



วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๖๗ ฉบับที่ ๗๐๘ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๕

Volume 67 Number 708 September – December 2022

บทความวิชาการ *Academic Article*

การมีอยู่จริงของผลเฉลยจากสมการผลต่างสืบนี้อยู่เชิงเศษส่วนแบบ q -Hilfer

1

ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา

Existence of Solution to q -Hilfer Fractional Difference Equation
with A Time-varying Order of Operations

นรวิษฐ์ ลิ้มปานูกร

บทความวิจัย *Research Article*

นัยทั่วไปแบบหนึ่งของทฤษฎีของแมเรียน วอลเตอร์

12

A Generalization of Marion Walter's Theorem

รักษ์เกียรติ รักอุดมการณ์ และ เกษสุดา บุรณพันธ์ศักดิ์

การพิสูจน์เชิงการจัดของเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับผลรวมตรีโกณมิติกำลัง

25

A Combinatorial Proof of An Identity Involving Trigonometric Power Sums

รัชชัย ไช่แก้ว และ ชนิษฐา แน่นอุดร

ตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองบนลำดับวนกลับ

40

The Second Order of Reflection Operators on Circular Sequences

ชนินาถ จันทร

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา ๖๗ ฉบับที่ ๗๐๘ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๕

ISSN XXXX-XXXX (Online)

*Mathematical Journal
by The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King
Volume 67 Number 708 September – December 2022*

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

3. อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเอกชัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เล็งเห็นความสำคัญของการส่งเสริมและสนับสนุนให้มีการเผยแพร่ผลงานที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ จึงได้จัดทำวารสารคณิตศาสตร์นี้ขึ้น โดยกำหนดออกเผยแพร่ปีละ 3 ฉบับ วารสารคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นฉบับที่ 2 ของการตีพิมพ์เผยแพร่ผลงานทางวิชาการในรูปแบบออนไลน์ ซึ่งทำให้การเข้าถึงง่ายยิ่งขึ้น และก่อให้เกิดประโยชน์ในวงกว้าง

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ขอเชิญชวนคณาจารย์ นักวิจัย นิสิตนักศึกษา ส่งผลงานเพื่อตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารคณิตศาสตร์ โดยท่านสามารถดาวน์โหลดเอกสาร Template ของบทความ และแบบฟอร์มส่งบทความ ได้ที่

https://www.mathassociation.net/view/home/page_paper.php

รวมทั้งสามารถติดตามข่าวสารของวารสารได้บน facebook เพจ

“วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์”

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหารหวังเป็นอย่างยิ่งว่าทุกบทความในวารสารฉบับนี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สนใจ นำไปพัฒนางานด้านคณิตศาสตร์ให้ก้าวหน้ามากยิ่งขึ้น หากมีคำติชมหรือข้อเสนอแนะเกี่ยวกับวารสาร สามารถติดต่อได้ที่ อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

ในโอกาสส่งท้ายปีเก่าต้อนรับปีใหม่ที่กำลังจะถึงนี้

ขอให้ทุกท่านพบเจอแต่สิ่งดีงามตลอดปี ๒๕๖๖

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์

อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเอกชัย

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ณัฐชัย ลีนาวงศ์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี |
| 4. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 6. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงศ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 3. รศ. ดร.กาญจน์ภา อมรัชกุล | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 4. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 6. รศ. ดร.พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 7. รศ. ดร.รณสรณ์ ชินรัมย์ | มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ |
| 8. รศ. ดร.ศิริรัตน์ สิงห์ตัน | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 9. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |
| 10. ผศ. ดร.กนกพร ช่างทอง | มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี |
| 11. ผศ. ดร.มณฑิรา ดวงสาพล | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 12. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 13. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสม | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 14. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว | มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ |
| 15. ผศ. ดร.สุริย์พร ชาวแพรกน้อย | มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| 16. ผศ. ดร.อังคณา บุญยิด | มหาวิทยาลัยขอนแก่น |
| 17. ผศ. ดร.เอื้ออารี บุญเพิ่ม | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปี 2564 - 2565

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์จรจิต วัฒนสินธุ์	ที่ปรึกษา
2. ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	นายกสมาคม
3. รองศาสตราจารย์ ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	อุปนายก
4. รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ	เลขาธิการ
5. รองศาสตราจารย์ ดร.เอื้อมพร พักสุวรรณ	เหรัญญิก
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ปณิดา ศิริกุลวิเชฐ	ปฎิคม
7. อาจารย์ประไพ เสนาบุญญฤทธิ์	ประชาสัมพันธ์
8. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วราสนา สุขกระสานติ	หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหารวารสารคณิตศาสตร์
9. รองศาสตราจารย์ ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	ผู้จัดการสารสนเทศ
10. อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเออชัย	ผู้ช่วยผู้จัดการสารสนเทศ
11. ศาสตราจารย์ ดร.ยศนันต์ มีมาก	กรรมการ
12. รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์	กรรมการ
13. รองศาสตราจารย์ธีรวัฒน์ ประกอบผล	กรรมการ
14. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ	กรรมการ
15. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลีวศิริตฤตกุล	กรรมการ
16. รองศาสตราจารย์ ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
17. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
18. รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
19. รองศาสตราจารย์ ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์	กรรมการ
20. ผู้ช่วยศาสตราจารย์กรองแก้ว หวังนิเวศน์กุล	กรรมการ
21. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
22. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงศ์พล เรือนคง	กรรมการ
23. อาจารย์ ดร.ฉวีวรรณ กิตติกร	กรรมการ
24. อาจารย์นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
25. อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันทจักรภรณ์	กรรมการ
26. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการ
27. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้น จึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	<i>Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King</i>
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของ บทความที่จะรับ ตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือ คณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น • วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี • เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย • บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน • วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่าง ถูกต้อง

การพิจารณา กลั่นกรองบทความ ของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณาจากกลั่นกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้องจำนวน 3 ท่าน โดยไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จากผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่ง บทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่อยู่ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตามข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่งกองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือหน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือกระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่ <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/index> หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตามข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้นอัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อมไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความ MJMATH.docx) ขึ้นที่ระบบการส่งบทความ ที่ <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการฝ่ายบริหารของวารสาร ได้ที่ MathThaiOrg@gmail.com



วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๖๗ ฉบับที่ ๗๐๘ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๕

Volume 67 Number 708 September – December 2022

บทความวิชาการ *Academic Article*

การมีอยู่จริงของผลเฉลยจากสมการผลต่างสืบนี้อยู่เชิงเศษส่วนแบบ q -Hilfer

1

ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา

Existence of Solution to q -Hilfer Fractional Difference Equation
with A Time-varying Order of Operations

นรวิษฐ์ ลิ้มปานกร

บทความวิจัย *Research Article*

นัยทั่วไปแบบหนึ่งของทฤษฎีของแมเรียน วอลเตอร์

12

A Generalization of Marion Walter's Theorem

รักษ์เกียรติ รักอุดมการณ์ และ เกษสุดา บุรณพันธ์ศักดิ์

การพิสูจน์เชิงการจัดของเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับผลรวมตรีโกณมิติกำลัง

25

A Combinatorial Proof of An Identity Involving Trigonometric Power Sums

รัชชัย ไช่แก้ว และ ชนิษฐา แนนอุดร

ตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองบนลำดับวนกลับ

40

The Second Order of Reflection Operators on Circular Sequences

ชนินาถ จันทร



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การมีอยู่จริงของผลเฉลยของสมการผลต่างสลับเนื่องเชิงเศษส่วนแบบ
q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา

Existence of Solution to q-Hilfer Fractional Difference Equation
with A Time-varying Order of Operations

DOI: 10.14456/mj-math.2022.6

นรวิชัย ลิมปานุกร

โครงการนิติศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชากฎหมายธุรกิจ หลักสูตรนานาชาติ
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ (ศูนย์ท่าพระจันทร์) กรุงเทพมหานคร 10200

Norravich Limpanukorn

International Program in Business Law, Faculty of Law,
Thammasat University (Thaprachan), Bangkok 10200

Email: norravich.lim@dome.tu.ac.th

วันที่รับบทความ : 24 เมษายน 2564

วันที่แก้ไขบทความ : 17 พฤษภาคม 2564

วันที่ตอบรับบทความ : 19 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ศึกษาสมการผลต่างสลับเนื่องเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการ $0 < \alpha(t) < 1, 0 \leq \beta \leq 1$ และ $0 < q < 1$ และการดำรงอยู่ของผลเฉลยพิสูจน์ด้วยทฤษฎีจุดตรึงของบานาค

คำสำคัญ: อนุพันธ์เชิงเศษส่วน อนุพันธ์ q ทฤษฎีจุดตรึงของบานาค

ABSTRACT

In this article, the solution to q-Hilfer fractional difference equation with orders $0 < \alpha(t) < 1, 0 \leq \beta \leq 1$ and $0 < q < 1$ will be studied. The existence of solution is proved by Banach's fixed point theorem.

Keywords: Fractional derivative, q-derivative, Banach's fixed point theory

1. บทนำ

แคลคูลัสเชิงเศษส่วนถือเป็นสาขาหนึ่งในศาสตร์คณิตวิเคราะห์ที่แยกออกจากแคลคูลัสทั่วไปโดยมีการใช้ออนุพันธ์และปริพันธ์ที่มีลำดับการดำเนินการที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ดังนั้นแคลคูลัสเชิงเศษส่วนเปรียบเสมือนส่วนขยายที่เข้ามาเติมเต็มการพิจารณาอนุพันธ์และปริพันธ์ที่มีลำดับการดำเนินการเป็นจำนวนเต็ม โดยที่อนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน $f(t)$ มีนิยามว่า

$$\frac{df}{dt} = Df(t) = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

ในปี ค.ศ. 1695 Guillaume de L'Hôpital ได้ตั้งคำถามกับ Gottfried Wilhelm Leibniz เกี่ยวกับอนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชัน y ว่าจะเกิดอะไรขึ้นเมื่อ $n = \frac{1}{2}$ ซึ่งนับเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาแคลคูลัสเชิงเศษส่วน ภายหลังปริพันธ์และอนุพันธ์เชิงเศษส่วนมีการให้นิยามหลายรูปแบบโดยบทนิยามที่มีชื่อเสียงถูกนำเสนอโดย Riemann-Liouville, Caputo และ Hilfer

บทนิยาม 1.1 [1] กำหนดให้ $\alpha > 0$ ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย

$$I_{a,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, t \geq a$$

โดย $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ สำหรับจำนวนจริง $z > 0$

บทนิยาม 1.2 [1] กำหนดให้ $n-1 < \alpha < n$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย $D_{a,t}^\alpha f(t) = D^n I_{a,t}^{n-\alpha} f(t)$ โดยที่ $D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$

บทนิยาม 1.3 [1] กำหนดให้ $n-1 < \alpha < n$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Caputo ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย $D_{a,t}^\alpha f(t) = I_{a,t}^{n-\alpha} D^n f(t)$

บทนิยาม 1.4 [5] กำหนดให้ $n - 1 < \alpha < n$ และ $0 \leq \beta \leq 1$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการ α และ β นิยามโดย $D_{a,t}^{\alpha,\beta} f(t) = I_{a,t}^{\beta(n-\alpha)} D^n I_{a,t}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(t)$

จะพบว่า กรณี $\beta = 0$ บทนิยาม 1.4 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.2 และกรณี $\beta = 1$ บทนิยาม 1.4 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.3

ในปี ค.ศ. 1909 Jackson [6] ได้นิยามอนุพันธ์ q ไว้ดังนี้

$$D_q f(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{qt - t}, q \in \mathbb{R}$$

และปริพันธ์ q ได้นิยามดังนี้

$$I_q f(t) = \int_0^x f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} t q^n f(t q^n)$$

อนุพันธ์ q และ ปริพันธ์ q สามารถนิยามในเชิงเศษส่วนดังนี้

บทนิยาม 1.5 [8] กำหนดให้ $\alpha > 0$ ปริพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย

$$I_{q,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha-1)} f(s) ds, t \geq 0$$

โดยที่ $(n-m)^{(k)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{n-mq^i}{n-mq^{i+k}}, n \neq 0, k \in \mathbb{R}$ กรณี $m = 0$ ให้ $(n)^{(k)} = n^k$

และ $\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)^{(t-1)}}{(1-q)^{t-1}}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ กรณี $q = 1$ ให้ $\Gamma_q(t) = \Gamma(t)$

เห็นได้อย่างชัดเจนว่า $\Gamma_q(t+1) = [t]_q \Gamma_q(t)$ เมื่อ $[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q}, k \in \mathbb{R}$

บทนิยาม 1.6 [2] กำหนดให้ $n - 1 < \alpha < n$ อนุพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย $D_{q,t}^{\alpha} f(t) = D_q^n I_{q,t}^{n-\alpha} f(t)$

บทนิยาม 1.7 [2] กำหนดให้ $n - 1 < \alpha < n$ อนุพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Caputo ที่มีลำดับการดำเนินการ α นิยามโดย $D_{q,t}^{\alpha} f(t) = I_{q,t}^{n-\alpha} D_q^n f(t)$

จะสังเกตเห็นว่า เมื่อ $q = 1$ อนุพันธ์ q และปริพันธ์ q เชิงเศษส่วนก็คือ อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงเศษส่วนปกติ ในบทความนี้ ผู้เขียนจึงสนใจที่จะศึกษานิยามของอนุพันธ์แบบ q -Hilfer ที่มีลำดับการ

ดำเนินการแปรผันตามเวลา เพื่อให้ได้นิยามที่เป็นรูปทั่วไปและครอบคลุมบทนิยามที่ผ่านมาให้ได้มากที่สุด

2. อนุพันธ์แบบ q-Hilfer

ในหัวข้อนี้ผู้เขียนได้แรงบันดาลใจมาจากนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ Hilfer และอนุพันธ์ q ดังนั้นผู้เขียนจึงได้ให้นิยามของอนุพันธ์แบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการ $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ และ $q \in (0,1)$ ดังนี้

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ $\mu \in \mathbb{R}$ เซตย่อย A ของ $\mathbb{C}$ จะเรียกว่า μ -geometric หาก $\mu z \in A$ ตราบเท่าที่ $z \in A$

บทนิยาม 2.2 ฟังก์ชัน f ที่นิยามบนเซต A ที่เป็น q -geometric โดยที่ $0 \in A$ จะกล่าวว่าเป็น q -regular ที่ 0 เมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(zq^n) = f(0)$ สำหรับทุก ๆ $z \in A$

บทนิยาม 2.3 กำหนดให้ $0 < \alpha < 1$ และ $0 \leq \beta \leq 1$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer นิยามโดย

$$D_{q,t}^{\alpha,\beta} f(t) = I_{q,t}^{\beta(1-\alpha)} D_q I_{q,t}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t) = I_{q,t}^{\gamma-\alpha} D_{q,t}^{\gamma} f(t)$$

เมื่อ $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$

จะพบว่า กรณี $\beta = 0$ บทนิยาม 2.3 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.6 กรณี $\beta = 1$ บทนิยาม 2.3 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.7 และกรณี $q = 1$ บทนิยาม 2.3 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 1.4

บทนิยาม 2.4 [2] สำหรับจำนวนจริง $p \geq 1$ ปริภูมิ $L_q^p(a, b)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันที่

$$\left(\int_a^b |f(t)|^p d_q t \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

สำหรับ $p = 1$ เขียนแทน $L_q^p(a, b)$ ด้วย $L_q(a, b)$

บทนิยาม 2.5 [2] สำหรับจำนวนจริง $p > 0$ ปริภูมิ $\mathbb{L}_q^p[a, b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันทั้งหมดบนช่วง (a, b) ปริภูมิ $\mathbb{L}_q^p[a, b]$ เป็นปริภูมิบานาคที่มี supremum norm $\|\cdot\|_p$ โดยที่

$$\|f\|_p = \sup_{t \in (a,b]} \left(\int_a^b |f(t)|^p d_q t \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

สำหรับ $p = 1$ เขียนแทน $\mathbb{L}_q^p[a, b]$ ด้วย $\mathbb{L}_q[a, b]$

บทนิยาม 2.6 [2] ปริภูมิ $C_q^{(n)}[a, b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ที่มีอนุพันธ์ q จนถึงลำดับการดำเนินการของอนุพันธ์ที่ $n - 1$, $D_q^{n-1}f(t) \in C[a, b]$, ปริภูมิ $C_q^{(n)}[a, b]$ เป็นปริภูมิบานาคที่มี supremum norm $\|\cdot\|$ โดยที่

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n-1} \max_{t \in [a, b]} |D_q^k f(t)| < \infty$$

สำหรับ $n = 1$ เขียนแทน $C_q^{(n)}[a, b]$ ด้วย $C_q[a, b]$ และสำหรับ $q = 1$ เขียนแทน $C_q^{(n)}[a, b]$ ด้วย $C^{(n)}[a, b]$

บทนิยาม 2.7 ฟังก์ชัน f ที่นิยามบนช่วงปิด $[0, a]$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บนช่วง $[0, a]$ เมื่อ f เป็น q -regular ที่ 0 และมีค่าคงที่ $K > 0$ ที่ทำให้

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f(tq^i) - f(tq^{i+1})| \leq K$$

สำหรับทุก ๆ $t \in (qa, a]$

บทนิยาม 2.8 [2] ให้ปริภูมิ $AC_q[a, b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว $f \in AC_q[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ c และฟังก์ชัน $\varphi \in \mathbb{L}_q^p[a, b]$ ซึ่ง

$$f(t) = c + \int_a^t \varphi(s) d_qs, t \in [a, b]$$

สำหรับ $q = 1$ เขียนแทน $AC_q[a, b]$ ด้วย $AC[a, b]$

บทนิยาม 2.9 [2] ปริภูมิ $AC_q^{(n)}[a, b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ที่มีอนุพันธ์ q จนถึงลำดับการดำเนินการของอนุพันธ์ที่ $n - 1$, $D_q^{n-1}f(t) \in AC_q[a, b]$

สำหรับ $q = 1$ เขียนแทน $AC_q^{(n)}[a, b]$ ด้วย $AC^{(n)}[a, b]$

บทนิยาม 2.10 [4] ปริภูมิ $C_\gamma[a, b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ ซึ่ง

$$C_\gamma[a, b] = \{f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid (t - a)^\gamma f(t) \in C[a, b]\}, 0 \leq \gamma < 1$$

ที่มี norm $\|\cdot\|_{C_\gamma}$ โดยที่

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(t - a)^\gamma f(t)\|$$

และ

$$C_\gamma^n[a, b] = \{f \in C^{n-1}[a, b] \mid f^{(n)} \in C_\gamma[a, b]\}, n \in \mathbb{N}$$

$$C_\gamma^0[a, b] = C_\gamma[a, b]$$

ที่มี norm $\|\cdot\|_{C_\gamma^n}$ โดยที่

$$\|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\| + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma}$$

และมีสมบัติดังนี้

1. $C_0[a, b] = C[a, b]$
2. $C_\gamma^n[a, b] \subset AC^{(n)}[a, b]$
3. $C_{\gamma_1}[a, b] \subset C_{\gamma_2}[a, b], 0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < 1$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.11 [8] กำหนดให้ $\alpha, \beta \geq 0$ และ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[0, T]$ แล้วปริพันธ์ q และอนุพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville มีสมบัติดังนี้

1. $I_{q,t}^\alpha I_{q,t}^\beta f(t) = I_{q,t}^{\alpha+\beta} f(t)$
2. $D_{q,t}^\alpha I_{q,t}^\alpha f(t) = f(t)$

ทฤษฎีบท 2.12 [2] กำหนดให้ $n-1 < \alpha < n, f \in \mathbb{L}_q[0, T]$ ที่ $I_{q,t}^{n-\alpha} f(t) \in AC_q^{(n)}[0, T]$ แล้ว

$$I_{q,t}^\alpha D_{q,t}^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} I_{q,t}^{1+i-\alpha} f(0) \frac{t^{\alpha-i-1}}{\Gamma_q(\alpha-i)}$$

โดยที่ $I_{q,t}^{1+i-\alpha} f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} I_{q,t}^{1+i-\alpha} f(t)$

ทฤษฎีบท 2.13 [7] กำหนดให้ $\alpha \in (0, 1), \beta \in [0, 1], f \in \mathbb{L}_q[0, T]$ ที่ $I_{q,t}^{1-\gamma} f \in AC_q[0, T]$ เมื่อ $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ แล้ว

$$I_{q,t}^\alpha D_{q,t}^{\alpha,\beta} f(t) = f(t) - I_{q,t}^{1-\gamma} f(0) \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}$$

สำหรับบทนิยามของอนุพันธ์แบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการ $0 < \alpha(t) < 1, 0 \leq \beta \leq 1$ และ $q \in (0, 1)$ และปริพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา มีดังนี้

บทนิยาม 2.14 [7] กำหนดให้ $\alpha : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ ปริพันธ์ q เชิงเศษส่วนแบบ Riemann-Liouville ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา นิยามโดย

$$I_{q,t}^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha(t))} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha(t)-1)} f(s) d_qs$$

บทนิยาม 2.15 [7] กำหนดให้ $0 < \alpha(t) < 1$ และ $0 \leq \beta \leq 1$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา นิยามโดย

$$D_{q,t}^{\alpha(t),\beta} f(t) = I_{q,t}^{\beta(1-\alpha(t))} D_q I_{q,t}^{(1-\beta)(1-\alpha(t))} f(t)$$

จะเห็นได้ว่า กรณี $\alpha(t) = \alpha$ บทนิยาม 2.15 จะให้ผลตรงกับบทนิยาม 2.3

3. สมการผลต่างสปีเบื่องเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา

กำหนดให้ $\gamma(t) = \alpha(t) + \beta - \alpha(t)\beta$ สมการผลต่างสปีเบื่องแบบไม่เชิงเส้นที่มีลำดับการดำเนินการ $0 < \alpha(t) < 1$ และ $0 \leq \beta \leq 1$ อยู่ในรูป

$$D_{q,t}^{\alpha(t),\beta} x(t) = f(t, x(t)), t \in (0, T]$$

$$I_{q,t}^{1-\gamma(t)} f(0) = c, c \in \mathbb{R}$$

ให้ $P = \{(T_0, T_1], (T_1, T_2], (T_1, T_2], \dots, (T_{N-1}, T_N]\}$ โดยที่ $T_0 = 0, T_N = T$ และ

$P_k = (T_{k-1}, T_k]$ แทนช่วงย่อยที่ k ของ P และให้ $\alpha : (0, T] \rightarrow (0, 1)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

กำหนดให้ $\alpha^* : (0, T] \rightarrow (0, 1)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ที่แปรผันตาม P เรียก $\alpha^*(t)$ ว่า ฟังก์ชันการประมาณของ $\alpha(t)$ นิยามโดย

$$\alpha^*(t) = \sum_{k=1}^N \alpha(t_k) I_k(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k I_k(t) = \begin{cases} \alpha_1 & , t \in (T_0, T_1] \\ \alpha_2 & , t \in (T_1, T_2] \\ \alpha_3 & , t \in (T_2, T_3] \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_N & , t \in (T_{N-1}, T_N] \end{cases} \quad , t \in (0, T], t_k \in P_k$$

โดยที่ $I_k(t)$ เป็นฟังก์ชันบ่งชี้บนช่วง P_k ซึ่งก็คือ $I_k(t) = 1$ สำหรับ $t \in P_k$ และ $I_k(t) = 0$ สำหรับ $t \notin P_k$ จะเห็นว่า $\alpha(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^*(t)$

ผลเฉลยจากการประมาณการในช่วงย่อย

กำหนดให้ $\gamma_k = \alpha_k + \beta - \alpha_k\beta$ จากทฤษฎีบท 2.13 จะได้ผลเฉลยในช่วงย่อยดังนี้

$$x_k(t) = I_{q,t}^{1-\gamma_k} x(0) \frac{t^{\gamma_k-1}}{\Gamma_q(\gamma_k)} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha_k)} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha_k-1)} f(s, x_k(s)) d_qs, t \in P_k$$

ดังนั้นผลเฉลยโดยการประมาณ $x(t)$ สามารถเขียนได้ในรูปของผลรวมดังนี้

$$x(t) = \sum_{k=1}^N I_k(t) c \frac{t^{\gamma_k-1}}{\Gamma_q(\gamma_k)} + \sum_{k=1}^N \frac{I_k(t)}{\Gamma_q(\alpha_k)} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha_k-1)} f(s, x_k(s)) d_qs, t \in (0, T]$$

เมื่อ $N \rightarrow \infty$ จะได้ว่า

$$x(t) = c \frac{t^{\gamma(t)-1}}{\Gamma_q(\gamma(t))} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha(t))} \int_0^t (t - qs)^{(\alpha(t)-1)} f(s, x(s)) d_qs$$

4. การมีอยู่จริงของผลเฉลย

ในหัวข้อนี้จะแสดงเงื่อนไขในการมีอยู่จริงของผลเฉลยโดยใช้ทฤษฎีจุดตรึงของบานาค

บทนิยาม 4.1 กำหนดให้ $Q : X \rightarrow X$ นิยาม $x^* \in X$ เป็นจุดตรึง ถ้า $Qx^* = x^*$

บทนิยาม 4.2 กำหนดให้ X เป็นปริภูมิบานาคที่มี supremum norm $\|\cdot\|_X$ แล้ว $A : X \rightarrow X$ จะเรียกว่า การส่งแบบหดตัว ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $M \in [0,1)$ ซึ่งทำให้ $\|Ax - Ay\|_X \leq M\|x - y\|_X$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เรียกค่าคงที่ M ว่า ค่าคงตัวการหดตัว

ทฤษฎีบท 4.3 [3] กำหนดให้ X เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ โดยที่ $X \neq \emptyset$ และให้ $Q : X \rightarrow X$ เป็นการส่งแบบหดตัวบน X จะได้ว่า การส่ง Q จะมีผลเฉลยเป็นจุดตรึงเพียงค่าเดียว

บทนิยาม 4.4 กำหนดให้ $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว $f(t, u)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแบบ Lipschitz ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $M_f > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(t, u) - f(t, v)| \leq M_f|u - v|$ สำหรับทุก ๆ $u, v \in \mathbb{R}$ และ $t \in J$

ทฤษฎีบท 4.5 [7] สำหรับทุก ๆ $0 < q < 1$ และ $0 < \alpha(t) < 1$ อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$(1 - q)^{\alpha(t)} \leq \frac{1}{\Gamma_q(\alpha(t) + 1)} < \left(\frac{1 - q}{1 - q^{\frac{\alpha(t)+1}{2}}} \right)^{\alpha(t)}$$

เรียกอสมการนี้ว่า อสมการ q-gamma

4.1 การมีอยู่จริงของผลเฉลยในปริภูมิ $\mathbb{L}_q[0, T]$

ทฤษฎีบท 4.6 [9] ผลเฉลย $x(t)$ ของสมการผลต่างสลับเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา มีอยู่จริงใน $\mathbb{L}_q[0, T]$ ก็ต่อเมื่อ มี x_i ซึ่งเป็นผลเฉลยบนช่วงย่อย P_i นั่นคือ $x_i \in \mathbb{L}_q[0, T_i], I_{q,t}^{1-\gamma_i} x_i(0) = c$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, N$

ทฤษฎีบท 4.7 [2] กำหนดให้ $f : (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $f \in \mathbb{L}_q[0, a]$ แล้ว $I_{q,t}^\alpha f \in \mathbb{L}_q[0, a]$ และ $\|I_{q,t}^\alpha f\|_1 \leq \frac{a^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)} \|f\|_1$

ทฤษฎีบท 4.8 ผลเฉลย $x_k(t)$ มีอยู่จริง และเป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวใน $\mathbb{L}_q[0, T_k]$ เมื่อมีค่าคงที่การหดตัว $\frac{M_f T_k^{\alpha_k+1}}{\Gamma_q(\alpha_k+1)} < 1$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ $k = 1, 2, 3, \dots, N$ ให้ $Q : \mathbb{L}_q[0, T_k] \rightarrow \mathbb{L}_q[0, T_k]$ เป็นการส่งแบบหดตัว นิยามโดย $Qx_k = x_k$ จะได้ว่า

$$Qx_k(t) = I_{q,t}^{1-\gamma_k} x(0) \frac{t^{\gamma_k-1}}{\Gamma_q(\gamma_k)} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha_k)} \int_0^t (t-qs)^{(\alpha_k-1)} f(s, x_k(s)) d_qs$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \|Qx_k - Qy_k\|_1 &\leq M_f \|I_{q,t}^{\alpha_k} 1\|_1 \|x_k - y_k\|_1 \\ &\leq \frac{M_f T_k^{\alpha_k+1}}{\Gamma_q(\alpha_k+1)} \|x_k - y_k\|_1 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีจุดตรึงของบานาค ถ้ามี $\frac{M_f T_k^{\alpha_k+1}}{\Gamma_q(\alpha_k+1)} < 1$ แล้ว จะมีผลเฉลย x_k เป็นจุดตรึงเพียงค่าเดียวใน $\mathbb{L}_q[0, T_k]$ □

4.2 การมีอยู่จริงของผลเฉลยในปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีการถ่วงน้ำหนัก $C_{1-\gamma}[0, T]$

ทฤษฎีบท 4.9 [9] ผลเฉลย $x(t)$ ของสมการผลต่างสลับเชิงเศษส่วนแบบ q-Hilfer ที่มีลำดับการดำเนินการแปรผันตามเวลา มีอยู่จริงใน $C_{1-\gamma}[0, T]$ ก็ต่อเมื่อ มี x_i เป็นผลเฉลยจากช่วงย่อย P_i นั่นคือ $x_i \in C_{1-\gamma_i}[0, T_i]$, $I_{q,t}^{1-\gamma_i} x_i(0) = c$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, N$

ทฤษฎีบท 4.10 [2] กำหนดให้ $f : (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $f \in C_\gamma[0, a]$ แล้ว $I_{q,t}^\alpha f \in C_\gamma[0, a]$ และ $\|I_{q,t}^\alpha f\|_{C_\gamma} \leq a^\alpha \frac{\Gamma_q(1-\gamma)}{\Gamma_q(\alpha+1-\gamma)} \|f\|_{C_\gamma}$

ทฤษฎีบท 4.11 ผลเฉลย $x_k(t)$ มีอยู่จริง และเป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวใน $C_{1-\gamma_k}[0, T_k]$ เมื่อมีค่าคงที่การหดตัว $\frac{M_f T_k \Gamma_q(\gamma_k)}{\Gamma_q(\alpha_k+\gamma_k)} < 1$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ $k = 1, 2, 3, \dots, N$ ให้ $Q : C_{1-\gamma_k}[0, T_k] \rightarrow C_{1-\gamma_k}[0, T_k]$ เป็นการส่งแบบหดตัว นิยามโดย $Qx_k = x_k$ จะได้ว่า

$$Qx_k(t) = I_{q,t}^{1-\gamma_k} x(0) \frac{t^{\gamma_k-1}}{\Gamma_q(\gamma_k)} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha_k)} \int_0^t (t-qs)^{(\alpha_k-1)} f(s, x_k(s)) d_qs$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \|Qx_k - Qy_k\|_{C_{1-\gamma_k}} &\leq M_f \|I_{q,t}^{\alpha_k} 1\|_{C_{1-\gamma_k}} \|x_k - y_k\|_{C_{1-\gamma_k}} \\ &\leq \frac{M_f T_k \Gamma_q(\gamma_k)}{\Gamma_q(\alpha_k+\gamma_k)} \|x_k - y_k\|_{C_{1-\gamma_k}} \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีจุดตรึงของบานาค ถ้ามี $\frac{M_f T_k \Gamma_q(\gamma_k)}{\Gamma_q(\alpha_k + \gamma_k)} < 1$ แล้ว จะมีผลเฉลย x_k เป็นจุดตรึงเพียงค่าเดียวใน $C_{1-\gamma_k}[0, T_k]$ □

5. ตัวอย่างประกอบ

พิจารณาสมการผลต่างสี่เหลี่ยมเชิงเศษส่วนต่อไปนี้

$$D_{\frac{1}{3}, t}^{\frac{1}{5} \sec(\cos(\frac{t}{2}))} x(t) = \frac{x(t)}{20(x^2(t) + 1)}, t \in (0, 1]$$

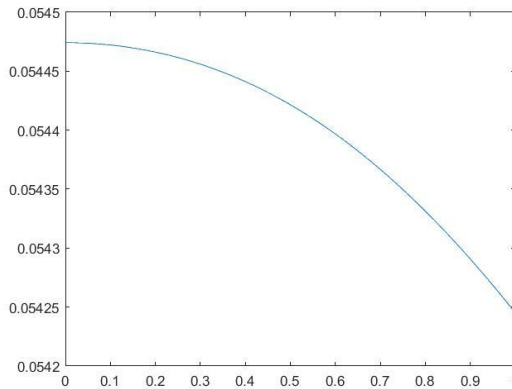
$$I_{\frac{1}{3}, t}^{1-\gamma(t)} f(0) = 0, \gamma(t) = \frac{1}{10} \sec\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}$$

เห็นได้ชัดว่า $M_f = \frac{1}{20}$ จาก $T_k \leq 1$ จะได้ว่า $\frac{M_f T_k^{\alpha_k+1}}{\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha_k+1)} < \frac{1}{20\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha_k+1)}$

จากทฤษฎีบท 4.11 หาก $\frac{1}{20\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha_k+1)} < 1$ แล้ว ผลเฉลยย่อย x_k จะมีอยู่จริงใน $\mathbb{L}_{\frac{1}{3}}[0, T_k]$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก α_k เป็นค่าคงที่ ซึ่งประมาณจาก $\alpha(t) = \frac{1}{5} \sec\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ ดังนั้นหากสามารถแสดงได้ว่า $\frac{1}{20\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha(t)+1)} < 1$ โดยที่ $t \in (0, 1]$ ก็จะได้ว่า ผลเฉลยบน $\mathbb{L}_{\frac{1}{3}}[0, T_k]$ ใดๆ มีอยู่จริง ในตัวอย่างนี้ เมื่อปรับใช้สมการในทฤษฎีบท 4.5 เมื่อ $t \in (0, 1]$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{20\Gamma_{\frac{1}{3}}(\alpha(t) + 1)} < \frac{1}{20} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5} \sec(\cos(\frac{t}{2}))} \left(\frac{1}{1 - 3^{-\frac{1}{10} \sec(\cos(\frac{t}{2})) - \frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{5} \sec(\cos(\frac{t}{2}))} < 1$$



รูปที่ 5.1 รูปกราฟสำหรับแสดงค่าฟังก์ชัน (กลาง) จากอสมการข้างต้น เมื่อ $t \in (0, 1]$

ดังนั้นผลเฉลยย่อย $x_k \in \mathbb{L}_{\frac{1}{3}}[0, T_k], I_{\frac{1}{3}, t}^{1-\gamma_k} x_k(0) = 0$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \dots, N$ มีอยู่จริง

จากทฤษฎีบท 4.6 ผลเฉลย $x(t)$ ของสมการตัวอย่างมีอยู่จริงใน $\mathbb{L}_{\frac{1}{3}}[0, 1]$ ตามต้องการ

เอกสารอ้างอิง

- [1] Almeida, R., Tavares, D. and Torres, D. F. M. (2018). *The Variable-Order Fractional Calculus of Variations*. New York: Springer International Publishing.
- [2] Annaby, M. H. and Mansour, Z. S. (2012). *q-Fractional Calculus and Equations*. Berlin: Springer.
- [3] Borisut, P., Khammahawong, K. and Kumam, P. (2018). *Fixed Point Theory Approach to Existence of Solutions with Differential Equations*. London: IntechOpen.
- [4] Furati, K. M., Kassim, M. D. and Tatar, N.e-. (2012). Existence and Uniqueness for A Problem Involving Hilfer Fractional Derivative. *Computers & Mathematics with Applications*, 64 (6), p. 1616 – 1626.
- [5] Hilfer, R. (2000). *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore: World of Scientific.
- [6] Jackson, FH. (1909). On q-functions and A Certain Difference Operator. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*. 46 (2), p. 253 – 281.
- [7] Limpanukorn, N., Ahmed, I. and Ibrahim, M. J. (2021). Uniqueness of Continuous Solution to q-Hilfer Fractional Hybrid Integro-difference Equation of Variable Order. *Journal of Mathematical Analysis and Modeling*. 2 (3), p. 88 – 98.
- [8] Tariboon, J., Ntouyas, S. K. and Agarwal, P. (2015). New Concepts of Fractional Quantum Calculus and Applications to Impulsive Fractional q-difference Equations. *Advances in Difference Equations*, 18(2015). <https://doi.org/10.1186/s13662-014-0348-8>
- [9] Zhang, S., Wang, J. and Hu, L. (2021). On Definition of Solution of Initial Value Problem for Fractional Differential Equation of Variable Order. *AIMS Mathematics*, 6 (7), p. 6845 – 6867.



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

นัยทั่วไปแบบหนึ่งของทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์

A Generalization of Marion Walter's Theorem

DOI: 10.14456/mj-math.2022.7

รักษ์เกียรติ รักษ์อุดมการณ์^{1,*} และ เกษสุดา บุรณพันธ์²

^{1,2}สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ บุรีรัมย์ 31000

Rakkiad RakUdomkan^{1,*} and Ketsuda Buranaphansak²

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Education, Buriram Rajabhat University, Buriram 31000

Email: ¹rakkiad.rak@bru.ac.th ²katsuda.bp@bru.ac.th

วันที่รับบทความ : 1 สิงหาคม 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 1 พฤษภาคม 2564

วันที่ตอบรับบทความ : 19 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับแบบหนึ่งของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยนำทฤษฎีบทมาประยุกต์ใช้ในการหานัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่ดังกล่าว

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ ทฤษฎีบททูลู

* ผู้เขียนหลัก

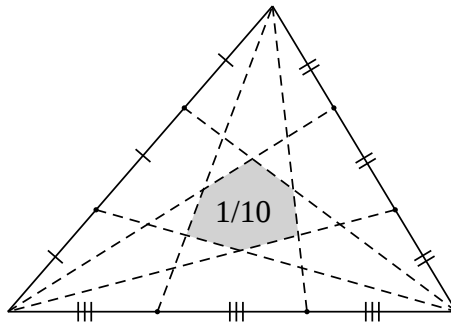
ABSTRACT

In this paper, we provide a generalization of Marion Walter's theorem by applying Shoelace theorem.

Keywords: Marion Walter's theorem, Shoelace theorem

1. บทนำ

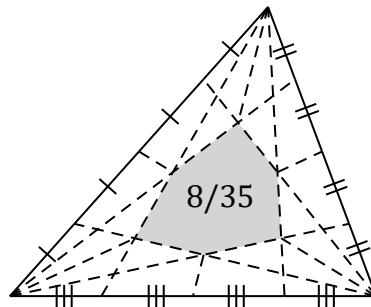
จากทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ (Marion Walter's theorem) [2] ซึ่งกล่าวถึงอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่แบ่งด้านตรงข้ามของจุดยอดนั้นออกเป็น 3 ส่วน เท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 1 ว่าอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมเป็น $1 : 10$ เสมอ



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์ของรูปหกเหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์

จากการศึกษางานวิจัยที่ผ่านมาพบว่า นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะนำสมบัติหรือทฤษฎีบททางเรขาคณิตมาพิสูจน์ว่าอัตราส่วนดังกล่าวเป็นจริงตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ หรือไม่ โดยในปี ค.ศ. 1994 ไรอัน มอร์แกน [6] ได้ขยายทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ ด้วยการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น N ส่วน โดยที่ N เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 ซึ่งผลการศึกษาพบว่า พื้นที่หกเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ $\frac{8}{9N^2-1}$ เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

ในปี ค.ศ. 2016 ลูกา โกลโดนิ [4] ได้ศึกษาอัตราส่วนของพื้นที่ที่ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 2 ซึ่งผลการศึกษาพบว่า พื้นที่รูปหกเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ $\frac{8}{35}$ เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ของรูปหกเหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมตามการศึกษาของลูกา โกลโดนิ

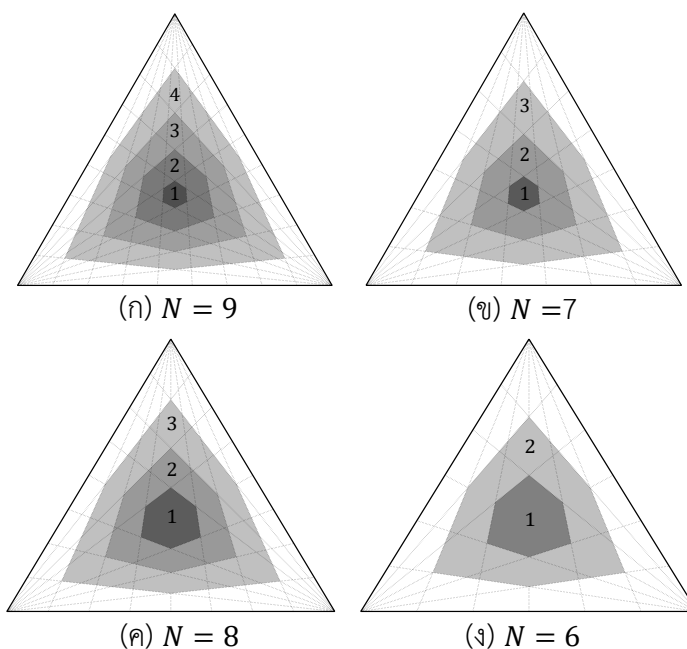
ต่อมาปี ค.ศ. 2018 โอซามา अबดุลลา [5] ได้ศึกษารูปทั่วไปของอัตราส่วนของพื้นที่ตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยแยกพิจารณาการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นจำนวนคี่และจำนวนคู่ ผลการศึกษาพบว่า

N จำนวนคี่	N เป็นจำนวนคู่
$Ae = \frac{32}{\left(\frac{6N}{2c-1}\right)^2 - 4}$ เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$	$Ae = \frac{32}{9\left(\frac{N}{c}\right)^2 - 4}$ เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}$

โดย N แทน จำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

c แทน ลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่

Ae แทน อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 3 ตัวอย่างลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่กรณี $N = 9, 7, 8$ และ 6 ตามลำดับ
ตามการศึกษาของโอซามา อับดัลลา

จากการศึกษาของโอซามา อับดัลลา ข้างต้น ทำให้เราสนใจที่จะศึกษาต่อยอดเพื่อหานัยทั่วไปแบบอื่นของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมในรูปของ N ใด ๆ เมื่อ N เป็นจำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม และ $N \geq 3$ เพียงสูตรเดียวโดยไม่ต้องแบ่ง N ออกเป็นกรณีจำนวนคู่และกรณีจำนวนคี่

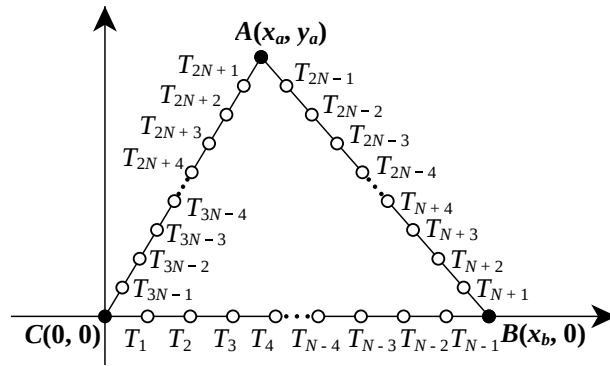
2. ผลการศึกษา

การหานัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมรีน วอลเตอร์ มีขั้นตอนและรายละเอียดดังนี้

2.1 เงื่อนไขเบื้องต้น

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $A(x_a, y_a), B(x_b, 0)$ และ $C(0, 0)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมนั้น

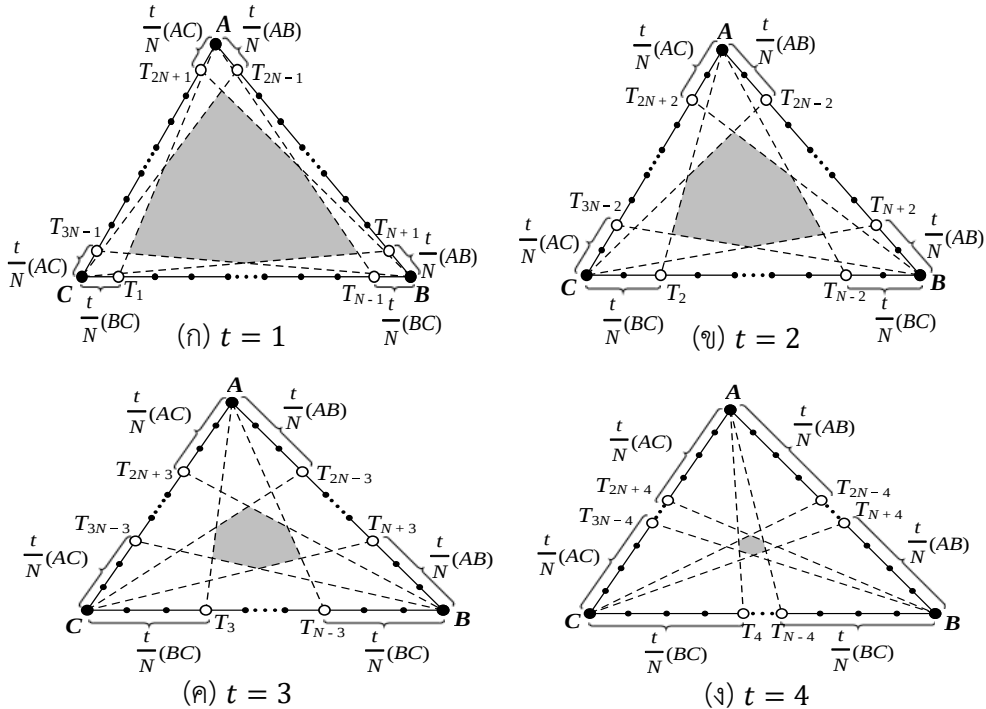
แบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ออกเป็น N ส่วน เท่า ๆ กัน โดยที่ $N \geq 3$ และให้ T_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, 3N$ เป็นจุดแบ่งด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 การแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ออกเป็น N ส่วนเท่า ๆ กัน

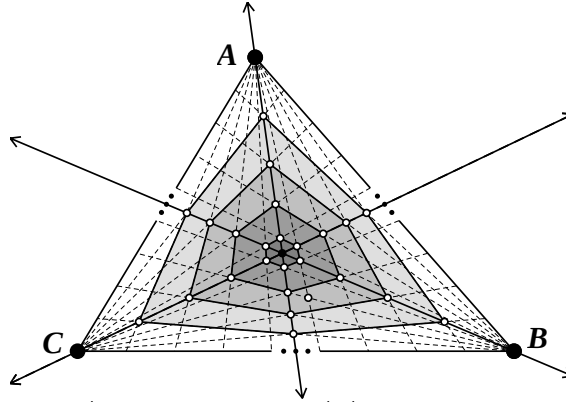
จากรูปที่ 4 จะเห็นว่าจุดแบ่งบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมี $N - 1$ จุด (ไม่นับจุดยอด)

ให้ t เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่าน้อยกว่า $\frac{N}{2}$ เราสามารถลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดแบ่ง 2 จุดที่อยู่บนด้านตรงข้าม โดยจุดแบ่ง 2 จุดนั้น อยู่ห่างจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่อยู่ใกล้ที่สุดในด้านตรงข้ามเป็นระยะเท่ากัน คือ $\frac{t}{N}$ เท่าของความยาวด้านตรงข้ามนั้น ดังตัวอย่างในรูปที่ 5



รูปที่ 5 รูปหกเหลี่ยมภายใต้การแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมด้วยค่า t

จากรูปที่ 5 จะเห็นว่ารูปเรขาคณิตตรงกลางของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้ามดังกล่าวนั้นจะเป็นรูปหกเหลี่ยมเสมอ เนื่องจากไม่มีส่วนของเส้นตรงใดที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมผ่านจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมนั้น และจุดยอดของรูปหกเหลี่ยมจะอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมกับจุดเซนทรอยด์ จึงเกิดเป็นรูปหกเหลี่ยมเสมอ ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 จุดยอดของรูปหกเหลี่ยมจะอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดกับจุดเซนทรอยด์เสมอ

ในขั้นตอนต่อไป จะใช้จุดแบ่ง $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ T_{3N-t} สำหรับหาพื้นที่รูปหกเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยที่ $1 \leq t < \frac{N}{2}$

2.2 พื้นที่รูปหกเหลี่ยมภายใต้เงื่อนไขการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น N ส่วนเท่า ๆ กัน

2.2.1 พิกัดจุดแบ่งแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

จากจุด $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ T_{3N-t} เป็นจุดแบ่งบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งสามารถหาพิกัดจุดแบ่งดังกล่าวได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 [3] ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งบนส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ซึ่งเชื่อมระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $P_1P : PP_2 = r_1 : r_2$ จะได้ว่า

$$x = \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2} \text{ และ } y = \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2}$$

จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ จุดแบ่ง $T_t, T_{N-t}, T_{N+t}, T_{2N-t}, T_{2N+t}$ และ T_{3N-t} มีพิกัดดังนี้

$$\begin{aligned} T_t &= \left(\frac{tx_b}{N}, 0 \right) & T_{2N-t} &= \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{N}, \frac{(N-t)y_a}{N} \right) \\ T_{N-t} &= \left(\frac{(N-t)x_b}{N}, 0 \right) & T_{2N+t} &= \left(\frac{(N-t)x_a}{N}, \frac{(N-t)y_a}{N} \right) \\ T_{N+t} &= \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{N}, \frac{ty_a}{N} \right) & T_{3N-t} &= \left(\frac{tx_a}{N}, \frac{ty_a}{N} \right) \end{aligned}$$

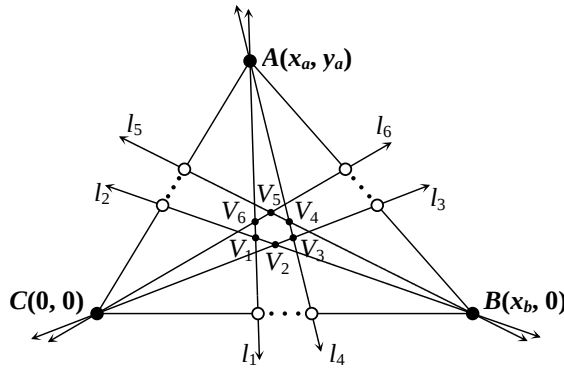
2.2.2 สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและจุดแบ่งที่อยู่บนด้านตรงข้าม

กำหนดให้เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและจุดแบ่งที่อยู่บนด้านตรงข้ามทั้ง 6 จุดข้างต้น คือ เส้นตรง $l_1, l_2, \dots, l_6$ ตามลำดับ โดยมีสมการดังนี้

$$\begin{aligned} l_1 : y &= \frac{Ny_a}{Nx_a - tx_b} (x - x_a) + y_a & l_2 : y &= \frac{ty_a}{tx_a - Nx_b} (x - x_a) \\ l_3 : y &= \frac{ty_a}{tx_a + (N-t)x_b} x & l_4 : y &= \frac{Ny_a}{Nx_a - (N-t)x_b} (x - x_a) + y_a \\ l_5 : y &= \frac{(N-t)y_a}{(N-t)x_a - Nx_b} (x - x_b) & l_6 : y &= \frac{(N-t)y_a}{(N-t)x_a + tx_b} x \end{aligned}$$

2.2.3 พิกัดจุดยอดของรูปหกเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันระหว่างเส้นตรง l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 และ l_6

กำหนดให้ V_i เป็นจุดตัดของเส้นตรง l_i และ l_{i+1} เมื่อ $i = 1, 2, \dots, 6$ และ $l_7 = l_1$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 จุดยอด V_1 ถึง V_6 ของรูปหกเหลี่ยม ที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง l_1 ถึง l_6

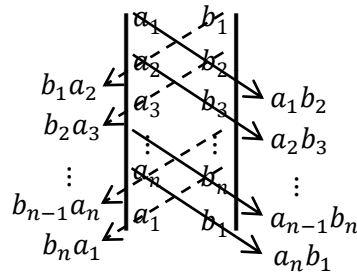
จะได้ จุดยอด V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 และ V_6 ของรูปหกเหลี่ยม มีพิกัดดังนี้

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{t(x_a + x_b)}{N+t}, \frac{ty_a}{N+t} \right) & V_2 &= \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{2N-t}, \frac{ty_a}{2N-t} \right) \\ V_3 &= \left(\frac{tx_a + (N-t)x_b}{N+t}, \frac{ty_a}{N+t} \right) & V_4 &= \left(\frac{(N-t)(x_a + x_b)}{2N-t}, \frac{(N-t)y_a}{2N-t} \right) \\ V_5 &= \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{N+t}, \frac{(N-t)y_a}{N+t} \right) & V_6 &= \left(\frac{(N-t)x_a + tx_b}{2N-t}, \frac{(N-t)y_a}{2N-t} \right) \end{aligned}$$

2.2.4 พื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$

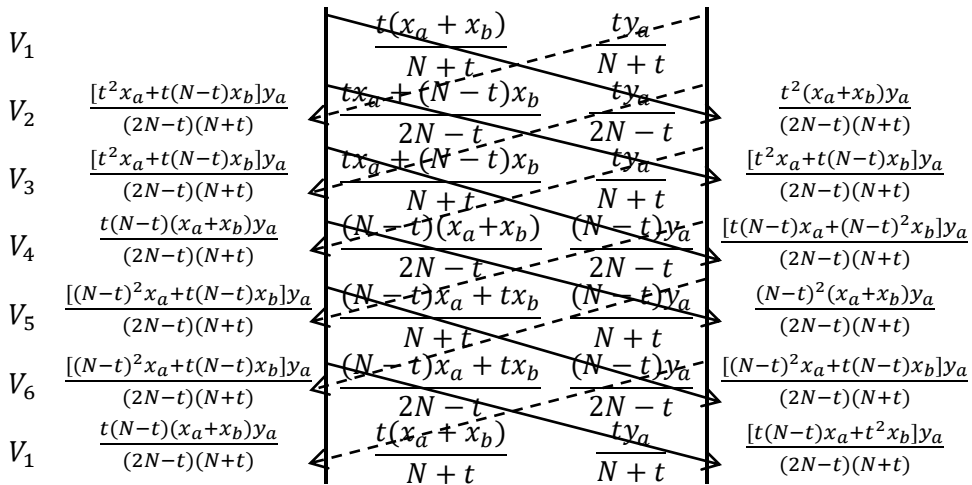
ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทเชลูเช (Shoelace Theorem)) [1] กำหนดให้ P เป็นรูป n เหลี่ยม ที่มีจุดยอดเป็นจุด $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_n, b_n)$ ซึ่งเรียงกันในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา พื้นที่ของรูป P คือ

$$\frac{1}{2} [(a_1b_2 + a_2b_3 + \dots + a_{n-1}b_n + a_nb_1) - (b_1a_2 + b_2a_3 + \dots + b_{n-1}a_n + b_nab_1)]$$



ดังนั้น จากทฤษฎีบทพหุคูณและจุดยอด V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 และ V_6 ของรูปหกเหลี่ยมวางเรียงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะได้พื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}y_a \left(\left(\frac{t^2(x_a + x_b)}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t(N-t)x_a + (N-t)^2x_b}{(2N-t)(N+t)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(N-t)^2(x_a + x_b)}{(2N-t)(N+t)} + \frac{(N-t)^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t(N-t)x_a + t^2x_b}{(2N-t)(N+t)} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{t^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t(N-t)(x_a + x_b)}{(2N-t)(N+t)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(N-t)^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{(N-t)^2x_a + t(N-t)x_b}{(2N-t)(N+t)} + \frac{t(N-t)(x_a + x_b)}{(2N-t)(N+t)} \right) \right) \\ & = \frac{x_b y_a (N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)} \end{aligned}$$



ให้พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC คือ $[ABC]$ จะได้ว่า $[ABC] = \frac{x_b y_a}{2}$ หรือ $x_b y_a = 2[ABC]$

ดังนั้นพื้นที่ของรูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ $\frac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$

2.3 รูปทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

จากพื้นที่รูปหกเหลี่ยม $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ คือ $\frac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC คือ $[ABC]$ จะได้ อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ

$$\frac{\frac{2[ABC](N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}}{[ABC]} = \frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$$

สรุปได้ว่า รูปทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ

$$\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)} \quad (*)$$

เมื่อ N แทน ส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $N \geq 3$

t แทน จำนวนส่วนที่นับจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปถึงจุดแบ่งใกล้ที่สุดที่เลือกบนแต่ละด้าน

2.4 ความสัมพันธ์กับทฤษฎีบทอื่น ๆ

จากนัยทั่วไปของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของบทความนี้ คือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ เมื่อแทน $t = \frac{N-1}{2}$ จะได้ว่า (*) คือ $\frac{8}{9N^2-1}$ ซึ่งคือ อัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมที่เล็กที่สุดต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ซึ่งเท่ากับอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่ด้านถูกแบ่งออกเป็นจำนวนคี่ของทฤษฎีบทของโรอัน มอร์แกน ซึ่งคือ $\frac{8}{9N^2-1}$

เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีบทของโอซามา अबดุลลา ที่แยกพิจารณาการแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นจำนวนคี่และจำนวนคู่ โดยกำหนด c เป็นลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่ ซึ่งเป็นแนวคิดกลับกันกับบทความนี้ที่กำหนดให้ t เป็นลำดับของรูปหกเหลี่ยมจากใหญ่ไปเล็ก เช่น ถ้าหากแบ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 9 ส่วน จะเกิดรูปหกเหลี่ยมภายในขึ้นทั้งหมด 4 รูป ซึ่งทฤษฎีบทของโอซามา अबดุลลา จะให้ c เป็น 1, 2, 3, 4 โดยเรียงตามลำดับขนาดของรูปหกเหลี่ยมจากเล็กไปใหญ่ ดังรูปที่ 3(ก) แต่ในบทความนี้จะให้ t เป็น 1, 2, 3, 4 ซึ่งเรียงตามลำดับขนาดรูปหกเหลี่ยมจากใหญ่ไปเล็ก ดังรูปที่ 5 ดังนั้นจะเห็นได้ว่า t และ c มีการเรียงลำดับขนาดของรูปหกเหลี่ยมแบบสวนทางกัน โดยที่ $t = \frac{N+1}{2} - c$ ทำให้ได้ว่าอัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่เขียนในรูป t และ c มีความสัมพันธ์กัน ดังตารางที่ 2.1 และ 2.2

ตารางที่ 2.1 กรณีที่ N เป็นจำนวนคี่ (เกิดรูปหกเหลี่ยม $\frac{N-1}{2}$ รูป)

c	t	อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (Ae)
1	$\frac{N-1}{2}$	จาก $t = \frac{N+1}{2} - c = \frac{N+1-2c}{2}$
2	$\frac{N-1}{2} - 1$	แทน t ใน (*) จะได้ว่า
3	$\frac{N-1}{2} - 2$	$Ae = \frac{2\left[N-2\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]^2}{\left[2N-\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]\left[N+\left(\frac{N+1-2c}{2}\right)\right]}$
$\vdots$	$\vdots$	$= \frac{2(2c-1)^2}{[3N+(2c-1)][3N-(2c-1)]}$
$\frac{N-1}{2} - 2$	3	$= \frac{8(2c-1)^2}{9N^2-(2c-1)^2}$
$\frac{N-1}{2} - 1$	2	$= \frac{8}{\left(\frac{3N}{2c-1}\right)^2 - 1}$
$\frac{N-1}{2}$	1	$= \frac{32}{\left(\frac{6N}{2c-1}\right)^2 - 4}$
		เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$

ตารางที่ 2.2 กรณีที่ N เป็นจำนวนคู่ (เกิดรูปหกเหลี่ยม $\frac{N-2}{2}$ รูป)

c	t	อัตราส่วนของพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (Ae)
1	$\frac{N-2}{2}$	จาก $t = \frac{N}{2} - c = \frac{N-2c}{2}$
2	$\frac{N-2}{2} - 1$	แทน t ใน (*) จะได้ว่า
3	$\frac{N-2}{2} - 2$	$Ae = \frac{2\left[N-2\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]^2}{\left[2N-\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]\left[N+\left(\frac{N-2c}{2}\right)\right]}$
$\vdots$	$\vdots$	$= \frac{2(2c)^2}{[3N+2c][3N-2c]}$
$\frac{N-2}{2} - 2$	3	$= \frac{32c^2}{9N^2-4c^2}$
$\frac{N-2}{2} - 1$	2	$= \frac{32}{9\left(\frac{N}{c}\right)^2 - 4}$
$\frac{N-2}{2}$	1	เมื่อ $N \geq 3$ และ $c = 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}$

3. สรุปผลการศึกษา

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นการศึกษานัยทั่วไปแบบหนึ่งของอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทของแมเรียน วอลเตอร์ โดยการแบ่งด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมออกเป็น N ส่วนเท่า ๆ กัน และไม่ว่าจะลากเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดแบ่ง 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ด้านตรงข้าม ซึ่งจุดแบ่ง 2 จุดนั้นอยู่ห่างจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่ใกล้ที่สุดในด้านนั้นเป็นระยะเท่ากัน จะได้ว่าอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม คือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ เมื่อ N แทนจำนวนส่วนแบ่งที่เท่ากันบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $N \geq 3$ และ t แทนจำนวนส่วนที่นับจากจุดแบ่งไปยังจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่ใกล้สุดบนแต่ละด้าน

4. ข้อสังเกต

จากผลการศึกษาอัตราส่วนพื้นที่รูปหกเหลี่ยมต่อพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ซึ่งคือ $\frac{2(N-2t)^2}{(2N-t)(N+t)}$ หากพิจารณาตัวผกผันของอัตราส่วนนี้ ซึ่งคือ $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$ พบว่า

4.1 ถ้า N เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่อยู่ในการูป 2^n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

จะได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็ม t ที่ทำให้อัตราส่วน $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณาได้ดังนี้

กรณี 1 ถ้า t เป็นจำนวนคี่

จะทำให้ $2 \nmid 9t(2^n - t)$

ดังนั้น $1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(2^n-t)}{2(2^n-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ t เป็นจำนวนคี่

กรณี 2 ถ้า t เป็นจำนวนคู่ ที่อยู่ในการูป $m2^k$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \dots$ และ m เป็นจำนวนคี่

เนื่องจาก $t \leq \frac{N+1}{2} < N$ ดังนั้น $k < N$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2} &= 1 + \frac{9t(2^n-t)}{2(2^n-2t)^2} \\ &= 1 + \frac{(9m2^k)(2^n-(m2^k))}{2(2^n-(2m2^k))^2} \\ &= 1 + \frac{9m(2^{n-k}-m)}{2(2^{n-k}-2m)^2} \end{aligned}$$

เห็นได้ว่าสำหรับ m ที่เป็นจำนวนคี่ $2 \nmid 9m(2^{n-k} - m)$

ดังนั้น $1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็ม t ที่ทำให้อัตราส่วน $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่อยู่ในรูปแบบ 2^n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

4.2 เมื่อ $(N, t) = 1$ จะได้ว่า

4.2.1 ถ้า N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 3$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณาได้ดังนี้ จาก N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ และ $(N, t) = 1$ ทำให้ได้ว่า t เป็นจำนวนคี่

จะเห็นว่า $(2N-t)(N+t)$ เป็นจำนวนคี่ และ $2(N-2t)^2$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 3$ และ

$$(N, t) = 1$$

4.2.2 ถ้า N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 5$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ

$$t = \frac{N-1}{2} \text{ หรือ } t = \frac{N-3}{2}$$

พิจารณาได้ดังนี้

$$\text{จาก } \frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2} = 1 + \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2}$$

เนื่องจาก N เป็นจำนวนคี่ที่ $N \geq 5$ จะได้ว่า $t(N-t)$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $2 \mid t(N-t)$ เพราะฉะนั้น

$$\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2} \text{ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ } \frac{9t(N-t)}{2(N-2t)^2} \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } (N-2t)^2 \mid 9$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } N-2t = 1 \text{ หรือ } N-2t = 3$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } t = \frac{N-1}{2} \text{ หรือ } t = \frac{N-3}{2}$$

ดังนั้น ถ้า N เป็นจำนวนคี่ใด ๆ โดย $N \geq 5$ จะได้ว่า $\frac{(2N-t)(N+t)}{2(N-2t)^2}$ เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ

$$t = \frac{N-1}{2} \text{ หรือ } t = \frac{N-3}{2}$$

เอกสารอ้างอิง

- [1] Beyer, W. (1978). *CRC Standard Mathematical Tables*. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- [2] Cuoco, A., Goldenberg, P., and Mark, J. (1993). Reader Reflections: Marion's Theorem. *Mathematics Teacher*, 86 (8), p. 619.
- [3] Frank, A. and Philip, A. S. (1992). *Schaum's Outline of Theory and Problems of College Mathematics* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill International Edition.

- [4] Luca, G. (2016). A Generalization of Marion Walter's Theorem. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/301284954>.
- [5] Osama, A. (2018). The Relationship Between The Different Central Hexagons Formed Through Odd/Even-Secting The Lengths of Triangles. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/322477444>.
- [6] Ryan, M. (1994). Reader Reflections: No Restrictions need, *Mathematics Teacher*, 87, p. 726, 743.



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การพิสูจน์เชิงการจัดของเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับผลรวมตรีโกณมิติกำลัง

A Combinatorial Proof of An Identity Involving Trigonometric Power Sums

DOI: 10.14456/mj-math.2022.8

รัชไน ไช้แก้ว¹ และ ขนิษฐา แน่นอุดร^{2,*}

¹คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี กรุงเทพมหานคร 10600

²คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี กรุงเทพมหานคร 10600

Rachanai Kaikeaw¹ and Khanithar Naenudorn^{2,*}

¹Faculty of Science and Technology, Dhonburi Rajabhat University, Bangkok 10600

²Faculty of Education, Dhonburi Rajabhat University, Bangkok 10600

Email: ¹rachanai.k@dru.ac.th ²khanithar.n@dru.ac.th

วันที่รับบทความ : 18 มีนาคม 2565

วันที่แก้ไขบทความ : 18 สิงหาคม 2565

วันที่ตอบรับบทความ : 19 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

ให้ n, m, d, r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n, m, d \geq 1$ บทความนี้นำเสนอการพิสูจน์เชิงการจัดเพื่อแสดงว่า

* ผู้เขียนหลัก

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \\ = -m^n + d \sum_{k=\lceil \frac{n-r}{d} \rceil}^{\lfloor \frac{mn-r}{d} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1} \end{aligned}$$

โดยนับจำนวนผลเฉลยของสมภาค $x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv r \pmod{d}$ เมื่อ $1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$

คำสำคัญ: ผลรวมตรีโกณมิติกำลัง อนุกรมตรีโกณมิติ การพิสูจน์เชิงการจัด

หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก ฟังก์ชันก่อกำเนิด

ABSTRACT

Let n, m, d, r be integers where $n, m, d \geq 1$. In this paper, we use a combinatorial proof to show that

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \\ = -m^n + d \sum_{k=\lceil \frac{n-r}{d} \rceil}^{\lfloor \frac{mn-r}{d} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1} \end{aligned}$$

by counting the number of solutions to the congruence $x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv r \pmod{d}$

where $1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$.

Keywords: Trigonometric power sums, Trigonometric series, Combinatorial proof, Inclusion-Exclusion principle, Generating functions

1. บทนำ

ผลรวมจำกัดของฟังก์ชันตรีโกณมิติกำลัง ปรากฏอยู่ในหลากหลายทฤษฎีทางฟิสิกส์ จากผลงานของ Dowker [6 – 8] ที่ศึกษาเกี่ยวกับปรากฏการณ์คาซิมีร์ (casimir effect) และทฤษฎีสตริง (string theory) เขาได้หารูปแบบชัดแจ้งของผลรวมต่อไปนี้

$$C_{2n}(q, r) = \sum_{p=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2rp\pi}{q}\right) \csc^{2n}\left(\frac{p\pi}{q}\right)$$

สำหรับจำนวนเต็ม n, q, r ซึ่ง $n \geq 1, q \geq 2$ และ $0 \leq r < q$

ผลงานของ Dowker ทำให้สูตรหรือเอกลักษณ์เกี่ยวกับผลรวมที่มีลักษณะดังกล่าวได้รับความสนใจมากยิ่งขึ้นจากนักคณิตศาสตร์และนักวิจัยหลายท่าน

ในปี ค.ศ. 1999 Chu และ Marini [4] ได้สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิด เพื่อหารูปแบบชัดแจ้งของอนุกรมตรีโกณมิติที่แตกต่างกันได้ 24 ประเภท เช่น

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sec^{2p} \left(\frac{k\pi}{n} \right) = n \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{p+k} \binom{p-1+kn}{2p-1} \sum_{j=k}^{2p-1} \binom{2p}{j+1}$$

สำหรับจำนวนคี่บวก n และจำนวนเต็มบวก p

ในปี ค.ศ. 2002 Berndt และ Yeap [3] ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบในการพิสูจน์ทฤษฎีบทความสัมพันธ์กัน (reciprocity theorems) สำหรับผลรวมตรีโกณมิติ ทฤษฎีบทของพวกเขาเป็นกรณีทั่วไปสำหรับสูตรผลรวมที่น่าสนใจมากมาย เช่น

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot^4 \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-13)}{45}$$

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2012 Merca [11] ใช้เทคนิคการแบ่งอนุกรมหลายส่วน (series multisection) เพื่อพิสูจน์เอกลักษณ์เกี่ยวกับผลรวมโคไซน์กำลัง เช่น

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cos^{2p} \left(\frac{k\pi}{n} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{n}{2^{2p+1}} \sum_{k=-\lfloor \frac{p}{n} \rfloor}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} \binom{2p}{p+kn}$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ p

และในปี ค.ศ. 2020 He [9] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติอันดับสูงและฟังก์ชันซีตา ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นการปรับปรุงและพัฒนาผลงานของหลาย ๆ ท่านที่ผ่านมา

จะเห็นว่าการใช้วิธีการที่หลากหลายในการพิสูจน์เอกลักษณ์เกี่ยวกับผลรวมตรีโกณมิติ ซึ่งพบว่าสูตรที่ค้นพบบางส่วนมีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ทวินาม เพราะฉะนั้นวิธีการอีกวิธีหนึ่งที่สามารถนำมาพิสูจน์เอกลักษณ์ในลักษณะดังกล่าวได้คือ การพิสูจน์เชิงการจัด ซึ่ง กิตติกร นาคประสิทธิ์ ได้ให้ความหมายการพิสูจน์เชิงการจัดไว้ว่า

“การพิสูจน์เชิงการจัด คือ วิธีพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยนับสิ่งที่เลือกสรรมาด้วยวิธีการนับที่แตกต่างกัน และเนื่องจากว่าสิ่งที่นับเป็นสิ่งเดียวกัน ดังนั้นการนับด้วยวิธีการที่แตกต่างกันทั้งสองแบบย่อมจะได้จำนวนที่เท่ากัน” [1]

ปัญหาเกี่ยวกับการนับโดยทั่วไปมักมีผลเฉลยในรูปสัมประสิทธิ์ทวินาม แต่ถ้าเปลี่ยนวิธีการนับใหม่ ปัญหาเดียวกันอาจจะมีผลเฉลยในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งผลเฉลยทั้งสองแบบสามารถเชื่อมโยงกันได้โดยอาศัยหลักของการพิสูจน์เชิงการจัด ทางคณะผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะสร้างเอกลักษณ์ตรีโกณมิติจากปัญหาการนับบางประการ โดยในบทความนี้ เราจะนับจำนวนผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod{d} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

เมื่อ n, m, d, r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n, m, d \geq 1$ ซึ่งทำให้ได้เอกลักษณ์

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \\ = -m^n + d \sum_{k=\lfloor \frac{n-r}{d} \rfloor}^{\lfloor \frac{mn-r}{d} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1} \end{aligned}$$

(กรณี $d = 1$ ผลรวมทางด้านซ้ายของสมการจะมีค่าเป็น 0)

2. ความรู้พื้นฐาน

ตลอดบทความนี้ กำหนดให้ n, m, d, r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n, m, d \geq 1$ และให้ w แทนรากที่ d ตัวแรกของ 1 กล่าวคือ

$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{d}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{d}\right)$$

โดยที่ i แทน หน่วยจินตภาพ (*imaginary unit*)

นอกจากนี้ หากไม่กำหนดเป็นอย่างอื่น ให้ถือว่าตัวแปรและค่าคงที่ต่าง ๆ เป็นจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบทหลักของบทความนี้เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการนับจำนวนผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod{d} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

เมื่อ $n, m, d \geq 1$ โดยการนับสองวิธีที่ต่างกัน วิธีแรกคือการนับโดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก และวิธีที่สองคือการนับโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

สำหรับการนับโดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก จะอาศัยความรู้พื้นฐานต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ทฤษฎีบทดาวและเส้นแบ่ง (Stars and Bars Theorem) [5]

ให้ k เป็นค่าคงที่ และ U แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \text{ โดยที่ } x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

จะได้ว่า

$$|U| = \binom{k+n-1}{n-1}$$

ทฤษฎีบท 2.2 หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก (Inclusion-Exclusion Principle) [2]

ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_j \leq n} |A_{l_1} \cap A_{l_2} \cap \cdots \cap A_{l_j}|$$

สำหรับการนับโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด จะอาศัยความรู้พื้นฐานต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3 ให้ $\{a_j\}_{j \geq 0}$ เป็นลำดับบน $\mathbb{C}$ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $\{a_j\}_{j \geq 0}$ คือ อนุกรม

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

ทฤษฎีบท 2.4 ทฤษฎีบทของเดอว์มัวร์ (De Moivre's Theorem) [10]

สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ และทุก j จะได้ว่า

$$(\cos x + i \sin x)^j = \cos(jx) + i \sin(jx)$$

3. การนับจำนวนผลเฉลย โดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก

บทตั้ง 3.1 ให้ k และ $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ เป็นค่าคงที่ และ A แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \text{ โดยที่ } x_1 \geq a_1, x_2 \geq a_2, \dots, x_n \geq a_n$$

จะได้ว่า

$$|A| = \binom{k+n-1-a_1-a_2-\cdots-a_n}{n-1}$$

บทตั้ง 3.2 ให้ k เป็นค่าคงที่ และ V แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \text{ โดยที่ } 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m-1$$

จะได้ว่า

$$|V| = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{m} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{k-mj+n-1}{n-1}$$

บทตั้งทั้งสองสามารถพิสูจน์ได้จากทฤษฎีบท 2.1 และ 2.2 ซึ่งผู้เขียนขอละการพิสูจน์ไว้

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod{d} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

จะได้ว่า

$$|S| = \sum_{k=\lfloor \frac{n-r}{d} \rfloor}^{\lfloor \frac{mn-r}{d} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1}$$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก j ให้ V_j แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = j \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

จะได้ว่า

$$S = \bigcup_{\substack{j \equiv r \pmod{d} \\ n \leq j \leq mn}} V_j$$

เนื่องจาก $V_j \cap V_l = \emptyset$ สำหรับทุก j, l ซึ่ง $j \neq l$ ดังนั้น

$$|S| = \sum_{\substack{j \equiv r \pmod{d} \\ n \leq j \leq mn}} |V_j|$$

โดยนิยามของสมการ ฟังก์ชันพื้น และฟังก์ชันเพดาน จะได้ว่า

$$\sum_{\substack{j \equiv r \pmod{d} \\ n \leq j \leq mn}} |V_j| = \sum_{k=\lfloor \frac{n-r}{d} \rfloor}^{\lfloor \frac{mn-r}{d} \rfloor} |V_{dk+r}|$$

ดังนั้น

$$|S| = \sum_{k=\lfloor \frac{n-r}{d} \rfloor}^{\lfloor \frac{mn-r}{d} \rfloor} |V_{dk+r}| \tag{3.1}$$

สำหรับแต่ละ k จาก V_{dk+r} แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = dk + r \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

ทำการเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, \dots, y_n = x_n - 1$ จะได้ว่า

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = dk + r - n \text{ โดยที่ } 0 \leq y_1, y_2, \dots, y_n \leq m - 1$$

จากบทตั้ง 3.2 จะได้

$$|V_{dk+r}| = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1} \quad (3.2)$$

แทน (3.2) ลงใน (3.1) จะได้

$$|S| = \sum_{k=\lfloor \frac{n-r}{d} \rfloor}^{\lfloor \frac{mn-r}{d} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1}$$

□

ตัวอย่าง 3.1 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0 \pmod{5} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4$$

แทนค่า $n = 3, m = 4, d = 5, r = 0$ ในทฤษฎีบท 3.3 จะได้

$$|S| = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{5k-3}{4} \rfloor} (-1)^j \binom{3}{j} \binom{5k-4j-1}{2} = \binom{3}{0} \binom{4}{2} + \binom{3}{0} \binom{9}{2} - \binom{3}{1} \binom{5}{2} = 12$$

ทั้งนี้หากแจกแจงนับโดยตรง พบว่าเซตผลเฉลยของสมภาคนี้ คือ

$$S = \{(1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,4,4), \\ (3,1,1), (3,3,4), (3,4,3), (4,2,4), (4,3,3), (4,4,2)\}$$

ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็น $|S| = 12$ ตัว สอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.3 ข้างต้น

ตัวอย่าง 3.2 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 2 \pmod{4} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 3$$

แทนค่า $n = 4, m = 3, d = 4, r = 2$ ในทฤษฎีบท 3.3 จะได้

$$|S| = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{4k-2}{3} \rfloor} (-1)^j \binom{4}{j} \binom{4k-3j+1}{3} = \binom{4}{0} \binom{5}{3} + \binom{4}{0} \binom{9}{3} - \binom{4}{1} \binom{6}{3} + \binom{4}{2} \binom{3}{3} = 20$$

ทั้งนี้หากแจกแจงนับโดยตรง พบว่าเซตผลเฉลยของสมภาคนี้ คือ

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,1,3,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1), \\ (1,3,1,1), (1,3,3,3), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1), \\ (2,2,3,3), (2,3,2,3), (2,3,3,2), (3,1,1,1), (3,1,3,3), \\ (3,2,2,3), (3,2,3,2), (3,3,1,3), (3,3,2,2), (3,3,3,1) \end{array} \right\}$$

ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็น $|S| = 20$ ตัว สอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.3 ข้างต้น

4. การนับจำนวนผลเฉลย โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

ในหัวข้อนี้ เราจะนับจำนวนผลเฉลยของสมการเดียวกับในทฤษฎีบท 3.3 แต่เปลี่ยนวิธีการนับใหม่โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด ก่อนอื่นจะเริ่มจากบทตั้งที่ต้องใช้ ดังนี้

บทตั้ง 4.1 สำหรับทุก j ให้ a_j แทนจำนวนผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = j \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

จะได้ว่า $F(z) = (z + z^2 + \cdots + z^m)^n$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $\{a_j\}_{j \geq 0}$ กล่าวคือ

$$(z + z^2 + \cdots + z^m)^n = \sum_{j=0}^{mn} a_j z^j$$

บทพิสูจน์

เมื่อกระจาย $F(z) = (z + z^2 + \cdots + z^m)^n$ จะพบว่า สัมประสิทธิ์ของ z^j คือ จำนวนของพจน์ $z^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$ ทั้งหมด ซึ่ง $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = j$ โดยที่ $1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$ $\square$

บทตั้ง 4.2 สำหรับทุก j

(ก) ถ้า $j \equiv r \pmod{d}$ แล้ว

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = 1$$

(ข) ถ้า $j \not\equiv r \pmod{d}$ แล้ว

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = 0$$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก j

(ก) ถ้า $j \equiv r \pmod{d}$ จะได้ว่า $w^{j-r} = 1$ ดังนั้น

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} 1^k = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} 1 = 1$$

(ข) ถ้า $j \not\equiv r \pmod{d}$ จะได้ว่า $w^{j-r} \neq 1$ ดังนั้น

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = \frac{1}{d} \cdot \frac{w^{(j-r)d} - 1}{w^{j-r} - 1}$$

จาก $w^{(j-r)d} = 1$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{d} \cdot \frac{w^{(j-r)d} - 1}{w^{j-r} - 1} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1 - 1}{w^{j-r} - 1} = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} = 0$$

□

บทตั้ง 4.3 สำหรับทุก k ซึ่ง $1 \leq k \leq d-1$ จะได้ว่า

$$\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk} = w^{\frac{(m-1)k}{2}} \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc\left(\frac{k\pi}{d}\right)$$

บทพิสูจน์ สำหรับทุก k ซึ่ง $1 \leq k \leq d-1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w^{mk} - 1 &= \cos\left(\frac{2mk\pi}{d}\right) + i \sin\left(\frac{2mk\pi}{d}\right) - 1 \\ &= \cos\left(\frac{2mk\pi}{d}\right) - 1 + 2i \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \cos\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \\ &= -2 \sin^2\left(\frac{mk\pi}{d}\right) + 2i \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \cos\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \left(\sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) - i \cos\left(\frac{mk\pi}{d}\right)\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \left(\cos\left(\frac{(2mk-d)\pi}{2d}\right) + i \sin\left(\frac{(2mk-d)\pi}{2d}\right)\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) w^{\frac{2mk-d}{4}} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$w^k - 1 = -2 \sin\left(\frac{k\pi}{d}\right) w^{\frac{2k-d}{4}}$$

จาก $w^k \neq 1$ ดังนั้น

$$\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk} = \frac{w^{mk} - 1}{w^k - 1} = \frac{-2 \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) w^{\frac{2mk-d}{4}}}{-2 \sin\left(\frac{k\pi}{d}\right) w^{\frac{2k-d}{4}}} = w^{\frac{(m-1)k}{2}} \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc\left(\frac{k\pi}{d}\right)$$

□

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod{d} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

จะได้ว่า

$$|S| = \frac{1}{d} \left(m^n + \sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm + n - 2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \right)$$

บทพิสูจน์

สำหรับทุก j ให้ V_j แทนเซตผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = j \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

และให้ $a_j = |V_j|$

ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3 จะได้

$$|S| = \sum_{\substack{j \equiv r \pmod{d} \\ n \leq j \leq mn}} |V_j| = \sum_{\substack{j \equiv r \pmod{d} \\ n \leq j \leq mn}} a_j$$

จากบทตั้ง 4.2 และการสลับลำดับการบวก จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \equiv r \pmod{d} \\ n \leq j \leq mn}} a_j &= \sum_{j=n}^{mn} \left(\frac{a_j}{d} \sum_{k=0}^{d-1} w^{(j-r)k} \right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \left(w^{-rk} \sum_{j=n}^{mn} a_j w^{kj} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$|S| = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \left(w^{-rk} \sum_{j=n}^{mn} a_j w^{kj} \right) \quad (4.1)$$

จากบทตั้ง 4.1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $\{a_j\}_{j \geq 0}$ คือ

$$F(z) = (z + z^2 + \cdots + z^m)^n = \sum_{j=n}^{mn} a_j z^j$$

ทั้งนี้สามารถเขียน $F(z)$ ได้อีกรูปแบบคือ

$$F(z) = (z + z^2 + \cdots + z^m)^n = z^n \left(\sum_{j=0}^{m-1} z^j \right)^n$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{j=n}^{mn} a_j z^j = z^n \left(\sum_{j=0}^{m-1} z^j \right)^n$$

แทน z ด้วย w^k ลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\sum_{j=n}^{mn} a_j w^{kj} = w^{nk} \left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk} \right)^n \quad (4.2)$$

จาก (4.1) และ (4.2) จะได้

$$|S| = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \left(w^{(n-r)k} \left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk} \right)^n \right) \quad (4.3)$$

พิจารณาพจน์ที่ k ในผลรวมข้างต้น

กรณี $k = 0$ จะได้ว่า

$$w^{(n-r)k} \left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk} \right)^n = \left(\sum_{j=0}^{m-1} 1 \right)^n = m^n \quad (4.4)$$

กรณี $1 \leq k \leq d-1$ โดยบทตั้ง 4.3 จะได้

$$\begin{aligned} w^{(n-r)k} \left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{jk} \right)^n &= w^{(n-r)k} \left(w^{\frac{(m-1)k}{2}} \sin\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc\left(\frac{k\pi}{d}\right) \right)^n \\ &= w^{\frac{(mn+n-2r)k}{2}} \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

จาก (4.3), (4.4) และ (4.5) ได้ว่า

$$|S| = \frac{1}{d} \left(m^n + \sum_{k=1}^{d-1} w^{\frac{(mn+n-2r)k}{2}} \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \right) \quad (4.6)$$

จากส่วนจริงของ $w^{\frac{(mn+n-2r)k}{2}}$ คือ $\cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right)$ และจาก $|S|$ เป็นจำนวนของผลเฉลยซึ่งเป็นจำนวนจริง ดังนั้นเมื่อพิจารณาส่วนจริงของ (4.6) จะได้

$$|S| = \frac{1}{d} \left(m^n + \sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm+n-2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \right)$$

□

ตัวอย่าง 4.1 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0 \pmod{5} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4$$

แทนค่า $n = 3, m = 4, d = 5, r = 0$ ในทฤษฎีบท 4.4 และใช้ Wolfram alpha ช่วยคำนวณ จะได้

$$|S| = \frac{1}{5} \left(64 + \sum_{k=1}^4 \cos(3k\pi) \sin^3\left(\frac{4k\pi}{5}\right) \csc^3\left(\frac{k\pi}{5}\right) \right) = 12$$

ทั้งนี้หากแจกแจงนับโดยตรง พบว่าเซตผลเฉลยของสมภาคนี้ คือ

$$S = \{(1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,4,4), \\ (3,1,1), (3,3,4), (3,4,3), (4,2,4), (4,3,3), (4,4,2)\}$$

ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็น $|S| = 12$ ตัว สอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีบท 4.4 ข้างต้น



รูปที่ 4.1 ผลการคำนวณโดย Wolfram Alpha กรณี $n = 3, m = 4, d = 5, r = 0$

ตัวอย่าง 4.2 ให้ S แทนเซตผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 2 \pmod{4} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 3$$

แทนค่า $n = 4, m = 3, d = 4, r = 2$ ในทฤษฎีบท 4.4 และใช้ Wolfram alpha ช่วยคำนวณ จะได้

$$|S| = \frac{1}{4} \left(81 + \sum_{k=1}^3 \cos(3k\pi) \sin^4\left(\frac{3k\pi}{4}\right) \csc^4\left(\frac{k\pi}{4}\right) \right) = 20$$

ทั้งนี้หากแจกแจงนับโดยตรง พบว่าเซตผลเฉลยของสมภาคนี้ คือ

$$S = \left\{ (1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,1,3,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1), \right. \\ (1,3,1,1), (1,3,3,3), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1), \\ (2,2,3,3), (2,3,2,3), (2,3,3,2), (3,1,1,1), (3,1,3,3), \\ \left. (3,2,2,3), (3,2,3,2), (3,3,1,3), (3,3,2,2), (3,3,3,1) \right\}$$

ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเป็น $|S| = 20$ ตัว สอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีบท 4.4 ข้างต้น



รูปที่ 4.2 ผลการคำนวณโดย Wolfram Alpha กรณี $n = 4, m = 3, d = 4, r = 2$

5. เวกลักษณะเกี่ยวข้องกับผลรวมตรีโกณมิติกำลัง

ทฤษฎีบท 3.3 และทฤษฎีบท 4.4 เป็นการนับจำนวนสมาชิกของเซตเดียวกัน จึงสามารถสรุปได้ว่าผลที่ได้จากทั้งสองทฤษฎีบทมีค่าเท่ากันโดยอาศัยการพิสูจน์เชิงการจัด และเมื่อจัดรูปสมการจะได้เอกลักษณ์เกี่ยวกับผลรวมตรีโกณมิติกำลัง ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.1

$$\sum_{k=1}^{d-1} \cos\left(\frac{(nm + n - 2r)k\pi}{d}\right) \sin^n\left(\frac{mk\pi}{d}\right) \csc^n\left(\frac{k\pi}{d}\right) \\ = -m^n + d \sum_{k=\lceil \frac{n-r}{d} \rceil}^{\lfloor \frac{mn-r}{d} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{dk+r-n}{m} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{dk+r-mj-1}{n-1}$$

โดยทั่วไป การคำนวณค่าของสัมประสิทธิ์ทวินาม ทำได้ง่ายกว่าการคำนวณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนั้นทฤษฎีบท 5.1 นี้จะช่วยให้หาค่าชัดแจ้งของอนุกรมตรีโกณมิติกำลังบางรูปแบบได้ง่ายขึ้น นอกจากนี้ ยังสามารถสร้างเอกลักษณ์ตรีโกณมิติรูปแบบต่าง ๆ ได้เพิ่มเติม โดยการแทนค่าของตัวแปร n, m, d, r ในทฤษฎีบท 5.1 นี้ เช่น

1) เมื่อแทนค่า $n = 4m, d = 2m, r = 0$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=0}^{m-1} \csc^{4m}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2m}\right) = -m^{4m} + 2m \sum_{k=2}^{2m} \sum_{j=0}^{2k-4} (-1)^j \binom{4m}{j} \binom{2mk-mj-1}{4m-1}$$

2) เมื่อแทนค่า $n = 4, m = 5, d = 11, r = 6$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=1}^{10} (-1)^{k-1} \cos\left(\frac{k\pi}{11}\right) \sin^4\left(\frac{5k\pi}{11}\right) \csc^4\left(\frac{k\pi}{11}\right) = 295$$

3) เมื่อแทนค่า $n = 7, m = 3, d = 7, r = 0$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=1}^6 \sin^7\left(\frac{3k\pi}{7}\right) \csc^7\left(\frac{k\pi}{7}\right) = 578$$

4) เมื่อแทนค่า $n = 5, m = 10, d = 12, r = 21$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=1}^{11} \cos^6\left(\frac{k\pi}{12}\right) = \frac{11}{4}$$

5) เมื่อแทนค่า $n = 29, m = 2, d = 5, r = -2$ ในทฤษฎีบท 5.1 จะได้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sum_{k=1}^4 \cos^{30}\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \frac{1860498}{2^{29}}$$

6. สรุป

ในบทความนี้ได้หาสูตรการนับจำนวนผลเฉลยของสมภาค

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv r \pmod{d} \text{ โดยที่ } 1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq m$$

เมื่อ n, m, d, r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n, m, d \geq 1$ โดยการใช้การนับสองวิธีที่ต่างกัน คือ

1. การนับโดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก ได้ผลลัพธ์เป็นดังทฤษฎีบท 3.3
2. การนับโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด ได้ผลลัพธ์เป็นดังทฤษฎีบท 4.4

ซึ่งผลลัพธ์จากการนับทั้งสองวิธีนี้เชื่อมโยงเข้าหากันด้วยหลักของการพิสูจน์เชิงการจัด ทำให้ได้เอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับผลรวมฟังก์ชันตรีโกณมิติกำลัง นั่นคือ ทฤษฎีบท 5.1 ซึ่งช่วยให้หาค่าชัดแจ้งของอนุกรมตรีโกณมิติกำลังบางรูปแบบได้ง่ายขึ้น รวมทั้งยังสามารถนำไปใช้ในการสร้างเอกลักษณ์ตรีโกณมิติเพิ่มเติมได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] กิตติกร นาคประสิทธิ์. (2548). การพิสูจน์เชิงการจัด. *นิตยสารคณิตศาสตร์มายแมทส์*, 1 (11), น. 22 – 25.

- Nakprasit, K. (2005). Combinatorial Proof. *My Maths: The Magazine of Mathematics*, 1 (11), p. 22 – 25.
- [2] Beeler, R. A. (2015). *How to Count: An Introduction to Combinatorics and Its Applications*. New York: Springer.
- [3] Berndt, B. C. and Yeap, B. P. (2002). Explicit Evaluations and Reciprocity Theorems for Finite Trigonometric Sums. *Advances in Applied Mathematics*, 29 (3), p. 358 – 385.
- [4] Chu, W. and Marini, A. (1999). Partial Fraction and Trigonometric Identities. *Advances in Applied Mathematics*, 23, p. 115 – 175.
- [5] Chuan-Chong, C. and Khee-Meng, K. (1992). *Principles and Technique in Combinatorics*. Singapore: World Scientific Publishing.
- [6] Dowker, J. S. (1987). Casimir Effect Around A Cone. *Physical Review D*, 36 (10), p. 3095 – 3101.
- [7] Dowker, J. S. (1989). Heat Kernel Expansion on A Generalized Cone. *Journal of Mathematical Physics*, 30 (4), p. 770 – 773.
- [8] Dowker, J. S. (1992). On Verlinde's Formula for The Dimensions of Vector Bundles on Moduli Spaces. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25 (9), p. 2641 – 2648.
- [9] He, Y. (2020). Explicit Expressions for Finite Trigonometric Sums. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 484 (1), Article 123702.
- [10] Lial, M. L., Hornsby, J., Schneider, D. I. and Daniels, C. J. (2017). *College Algebra & Trigonometry* (6th ed.). London: Pearson Education.
- [11] Merca, M. (2012). A Note on Cosine Power Sums. *Journal of Integer Sequences*, 15 (5), Article 12.5.3.



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 67 เล่มที่ 708 กันยายน – ธันวาคม 2565

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองบนลำดับวนกลับ The Second Order of Reflection Operators on Circular Sequences

DOI: 10.14456/mj-math.2022.9

ชนินาถ จันทร

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ เชียงใหม่ 50300

Chaninat Chanthorn

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Chiang Mai Rajabhat University, Chiang Mai 50300

Email: chaninat_cha@cmru.ac.th

วันที่รับบทความ : 25 พฤษภาคม 2565

วันที่แก้ไขบทความ : 25 สิงหาคม 2565

วันที่ตอบรับบทความ : 16 ธันวาคม 2565

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ขยายแนวคิดมาจากการงานของ Alon, Krasikov และ Peres ซึ่งศึกษาการหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนของลำดับวนกลับ โดยที่งานของเขาพัฒนามาจากปัญหาในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ในงานวิจัยนี้เราได้ปรับแนวคิดของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งให้เป็นตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสอง โดยตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองนี้มีความซับซ้อนในการคำนวณหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนของลำดับวนกลับมากกว่าในกรณีของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่ง ผลการวิจัยนี้ได้นำเสนอแนวคิดการหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนแบบใหม่

คำสำคัญ: การดำเนินการสะท้อน ลำดับวนกลับ ลำดับการดำเนินการสะท้อน

ABSTRACT

This research extends the idea from the work of Alon, Krasikov and Peres which investigated calculating the numbers of reflection operators on arbitrary circular sequences. This is a generalization of a problem in International Mathematical Olympiad. In this work, we develop an idea of the first order of reflection operators to a new reflection operation which is called the second order of reflection operators. The new reflection operations induce more complication of calculating the numbers of them. Finally, we introduce the numbers of the second order of reflection operators on arbitrary circular sequences.

Keywords: Reflection operation, Circular sequence, Reflection operation sequence

1. บทนำ

ในปี ค.ศ. 1989 Alon, Krasikov และ Peres [1] ได้นำเสนอแนวคิดในการคำนวณหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนของลำดับวนกลับ ซึ่งเป็นงานที่ขยายแนวคิดจากปัญหาในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ [2] ซึ่งเป็นปัญหาคณิตศาสตร์เชิงการจัด โดยเป็นงานที่ขยายแนวคิดมาจากงานของ Mozes [3] ซึ่งเป็นแนวคิดในการทำวิจัยที่น่าสนใจ โดย Alon, Krasikov และ Peres [1] ได้กำหนดให้ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ เป็นลำดับวนกลับ (circular sequences) และนิยามตัวดำเนินการสะท้อน (reflection operators) R_i กล่าวคือ เป็นการกระทำกับพจน์ที่ i ของลำดับวนกลับ โดยที่ x_i มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ดังนี้

กรณี $i \neq 1$ และ $i \neq n$

$$(x_1, x_2, \dots, \boxed{x_i}, \dots, x_n) \xrightarrow{R_i} (x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, \underline{x_{i-1} + x_i}, \boxed{-x_i}, \underline{x_{i+1} + x_i}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

กรณี $i = 1$

$$(\boxed{x_1}, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{R_1} (\boxed{-x_1}, \underline{x_2 + x_1}, x_3, \dots, x_{n-1}, \underline{x_n + x_1})$$

กรณี $i = n$

$$(x_1, x_2, \dots, \boxed{x_n}) \xrightarrow{R_n} (\underline{x_1 + x_n}, x_2, \dots, x_{n-2}, \underline{x_{n-1} + x_n}, \boxed{-x_n})$$

เช่น ลำดับวนกลับ $(1, -2, -3, 8, 5)$ สามารถดำเนินการสะท้อนได้กับพจน์ที่ติดลบ นั่นคือ พจน์ที่สอง และพจน์ที่สาม หากใช้ตัวดำเนินการสะท้อน R_2 จะได้

$$(1, -2, -3, 8, 5) \xrightarrow{R_2} (-1, 2, -5, 8, 5)$$

จากลำดับวนกลับ $(-1, 2, -5, 8, 5)$ มีพจน์ที่ติดลบอยู่ คือ พจน์ที่หนึ่ง และพจน์ที่สาม หากใช้ตัวดำเนินการสะท้อน R_3 จะได้

$$(-1, 2, -5, 8, 5) \xrightarrow{R_3} (-1, -3, 5, 3, 5)$$

อีกหนึ่งตัวอย่าง ลำดับวนกลับ $(2, 1, 3, 4, -2)$ มีพจน์ที่ติดลบอยู่เพียงพจน์เดียว คือ พจน์ที่ห้า หากใช้ตัวดำเนินการสะท้อน R_5 จะได้

$$(2, 1, 3, 4, -2) \xrightarrow{R_5} (0, 1, 3, 2, 2)$$

จะเห็นว่า ลำดับวนกลับ $(0, 1, 3, 2, 2)$ ไม่สามารถดำเนินการสะท้อนต่อได้ เพราะไม่มีพจน์ที่เป็นลบ ในงานของ Alon Krasikov และ Peres [1] ได้แสดงว่า ลำดับวนกลับที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม สามารถดำเนินการสะท้อนได้เพียงจำนวนจำกัดครั้ง ในกรณีที่ผลรวมของทุกพจน์ในลำดับวนกลับ มีค่ามากกว่าศูนย์ และได้นำเสนอสูตรการคำนวณจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนด้วย

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยเรียกตัวดำเนินการสะท้อนข้างต้นว่า ตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่ง R_i ซึ่งผู้วิจัยได้นำแนวคิดของ R_i มาสร้างตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสอง S_i ซึ่งเป็นการกระทำกับพจน์ที่ i ของลำดับวนกลับ โดยที่ x_i มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ซึ่งนิยามดังนี้

กรณี $i \notin \{1, 2, n-1, n\}$

$$(x_1, x_2, \dots, \boxed{x_i}, \dots, x_n) \xrightarrow{S_i} (x_1, x_2, \dots, x_{i-3}, \underline{x_{i-2} + x_i}, x_{i-1}, \boxed{-x_i}, x_{i+1}, \underline{x_{i+1} + x_i}, x_{i+3}, \dots, x_n)$$

กรณี $i = 1$

$$(\boxed{x_1}, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{S_1} (\boxed{-x_1}, x_2, \underline{x_3 + x_1}, x_4, \dots, x_{n-2}, \underline{x_{n-1} + x_1}, x_n)$$

กรณี $i = 2$

$$(x_1, \boxed{x_2}, x_3, \dots, x_n) \xrightarrow{S_2} (x_1, \boxed{-x_2}, x_3, \underline{x_4 + x_2}, x_5, \dots, x_{n-1}, \underline{x_n + x_2})$$

กรณี $i = n-1$

$$(x_1, x_2, \dots, \boxed{x_{n-1}}, x_n) \xrightarrow{S_{n-1}} (\underline{x_1 + x_{n-1}}, x_2, \dots, x_{n-4}, \underline{x_{n-3} + x_{n-1}}, x_{n-2}, \boxed{-x_{n-1}}, x_n)$$

กรณี $i = n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \boxed{x_n}) \xrightarrow{S_i} (x_1, x_2 + x_n, x_3, \dots, x_{n-3}, x_{n-2} + x_n, x_{n-1}, \boxed{-x_n})$$

เช่น ลำดับวนกลับ $(1, -2, -3, 8, 5)$ หากเราใช้ตัวดำเนินการสะท้อน S_3 ได้ว่า

$$(1, -2, -3, 8, 5) \xrightarrow{S_3} (-2, -2, 3, 8, 2)$$

ในงานวิจัยนี้ จะพิจารณาลำดับวนกลับกรณี $n \geq 4$ เท่านั้น จากนิยามลำดับวนกลับข้างต้น พบว่าการหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองมีความซับซ้อนกว่าการหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งเป็นอย่างมาก ในงานวิจัยนี้จะแสดงว่า ลำดับวนกลับสามารถดำเนินการสะท้อนอันดับสองไปได้เพียงจำนวนจำกัดครั้งในบางกรณี พร้อมทั้งนำเสนอสูตรการคำนวณหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนด้วย

2. ตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองบนลำดับวนกลับ

บทนิยาม 2.1 ลำดับเสถียร (stable sequence) คือ ลำดับวนกลับที่ไม่มีสมาชิกที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ลำดับไม่เสถียร (unstable sequence) คือ ลำดับวนกลับที่มีสมาชิกที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์

ทฤษฎีบท 2.1 [1] ถ้า $X = (x_1, \dots, x_n)$ เป็นลำดับวนกลับไม่เสถียร ซึ่ง $\sum_{i=1}^n x_i > 0$ แล้วจะมีการสะท้อนอันดับหนึ่งได้จำนวนจำกัดครั้ง นั่นคือ จะมี $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_m}$ ที่ซึ่ง $R_{i_m} \cdots R_{i_2} R_{i_1}(X)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณาลำดับวนกลับ $(1, -2, -1, 3)$ จะเห็นว่า $\sum_{i=1}^4 x_i = 1 > 0$ เมื่อดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งไปเรื่อย ๆ จะได้

$$\begin{aligned} (1, -2, -1, 3) &\xrightarrow{R_2} (-1, 2, -3, 3) \xrightarrow{R_3} (-1, -1, 3, 0) \xrightarrow{R_1} (1, -2, 3, -1) \\ &\xrightarrow{R_2} (-1, 2, 1, -1) \xrightarrow{R_1} (1, 1, 1, -2) \xrightarrow{R_4} (-1, 1, -1, 2) \\ &\xrightarrow{R_1} (1, 0, -1, 1) \xrightarrow{R_3} (1, -1, 1, 0) \xrightarrow{R_2} (0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $(0, 1, 0, 0)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร ไม่สามารถดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งได้อีก

หมายเหตุ จากทฤษฎีข้างต้น เรียก $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_m}$ ว่า ลำดับการสะท้อนอันดับหนึ่งของ X เขียนแทนด้วย (R_{i_α}) และเรียก m ว่า จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของ X

ให้ลำดับวนกลับ $X = (x_1, \dots, x_n)$ และ $u, v \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

กำหนดสัญลักษณ์

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} \{u, u+1, \dots, v\} & , u \leq v \\ \{u, u+1, \dots, n, 1, \dots, v\} & , u > v \end{cases}$$

และ

$$\text{sum} \langle u, v \rangle = \sum_{i \in \langle u, v \rangle} x_i$$

หมายเหตุ $\langle u \rangle$ แทน $\langle u, u \rangle$

ตัวอย่าง 2.2 ให้ $X = (1, -2, -1, 3)$ จะได้ว่า

$$\langle 1, 4 \rangle = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{และ} \quad \text{sum} \langle 1, 4 \rangle = \sum_{i \in \langle 1, 4 \rangle} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + (-2) + (-1) + 3 = 1$$

$$\langle 1, 3 \rangle = \{1, 2, 3\} \quad \text{และ} \quad \text{sum} \langle 1, 3 \rangle = \sum_{i \in \langle 1, 3 \rangle} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + (-2) + (-1) = -2$$

$$\langle 1, 2 \rangle = \{1, 2\} \quad \text{และ} \quad \text{sum} \langle 1, 2 \rangle = \sum_{i \in \langle 1, 2 \rangle} x_i = x_1 + x_2 = 1 + (-2) = -1$$

$$\langle 3, 1 \rangle = \{3, 4, 1\} \quad \text{และ} \quad \text{sum} \langle 3, 1 \rangle = \sum_{i \in \langle 3, 1 \rangle} x_i = x_3 + x_4 + x_1 = (-1) + 3 + 1 = 3$$

$$\langle 2 \rangle = \langle 2, 2 \rangle = \{2\} \quad \text{และ} \quad \text{sum} \langle 2 \rangle = \sum_{i \in \langle 2 \rangle} x_i = x_2 = -2$$

กำหนดให้ $\lceil a \rceil$ คือ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ a

ทฤษฎีบท 2.2 [1] ถ้า $(x_1, \dots, x_n)$ เป็นลำดับวนกลับที่ไม่เสถียร ซึ่ง $\sum_{i=1}^n x_i > 0$ แล้ว

จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของลำดับวนกลับ $(x_1, \dots, x_n)$ มีค่าเท่ากับ

$$\sum_{\text{sum} \langle u, v \rangle < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum} \langle u, v \rangle|}{\text{sum} \langle 1, n \rangle} \right\rceil$$

ตัวอย่าง 2.3 ลำดับวนกลับ $(1, -2, -1, 3)$ มี $\text{sum} \langle u, v \rangle$ ทั้งหมดดังนี้

$\text{sum} \langle 1 \rangle = 1$	$\text{sum} \langle 1, 2 \rangle = -1$	$\text{sum} \langle 1, 3 \rangle = -2$	$\text{sum} \langle 1, 4 \rangle = 1$
$\text{sum} \langle 2, 1 \rangle = 1$	$\text{sum} \langle 2 \rangle = -2$	$\text{sum} \langle 2, 3 \rangle = -3$	$\text{sum} \langle 2, 4 \rangle = 0$
$\text{sum} \langle 3, 1 \rangle = 3$	$\text{sum} \langle 3, 2 \rangle = 1$	$\text{sum} \langle 3 \rangle = -1$	$\text{sum} \langle 3, 4 \rangle = 2$

$$\text{sum}\langle 4,1\rangle=4 \quad \text{sum}\langle 4,2\rangle=2 \quad \text{sum}\langle 4,3\rangle=1 \quad \text{sum}\langle 4\rangle=3$$

จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของลำดับวนกลับ $(1,-2,-1,3)$ คือ

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sum}\langle u,v\rangle < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum}\langle u,v\rangle|}{\text{sum}\langle 1,4\rangle} \right\rceil &= \sum_{\text{sum}\langle u,v\rangle < 0} \lceil |\text{sum}\langle u,v\rangle| \rceil \\ &= \sum_{\text{sum}\langle u,v\rangle < 0} |\text{sum}\langle u,v\rangle| \\ &= |\text{sum}\langle 1,2\rangle| + |\text{sum}\langle 1,3\rangle| + |\text{sum}\langle 2\rangle| + |\text{sum}\langle 2,3\rangle| + |\text{sum}\langle 3\rangle| \\ &= 1+2+2+3+1=9 \end{aligned}$$

จะได้ว่า ลำดับวนกลับ $(1,-2,-1,3)$ เมื่อดำเนินการสะท้อนไป 9 ครั้ง จะเกิดลำดับวนกลับเสถียร

ถัดไป จะนำเสนอการคำนวณหาจำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสอง โดยแยกการวิเคราะห์ตามจำนวนสมาชิกของลำดับวนกลับ กล่าวคือ กรณีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มคี่ และกรณีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ เป็นลำดับวนกลับ ที่มีสมาชิก n ตัว กำหนดสัญลักษณ์เพิ่มเติมดังนี้

$$\text{sum } X = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{และ} \quad \text{sum}\langle u,v\rangle_X = \sum_{i \in \langle u,v\rangle} x_i$$

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ เป็นลำดับวนกลับไม่เสถียร ที่มีสมาชิก n ตัว

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\text{sum } X > 0$ แล้ว จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\text{sum}\langle u,v\rangle_Y < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum}\langle u,v\rangle_Y|}{\text{sum } Y} \right\rceil$$

โดย $Y=(x_1,x_3,x_5,\dots,x_n,x_2,x_4,\dots,x_{n-1})$

บทพิสูจน์ ให้ $n=2k+1$ สำหรับบางจำนวนนับ k

ให้ $\mathcal{X}_n$ เป็นเซตของลำดับวนกลับทั้งหมดที่มีจำนวนสมาชิก n ตัว

กำหนดการแปลงลำดับ $T:\mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}_n$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$T(X)=(x_1,x_3,\dots,x_{2k+1},x_2,x_4,\dots,x_{2k})$$

สำหรับทุก $X=(x_1,x_2,\dots,x_{2k+1}) \in \mathcal{X}_n$

เห็นได้ว่า T เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง และ $\text{sum } T(X) = \text{sum } X > 0$

ดังนั้นจะได้ว่า ลำดับวนกลับ X จะเป็นลำดับวนกลับเสถียร ก็ต่อเมื่อ ลำดับวนกลับ $T(X)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร

ให้ $\mathcal{R}$ และ $\mathcal{S}$ เป็นเซตของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งและอันดับสองทั้งหมดบน $\mathcal{X}_n$ ตามลำดับ พิจารณาการแปลงการสะท้อน $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$F(S_i) = \begin{cases} R_\ell & \text{ถ้า } i \text{ เป็นจำนวนคี่ และ } i = 2l+1 \\ R_{k+\ell} & \text{ถ้า } i \text{ เป็นจำนวนคู่ และ } i = 2l \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } S_i \in \mathcal{S}$$

เห็นได้ว่า F เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

สำหรับ $X \in \mathcal{X}_n$ และ $S_i \in \mathcal{S}$ ใด ๆ สามารถสร้างแผนภาพความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S_{i_\beta}} & X_\beta \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ T(X) & \xrightarrow{F(S_{i_\beta})} & T(X_\beta) \end{array}$$

ให้ (S_{i_α}) เป็นลำดับการสะท้อนอันดับสองของ X

จากแผนภาพข้างต้น จะได้

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{S_{i_1}} & X_1 & \xrightarrow{S_{i_2}} & X_2 & \xrightarrow{S_{i_3}} & X_3 \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ T(X) & \xrightarrow{F(S_{i_1})} & T(X_1) & \xrightarrow{F(S_{i_2})} & T(X_2) & \xrightarrow{F(S_{i_3})} & T(X_3) \dots \end{array}$$

ซึ่งจะได้ว่า $(F(S_{i_\alpha}))$ เป็นลำดับการสะท้อนอันดับหนึ่งของ $T(X)$ และได้ว่า จำนวนสมาชิกใน $(F(S_{i_\alpha}))$ กับ (S_{i_α}) เท่ากัน

จาก $\text{sum} T(X) = \text{sum} X > 0$ และทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับ

หนึ่งของ $T(X) = Y$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\sum_{\text{sum}(u,v)_Y < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum} \langle u, v \rangle_Y|}{\text{sum } Y} \right\rceil$

ดังนั้น จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ $\sum_{\text{sum}(u,v)_Y < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum} \langle u, v \rangle_Y|}{\text{sum } Y} \right\rceil \quad \square$

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ $X = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ เป็นลำดับวนกลับไม่เสถียร และให้ $Y = (x_1, x_3, \dots, x_{2n-1})$ และ $Z = (x_2, x_4, \dots, x_{2n})$ ถ้า $\text{sum} Y > 0$ และ $\text{sum} Z > 0$ แล้ว จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\text{sum} \langle u, v \rangle_Y < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum} \langle u, v \rangle_Y|}{\text{sum} Y} \right\rceil + \sum_{\text{sum} \langle u, v \rangle_Z < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum} \langle u, v \rangle_Z|}{\text{sum} Z} \right\rceil$$

บทพิสูจน์ พิจารณาการแปลง $T: \mathcal{X}_{2n} \rightarrow (\mathcal{X}_n \times \mathcal{X}_n)$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$T(X) = [(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}), (x_2, x_4, \dots, x_{2n})] = [Y, Z]$$

สำหรับทุก $X = (x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \in \mathcal{X}_{2n}$

จะได้ว่า T เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

เนื่องจากการสะท้อนอันดับสอง S_{2i} จะดำเนินการกับพจน์ที่เป็นจำนวนคู่เท่านั้น และการสะท้อนอันดับสอง S_{2i-1} จะดำเนินการกับพจน์ที่เป็นจำนวนคี่เท่านั้น ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ว่า ลำดับวนกลับ X เป็นลำดับวนกลับเสถียร ก็ต่อเมื่อ ลำดับวนกลับ Y และลำดับวนกลับ Z เป็นลำดับวนกลับเสถียร

เนื่องจาก $\text{sum} Y > 0, \text{sum} Z > 0$ และทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า จะมีลำดับการสะท้อนอันดับหนึ่ง (R_{i_m}) และ (R'_{j_l}) ซึ่ง $R_{i_m} \cdots R_{i_2} R_{i_1}(Y)$ กับ $R'_{j_l} \cdots R'_{j_2} R'_{j_1}(Z)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร

สร้างลำดับการสะท้อนอันดับสอง (S_{ℓ_α}) จากลำดับการสะท้อนอันดับหนึ่ง (R_{i_m}) และ (R'_{j_l}) ดังนี้

1. แปลงตำแหน่งพจน์ i_m ของ (R_{i_m}) มาเป็นตำแหน่งพจน์ของ $S_{\ell_1}, S_{\ell_2}, S_{\ell_3}, \dots, S_{\ell_m}$ ดังนี้

$$S_{\ell_1} = S_{2i_1-1}, S_{\ell_2} = S_{2i_2-1}, S_{\ell_3} = S_{2i_3-1}, \dots, S_{\ell_m} = S_{2i_m-1}$$

2. แปลงตำแหน่งพจน์ j_l ของ (R'_{j_l}) มาเป็นตำแหน่งพจน์ของ $S_{\ell_{m+1}}, S_{\ell_{m+2}}, S_{\ell_{m+3}}, \dots, S_{\ell_{m+l}}$ ดังนี้

$$S_{\ell_{m+1}} = S_{2j_1}, S_{\ell_{m+2}} = S_{2j_2}, S_{\ell_{m+3}} = S_{2j_3}, \dots, S_{\ell_{m+l}} = S_{2j_l}$$

ซึ่งจะทำให้ $S_{\ell_{m+l}} \cdots S_{\ell_2} S_{\ell_1}(X)$ เป็นลำดับวนกลับเสถียร และจำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X เท่ากับ จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของ Y รวมกับจำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่งของ Z

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า จำนวนของตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\sum \langle u, v \rangle_Y < 0} \left\lceil \frac{|\sum \langle u, v \rangle_Y|}{\sum Y} \right\rceil + \sum_{\sum \langle u, v \rangle_Z < 0} \left\lceil \frac{|\sum \langle u, v \rangle_Z|}{\sum Z} \right\rceil \quad \square$$

นอกจากนี้พบว่า การดำเนินการสะท้อนอันดับสองมีความสัมพันธ์กับการดำเนินการสะท้อนอันดับหนึ่ง สูตรต่าง ๆ ที่ได้ เกิดจากการนำลำดับวนกลับมาจัดเรียงและสร้างความเชื่อมโยง เพื่อให้สามารถใช้การคำนวณด้วยทฤษฎีของ Alon Krasikov และ Peres ได้ ซึ่งในที่นี้จำแนกสูตรที่ได้ตามจำนวนสมาชิกของลำดับวนกลับ ว่าเป็นจำนวนคู่ หรือจำนวนคี่ ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างข้อคาดการณ์เกี่ยวกับตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสาม Γ_i นิยามดังนี้

สำหรับลำดับวนกลับ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ซึ่งมีพจน์ที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ($x_i < 0$) จะมีการดำเนินการสะท้อนอันดับสาม Γ_i คือ

$$(x_1, x_2, \dots, \boxed{x_i}, \dots, x_n) \xrightarrow{\Gamma_i} (x_1, \dots, \underline{x_{i-3} + x_i}, x_{i-2}, x_{i-1}, \boxed{-x_i}, x_{i+1}, x_{i+2}, \underline{x_{i+3} + x_i}, \dots, x_n)$$

และมีการจำแนกสูตรตามจำนวนสมาชิกของลำดับวนกลับ เป็น

$$n \equiv 0 \pmod{3}, n \equiv 1 \pmod{3} \text{ และ } n \equiv 2 \pmod{3}$$

3. สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้ทฤษฎีบทของลำดับวนกลับไม่เสถียร $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ โดยที่ $n \geq 4$ ดังนี้

กรณี n เป็นจำนวนเต็มคี่

$$\text{ให้ } Y = (x_1, x_3, \dots, x_n, x_2, x_4, \dots, x_{n-1})$$

ถ้า $\sum X > 0$ แล้ว จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\sum \langle u, v \rangle_Y < 0} \left\lceil \frac{|\sum \langle u, v \rangle_Y|}{\sum Y} \right\rceil$$

กรณี n เป็นจำนวนเต็มคู่

$$\text{ให้ } Y = (x_1, x_3, \dots, x_{n-1}) \text{ และ } Z = (x_2, x_4, \dots, x_n)$$

ถ้า $\sum Y > 0$ และ $\sum Z > 0$ แล้ว จำนวนตัวดำเนินการสะท้อนอันดับสองของ X คือ

$$\sum_{\text{sum} \langle u, v \rangle_Y < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum} \langle u, v \rangle_Y|}{\text{sum } Y} \right\rceil + \sum_{\text{sum} \langle u, v \rangle_Z < 0} \left\lceil \frac{|\text{sum} \langle u, v \rangle_Z|}{\text{sum } Z} \right\rceil$$

เอกสารอ้างอิง

- [1] Alon, N., Krasikov, I. and Peres, Y. (1989). Reflection Sequences. *The American Mathematical Monthly*, 96 (9), p. 820 – 823.
- [2] Chakerian, G. D., Klamkin, M. S. and Hermann, H. (1979). News & Letters. *Mathematics Magazine*, 59, p. 154 – 155.
- [3] Mozes, S. (1990). Reflection Processes on Graphs and Weyl Groups. *Journal of Combinatorial Theory*, 53, p. 128 – 142.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ใน วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้
ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ เนื้อหา สรุป : ภาษาไทย หรือ ภาษาอังกฤษ อย่างใดอย่างหนึ่ง

เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น

2.1 2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาต ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับได้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป”

เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป

เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ

“ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกที่ปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทยก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณະวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

สมาชิกของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

มี 2 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ และสมาชิกสามัญ

สมาชิกสามัญ ได้แก่ ผู้ที่มีความสนใจทางคณิตศาสตร์ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ เมื่อได้รับหนังสืออนุญาตจากสมาคมฯ เป็นลายลักษณ์อักษร
2. มีสิทธิเข้าถึงวารสารคณิตศาสตร์ ฉบับเต็มในรูปแบบออนไลน์
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

ค่าสมัครสมาชิก ประกอบด้วย

1. ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท
2. ค่าสมาชิกสามัญ ตลอดชีพ 3,000 บาท และ รายปี 250 บาท

วาระการเป็นสมาชิกสามัญรายปี เริ่มตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม ถึงวันที่ 31 ธันวาคม ของปี

ดาวน์โหลด ใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

<http://www.mathassociation.net> หัวข้อ “สมัคร”



ใบสมัครสมาชิก

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

- ☐ สมาชิกใหม่
☐ ต่ออายุ เลขสมาชิกเดิม.....

วันที่ เดือน พ.ศ.

ข้าพเจ้า (ชื่อ - สกุล) อาชีพ

เบอร์โทรศัพท์ อีเมล

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

- ☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท) ☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน 30 บาท

รวมเป็นเงิน บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังบัญชีเลขที่ 162-0-25671-1 ธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

- ☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับการจัดส่งเอกสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ซอย หมู่ที่

ถนน ตำบล อำเภอ

จังหวัด รหัสไปรษณีย์

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....

รับเงินค่าสมาชิกจำนวน.....

วันที่.....

ลงนาม..... ผู้สมัคร

(.....)

สมัครสมาชิก โดย (1) สแกน QR-Code หรือเข้าถึง <https://bit.ly/37yC835>

หรือ (2) ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน มาที่

(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตู้ ป.ณ. 202 ปณ.จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332 หรือ

(ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบต่อไป



กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2565
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการ
ในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของ
สมาคมที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่ม 2) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
 - Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี
2. อบรมความรู้คณิตศาสตร์
ดูข้อมูล รายละเอียด และกำหนดการ ได้ที่ <https://www.mathassociation.net>
3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
-- งดการสอบแข่งขัน ประจำปี พ.ศ. 2565 --
4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี ครั้งที่ 26 ประจำปี พ.ศ. 2565 ในรูปแบบออนไลน์
(The 26th Annual Meeting in Mathematics : AMM 2022)
ระหว่างวันที่ 18 – 20 พฤษภาคม พ.ศ. 2565 โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย
ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ร่วมกับ ภาควิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี และสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และ
เทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา เป็นเจ้าภาพ
5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทย
เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
 - ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
ดูข้อมูลและกำหนดการได้ที่ <https://www.mathassociation.net> ในหัวข้อประกวดโครงงาน
 - ประชุมวิชาการสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 10
(The 10th Undergraduate Applied Mathematics Conference : UAMC 2022)
ระหว่างวันที่ 29 – 30 เมษายน พ.ศ. 2565 โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เป็นเจ้าภาพ

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

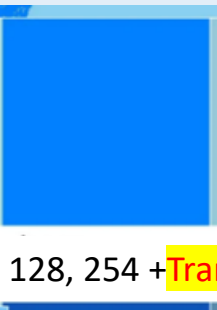
ชั้น 9 อาคารมหาชิรฐานิศา คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ และโทรสาร 02-252-7980



สี Azure
HEX #0080FE
RGB 252 209 42



Mathematical Journal

Volume 67 Number 707 May - August 2022

สีปก