พ.ศ. 2565 โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ร่วมกับ ภาควิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี และสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา เป็นเจ้าภาพ

5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
   - *ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)*

     ดูข้อมูลและกำหนดการได้ที่ https://www.mathassociation.net *ในหัวข้อประกวดโครงงาน*
   - *ประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 10*

     (The 10th Undergraduate Applied Mathematics Conference : UAMC 2022)

     ระหว่างวันที่ 29 – 30 เมษายน พ.ศ. 2565 โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เป็นเจ้าภาพ

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวชิรุณหิศ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทรศัพท์ และโทรสาร 02–252-7980

www.mathassociation.net MathThaiOrg@gmail.com