ISSN XXXX-XXXX (Online)

วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๖๘ ฉบับที่ ๗๐๙ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๖ Volume 68 Number 709 January – April 2023

บทความวิชาการ *Academic Article*

คณิตศาสตร์ของเราแต่เก่าก่อน : ทฤษฎีบทพีทาโกรัส 1

Our Mathematics From The Past: Pythagoras' Theorem

จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ และสมภพ วัชฤทธิ์

บทความวิจัย *Research Article*

ไฮเปอร์ไอเด็นติตี้ในกราฟวาไรตี้ที่ก่อกำเนิดโดยกราฟซีโรโพเทนต์และยูนิโพเทนต์ 22

Hyperidentities in Graph Variety Generated by Zeropotent and Unipotent Graphs

เชาวน์วัฒน์ มั่นยืน

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา ๖๘ ฉบับที่ ๗๐๙ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๖

ISSN XXXX-XXXX (Online)

Mathematical Journal
by The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King
Volume 68 Number 709 January – April 2023

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ *จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล *จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*
2. ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ *สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี*

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวชิรุณหิศ
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เล็งเห็นความสำคัญของการส่งเสริมและสนับสนุนให้มีการเผยแพร่งานที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ จึงได้จัดทำวารสารคณิตศาสตร์นี้ขึ้น ซึ่งกำหนดออกเผยแพร่ปีละ 3 ฉบับ โดยตีพิมพ์ผลงานทางวิชาการในรูปแบบออนไลน์ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ของการศึกษาในวงกว้าง

ในเดือนเมษายนนี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้มีการจดทะเบียนคณะกรรมการบริหารสมาคม วาระปี 2566 – 2568 (ซึ่งเป็นไปตามมติที่ประชุมใหญ่สามัญประจำปี 2565 วันที่ 20 เมษายน 2566) โดยคณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ชุดใหม่นี้ มี **ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช** เป็นนายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ วารสารคณิตศาสตร์ขอแสดงความยินดีกับท่านในโอกาสนี้ด้วย

ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่ให้ความอนุเคราะห์อย่างดียิ่งเสมอมา และขอเชิญชวนอาจารย์ นักวิจัย นิสิต นักศึกษา ส่งผลงานตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารคณิตศาสตร์นี้ โดยสามารถดาวน์โหลดเอกสาร Template ของบทความ และแบบฟอร์มส่งบทความ ได้ที่

https://www.mathassociation.net/view/home/page_paper.php

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหารหวังเป็นอย่างยิ่งว่าทุกบทความจะเป็นประโยชน์แก่ผู้สนใจ เพื่อจะได้พัฒนางานด้านคณิตศาสตร์ให้ก้าวหน้า หากมีคำติชมหรือข้อเสนอแนะเกี่ยวกับวารสาร สามารถติดต่อได้ที่ อีเมล์ MathThaiOrg@gmail.com

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ
รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล
ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

1. ศ. ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช *จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*
2. รศ. ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์ *สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง*
3. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ *มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*
4. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง *มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์*
5. รศ. ดร.อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์ *จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*
6. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงศ์ *มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี *จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*
2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช *สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์*
3. รศ. ดร.กาญจ์นภา อมรัชกุล *สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์*
4. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา *มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์*
5. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ *มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*
6. รศ. ดร.พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล *มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์*
7. รศ. ดร.รณสรรพ์ ชินรัมย์ *มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์*
8. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ *มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*
9. ผศ. ดร.กนกพร ช่างทอง *มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี*
10. ผศ. ดร.มณฑิรา ดวงสาพล *มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*
11. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ *มหาวิทยาลัยศิลปากร*
12. ผศ. ดร.ศรันย์ อินทโกสุม *สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง*
13. ผศ. ดร.ศิริรัตน์ สิงหันต์ *มหาวิทยาลัยรามคำแหง*
14. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว *มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์*
15. ผศ. ดร.สุรีย์พร ชาวแพรกน้อย *มหาวิทยาลัยนเรศวร*
16. ผศ. ดร.อังคณา บุญยืด *มหาวิทยาลัยขอนแก่น*
17. ผศ. ดร.เอื้ออารี บุญเพิ่ม *มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปี 2566 - 2568

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์รจิต วัฒนสินธุ์	ที่ปรึกษา
2. ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช	นายกสมาคม
3. รองศาสตราจารย์ ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	อุปนายก
4. รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ	เลขาธิการ
5. รองศาสตราจารย์ ดร.เอื้อมพร ฟักสุวรรณ	เหรัญญิก
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ	ปฏิคม
7. อาจารย์ประไพ เสนาบุญญฤทธิ์	ประชาสัมพันธ์
8. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วาสนา สุขกระสานติ	หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหารวารสารคณิตศาสตร์
9. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด	การอบรมครูและการประกวดโครงงาน
10. รองศาสตราจารย์ ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	ผู้จัดการสารสนเทศ
11. ศาสตราจารย์ ดร.ยศนันต์ มีมาก	กรรมการ
12. รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์	กรรมการ
13. รองศาสตาจารย์ ทิพวัลย์ สันติวิภานนท์	กรรมการ
14. รองศาสตราจารย์ธีรวัฒน์ ประกอบผล	กรรมการ
15. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ	กรรมการ
16. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล	กรรมการ
17. รองศาสตราจารย์ ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
18. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
19. รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
20. ผู้ช่วยศาสตราจารย์กรองแก้ว หวังนิเวศน์กุล	กรรมการ
21. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	กรรมการ
22. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงศ์พล เรือนคง	กรรมการ
23. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิริพงษ์ สิริสุข	กรรมการ
24. อาจารย์นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
25. อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์	กรรมการ
26. อาจารย์ ดร.พีรพัฒน์ สุทธิมาศ	กรรมการ
27. ดร.อำพล ดวงแป้น	กรรมการ
28. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการ
29. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้น จึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	**วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์**
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	**Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King**
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของบทความที่จะรับตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตรศึกษา หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น o วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี o เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย o บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน o วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่างถูกต้อง

การพิจารณากลั่นกรองบทความของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้องจำนวน 3 ท่าน โดยไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จากผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่งบทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ใดมาก่อน และต้องไม่อยู่ระหว่างพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตามข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่งกองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือหน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือกระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความ สำหรับพิมพ์ได้ที่ https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATh/index หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความกรุณาปฏิบัติตามข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่างเคร่งครัด จากนั้นอัพโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document Format (PDF) พร้อมไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ (แบบฟอร์มส่งบทความMJMATH.docx) ขึ้นที่ระบบการส่งบทความ ที่ https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATh/about/submissions หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถติดต่อกองบรรณาธิการฝ่ายบริหารของวารสาร ได้ที่ MathThaiOrg@gmail.com

ISSN XXXX-XXXX (Online)

วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๖๘ ฉบับที่ ๗๐๙ มกราคม – เมษายน ๒๕๖๖ Volume 68 Number 709 January – April 2023

บทความวิชาการ *Academic Article*

คณิตศาสตร์ของเราแต่เก่าก่อน : ทฤษฎีบทพีทาโกรัส 1

Our Mathematics From The Past: Pythagoras' Theorem

จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ และสมภพ วัชฤทธิ์

บทความวิจัย *Research Article*

ไฮเปอร์ไอเด็นติตี้ในกราฟวาไรตี้ที่ก่อกำเนิดโดยกราฟซีโรโพเทนต์และยูนิโพเทนต์ 22

Hyperidentities in Graph Variety Generated by Zeropotent and Unipotent Graphs

เชาวน์วัฒน์ มั่นยืน

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา 68 เล่มที่ 709 มกราคม – เมษายน 2566

http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

คณิตศาสตร์ของเราแต่เก่าก่อน : ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

Our Mathematics From The Past: Pythagoras' Theorem

DOI: 10.14456/mj-math.2023.1

จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ[1,*] และ สมภพ วัชฤทธิ์[2]

[1]สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10330

[2]กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมวัดเบญจมบพิตร กรุงเทพมหานคร 10300

Jinnadit Laorpaksin[1,*] and Sompob Watcharit[2]

[1]Division of Mathematics Education, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education, Chulalongkorn University, Bangkok 10330

[2]Mathematics Department, Mattayom Watbenchamabophit School, Bangkok 10300

Email: [1]jinnadit.l@chula.ac.th [2]Sompob.wt@gmail.com

วันที่รับบทความ : 4 สิงหาคม 2565 วันที่แก้ไขบทความ : 26 กุมภาพันธ์ 2566 วันที่ตอบรับบทความ : 17 เมษายน 2566

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอประวัติโดยย่อของพีทาโกรัส และความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสตามอารยธรรมต่าง ๆ ตลอดจนการปรากฏของเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัสในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของไทย และร่องรอยของทฤษฎีบทพีทาโกรัสจากคัมภีร์เลขปกรณ์ในสมัยต้นรัตนโกสินทร์

คำสำคัญ: พีทาโกรัส ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

---

* ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

This article presents a brief of Pythagoras' biography and the knowledge of Pythagoras' theorem from various ancient civilizations. In addition, Pythagoras' theorem in Thai mathematics curriculum and the clue of Pythagoras' theorem from Lakepakorn book in early Rattanakosin period.

Keywords: Pythagoras, Pythagoras' theorem

1. บทนำ

ในบรรดานักคณิตศาสตร์ที่ได้รับการออกชื่อในบทเรียนตามแบบเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไปนั้น ชื่อที่ติดหูและเป็นที่รู้จักกันในอันดับต้น ๆ คงหนีไม่พ้น "พีทาโกรัส" และทฤษฎีบทของเขา นักเรียนส่วนใหญ่ในระบบการศึกษาปัจจุบันของไทยทั้งที่ศึกษาในสายการเรียนที่เน้นคณิตศาสตร์ หรือไม่เน้นคณิตศาสตร์ ก็น่าจะจดจำเนื้อหาของทฤษฎีบทนี้ได้ หรืออย่างน้อยก็น่าจะคุ้นเคยกับชุดตัวเลข 3, 4 และ 5 อยู่บ้าง แม้ว่าองค์ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะมีชื่อพีทาโกรัสกำกับอยู่ หากแต่พีทาโกรัสไม่ใช่บุคคลแรกที่ค้นพบความสัมพันธ์พิเศษนี้ และสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยก็เป็นที่น่าสนใจว่า ได้เริ่มกำหนดให้มีการเรียนทฤษฎีบทพีทาโกรัสในชื่อทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาตั้งแต่เมื่อใด

2. ในความเป็นพีทาโกรัส

ตามประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์นั้น พีทาโกรัส (Pythagoras : ประมาณ 580 – 496 ปีก่อนคริสตกาล) คือหนึ่งในนักคณิตศาสตร์ยุคแรกที่คนทั่วไปคุ้นเคยชื่อของเขาเป็นอย่างดี โดยหากนับตามช่วงอายุแล้วเขามีชีวิตอยู่ในช่วงปลายพุทธกาล และเกิดช้ากว่าทาเลสแห่งมิเลตุส (Thales of Miletus : ประมาณ 640–546 ปีก่อนคริสตกาล) ผู้ซึ่งได้รับการยกย่องว่าเป็นนักคณิตศาสตร์คนแรกของโลกอยู่เพียงราว 60 ปี ด้วยเหตุที่ทั้งพีทาโกรัสและทาเลสมีชีวิตอยู่ในช่วงเวลาและสถานที่ที่ใกล้เคียงกันจนอาจสันนิษฐานได้ว่าทั้งสองคนมีโอกาสได้พบเจอกัน จึงเชื่อกันว่าพีทาโกรัสเป็นลูกศิษย์คนหนึ่งของทาเลส (หรือสำนักเรียนสายทาเลส) และทาเลสเองก็เป็นแรงบันดาลใจสำคัญที่ทำให้พีทาโกรัสออกเดินทางไปเรียนรู้สรรพสิ่งในโลกกว้าง ทั้งอียิปต์ บาบิโลน รวมไปถึงดินแดนที่ไกลออกไปทางฝั่งตะวันออก โดยการเดินทางครั้งนั้นนับได้ว่าเป็นอีกหนึ่งปัจจัยที่ทำให้ชื่อของเขานั้นยังคง

ได้รับการเล่าขานอยู่ตามตำราเรียนทั่วไปในปัจจุบันผ่านทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงมากทฤษฎีบทหนึ่ง [22]

เมื่อเอ่ยนามพีทาโกรัส นอกจากจะต้องระวังไม่ให้สับสนกับ โปรทากอรัส (Protagoras : ประมาณ 490 – 420 ปีก่อนคริสตกาล) นักปรัชญากลุ่มโซฟิสต์ (Sophists) [4] แล้ว นามพีทาโกรัสก็มักจะตามท้ายด้วยสร้อยชื่อเมืองสำคัญในช่วงชีวิตกว่าแปดสิบปีของเขา ทั้งซามอส (Samos) โครโตนา (Crotona) และเมตาปอนตัม (Metapontum) [6] พีทาโกรัสเกิดที่เกาะซามอส ในทะเลอีเจียน (Aegean) ริมชายฝั่งของประเทศตุรเคีย (ในปัจจุบันเมืองด้านทิศตะวันออกเฉียงใต้ของเกาะซึ่งเชื่อว่าเป็นถิ่นเกิดของพีทาโกรัส ก็ได้รับการตั้งชื่อใหม่ว่าเมืองพีทาโกไรออน (Pythagorion) และมีอนุสาวรีย์ของเขาตั้งอยู่บริเวณอ่าวพีทาโกไรออน) พีทาโกรัสใช้ช่วงครึ่งแรกของชีวิตในการออกศึกษาหาความรู้ ก่อนที่จะกลับมาก่อตั้งสำนักพีทาโกเรียน (Pythagorean School) ที่เมืองโครโตนา ซึ่งสอนสรรพวิทยาความรู้ทั้ง คณิตศาสตร์ ปรัชญา ธรรมชาติวิทยา ดนตรี ดาราศาสตร์ และอื่น ๆ [18] สำนักเรียนนี้นอกจากจะมีแนวคิดหลักที่เชื่อว่า “จำนวน” คือกุญแจไขความลับของจักรวาลแล้ว ยังเชื่อในหลักภราดรภาพ (Brotherhood) คือ มีความเป็นพี่เป็นน้องร่วมสำนัก ความรู้ของสำนักถือเป็นความลับที่จะถ่ายทอดกันในเฉพาะสำนัก มีความคิดความเชื่อร่วมกันจนคล้ายเป็นลัทธิ ที่สำคัญยังยึดหลักการว่าผลงานของสมาชิกในสำนักก็คือผลงานในนามของสำนัก ด้วยเหตุนี้จึงทำให้เกิดแนวคิดที่ว่า ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสอาจไม่ใช่ผลงานของพีทาโกรัส เป็นแต่เพียงผลงานของสมาชิกคนใดคนหนึ่งของสำนักพีทาโกเรียนก็เป็นได้ นอกจากนี้สำนักพีทาโกเรียนยังเชื่อในชีวิตหลังความตาย การกลับชาติมาเกิด การถือมังสวิรัติ งดทานถั่วและของมึนเมา และมีแนวคิดที่ออกจะล้ำสมัยก็คือการเปิดกว้างด้านสิทธิสตรี และการให้ความสำคัญกับความเสมอภาคของหญิงและชาย จวบจนกาลต่อมาสำนักพีทาโกเรียนได้เกิดความขัดแย้งทางความคิดกับผู้นำท้องถิ่น จนต้องประสบกับภัยทางการเมือง สำนักพีทาโกเรียนจึงถูกต่อต้าน เผาทำลาย และพีทาโกรัสก็จำต้องย้ายหนีเอาชีวิตรอดไปยังเมืองเมตาปอนตัม และจบชีวิตลงที่นั่น

3. ในความหลากหลายของผู้มาก่อนและมาหลัง

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า องค์ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ ไม่ได้ถูกค้นพบขึ้นครั้งแรกโดยพีทาโกรัส หากแต่เขาในฐานะอาจารย์ผู้ยิ่งใหญ่ อาจจะเป็นผู้ที่ได้พร่ำสอน ขยายความ หรือแสดงเหตุผลของความสัมพันธ์นี้ ให้กับสานุศิษย์ในแบบมุขปาฐะ [19]

โดยไม่บันทึกหลักฐานไว้ ชื่อของเขาจึงได้กลายเป็นชื่อทฤษฎีบท และเรียกขานสืบเนื่องต่อกันมา แม้ในปัจจุบันจะไม่หลงเหลือหลักฐานอะไรเกี่ยวกับบทพิสูจน์แบบพีทาโกรัสเลยก็ตาม ในขณะที่ตามอารยธรรมต่าง ๆ หลายแห่ง ยังปรากฏร่องรอยหลักฐานชัดเจนที่สะท้อนว่าพวกเขาเข้าใจ รู้จัก และใช้งาน “ทฤษฎีบทรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก” กันมาก่อนหน้านั้นแล้ว

บาบิโลน : มีการค้นพบแผ่นดินเหนียวซึ่งต่อมาได้รับการตั้งชื่อว่า พลิมป์ตัน 322 (Plimpton 322) ซึ่งมีอายุช่วงประมาณ 1,800 ปีก่อนคริสต์ศักราช ในรัชสมัยพระเจ้าฮัมมูราบี แห่งอาณาจักรบาบิโลนเก่า หรือก่อนยุคพีทาโกรัสราว 1,200 ปี พลิมป์ตัน 322 เป็นแผ่นดินเหนียวขนาดประมาณหนึ่งฝ่ามือ จารึกอักษรลิ่ม (Cuneiform) เป็นตัวเลข 15 บรรทัด แบ่งออกเป็น 4 สดมภ์ โดยสองสดมภ์กลางแสดงจำนวนเต็มสองจำนวนในระบบสัฐินิยมหรือระบบฐานหกสิบ ที่แทนความยาวด้านประกอบมุมฉากด้านสั้น (สดมภ์ที่ 2) และความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก (สดมภ์ที่ 3) ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีความยาวด้านทั้งสามเป็นจำนวนเต็ม แม้ในการจารึกจะไม่ได้ระบุความยาวด้านประกอบมุมฉากที่เหลือ แต่เห็นได้ชัดว่ามีการนำความยาวนี้ไปใช้ในการคำนวณเป็นจำนวนในสดมภ์ที่ 1 แสดงว่าในสมัยนั้นมีความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้ว ทั้งนี้เมื่อถอดความแล้วสามสิ่งอันดับที่แสดงชุดความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ปรากฏในแผ่นดินเหนียวมีทั้งชุดขนาดเล็กอย่าง (119, 120, 169) (45, 60, 75) และรวมไปจนถึงชุดขนาดใหญ่อย่าง (4961, 6480, 8161) (12709, 13500, 18541)

รูปที่ 1(ก) แผ่นดินเหนียวพลิมป์ตัน 322 รูปที่ 1(ข) แผ่นดินเหนียวเยล 7289

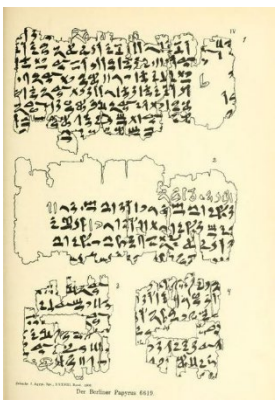
แหล่งที่มารูปที่ 1(ก): https://scientificgems.wordpress.com/2017/08/27/the-plimpton-322-tablet-re-examined/

รูปที่ 1(ข): https://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/ybc-7289/

นอกจากพลิมป์ตัน 322 แล้ว ยังมีแผ่นดินเหนียวเยล 7289 (Yale Babylonian Collection, YBC 7289) ซึ่งมีอายุอยู่ในช่วงราวศตวรรษที่ 19 – ศตวรรษที่ 17 ก่อนคริสต์ศักราช จารึกบนก้อนดิน

เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บริเวณแนวเส้นทแยงมุมมีอักษรลิ่มแสดงความยาวของเส้นทแยงมุมเป็นค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ ในกรณีนี้อาจพิจารณาได้เป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัสบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว

อียิปต์ : มีเรื่องเล่าขานเกี่ยวกับต้นเค้าแนวคิดที่พีทาโกรัสนำมาใช้สร้างเป็นทฤษฎีบทว่า ในช่วงหนึ่งของการท่องโลกเรียนรู้ พีทาโกรัสได้เดินทางไปยังอียิปต์และพบเห็นชาวพื้นเมืองใช้เชือกที่แบ่งออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน โดยผูกเป็นปม 11 ปม นำมาขึงเพื่อสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านยาว 3, 4 และ 5 หน่วย [8] ซึ่งในปัจจุบันเรียกความสัมพันธ์นี้ว่า บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตำนานนี้นับเป็นหนึ่งในหลักฐานที่สะท้อนว่าอียิปต์มีความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์นี้อยู่ก่อนหน้าพีทาโกรัส แต่นอกเหนือจากเรื่องเล่านี้แล้วยังมีหลักฐานที่เป็นวัตถุอีกหนึ่งชิ้นที่ช่วยเชื่อมโยงถึงความรู้นี้ได้ ก็คือ เบอร์ลินพาไพรัส 6619 (Berlin Papyrus 6619) กระดาษพาไพรัสโบราณ ที่บันทึกข้อความไว้ตั้งแต่สมัยอาณาจักรกลาง (ประมาณ 2,000–1,580 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ซึ่งขุดพบบริเวณสุสานเก่าในเมืองซัคคารา (Saqqara) ความส่วนหนึ่งในเบอร์ลินพาไพรัสระบุว่า “พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เท่ากับ 100 *(ตารางหน่วย)* จะเท่ากับ *(ผลรวมของ)* พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส *(ที่มี)* ขนาดเล็กกว่าอีกสองรูป ซึ่งความยาวด้านของ *(รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็ก)* รูปหนึ่งนั้นเป็น $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ เท่าของความยาวด้านของ *(รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็ก)* อีกรูปหนึ่ง *(แล้วความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองนั้นจะเท่ากับเท่าไร)*”



รูปที่ 2 เบอร์ลินพาไพรัส 6619

แหล่งที่มา: https://en.wikipedia.org/wiki/Berlin_Papyrus_6619

ปัญหานี้เมื่อมองจากมุมมองปัจจุบัน จะได้เป็นสมการกำลังสอง $x^2+\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x\right)^2=100$ ซึ่งหาค่าของ x ได้เป็น 8 และจะได้ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสามเป็น 6, 8 และ 10 ซึ่ง (6, 8, 10) เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส แม้จะไม่ชัดเจนนักแต่ก็สามารถเชื่อมโยงและสันนิษฐานได้ว่าปัญหานี้เกี่ยวข้องกับความรู้ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

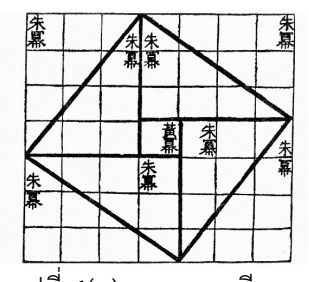
กรีก : พีทาโกรัสเป็นหนึ่งในนักคิดคนสำคัญในช่วงต้นของอารยธรรมกรีก ที่มีอิทธิพลต่อนักคิดของกรีกในรุ่นต่อ ๆ มา นักคณิตศาสตร์กรีกคนหนึ่งที่ได้รับอิทธิพลนั้น และมีบทบาททำให้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้สืบทอดต่อมาอย่างเป็นระบบไม่ขาดสายก็คือ ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria : ประมาณ 325 – 265 ปีก่อนคริสต์ศักราช) เจ้าของ ดิ เอลเลเมนตส์ (The Elements) ตำราชุดทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญของโลก ประกอบด้วยตำรารายย่อย 13 เล่ม โดยในเล่มที่ 1 ทฤษฎีบทที่ 47 ก็คือทฤษฎีบทพีทาโกรัสในแนวทางเรขาคณิต ซึ่งในตำรานี้ได้แสดงบทพิสูจน์ที่รัดกุมไว้ เชื่อกันว่ายุคลิดเป็นผู้คิดการพิสูจน์ในแนวทางนี้ด้วยตนเอง บางครั้งพบการเรียกบทพิสูจน์ลักษณะนี้ว่าบทพิสูจน์แบบคลาสสิก หรือแบบกังหันลม เพราะภาพที่ใช้ประกอบการพิสูจน์มีลักษณะคล้ายกับกังหันลม

รูปที่ 3 ภาพประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสใน ดิ เอลเลเมนตส์
ตามแนวทางการอธิบายของ โอลิเวอร์ เบิร์น (Oliver Byrne) [12]

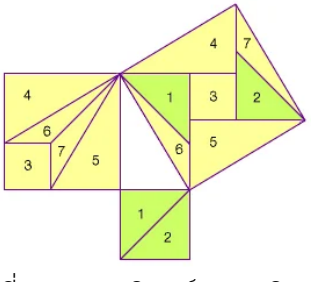
หลังจากแสดงทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้ว ในทฤษฎีบทที่ 48 ทฤษฎีบทสุดท้ายของเล่ม 1 ยุคลิดยังได้แสดงบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสไว้ด้วย นอกจากนี้ก็ยังได้แสดงทฤษฎีบทพีทาโกรัสในกรณีทั่วไปพร้อมบทพิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบทที่ 31 ของเล่มที่ 6 โดยขยายความจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ไปสู่รูปเรขาคณิตที่คล้ายกันตามสัดส่วนของความยาวด้าน

ทั้งสาม ข้อสังเกตประการหนึ่งเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสใน ดิ เอลเลเมนตส์ ก็คือชื่อของพีทาโกรัสได้รับการอ้างถึงว่าเกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทนี้อีกครั้ง ในงานเขียนเรื่อง “ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับ ดิ เอลเลเมนตส์ เล่มแรกของยุคลิด” (A Commentary on the First Book of Euclid's Elements หรือ Commentary on Euclid, Book I) ของ โปรคลุส (Proclus : ค.ศ. 410 – 485) ซึ่งห่างไกลมากจากยุคของยุคลิด และห่างไกลมาก ๆ จากยุคของพีทาโกรัส [11, 14]

จีน : โจวปี้ซ่วนจิง (Zhou Bi Suan Jing หรือ Chou Pei Suan Ching) เป็นเอกสารโบราณเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของจีนที่เก่าแก่และมีชื่อเสียงมาก คะเนว่าเขียนขึ้นในยุครณรัฐ (จันกว่อ : ประมาณ 475 – 221 ปีก่อนคริสต์ศักราช) สมัยราชวงศ์โจว ในตำรานี้ปรากฏแผนภาพเสียนถู (Hsuan–Thu) ซึ่งแสดงตารางขนาด 7 x 7 ภายในแบ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว 3 และ 4 หน่วย จำนวน 4 รูป และด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมทั้งสี่รูปต่อกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว 3 และ 4 หน่วย อีก 4 รูป และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วยอีก 1 รูป ดังรูปที่ 4(ก) ทำให้สรุปได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้น มีพื้นที่ 25 ตารางหน่วย หรือมีความยาวด้านเท่ากับ 5 หน่วย แม้เอกสารจะไม่ได้แสดงบทพิสูจน์ที่รัดกุม แต่ก็สะท้อนได้ถึงการมีความรู้เกี่ยวกับสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (3, 4, 5) ซึ่งยังสามารถขยายเป็นกรณีทั่วไปเพื่อสรุปเป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ [13]



รูปที่ 4(ก) แผนภาพเสียนถู



รูปที่ 4(ข) การพิสูจน์ของ หลิว ฮุย

แหล่งที่มารูปที่ 4 (ก): https://de.wikipedia.org/wiki/Zhoubi_suanjing

รูปที่ 4 (ข): https://www.britannica.com/science/Pythagorean-theorem

หลังการเสื่อมสลายของราชวงศ์โจว จีนเข้าสู่ยุคราชวงศ์จิ๋น (ประมาณ 221 – 206 ปีก่อนคริสต์ศักราช) และด้วยนโยบายการปกครอง “เผาตำรา ฆ่าบัณฑิต” ของ จิ๋นซีฮ่องเต้ (Qin Shi Huang : ประมาณ 260 – 210 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ทำให้ตำราวิชาการส่วนใหญ่ถูกเผาทำลาย

ส่วนที่เหลือตกทอดมาก็เป็นเพราะการซุกซ่อนหรือการเรียบเรียงขึ้นใหม่ของเหล่านักปราชญ์ โดยหนึ่งในตำราคณิตศาสตร์ที่เชื่อกันว่าเกิดขึ้นใหม่อีกครั้งจากผลกระทบของสถานการณ์นี้ก็คือ จิ่วจังซ่วนซู่ (Jiuzhang Suanshu) หรือ ตำราเลขคณิตเก้าบท (The Nine Chapters on the Mathematical Art หรือ Arithmetic in Nine Sections) ซึ่งต่อมาอีกราว 470 ปี คือในปี ค.ศ. 263 หลิว ฮุย (Liu Hui : ประมาณศตวรรษที่ 3) นักคณิตศาสตร์จีนคนสำคัญแห่งแคว้นวุยในยุคสามก๊กก็ได้ปรับปรุงและเรียบเรียงตำราเล่มนี้ใหม่ จนกลายเป็นหนึ่งในตำราที่มีอิทธิพลมากต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ของจีนโบราณ โดยในงานของ หลิว ฮุย ยังปรากฏการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยใช้การตัดรูปไว้ด้วย [24] ดังแสดงในรูปที่ 4(ข)

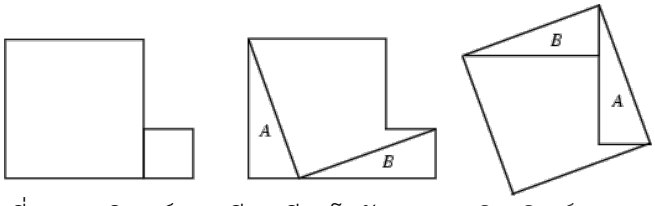
อินเดีย : ในยุคพระเวท ซึ่งมีอายุช่วงประมาณ 1,500 – 500 ปีก่อนคริสต์ศักราช ปรากฏคัมภีร์ศุลพสูตร (Sulba Sutras) รจนาด้วยภาษาสันสกฤตสมัยพระเวท โดยเป็นส่วนที่แต่งเสริมจากคัมภีร์พระเวท ซึ่งเป็นบทสวดพิธีกรรมของศาสนาพราหมณ์ หนึ่งในศุลพสูตรที่สำคัญ คือ เพาธายนศุลพสูตร (Baudhayana Sulba Sutras) สันนิษฐานว่าแต่งขึ้นเมื่อราว 800 ปีก่อนคริสต์ศักราช [21] ปรากฏข้อความเกี่ยวกับการใช้ความรู้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้

“เมื่อรวมพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูป ซึ่งสร้างแยกกันจากความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง จะได้เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสร้างจากความยาวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนั้น นี่คือสิ่งที่สังเกตได้จากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาดความยาวด้านทั้งสองเป็น 3 และ 4 , 12 และ 5 , 15 และ 8 , 7 และ 24 , 12 และ 35 , 15 และ 36” [17]

แม้ว่าบทพิสูจน์เชิงเรขาคณิตที่รัดกุมและเป็นกรณีทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้รับการเรียบเรียงขึ้นภายหลังเมื่อราวกลางศตวรรษที่ 16 แต่ก็เห็นได้ชัดจากเพาธายนศุลพสูตรว่า อินเดียมีความรู้นี้อยู่ก่อนหน้าพีทาโกรัสแล้ว นอกจากนี้จากเรื่องราวการเดินทางท่องโลกมาทางบูรพาทิศของพีทาโกรัส และการที่สำนักพีทาโกเรียนมีหลักปรัชญา หลักคิด หลักปฏิบัติบางส่วน ที่คล้ายแนวทางของศาสนาเชนและศาสนาพุทธ จึงมีบางแนวคิดที่เชื่อว่าพีทาโกรัสได้เดินทางมาทางตะวันออกจนไกลมากพอที่จะได้ยิน ได้ศึกษา และได้รับแรงบันดาลจากเพาธายนศุลพสูตรแล้วนำกลับไปสอน จนต่อมาได้กลายเป็นทฤษฎีบทในชื่อของเขาเอง [19]

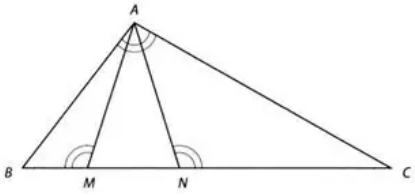
อาหรับ : ศาสนาอิสลามคือปัจจัยสำคัญที่ทำให้ก่อเกิดและสร้างสรรค์อารยธรรมอาหรับ กอปรกับแนวคิดในการเปิดรับความรู้จากดินแดนรอบข้าง จึงมีการแปลตำราสำคัญของกรีกทั้ง

ดิ เอลเลเมนตส์ของยุคลิด (The Elements of Euclid) อัลมาเจสต์ของทอเลมี (Almagest of Ptolemy) อะริทเมทิกาของไดโอแฟนทัส (Arithmetica of Diophantus) [23] รวมถึงยอมรับและนำความรู้ของกรีกและอินเดียมาใช้งาน โดยในช่วงราชวงศ์อับบาสิด (Abbasid) ราวกลางศตวรรษที่ 8 ถึงต้นศตวรรษที่ 13 ซึ่งเป็นยุคทองที่มีความเจริญสูงสุด มีการจัดตั้งสภาแห่งภูมิปัญญา (The House of Wisdom) เพื่อเป็นห้องสมุดที่รวบรวมตำราสำคัญและเป็นสถานชุมนุมของเหล่านักคิด ในรัชสมัยของเคาะลีฟะฮ์ ฮารูน อัลรอชีด (Harun Al-Rashid : ค.ศ. 763 – 809) ในช่วงนี้มีนักคิดที่มีบทบาทต่อวงการคณิตศาสตร์อาหรับคนสำคัญ โดยเฉพาะการวางรากฐานงานด้านพีชคณิตก็คือ มุฮัมมัด อิบน์ มูซา อัลควาริซมี (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi : ค.ศ. 780 – 850) ซึ่งเขามีผลงานเกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสด้วย แต่เป็นกรณีเฉพาะรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว [10, 23] นอกจากนี้ ทาบิท อิบน์ กุรเราะฮ์ (Thabit ibn Qurra **:** ค.ศ. 836 – 901**)** นักคณิตศาสตร์ นักดาราศาสตร์ และปราชญ์ผู้รอบรู้ ก็มีผลงานการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้การตัดรูปดังรูปที่ 5 และเขายังได้วางนัยทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยอาศัยรูปสามเหลี่ยมคล้าย ดังรูปที่ 6



รูปที่ 5 การพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสของ ทาบิท อิบน์ กุรเราะฮ์

แหล่งที่มา: https://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/p/p747.htm



รูปที่ 6 การวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดย ทาบิท อิบน์ กุรเราะฮ์

แหล่งที่มา: https://owlcation.com/stem/Early-Proofs-of-the-Pythagorean-Theorem

จากรูปที่ 6 จะได้ความสัมพันธ์ว่า $AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BM + NC)$ ซึ่งในกรณีที่ $B\hat{A}C$ เป็นมุมฉาก ก็จะได้เป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัสนั่นเอง

ในความหลากหลายของผู้มาก่อนและผู้มาหลังที่รู้จัก ค้นพบ และใช้งานทฤษฎีบทพีทาโกรัสนั้น สะท้อนให้เห็นถึงเรื่องราวและความเป็นไปของตัวทฤษฎีบทในหลายแง่มุม เช่น การค้นพบความรู้นี้ในหลายถิ่นที่ที่เกิดขึ้นอย่างเป็นอิสระต่อกัน การได้รับแนวคิดหรือแรงบันดาลใจจากการติดต่อสื่อสาร การสร้างองค์ความรู้ไว้เพื่อรองรับการใช้งาน การใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นพื้นฐานความรู้สำหรับการเรียนรู้ในขั้นที่สูงขึ้น หรือการขยายความรู้ให้กว้างขวางขึ้น บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่มีความเป็นมายาวนานนี้จึงมีอยู่อย่างมากมายหลายแนวคิด คล้ายเป็นเกมของนักคณิตศาสตร์ในการไล่ล่าหาแนวทางการพิสูจน์ใหม่ ๆ ดังที่ เอลิชา สก็อตต์ ลูมิส (Elisha Scott Loomis : ค.ศ. 1852 – 1940) ได้นำเสนอไว้ในหนังสือชื่อ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (The Pythagorean Proposition) ซึ่งรวบรวมบทพิสูจน์ที่เกิดขึ้นตั้งแต่ราว 900 ปีก่อนคริสตกาล จนถึง ค.ศ. 1940 ไว้ถึง 370 แบบ [16] ในจำนวนนี้นอกจากจะมีผลงานของนักคณิตศาสตร์ชื่อดังตามอารยธรรมต่าง ๆ แล้ว ก็ยังมีบทพิสูจน์ของเลโอนาร์โด ดา วินชี (Leonardo da Vinci : ค.ศ. 1452 – 1519) และประธานาธิบดีคนที่ 20 ของสหรัฐอเมริกา เจมส์ เอ การ์ฟิลด์ (James Abram Garfield : ค.ศ. 1831 – 1881) ซึ่งตีพิมพ์ไว้เมื่อ ค.ศ. 1876 [13] ก่อนเข้ารับตำแหน่ง จำนวนแนวทางการพิสูจน์ที่มากมายนี้ยังได้รับการบันทึกสถิติโลกไว้ในกินเนสส์ เวิลด์ เรคคอร์ด (Guinness World Records) ใน ค.ศ. 1991 ว่าเป็นทฤษฎีบทที่มีบทพิสูจน์มากที่สุด (Most-Proved Theorem) [20]

4. ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในไทย

ตามตัวชี้วัดและมาตรฐานการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นั้น กำหนดให้ในสาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต มาตรฐาน ค 2.2 เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้ ชั้น ม. 2 มีตัวชี้วัดที่ 5 ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส กล่าวคือ “เข้าใจและใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง” และมีสาระการเรียนรู้แกนกลางอยู่สองประการคือ 1) ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ 2) การนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไปใช้ในชีวิตจริง โดยตามหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) [8] ได้กำหนดให้ “ทฤษฎีบทพีทาโกรัส” เป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์บทเรียนแรกของการเรียนในภาคการศึกษาต้น ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยเริ่มต้น

ด้วยการนำเสนอทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงพีชคณิต ความว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก” แล้วจึงตามมาด้วยการนำเสนอทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงเรขาคณิต ความว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก” หลังจากนั้นจึงนำเสนอบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงพีชคณิต ความว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก” ทั้งนี้ ได้มีการแทรกการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงเรขาคณิต (เหมือนใน ดิ เอลเลเมนตส์ เล่ม 6 ทฤษฎีบทที่ 31) กล่าวคือ ขยายจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ไปสู่รูปเรขาคณิตที่คล้ายกันตามอัตราส่วนของความยาวด้านทั้งสาม ในลักษณะคำถามชวนคิด (ชวนคิด 1.2) โดยตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้สำรวจและค้นพบด้วยตนเองสำหรับในบางกรณี แต่ไม่ได้แสดงบทพิสูจน์ไว้

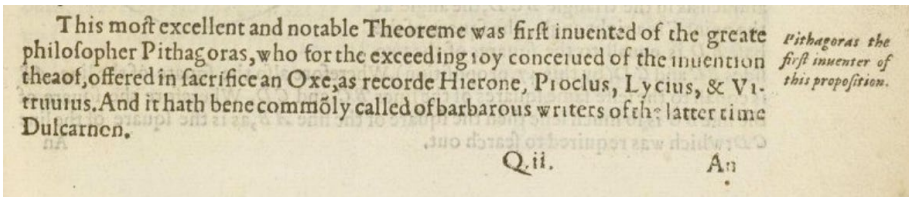
แน่นอนว่านี่ไม่ใช่ครั้งแรกที่หลักสูตรคณิตศาสตร์ภาคบังคับ กำหนดให้มีการเรียนเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยเมื่อย้อนกลับไปในตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางฯ ฉบับก่อนปรับปรุงก็จะพบว่ามีการกำหนดให้เรียนเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไว้เช่นเดียวกัน โดยมีตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องระบุว่า “ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา” แม้จะมีการเปลี่ยนจุดเน้นไปบ้าง เช่น ลดข้อความ “การให้เหตุผล” มาขยายความการแก้ปัญหา เพิ่มเป็นทั้งการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง แต่ก็ยังเห็นได้ถึงการให้ความสำคัญกับเนื้อหาเรื่องนี้

เมื่อพิจารณาในประเด็นของการที่หลักสูตรคณิตศาสตร์ของไทย กำหนดให้เรียน “เนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัส” และเรียกทฤษฎีบทที่เรียนว่า “ทฤษฎีบทพีทาโกรัส” มาตั้งแต่เมื่อใดนั้น พบว่าตั้งแต่ในหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น (ม.ศ. 1–2–3) พุทธศักราช 2503 โดยกระทรวงศึกษาธิการ [2] รายวิชาคณิตศาสตร์ เฉพาะสายสามัญ จะต้องเรียนเรขาคณิต (เรียนสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง) โดยในชั้น ม.ศ. 2 เนื้อความตอนหนึ่งกำหนดให้เรียน “ทฤษฎีบทของ Pythagoras” ไว้อย่างชัดเจน และในหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.ศ. 4–5–6) พุทธศักราช 2503 [1] เฉพาะคณิตศาสตร์ ข (เรียนสัปดาห์ละ 4 ชั่วโมง) พบรายการสอนเรขาคณิตมีเนื้อหาส่วนหนึ่งคือ “ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์ของจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยม และจัตุรัสบนเส้นมัธยฐาน” โดยในส่วนจัตุรัสบนเส้นมัธยฐาน น่าจะหมายถึงทฤษฎีบทที่ว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีจุด D อยู่บน

$\overline{BC}$ โดยที่ $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐานแล้ว จะได้ว่า $AB^2 + AC^2 = 2\left(BD^2 + AD^2\right)$ นั่นแปลว่าอย่างน้อยในราว พ.ศ. 2503 ก็เริ่มมีการกำหนดให้เรียนเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัส และเรียกในชื่อทฤษฎีบทพีทาโกรัสกันแล้ว แล้วก่อนหน้านั้นเราเริ่มเรียนทฤษฎีบทพีทาโกรัสกันมาตั้งแต่เมื่อไร ?

เป็นที่แน่นอนว่าการเรียนคณิตศาสตร์ของไทยในสมัยโบราณ ตั้งแต่ในช่วงรัตนโกสินทร์ตอนต้นเรื่อยขึ้นไปจนถึงธนบุรี อยุธยา ไม่ได้มีการกำหนดเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เรียนไว้ชัดเจน เป็นแต่การเรียนกับพระหรือผู้รู้อย่างไม่เป็นทางการ ส่วนใหญ่เป็นการสอนสูตรและฝึกให้รู้จักคำนวณ ฝึกให้ทำโจทย์ตลาด มาตรา เสนา หน้าไม้ เพื่องานทั้งทางโหราศาสตร์ การค้าขาย และการใช้งานในชีวิตประจำวัน การเรียนคณิตศาสตร์ที่กำหนดเนื้อหาที่ชัดเจนเพิ่งจะเริ่มขึ้นในราว พ.ศ. 2438 หรือ ร.ศ. 114 ด้วยอิทธิพลของการศึกษาแบบตะวันตก โดยในประโยค 3 ตั้งแต่ปีที่ 1 – 4 กำหนดให้เรียน “โคมาตร” ซึ่งหมายถึงวิชา “เรขาคณิต” [3] (ในที่นี้ โค หมายถึง แผ่นดิน และ มาตร หมายถึง การวัด จึงเป็นการถอดความจาก Geometry โดยตรง) จาก A School Geometry ของ ฮอลล์และสตีเวนส์ (Hall and Stevens) ครอบคลุมเนื้อหาในเล่ม 1 – 3 และการฝึกทำโจทย์ ซึ่งตำราเรขาคณิตของฮอลล์และสตีเวนส์ชุดนี้เป็นการนำ ดิ เอลเลเมนตส์ มาเรียบเรียงใหม่เพื่อให้เหมาะกับการใช้สอนนักเรียน โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสถูกจัดให้อยู่ใน A School Geometry เล่ม 1 โดยเป็นทฤษฎีบทที่ 29 และท้ายการพิสูจน์ทฤษฎีบท ฮอลล์และสตีเวนส์ยังได้เพิ่มเติมว่า “This is known as the Theorem of Pythagoras” ก่อนนำเสนอทฤษฎีบทพีทาโกรัสในเชิงพีชคณิต ให้เป็นอีกทางเลือกหนึ่งในการนำไปใช้งาน [15] เหมือนดังเช่นในตำรา ดิ เอลเลเมนตส์ ฉบับพิมพ์ภาษาอังกฤษครั้งแรก โดย เซอร์ เฮนรี บิลลิงสเลย์ (Sir Henry Billingsley) เมื่อ ค.ศ. 1570 ก็ได้อธิบายความในเชิงอรรถท้ายทฤษฎีบทที่ 47 ดังรูปที่ 7 นอกจากนี้ตำราเรขาคณิตฉบับภาษาไทยซึ่งเป็นการนำ A School Geometry มาแปลเพื่อช่วยให้การจัดการเรียนการสอนเป็นไปได้อย่างกว้างขวางขึ้นนั้น ก็มีการระบุชื่อเจ้าของทฤษฎีบทว่าเป็นพีทาโกรัสเช่นกัน เช่นในหนังสือ “เรขาคณิต มัธยมปีที่ 5” เรียบเรียงโดย พระสันธิวิทยาพัฒน์ [7]

ทั้งนี้ในช่วงเวลาที่กำหนดให้เรียนเรขาคณิต โดยใช้ตำราฉบับสำนวนของฮอลล์และสตีเวนส์ หรือฉบับแปลนั้น อาจเป็นเพราะแนวทางการสอนที่ให้ความสำคัญกับการท่องหมายเลขของทฤษฎีบทและเนื้อความ เพื่อใช้ในการอ้างอิงเหตุผลอย่างรัดกุมเป็นสำคัญ จึงทำให้แม้จะรู้จักเนื้อความของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นอย่างดี แต่ก็อาจจะไม่ทราบว่าทฤษฎีบทนี้เรียกอีกชื่อว่าทฤษฎีบทพีทาโกรัส



This moſt excellent and notable Theoreme was firſt inuented of the greate philoſopher Pithagoras, who for the exceeding ioy conceiued of the inuention theaof, offered in ſacrifice an Oxe, as recorde Hierone, Proclus, Lycius, & Vitruuius. And it hath bene commõly called of barbarous writers of the latter time Dulcarnen.

Pithagoras the firſt inuenter of this propoſition.

Q ii. An

รูปที่ 7 ข้อความท้ายทฤษฎีบทที่ 47 ใน ดิ เอลเลเมนตส์
ฉบับพิมพ์เป็นภาษาอังกฤษครั้งแรกโดย เซอร์ เฮนรี บิลลิงสเลย์
แหล่งที่มา: https://galileo.ou.edu/exhibits/elements-geometry-1570

ดังเช่นที่ในหนังสือวิทยาจารย์ เล่ม 31 ตอนที่ 5 วันที่ 1 มีนาคม พ.ศ. 2473 ที่ หลวงกีรติวิทโยษาร (กี่ ศุนวัต) ได้เขียนบทความเรื่อง “ศาสดาปีทะกอรัส และบทพิสูจน์ที่ 29” มีความตอนหนึ่ง (สะกดตามต้นฉบับ ยกเว้นคำว่า ปีทะกอรัส ที่ต้นฉบับสะกดแบบมีทัณฑฆาตเหนือ ป ใต้สระอี) ระบุว่า

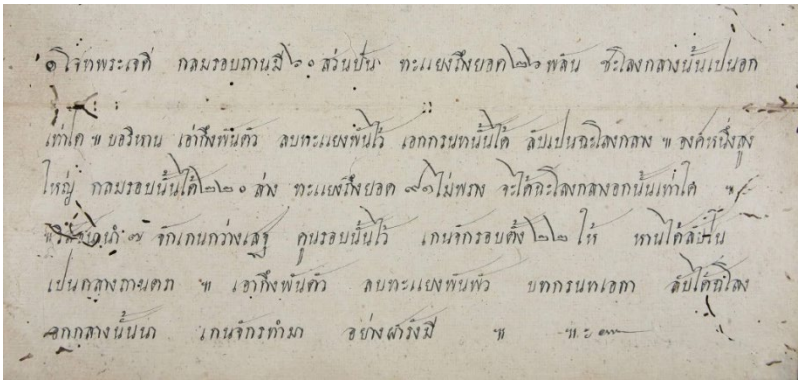
> “ปีทะกอรัส ได้เกิดในสมัยพระพุทธเจ้า และได้ค้นคว้า “ความจริง” เนื้อที่สี่เหลี่ยมจตุรัสส์บนเส้นทะแยงมุมเท่ากับเนื้อที่สี่เหลี่ยมจตุรัสส์สองรูปบนด้านประกอบมุมฉากรวมกัน ซึ่งเราทั้งหลายได้พากันจำขึ้นใจว่าเป็น “Theorem 29” ทั้งนักเรียนบางคนหารู้จักชื่อท่านศาสดาปีทะกอรัสไม่ นี่ก็เพราะเราลืมตาขึ้นมาสู่โลกก็พบ ฮอลลฺ และสตีเวนสฺ (Hall และ Stevens) เป็นเจ้าตำราของ ยีออเมตรีอยู่แล้ว และไม่ได้โอกาสสืบต่อไปถึงโลกอันกว้างขวางในตำราอื่น ๆ อีกเลย เด็กบางคนซ้ำบอกเสียด้วยว่า ฮอลลฺ และสตีเวนสฺ เป็นผู้แต่งบทพิสูจน์ที่ 29 และ ยูคลิด (Euclid) นั้น คือใครก็ไม่รู้” [9]

หลังจากนั้นท่านก็ได้เสนอให้มีการสอนทฤษฎีบทนี้ด้วยวิธี “Heuristic” โดยใช้การตัดกระดาษ จัดกิจกรรมให้นักเรียนเกิด “สังหรณ์ใจ ถามตนเอง ลงความเห็นเอง และตั้งบทเอง ซึ่งครูผู้สอนเป็นแต่เพียงผู้แนะทุกขณะ” เพื่อให้นักเรียนสนุก และ “รักเรียนยีออเมตรีมากขึ้น” [9] แนวทางการสอนและจุดประสงค์ในการสอนเช่นนี้ แม้จะเป็นข้อเสนอเมื่อราวเกือบหนึ่งร้อยปีที่แล้ว แต่ก็ยังมีความร่วมสมัยมากเลยทีเดียว

ในสมัยโบราณคำที่เป็นภาษาต่างประเทศซึ่งแปลเอาความไม่ได้ ก็มักจะถูกคนไทยแปลงเสียงลากเข้าความเพื่อให้พอแปลความได้ การนี้คำว่า Pythagoras หากจะต้องถูกลากเสียงมาก็น่าจะไม่ไกลห่างไปจากคำว่า “ปิตากะรัต” มากเท่าใดนัก แต่ไม่ว่าจะเรียกด้วยชื่อเรียงเสียงใด หลักฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการศึกษายุคเก่าของไทยนั้น ก็แทบไม่พบร่องรอยใดอยู่เลย ในสมัยอยุธยามีการนำความรู้คณิตศาสตร์เข้ามาในราชอาณาจักร ผ่านทางคณะบาทหลวง

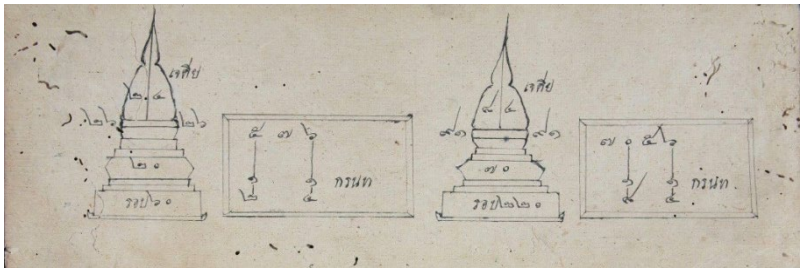
ราชทูต พ่อค้า และทหาร โดยเฉพาะในรัชสมัยของสมเด็จพระนารายณ์มหาราช (ครองราชย์ พ.ศ. 2199 – 2231) จนกล่าวได้ว่าเป็นยุคที่วิทยาการความรู้ทางคณิตศาสตร์เฟื่องฟูมากที่สุด และตำรา ดิ เอลเลเมนตส์ ก็น่าจะถูกนำเข้ามาตั้งแต่ในสมัยนั้น นอกจากนี้ในอีกทางหนึ่งไทยก็รับความรู้คณิตศาสตร์โบราณมาจากอินเดีย ด้วยความใกล้ชิดทางวัฒนธรรมผ่านศาสนาและการค้า [5] สืบต่อมาจนถึงต้นรัตนโกสินทร์ การบันทึกข้อมูลเกี่ยวกับความรู้และตัวอย่างการใช้คณิตศาสตร์จะอยู่ในรูปของสมุดไทย

ในที่นี้จะนำเสนอส่วนหนึ่งของโจทย์ของคัมภีร์ ที่สำนักหอสมุดแห่งชาติ กรมศิลปากร ได้บันทึกที่หน้าปกไว้ว่า “แบบเรียนเลขโคศัพท์ หรือแม่นพพรรณและฉวางคำฉันท์” พระยาปฏิภาณพิเศษ (อาเล็กแซนเดอร์ อมาตยกุล) มอบให้ พ.ศ. 2472 ซึ่งเป็นสมุดไทยขาว สันนิษฐานว่าเขียนขึ้นก่อนสมัยรัชกาลที่ 3 ซึ่งจะขอเรียกว่า “โจทย์พระเจดีย์” มีจำนวน 2 ข้อ บันทึกเนื้อหาเป็นกาพย์สุรางคนางค์ 28 มีข้อความ ดังรูปที่ 8 และมีภาพเจดีย์พร้อมตัวเลขและการทดเพื่อถอดกรณฑ์กำกับ ดังรูปที่ 9



รูปที่ 8 โจทย์พระเจดีย์สองข้อ ในสมุดไทย

แหล่งที่มา: สำเนาภาพถ่ายไมโครฟิล์ม สำนักหอสมุดแห่งชาติ



รูปที่ 9 ภาพพระเจดีย์ ประกอบการคำนวณ

แหล่งที่มา: สำเนาภาพถ่ายไมโครฟิล์ม สำนักหอสมุดแห่งชาติ

จากรูปที่ 8 บรรทัดที่ 2 มีข้อความหายไป 3 วรรค สันนิษฐานว่าเกิดจากการคัดลอกผิดพลาด โดยเมื่อได้สอบทานกับคัมภีร์เลขปกรณ์ ตำราคณิตศาสตร์โบราณของไทย ฉบับสมุดไทยดำอีกสามฉบับ จะได้เนื้อความตามกาพย์สุรางคนางค์ 28 (สะกดตามต้นฉบับตามรูปที่ 8 เป็นหลัก) โจทย์และเฉลยของทั้งสองข้อ เป็นดังนี้

สะกดแบบต้นฉบับ

โจทพระเจดี
กลมรอบถานมี ๖๐ ส่วนปัน
ทะแยงถึงยอด ๒๖ พลัน
ชะโลงกลางนั้น เปนอกเท่าใด

บอริหาน *(ตั้งรอบ*
๓ หารลับขอบ เปนกลางถานใน)
เอ่ากึงพันตัว ลบทะแยงพันไว้
เอกกรนทนั้นได้ ลับเปนฉะโลงกลาง

องค์หนึ่งสูงใหญ่
กลมรอบนั้นได้ ๒๒๐ ล่าง
ทะแยงถึงยอด ๙๑ ไม่พราง
จะได้ฉะโลงกลาง อกนั้นเท่าใด

วิสัชนานำ ๗
จักเกนกว่างเสฐ คูนรอบนั้นไว้
เกนจักรอบตั้ง ๒๒ ให้
หานได้ลับใน เปนกลางถานตรา

เอากึงพันตัว
ลบทะแยงพันพัว บทกรนทเอกา
ลับได้ฉโลง อกกลางนั้นนา
เกนจักรทำมา อย่างฝารังมี

สะกดแบบปัจจุบัน

โจทย์พระเจดีย์
กลมรอบฐานมี ๖๐ ส่วนปัน
ทแยงถึงยอด ๒๖ พลัน
โฉลงกลางนั้น เป็นอกเท่าใด

บริหาร *(ตั้งรอบ*
๓ หารลัพธ์ขอบ เป็นกลางฐานใน)
เอากึ่งพันตัว ลบทแยงพันไว้
เอกกรณฑ์นั้นได้ ลัพธ์เป็นโฉลงกลาง

องค์หนึ่งสูงใหญ่
กลมรอบนั้นได้ ๒๒๐ ล่าง
ทแยงถึงยอด ๙๑ ไม่พราง
จะได้โฉลงกลาง อกนั้นเท่าใด

วิสัชนานำ ๗
จักรเกณฑ์กว้างเสร็จ คูณรอบนั้นไว้
เกณฑ์จักรรอบตั้ง ๒๒ ให้
หารได้ลัพธ์ใน เป็นกลางฐานตรา

เอากึ่งพันตัว
ลบทแยงพันพัว บทกรณฑ์เอกา
ลัพธ์ได้โฉลง อกกลางนั้นนา
เกณฑ์จักรทำมา อย่างฝรั่งมี

สมภพ วัชฤทธิ์ ได้อธิบายความหมายของศัพท์บางคำในกาพย์ไว้ว่า

ชะโลง/ฉะโลง/ฉโลง	คือ	ส่วนสูงตรงของกรวย
เอ่ากึง หรือ เอากึง	คือ	เอาครึ่งหนึ่ง
พัน	คือ	คูณตัวเองหรือยกกำลังสอง
กรนท	คือ	ถอดกรณฑ์
เกนจักร	คือ	การคำนวณความยาวเกี่ยวกับวงกลม

พร้อมถ่ายถอดโจทย์และเฉลยของทั้งสองข้อ สรุปความได้ดังนี้ (ความในวงเล็บมาจากกาพย์เพื่อใช้เทียบเคียง)

โจทย์พระเจดีย์ (โจทพระเจดี) **ข้อที่ 1**

โจทย์ : เจดีย์ทรงกรวย มีเส้นรอบวงที่ฐานยาว 60 หน่วย (กลมรอบถานมี / ๖๐ ส่วนปัน) สูงเอียง 26 หน่วย (ทะแยงถึงยอด / ๒๖ พลัน) จะมีความสูงเท่าใด (ชะโลงกลางนั้น / เปนอกเท่าใด)

เฉลย (บอริหาน) : นำความยาวเส้นรอบวงที่ฐาน 60 หน่วย มาหารด้วย 3 (ตั้งรอบ / ๓ หารลับขอบ) จะได้เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม (เปนกลางถานใน) ยาว 20 หน่วย จากนั้นนำครึ่งหนึ่ง (เอ่ากึง) คือ 10 ไปยกกำลังสอง (พันตัว) แล้วลบออกจากสูงเอียงที่ยกกำลังสอง (ลบทะแยงพันไว้) นำผลลัพธ์ที่ได้ไปถอดกรณฑ์อันดับที่สอง จะได้ (เอกกรนทนั้นได้) $\sqrt{26^2-10^2}=\sqrt{676-100}=24$ หน่วย เป็นผลลัพธ์คือความสูงของพระเจดีย์ (ลับเปนฉะโลงกลาง)

โจทย์พระเจดีย์ ข้อที่ 2

โจทย์ : เจดีย์ทรงกรวยขนาดใหญ่องค์หนึ่ง (องค์หนึ่งสูงใหญ่) มีเส้นรอบวงที่ฐานยาว 220 หน่วย (กลมรอบนั้นได้ ๒๒๐ ล่าง) สูงเอียง 91 หน่วย (ทะแยงถึงยอด / ๙๑ ไม่พราง) จะมีความสูงเท่าใด (จะได้ฉะโลงกลาง / อกนั้นเท่าใด)

เฉลย (วิสัชนา) : นำ 7 ไปคูณความยาวเส้นรอบวงที่ฐาน 220 หน่วย (นำ ๗ / จักเกนกว่างเสฐ / คูนรอบนั้นไว้) แล้วนำมาหารด้วย 22 จะได้ (เกนจักรอบตั้ง / ๒๒ ให้ / หานได้ลับใน) เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม (เปนกลางถานตรา) ยาว 70 หน่วย จากนั้นนำไปแบ่งครึ่งได้ 35 แล้ว ยกกำลังสอง (เอากึงพันตัว) แล้วลบออกจากสูงเอียงที่ยกกำลังสอง (ลบทะแยงพันพัว) นำผลลัพธ์ที่ได้ไปถอดกรณฑ์อันดับที่สอง (บทกรนทเอกา) จะได้ $\sqrt{91^2-35^2}=\sqrt{8281-1225}=\sqrt{7056}=84$ หน่วย

เป็นผลลัพธ์คือความสูงของพระเจดีย์ (ลับได้ฉโลง / อกกลางนั้นนา) วิธีคำนวณเกี่ยวกับวงกลมนี้ เป็นวิธีการแบบฝรั่ง (เกนจักรทำมา / อย่างฝารังมี)

จากโจทย์และเฉลยทั้งสองข้อนี้ มีข้อสังเกตสำคัญสามประการ คือ

1) การกำหนดค่า π เพื่อใช้ในการคำนวณของทั้งสองข้อนั้นแตกต่างกัน ข้อที่ 1 ใช้ $\pi = 3$ แต่ข้อที่ 2 ใช้ $\pi = \frac{22}{7}$ โดยมีข้อความระบุว่า “เกนจักรทำมา อย่างฝารังมี” คือ การคำนวณความยาวเกี่ยวกับวงกลมแบบนี้ เป็นการทำตามอย่างฝรั่ง โดยการใช้ $\pi = \frac{22}{7}$ นี้เป็นความรู้ใหม่ที่รับเข้ามาจากตะวันตก ต่างจากการคำนวณเกี่ยวกับวงกลม ซึ่งพบตามเอกสารโบราณเดิมเช่นในไตรภูมิพระร่วง หรือเตภูมิกถา ซึ่งใช้ค่า $\pi = 3$

2) โจทย์และเฉลยทั้งสองข้อมีการใช้ความรู้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส แต่เป็นการเขียนให้ดำเนินการตามขั้นตอนที่กำหนดเป็นขั้น ๆ ไม่ได้อธิบายหรือระบุในเชิงหลักการ ดังเห็นได้จาก “เอ่ากึงพันตัว ลบทะแยงพันไว้ เอกกรนทนั้นได้ ลับเป็นฉะโลงกลาง” และ “เอากึงพันตัว ลบทะแยงพันพัว บทกรนทเอกา ลับได้ฉโลง อกกลางนั้นนา” แต่จากร่องรอยนี้ ก็ทำให้พอทราบได้ว่าในช่วงต้นกรุงรัตนโกสินทร์ก็มีการใช้และถ่ายทอดความรู้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสกันแล้ว

3) ลักษณะโจทย์ทั้งสองข้อนี้ มีความใกล้ชิดกับวิถีชีวิตของคนในสมัยนั้นมาก สำหรับครูที่กำลังสอนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสอยู่ ก็อาจนำตัวอย่างทั้งสองข้อนี้มาใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนบรรยากาศให้กับผู้เรียน โดยอาจสอดแทรกเกร็ดในเชิงภาษา ทั้งฉันทลักษณ์ของคำประพันธ์ การคาดเดาความหมายของคำศัพท์ การเทียบเคียงคำศัพท์คณิตศาสตร์ในสมัยโบราณกับปัจจุบัน ทั้งนี้ ยังมีโจทย์โบราณในสมุดไทยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสอีกหลายข้อ โดยจะได้นำเสนอในโอกาสต่อไป

5. บทสรุป

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นหนึ่งในทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงเป็นที่รู้จักของทั้งนักเรียนไทยและคนทั่วไปทั่วโลก มีประวัติความเป็นมาย้อนไปไกลได้มากกว่ายุคของพีทาโกรัสเอง และตามอารยธรรมต่าง ๆ ก็มีการค้นพบ ถ่ายทอด ขยายความ และสืบต่อความรู้นี้ ในประเทศไทยมีการกำหนดให้เรียนทฤษฎีบทพีทาโกรัสในชื่อทฤษฎีบทพีทาโกรัส อย่างน้อยก็ตั้งแต่หลักสูตร พ.ศ. 2503 เรื่อยมา โดยก่อนหน้านั้นราวครึ่งแรกของพุทธศตวรรษที่ 24 ช่วงที่ไทยเริ่มกำหนดหลักสูตรคณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการในระบบการศึกษา ทฤษฎีบทพีทาโกรัส น่าจะอยู่ในฐานะของทฤษฎีบท

ที่ 29 ใน A School Geometry ของ ฮอลล์และสตีเวนส์ โดยดูเหมือนผู้เรียนทั่วไปจะไม่ค่อยทราบกันเท่าใดนักว่า “พีทาโกรัส” เป็นชื่อของทฤษฎีบทนี้ แม้จะไม่มีหลักฐานแน่ชัดมากนัก แต่จากข้อมูลโจทย์คณิตศาสตร์ในสมุดไทย ที่มีอายุในช่วงรัชกาลที่ 3 ขึ้นไป (ก่อน พ.ศ. 2400) จะเห็นได้ว่า ไทยมีการนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาใช้งานแล้ว หากแต่ยังเป็นเพียงเฉพาะการให้แนวทางปฏิบัติตามขั้นตอน เพื่อให้ผู้เรียนลอกเลียนการดำเนินการตามแบบแผน โดยไม่ได้แสดงเนื้อหาตัวทฤษฎีบทไว้หรืออธิบายบทพิสูจน์ไว้

เอกสารอ้างอิง

[1] กระทรวงศึกษาธิการ. (2505). *หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.ศ. 4–5–6) พุทธศักราช 2503*. นครหลวงกรุงเทพธนบุรี: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Ministry of Education. (1962). *Syllabus for the Upper Secondary Education B.E. 2503*. Bangkok Thonburi Capital: Kurusapha Press.

[2] กระทรวงศึกษาธิการ. (2515). *หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น (ม.ศ. 1–2–3) พุทธศักราช 2503*. นครหลวงกรุงเทพธนบุรี: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Ministry of Education. (1972). *Syllabus for the Lower Secondary Education B.E. 2503.* Bangkok Thonburi Capital: Kurusapha Press.

[3] เขมฤทัย บุญวรรณ. (2546). *การวิเคราะห์การใช้ภาษาและกลวิธีการเขียนในหนังสือราชกิจจานุเบกษา สมัยพระบาทสมเด็จพระจุลจอมเกล้าเจ้าอยู่หัว* (วิทยานิพนธ์ปริญญาเอก, มหาวิทยาลัยศิลปากร).

Khemruthai Boonwan. (2003). *The Analysis of Language Use and Writing Style in King Rama V’s Royal Gazette* (Doctoral dissertation, Silpakorn University).

[4] คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2539). *อารยธรรม สมัยโบราณ – สมัยกลาง.* กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Faculty of Art Chulalongkorn University. (1996). *Civilization: Prehistoric – Middle Age*. Bangkok: Chulalongkorn University Publisher.

[5] จริยา นวลนิรันดร์. (2565). *ยิ่งอ่านยิ่งงง! โจทย์เลขของคนไทยสมัยโบราณยาวนับสิบบรรทัด ลองแก้กันดู*. สืบค้น 3 สิงหาคม 2565, จาก : https://www.silpa-mag.com/history/article_19989.

Chariya Nuanniran. (2022). *The more we read, the confusing we are. Ten line long of Thai math problem from the past, Let us try to solve it*. Retrieved 3 August 2022, from https://www.silpa-mag.com/history/article_19989.

[6] จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ และรตินันท์ บุญเคลือบ. (2558). คำคม คนคณิตศาสตร์ พีทาโกรัส : The most favorite theorem. *วารสารคณิตศาสตร์*, 60 (680 – 682), น. 3 – 6.

Laorpaksin, J. and Boonklurb, R. (2015). Mathematician Quote Pythagoras : The most favorite theorem. *Mathematical Journal*, 60(680 – 682), p. 3 – 6.

[7] พระสันธิวิทยาพัฒน์. (2481). *เรขาคณิต มัธยมปีที่ 5*. พระนคร: โรงพิมพ์ศรีสุเทพ.

Phra Santhiwithayapat. (1938). *Geometry Mattayom 5th*. Phranakon: Srisuthep Press.

[8] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2562). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1 (พิมพ์ครั้งที่ 2).* กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology, Ministry of Education. (2019). *Basic Mathematics for 8th Grade, No. 1 (2nd ed.).* Bangkok: Chulalongkorn University Publisher.

[9] หลวงกีรติวิทโยหาร (กี่ ศุนวัต). (2473). ศาสดาปีทะกอรัส และบทพิสูจน์ที่ 29. *วิทยาจารย์*, เล่ม 31 ตอนที่ 5 วันที่ 1 มีนาคม พ.ศ. 2473. สามัคยาจารย์สมาคม ในพระราชูปถัมภ์. บางขุนพรหม กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์อักษรนิติ. สืบค้น 3 สิงหาคม 2565, จาก http://eresource.car.chula.ac.th/chula-ebooks/detail.php

Loung Keeratiwittayoran (Kee Soonwat). (1930). The Prophet Pythagoras and the 29th proof. *Widhajarn,* Book 31 Section 5 1 March 1930. Samakhayajarn Association Under the Patronage of His Majesty the King. Bangkhunphrom Bangkok: Aksornnit

Press. Retrieved 3 August 2022, from http://eresource.car.chula.ac.th/chula-ebooks/detail.php

[10] Anglin, W. S. and Lambek, J. (1998). *The heritage of Thales*. Springer Science & Business Media.

[11] Bruce, R. (2009). *Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him.* Retrieved 19 July 2022, from https://link.springer.com/article/10.1057/jt.2009.16

[12] Byrne, O. (1847). *The first six books of the Elements of Euclid: in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. William Pickering.

[13] Dunham, W. (1994). *The mathematical universe. An alphabetical journey through the great proofs, problems, and personalities.* New York: Wiley.

[14] Gabrielle, B. (2022). *It Didn't Belong to Pythagoras.* Retrieved 19 July 2022, from https://mathsciencehistory.com/2022/03/08/it-didnt-belong-to-pythagoras/#_ftnref1

[15] Hall, H. S. and Stevens, F. H. (1949). *A school geometry parts I-V*. London: Macmillan and Company, limited.

[16] Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics Inc.

[17] Maor, E. (2019). *The Pythagorean theorem: a 4,000-year history*. Princeton University Press.

[18] Math IPST. (2020, May 19). *The Great Mathematicians: Pythagoras of Samos [Video file]*. Retrieved 19 July 2022, from https://www.youtube.com/watch?v=S5wAtiFOwrE

[19] Moledina, A. (2013). *Should the Pythagorean Theorem Actually be Called the 'Pythagorean' Theorem* (Doctoral dissertation, University of Toronto).

[20] Mcwhirter, N. (1990). Guinness Book of World Records 1991. Bantam, New York.

[21] Pickover, C. A. (2009). *The Math Book: 250 Milestones in the History of Mathematics*. Barnes & Noble.

[22] Posamentier, A. S. and Lehmann, I. (2012). *The secrets of triangles: a mathematical journey*. Prometheus Books.

[23] Sasser, J. E. (2000). *The Islamic Connection.* Conshohocken, PA: Infinity Publishing

[24] Stewart, I. (2017). *Significant figures: The lives and work of great mathematicians*. Basic Books.

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา 68 เล่มที่ 709 มกราคม – เมษายน 2566

http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ไฮเปอร์ไอเด็นติตี้ในกราฟวาไรตี้ที่ก่อกำเนิดโดย กราฟซีโรโพเทนต์และยูนิโพเทนต์

Hyperidentities in Graph Variety Generated by Zeropotent and Unipotent Graphs

DOI: 10.14456/mj-math.2023.2

เชาวน์วัฒน์ มั่นยืน

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม มหาสารคาม 44000

Chaowat Manyuen

Department of Mathematics, Faculty of Science, Rajabhat Maha Sarakham University, Mahasarakham 44000

Email: chaowat.ma@rmu.ac.th

วันที่รับบทความ : 18 กรกฎาคม 2564 วันที่แก้ไขบทความ : 19 สิงหาคม 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 25 กุมภาพันธ์ 2566

บทคัดย่อ

พีชคณิตกราฟสร้างจากกราฟระบุทิศทางที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน และพีชคณิตแบบพิเศษชนิด $(2,0)$ และจะกล่าวว่ากราฟ G สอดคล้องกับเอกลักษณ์ $s \approx t$ ถ้าพีชคณิตกราฟ $A(G)$ ที่สมนัยกับ G สอดคล้องกับ $s \approx t$ เซตของเอกลักษณ์ $s \approx t$ ทั้งหมด ซึ่งกราฟ G สอดคล้องเขียนแทนด้วย $\mathrm{Id}(\{G\})$ เซตของกราฟทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับเอกลักษณ์ $s \approx t$ ใน $\mathrm{Id}(\{G\})$ เรียกว่ากราฟวาไรตี้ที่ก่อกำเนิดโดย $\{G\}$ เขียนแทนด้วย $\mathcal{V}_g(\{G\})$ เอกลักษณ์ $s \approx t$ จะเป็นเอกลักษณ์ใน

$\mathcal{V}_g(\{G\})$ ถ้า $A(G)$ สอดคล้อง $s \approx t$ ทุก $G \in V_g(\{G\})$ เอกลักษณ์ $s \approx t$ ของพจน์ s และ t ชนิด τ จะเรียกว่าไฮเปอร์ไอเด็นติตี้ของพีชคณิต $\underline{A}$ ถ้าไม่ว่าเมื่อใดก็ตามที่เอกลักษณ์การดำเนินการใด ๆ ที่ปรากฏในพจน์ s และ t ถูกแทนที่ด้วยการดำเนินการพจน์ใด ๆ ที่เหมาะสมของ $\underline{A}$ และผลลัพธ์ที่ได้เป็นจริงใน $\underline{A}$ ในบทความนี้จะพิจารณาลักษณะทั้งหมดของไฮเปอร์ไอเด็นติตี้ใน $\mathcal{V}_g(\{G\})$ เมื่อ G เป็นกราฟซีโรโพเทนต์และยูนิโพเทนต์

คำสำคัญ: กราฟวาไรตี้ กราฟก่อกำเนิด พจน์ เอกลักษณ์ พีชคณิตทวิภาค พีชคณิตกราฟ ไฮเปอร์ไอเด็นติตี้

ABSTRACT

Directed graphs without multiple edges can be represented as algebras of type $(2,0)$, so-called graph algebras. We say that a graph G satisfies a term equation $s \approx t$ if the corresponding graph algebra $A(G)$ satisfies $s \approx t$. The set of all term equations $s \approx t$ which the graph G satisfies denoted by $\mathrm{Id}(\{G\})$. The class of all graph algebras satisfying all term equations in $\mathrm{Id}(\{G\})$ is called the graph variety generated by G, denoted by $\mathcal{V}_g(\{G\})$. A term equation $s \approx t$ is called an identity in $\mathcal{V}_g(\{G\})$ if $A(G)$ satisfies $s \approx t$ for all $G \in \mathcal{V}_g(\{G\})$. An identity $s \approx t$ of terms s and t of any type τ is called a hyperidentity of an algebra $\underline{A}$ if whenever the operation symbols occurring in s and t are replaced by any term operations of $\underline{A}$ of the appropriate arity, the resulting identities hold in $\underline{A}$. In this paper, we characterize all identities, all graphs and all hyperidentities in $\mathcal{V}_g(\{G\})$ where G is the zeropotent and unipotent.

Keywords: Graph varieties, Generated graphs, Terms, Identities, Binary algebras, Graph algebras, Hyperidentities

1. Introduction

An identity $s \approx t$ of terms s, t of any type τ is called a *hyperidentity* of an algebra $\underline{A}$ if whenever the operation symbols occurring in s and t are replaced by any term operations of $\underline{A}$ of the appropriate arity, the resulting identity holds in $\underline{A}$.

Hyperidentities can be defined more precisely by using the concept of a hypersubstitution, which was introduced by Denecke, Lau, Pöschel and Schweigert in [2].

We fix a type $\tau = (n_i)_{i\in I}, n_i > 0$ for all $i \in I$, and operation symbols $(f_i)_{i\in I}$, where f_i is an $n_i - \mathrm{ary}$. Let $W_\tau(X)$ be the set of all terms of type τ over some fixed alphabet X, and let $\mathrm{Alg}(\tau)$ be the class of all algebras of type τ. Then, a mapping

$$\sigma : \{f_i \mid i \in I\} \longrightarrow W_\tau(X)$$

which assigns to every $n_i - \mathrm{ary}$ operation symbol f_i an $n_i - \mathrm{ary}$ term will be called a *hypersubstitution* of type τ (for short, a hypersubstitution). We denote the extension of the hypersubstitution σ by a mapping

$$\hat{\sigma}: W_\tau(X) \longrightarrow W_\tau(X).$$

The term $\hat{\sigma}[t]$ is defined inductively by

(i) $\hat{\sigma}[x] = x$ for any variable x in the alphabet X, and

(ii) $\hat{\sigma}[f_i(t_1, \dots, t_{n_i})] = \sigma(f_i)^{W_\tau(X)}(\hat{\sigma}[t_1], \dots, \hat{\sigma}[t_{n_i}])$.

Here $\sigma(f_i)^{W_\tau(X)}$ on the right hand side of (ii) is the operation induced by $\sigma(f_i)$ on the term algebra with the universe $W_\tau(X)$.

Graph algebras were introduced by Shallon [13] in 1979 with the purpose of providing examples of nonfinitely based finite algebras. Let us briefly recall this concept. Given a directed graph $G = (V, E)$ without multiple edges, the *graph algebra* associated with G is the algebra $A(G) = (V \cup \{\infty\}, \circ, \infty)$ of type $(2, 0)$, where ∞ is an element not belonging to V and the binary operation $\circ$ is defined by the rule

$$u \circ v := \begin{cases} u & \text{if } (u, v) \in E, \\ \infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for all $u, v \in V \cup \{\infty\}$. We will denote the product $u \circ v$ simply by juxtaposition uv.

In [12], Pöschel and Wessel, graph varieties were investigated for finite undirected graphs in order to get graph theoretic results (structure theorems) from universal

algebra via graph algebras. In [11], these investigations were extended to arbitrary (finite) directed graphs where the authors ask for a graph theoretic characterization of graph varieties, i.e., of classes of graphs which can be defined by identities for their corresponding graph algebras. The answer is a theorem of **Birkhoff-type**, which uses graph theoretic closure operations. A class of finite directed graphs is equational (i.e., a graph variety) if and only if it is closed with respect to finite restricted pointed subproducts and isomorphic copies.

Let $s \approx t$ be a term equation. Poomsa-ard and et. al. characterized the graph variety $\mathcal{V} = \mathrm{Mod}_g(\{s \approx t\})$ in various kind of terms s and t. Further they characterized identities and hyperidentities in these graph varieties, too. But these results are not convenient for applying to the real-world situation. Because at first we will check that what kind of terms s and t which the graph variety $\mathcal{V} = \mathrm{Mod}_g(\{s \approx t\})$ contains the graph algebra of the diagram of that real-world situation. It is not easy to do this. So we will characterize the graph variety generated by the graph G of the diagram directly. Then characterize identities of this graph variety. In [5], Jampachon and Poomsa-ard characterized all identities, all graphs and all hyperidentities in graph variety generated by $((xx)(y((zx)z)))z$ graph. In [7], Lehtonen and Manyuen characterized all the graph varieties axiomatized by certain noteworthy groupoid identities that are of general interest in algebra, such as the zeropotent, unipotent, commutative, alternative, semimedial, and medial identities.

In this paper, we characterized all identities, all graphs and all hyperidentities in $\mathcal{V} = \mathrm{Mod}_g(\{s \approx t\})$ where G is the zeropotent and unipotent graphs.

2. Terms, identities and graph varieties

Dealing with terms for graph algebras, the underlying formal language has to contain a binary operation symbol (juxtaposition) and a symbol for the constant ∞ (denoted by ∞ too).

Definition 2.1 A term over the alphabet

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

is defined inductively as follows:

(i) every variable $x_i, i = 1,2,3, \dots$ and ∞ are terms;

(ii) if t_1 and t_2 are terms, then $t_1 t_2$ is a term.

Let $W_\tau(X)$ be the set of all terms which can be obtained from (i) and (ii) in finitely many steps. Terms built up from the two-element set $X_2 = \{x_1, x_2\}$ of variables are thus binary terms. We denote the set of all binary terms by $W_\tau(X_2)$. The leftmost variable of a term t is denoted by $L(t)$, the rightmost variable of a term t is denoted by $R(t)$. A term in which the symbol ∞ occurs is called a *trivial term*.

Definition 2. 2 For each non- trivial term t of type $\tau = (2,0)$, one can define a directed graph $G(t) = (V(t), E(t))$, where the vertex set $V(t)$ is the set of all variables occurring in t and the edge set $E(t)$ is defined inductively by

$E(t) = \phi$ if t is a variable and $E(t_1 t_2) = E(t_1) \cup E(t_2) \cup \{(L(t_1), L(t_2))\}$

where $t = t_1 t_2$ is a compound term. $L(t)$ is called the *root* of the graph $G(t)$, and the pair $(G(t), L(t))$ is called the *rooted graph* corresponding to t. Formally, we assign the empty graph ϕ to every trivial term t.

Definition 2.3 Let $G = (V, E)$ be a graph. Let $h : X \to V \cup \{\infty\}$ be a map, called an *assignment*. Extend h to a map $\bar{h} : W_\tau(X) \to V \cup \{\infty\}$ by the rule $\bar{h}(t) = h(t)$ if $t = x \in X$, and $\bar{h}(t) = \bar{h}(t_1)\bar{h}(t_2)$ if $t = t_1 t_2$, where the product is taken in $A(G)$. Then $\bar{h}$ is called the *valuation* of the term t in the graph G with respect to

assignment h. Although the graph G does not appear in the notation $\bar{h}$, it will always be clear from the context.

Definition 2.4 An *identity* (in the language of graph algebras) is an ordered pair (s,t) of terms $s,t \in W_\tau(X)$, usually written as $s \approx t$. Let $A(G)$ be a graph algebra corresponding to $G = (V,E)$. We say that $A(G)$ *satisfies* $s \approx t$, and we write $A(G) \vDash s \approx t$ if $\bar{h}(s) = \bar{h}(t)$ for every assignment $h : X \to V \cup \{\infty\}$. In this case, we also say that G satisfies $s \approx t$ and we write $G \vDash s \approx t$.

The above notation extends to an arbitrary class $\mathcal{G}$ of graphs and to any set Σ of identities as follows:

$G \vDash \Sigma$ if $G \vDash s \approx t$ for all $s \approx t \in \Sigma$,

$\mathcal{G} \vDash s \approx t$ if $G \vDash s \approx t$ for all $G \in \mathcal{G}$,

$\mathcal{G} \vDash \Sigma$ if $G \vDash \Sigma$ for all $G \in \mathcal{G}$.

The relation of satisfaction of an identity by a graph induces a Galois connection between graphs and identities via the polarities

$$\mathrm{Id}\,\mathcal{G} = \{s \approx t \mid s,t \in W_\tau(X), \mathcal{G} \vDash s \approx t\},$$

$$\mathrm{Mod}_g \Sigma = \{G \mid G \text{ is a graph and } G \vDash \Sigma\}.$$

It follows from the general theory of Galois connections (see [1]) that $\mathrm{Mod}_g\,\mathrm{Id}$ is a closure operator on graphs, which we denote simply by $\mathcal{V}_g$. The closed sets of graphs, i.e., sets $\mathcal{G}$ satisfying $\mathcal{V}_g(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$, are called *graph varieties*.

3. Identities in graph variety generated by zeropotent and unipotent graphs

In [7], we recall that a graph G is *zeropotent* and *unipotent*, if it satisfies the identities $(xx)y \approx xx \approx y(xx)$ and $xx \approx yy$ when $x,y \in X$, respectively.

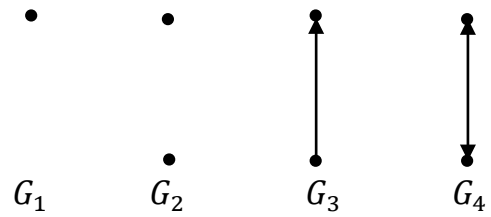
Proposition 3. 1 (Lehtonen and Manyuen [7, Theorem 3. 1]) Let G be a graph. The following conditions are equivalent:

(i) G is zeropotent.

(ii) G is unipotent.

(iii) G has no loops.

From Proposition 3.1 we see that G_1, G_2, G_3, G_4 graphs are zeropotent and unipotent.



Let $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_g\{(xx)y \approx xx \approx y(xx), xx \approx yy\}$. This means $\mathcal{K}$ is the set of all loopless graphs. We want to characterize all identities in $\mathcal{K}$. Before to do this we need some results for reference as the following:

The equational theory of the class of all graphs (all graph algebras) was described by Kiss, Pöschel and Pröhle in [6] as follows.

Proposition 3.2 (Kiss, Pöschel and Pröhle [6, Lemma 2.2(3)]). Let $s \approx t$ be an identity and let $\mathcal{G}$ be the class of all graphs. Then $\mathcal{G} \vDash s \approx t$ if and only if s and t are trivial terms or $G(s) = G(t)$ and $L(s) = L(t)$.

The following results provide useful tools for checking whether a graph satisfies an identity.

Proposition 3.3 (Kiss, Pöschel and Pröhle [6, Lemma 2.2(2)]). Let $G = (V, E)$ be a graph and let $h : X \to V \cup \{\infty\}$ be an evaluation of the variables. Consider the canonical extension $\bar{h}$ of h to the set of all terms. Then the following holds. If t is a trivial term, then $\bar{h}(t) = \infty$. Otherwise, if $h : G(t) \to G$ is a homomorphism of graphs, then $\bar{h}(t) = \bar{h}\big(L(t)\big) = h(L(t))$, and if h is not a homomorphism of graphs, then $\bar{h}(t) = \infty$.

Proposition 3.4 (Pöschel and Wessel [12, Proposition 1.5(2)]). Let s and t be non-trivial terms such that $V(s) = V(t)$ and $L(s) = L(t)$. Then a graph $G = (V, E)$ satisfies $s \approx t$ if and only if G has the following property: a mapping $h : V(s) \to$

$V \cup \{\infty\}$ is a homomorphism from $G(s)$ into G if and only if it is a homomorphism from $G(t)$ into G.

Now we characterize all identities in $\mathcal{K}$. Clearly, if $s \approx t$ is a trivial equation (i.e. $G(s) = G(t),\ L(s) = L(t)$) or both of them are trivial terms, then $s \approx t$ is an identity in $\mathcal{K}$. Now we consider the case $s \approx t$ is a non-trivial equation. Then all identities in $\mathcal{K}$ are characterized by the following theorem:

Theorem 3.1 Let $s \approx t$ be non-trivial equation. Then, $\mathcal{K} \vDash s \approx t$ if and only if the following conditions are satisfied:

(i) $G(s)$ has a loop if and only if $G(t)$ has a loop,

(ii) if $G(s)$ and $G(t)$ have no loop then $V(s) = V(t)$,

(iii) if $G(s)$ and $G(t)$ have no loop then for any $x, y \in V(s)$, $(x, y) \in E(s)$ if and only if $(x, y) \in E(t)$,

(iv) if $G(s)$ and $G(t)$ have no loop then $L(s) = L(t)$.

Proof. (i) Suppose that $G(s)$ has a loop but $G(t)$ has no loops. Let $G = G(t)$. By Proposition 3.1, we have $G \in \mathcal{K}$. Let $h : V(s) \cup V(t) \to V(G) \cup \{\infty\}$ such that $h(x) = x$ for all $x \in V(t)$ and $h(y) = \infty$ for all $y \in V(s) \setminus V(t)$. It is clear that h is a homomorphism from $G(t)$ into G but h is not a homomorphism from $G(s)$ into G. By Proposition 3.3, we have $\bar{h}(t) = h(L(t)) = L(t) \neq \infty = \bar{h}(s)$. Therefore $G \nvDash s \approx t$. Hence $\mathcal{K} \nvDash s \approx t$.

(ii) Suppose that $G(s)$ and $G(t)$ have no loop but $V(s) \neq V(t)$. Then there exists $y \in V(s)$ but $y \notin V(t)$. Let $G = G(t)$. By Proposition 3.2, we have $G \in \mathcal{K}$. Let $h : V(s) \cup V(t) \to V(G) \cup \{\infty\}$ such that $h(x) = x$ for all $x \in V(t)$ and $h(y) = \infty$ for all $y \in V(s) \setminus V(t)$. We have h is a homomorphism from $G(t)$ into G but h is not a homomorphism from $G(s)$ into G. By Proposition 3.3, we have $\bar{h}(t) = h(L(t)) = L(t) \neq \infty = \bar{h}(s)$. Therefore $G \nvDash s \approx t$. Hence $\mathcal{K} \nvDash s \approx t$.

(iii) Suppose that $G(s)$ and $G(t)$ have no loop, $(x,y) \in E(s)$ but $(x,y) \notin E(t)$. Let $G = G(t)$. By Proposition 3.1, we have $G \in \mathcal{K}$. By (ii), we have $V(s) = V(t)$. Let $h : V(t) \to V(G) \cup \{\infty\}$ such that $h(x) = x$ for all $x \in V(t)$. Since $G = G(t)$ and $(x,y) \notin E(t)$, we have h is a homomorphism from $G(t)$ into G and $(h(x), h(y)) \notin E(G)$. Because $(x,y) \in E(s)$, we get h is not a homomorphism from $G(s)$ into G. By Proposition 3.3, we have $\bar{h}(t) = h(L(t)) = L(t) \neq \infty = \bar{h}(s)$. Therefore $G \nvDash s \approx t$. Hence $\mathcal{K} \nvDash s \approx t$.

(iv) Suppose that $G(s)$ and $G(t)$ have no loop and $L(s) \neq L(t)$. Let $G = G(t)$. By Proposition 3.1, we have $G \in \mathcal{K}$. By (ii), we have $V(s) = V(t)$. Let $h : V(t) \to V(G) \cup \{\infty\}$ such that $h(x) = x$ for all $x \in V(t)$. Since $G = G(t)$, we get h is a homomorphism from $G(t)$ into G. By (iii), we have $(x,y) \in E(s)$ if and only if $(x,y) \in E(t)$. Thus h is a homomorphism from $G(s)$ into G. By Proposition 3.3, $\bar{h}(s) = h(L(s)) = L(s) \neq L(t) = h(L(t)) = \bar{h}(t)$. Therefore $G \nvDash s \approx t$. Hence $\mathcal{K} \nvDash s \approx t$.

Conversely, suppose that $s \approx t$ is a non-trivial equation satisfying (i), (ii), (iii) and (iv). Let $G \in \mathcal{K}$. Then G has no loops. By (i), $G(s)$ has a loop if and only if $G(t)$ has a loop.

Case I If $G(s)$ and $G(t)$ have a loop then any h is not a homomorphism from $G(s)$ into G and it is not a homomorphism from $G(t)$ into G. Thus $\bar{h}(s) = \infty = \bar{h}(t)$. Hence $G \vDash s \approx t$.

Case II If $G(s)$ and $G(t)$ have no loop then by (ii) and (iv), $V(s) = V(t)$ and $L(s) = L(t)$. Let $h : V(s) \to V(G) \cup \{\infty\}$ be a function. Suppose h is a homomorphism from $G(s)$ into G. Let $(x,y) \in E(s)$. Then $\big(h(x), h(y)\big) \in E(G)$. By (iii), we get $(x,y) \in E(t)$. Thus h is a homomorphism from $G(t)$ into G. In the same way, we can prove that if h is a homomorphism from $G(t)$ into G then it is a homomorphism from $G(s)$ into G. Hence by Proposition 3.4, we get $G \vDash s \approx t$.

Therefore $\mathcal{K} \vDash s \approx t$. □

Corollary 3.1 Let $s \approx t$ be a non-trivial equation such that $G(s)$ and $G(t)$ have no loop. Then $\mathcal{K} \vDash s \approx t$ if and only if $L(s) = L(t)$ and $G(s) = G(t)$.

Proof. Let $s \approx t$ be a non-trivial equation such that $G(s)$ and $G(t)$ have no loop. Assume that $\mathcal{K} \vDash s \approx t$. Then by conditions (ii), (iii), (iv) of Theorem 3.1, we have $L(s) = L(t)$, $V(s) = V(t)$ and $E(s) = E(t)$. Hence $G(s) = G(t)$.

Conversely, assume that $L(s) = L(t)$ and $G(s) = G(t)$. So $V(s) = V(t)$ and $E(s) = E(t)$. Thus s and t satisfy conditions (i), (ii), (iii) and (iv) of Theorem 3.1. Hence $\mathcal{K} \vDash s \approx t$. □

4. Hyperidentities in graph variety generated by zeropotent and unipotent graphs

Let $\mathcal{K}$ be any graph variety. Now, we want to formulate precisely the concept of a graph hypersubstitution for graph algebras.

Definition 4.1 A mapping $\sigma : \{f, \infty\} \to W_\tau(X_2)$, where $X_2 = \{x_1, x_2\}$ and f is the operation symbol corresponding to the binary operation of a graph algebra is called the *graph hypersubstitution* if $\sigma(\infty) = \infty$ and $\sigma(f) = s \in W_\tau(X_2)$. The graph hypersubstitution with $\sigma(f) = s$ is denoted by σ_s.

Definition 4.2 An identity $s \approx t$ is a $\mathcal{K}$ *graph hyperidentity* if and only if for all graph hypersubstitutions σ, $\mathcal{K} \vDash \hat{\sigma}[s] \approx \hat{\sigma}[t]$.

If we want to check that an identity $s \approx t$ is a hyperidentity in $\mathcal{K}$ we can restrict our consideration to a (small) subset of $Hyp\mathcal{G}$ - the set of all graph hypersubstitutions. In [8], the following relation between hypersubstitutions was defined:

Definition 4.3 Two graph hypersubstitutions σ_1, σ_2 are called $\mathcal{K}$- *equivalent* if and only if $\sigma_1(f) \approx \sigma_2(f)$ is an identity in $\mathcal{K}$. In this case we write $\sigma_1 \sim_{\mathcal{K}} \sigma_2$.

The following lemma was proved in [9].

Lemma 4.1 If $\hat{\sigma}_1[s] \approx \hat{\sigma}_1[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$ and $\sigma_1 \sim_{\mathcal{K}} \sigma_2$, then $\hat{\sigma}_2[s] \approx \hat{\sigma}_2[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$.

Therefore, it is enough to consider the quotient set $Hyp\mathcal{G}\,/\!\sim_{\mathcal{K}}$.

In [10], it showed that any non-trivial term t over the class of graph algebras has a uniquely determined normal form term $NF(t)$ and there is an algorithm to construct the normal form term to a given term t. Without difficulties one shows $G\big(NF(t)\big) = G(t),\ L(NF(t)) = L(t)$.

The following definition was given in [3].

Definition 4.4 The graph hypersubstitution $\sigma_{NF(t)}$, is called a *normal form graph hypersubstitution*. Here $NF(t)$ is the normal form of the binary term t.

Since for any binary term t the rooted graphs of t and $NF(t)$ are the same, we have $t \approx NF(t) \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$. Then for any graph hypersubstitution σ_t with $\sigma_t(f) = t \in W_\tau(X_2)$, one obtains $\sigma_t \sim_{\mathcal{K}} \sigma_{NF(t)}$.

Table 1. In [3], all rooted graphs with at most two vertices were considered. Then, we formed the corresponding binary terms and used the algorithm to construct normal form terms. The result is given in the following table:

Normal form term	graph hypers	Normal form term	graph hypers
x_1x_2	σ_0	x_1	σ_1
x_2	σ_2	x_1x_1	σ_3
x_2x_2	σ_4	x_2x_1	σ_5
$(x_1x_1)x_2$	σ_6	$(x_2x_1)x_2$	σ_7
$x_1(x_2x_2)$	σ_8	$x_2(x_1x_1)$	σ_9
$(x_1x_1)(x_2x_2)$	σ_{10}	$(x_2(x_1x_1))x_2$	σ_{11}
$x_1(x_2x_1)$	σ_{12}	$x_2(x_1x_2)$	σ_{13}
$(x_1x_1)(x_2x_1)$	σ_{14}	$(x_2(x_1x_2))x_2$	σ_{15}
$x_1((x_2x_1)x_2)$	σ_{16}	$x_2((x_1x_1)x_2)$	σ_{17}
$(x_1x_1)((x_2x_1)x_2)$	σ_{18}	$(x_2((x_1x_1)x_2))x_2$	σ_{19}

Since $G(\sigma_3), G(\sigma_4), G(\sigma_6), G(\sigma_7), G(\sigma_8), G(\sigma_9), G(\sigma_{10}), G(\sigma_{11}), G(\sigma_{14}), G(\sigma_{15}), G(\sigma_{16}), G(\sigma_{17}), G(\sigma_{18})$ and $G(\sigma_{19})$ have loops, hence they satisfy conditions (i), (ii), (iii) and (iv) of Theorem 3.1. Thus we have the following relations:

$$\sigma_3 \sim_{\mathcal{K}} \sigma_4 \sim_{\mathcal{K}} \sigma_6 \sim_{\mathcal{K}} \sigma_7 \sim_{\mathcal{K}} \sigma_8 \sim_{\mathcal{K}} \sigma_9 \sim_{\mathcal{K}} \sigma_{10} \sim_{\mathcal{K}} \sigma_{11}$$
$$\sim_{\mathcal{K}} \sigma_{14} \sim_{\mathcal{K}} \sigma_{15} \sim_{\mathcal{K}} \sigma_{16} \sim_{\mathcal{K}} \sigma_{17} \sim_{\mathcal{K}} \sigma_{18} \sim_{\mathcal{K}} \sigma_{19}$$

Let $M_{\mathcal{K}}$ be the set of all normal form graph hypersubstitutions in $\mathcal{K}$. Then we get,

$$M_{\mathcal{K}} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_5, \sigma_{12}, \sigma_{13}\}.$$

We defined the product of two normal form graph hypersubstitutions in $M_{\mathcal{K}}$ as follows.

Definition 4.5 The *product* $\sigma_{1N} \circ_N \sigma_{2N}$ *of two normal form graph hypersubstitutions* is defined by $(\sigma_{1N} \circ_N \sigma_{2N})(f) = NF(\hat{\sigma}_{1N}[\hat{\sigma}_{2N}(f)])$.

Table 2. The following table gives the multiplication of elements in $M_{\mathcal{K}}$.

$\circ_N$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_5	σ_{12}	σ_{13}
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_5	σ_{12}	σ_{13}
σ_1	σ_1	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
σ_2	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_1	σ_1	σ_2
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_3	σ_3	σ_3
σ_5	σ_5	σ_1	σ_2	σ_3	σ_0	σ_3	σ_3
σ_{12}	σ_{12}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{13}	σ_{12}	σ_{13}
σ_{13}	σ_{13}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{12}	σ_3	σ_3

The concept of a proper hypersubstitution of a class of algebras was introduced in [9].

Definition 4.6 A hypersubstitution σ is called *proper with respect to a class* $\mathcal{K}$ *of algebras* if $\hat{\sigma}[s] \approx \hat{\sigma}[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$ for all $s \approx t \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$.

A graph hypersubstitution with the property that $\sigma(f)$ contains both variables x_1 and x_2 is called *regular*. It is easy to check that the set of all regular graph hypersubstitutions forms a groupoid M_{reg}.

The following lemma was proved in [3].

Lemma 4.2 For each non-trivial term s, $(s \neq x \in X)$ and for all $u, v \in X$, we have

$$E(\hat{\sigma}_6[s]) = E(s) \cup \{(u,u) | (u,v) \in E(s)\},$$
$$E(\hat{\sigma}_8[s]) = E(s) \cup \{(v,v) | (u,v) \in E(s)\},$$

and $E(\hat{\sigma}_{12}[s]) = E(s) \cup \{(v,u)|(u,v) \in E(s)\}$.

In the similar way we can prove that, $E(\hat{\sigma}_3[s]) = \{(L(s), L(s))\}$.

We want to find all proper graph hypersubstitutions with respect to $\mathcal{K}$. Then we obtain:

Theorem 4.1 $\{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_{12}\}$ is the set of all proper graph hypersubstitutions with respect to $\mathcal{K}$.

Proof. If $s \approx t \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$ and s, t are trivial terms, then for every graph hypersubstitution $\sigma \in \{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_{12}\}$ the term $\hat{\sigma}[s]$ and $\hat{\sigma}[t]$ are also trivial and thus $\hat{\sigma}[s] \approx \hat{\sigma}[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$. In the same manner, we see that $\hat{\sigma}[s] \approx \hat{\sigma}[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$ for every $\sigma \in \{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_{12}\}$ if $s = t = x$.

Now assume that s and t are non- trivial terms, different from variables, and $s \approx t \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$.

Consider σ_0. Since $\sigma_0 = x_1x_2$, it is clear that $E(\hat{\sigma}_0[s]) = E(s)$ and $L(\hat{\sigma}_0[s]) = L(s)$ for all non-trivial term s. Hence $\hat{\sigma}_0[s] \approx \hat{\sigma}_0[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$.

Consider σ_3. By Lemma 4.2, $E(\hat{\sigma}_3[s]) = \{(L(s), L(s))\}$ and $E(\hat{\sigma}_3[t]) = \{(L(t), L(t))\}$. That is $G(s)$ and $G(t)$ have a loop. By Theorem 3.1 (i), we get $\hat{\sigma}_3[s] \approx \hat{\sigma}_3[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$. Therefore σ_3 is a proper hypersubstitution.

Consider σ_{12}. If s and t have a loop then $\hat{\sigma}_{12}[s]$ and $\hat{\sigma}_{12}[t]$ have a loop. By Theorem 3.1 (i), $\hat{\sigma}_{12}[s] \approx \hat{\sigma}_{12}[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$. If s and t have no loop then $G(s) = G(t)$ and $L(s) = L(t)$. By Lemma 4.2, we get $G(\hat{\sigma}_{12}[s]) = G(\hat{\sigma}_{12}[t])$, $L(\hat{\sigma}_{12}[s]) = L(\hat{\sigma}_{12}[t])$. So $\hat{\sigma}_{12}[s] \approx \hat{\sigma}_{12}[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$. Therefore σ_{12} is a proper hypersubstitution.

For any $\sigma \notin \{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_{12}\}$, let $s_1 = x_1x_1$ and $t_1 = x_2x_2$. Then $s_1 \approx t_1 \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$. We see that, $\hat{\sigma}_1[s_1] = x_1$, $\hat{\sigma}_1[t_1] = x_2$, $\hat{\sigma}_2[s_1] = x_1$ and $\hat{\sigma}_2[t_1] = x_2$. Thus $\hat{\sigma}_1[s_1] \approx \hat{\sigma}_1[t_1]$, $\hat{\sigma}_2[s_1] \approx \hat{\sigma}_2[t_1] \notin \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$.

Let $s_2 = x_1x_2$ and $t_2 = (x_1x_2)x_2$. Then $s_2 \approx t_2 \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$. We see that, $\hat{\sigma}_5[s_2] = x_2x_1$, $\hat{\sigma}_5[t_2] = x_2(x_2x_1)$, $\hat{\sigma}_{13}[s_2] = x_2(x_1x_2)$ and

$\hat{\sigma}_{13}[t_2] = x_2((x_2(x_1x_2))x_2)$. We see that $\hat{\sigma}_5[s_2]$, $\hat{\sigma}_5[s_2]$ have no loop but $\hat{\sigma}_5[t_2]$, $\hat{\sigma}_{13}[t_2]$ have a loop. Hence $\hat{\sigma}_5[s_2] \approx \hat{\sigma}_5[t_2],\ \hat{\sigma}_{13}[s_2] \approx \hat{\sigma}_{13}[t_2] \notin \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$.

Therefore $\{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_{12}\}$ is the set of all proper graph hypersubstitutions with respect to $\mathcal{K}$. □

Now, we apply our results to characterize all hyperidentities in $\mathcal{K}$. Clearly, if s and t are trivial terms, then $s \approx t$ is a hyperidentity in $\mathcal{K}$ if and only if $L(s) = L(t)$, $R(s) = R(t)$ and $x \approx x,\ x \in X$ is a hyperidentity in $\mathcal{K}$, too. So, we consider the case that s and t are non-trivial terms and different from variables.

Theorem 4.2 An identity $s \approx t$ in $\mathcal{K}$, where s and t are non-trivial terms and different from variables is a hyperidentity in $\mathcal{K}$ if and only if $\hat{\sigma}_1[s] \approx \hat{\sigma}_1[t],\ \hat{\sigma}_2[s] \approx \hat{\sigma}_2[t]$ and $\hat{\sigma}_5[s] \approx \hat{\sigma}_5[t]$ are also identities in $\mathcal{K}$.

Proof. Let $s \approx t \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$, where s, t are non-trivial and $s \neq x, t \neq x$. If $s \approx t$ is a hyperidentity in $\mathcal{K}$, then $\hat{\sigma}_1[s] \approx \hat{\sigma}_1[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K},\ \hat{\sigma}_2[s] \approx \hat{\sigma}_2[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$ and $\hat{\sigma}_5[s] \approx \hat{\sigma}_5[t] \in \mathrm{Id}\,\mathcal{K}$.

Assume that $\hat{\sigma}_1[s] \approx \hat{\sigma}_1[t],\ \hat{\sigma}_2[s] \approx \hat{\sigma}_2[t]$ and $\hat{\sigma}_5[s] \approx \hat{\sigma}_5[t]$ are identities in $\mathcal{K}$. Since $\sigma_0, \sigma_3, \sigma_{12}$ are the proper graph hypersubstitutions, we have $\hat{\sigma}_0[s] \approx \hat{\sigma}_0[t]$, $\hat{\sigma}_3[s] \approx \hat{\sigma}_3[t]$ and $\hat{\sigma}_{12}[s] \approx \hat{\sigma}_{12}[t]$ are identities in $\mathcal{K}$.

Because of $\sigma_{12} \circ_N \sigma_5 = \sigma_{13}$ and σ_{12} is a proper graph hypersubstitution with respect to the class $\mathcal{K}$, we have $\hat{\sigma}_{13}[s] \approx \hat{\sigma}_{13}[t]$ is an identity in $\mathcal{K}$. □

Reference

[1] Denecke, K., Erné, M. And Wismath, S. L., (eds.) (2004). *Galois connections and applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[2] Denecke, K., Lau, D., Pöschel, R. and Schweigert, D. (1991). Hyperidentities, hyperequational classes and clone congruences. *Contributions to General Algebra,* 7, p. 97 – 118.

[3] Denecke, K. and Poomsa-ard , T. (1997). Hyperidentities in graph algebras: *Contributions to General Algebra and Applications in Discrete Mathematics,* p. 59 – 68.

[4] Denecke, K. and Wismath, S. L. (2002). *Universal Algebra and Applications in Theoretical Computer Science.* Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.

[5] Jampachon, P. and Poomsa-ard, T. (2012). Hyperidentities in graph variety generated by $((xx)(y((zx)z)))z$ graph. *International Mathematical Forum,* 7 (21), p. 1007 – 1020.

[6] Kiss, E. W., Pöschel, R. and Pröhle, P. (1990). Subvarieties of varieties generated by graph algebras. *Acta Sci. Math*., 54 (1-2), p. 57 – 75.

[7] Lehtonen, E. and Manyuen, C. (2020). Graph varieties axiomatized by semimedial, medial, and some other groupoid identities. *Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications*, 40, p. 143 – 157.

[8] Płonka, J. (1995). *On Hyperidentities in some of varieties*, in: General Algebra and discrete Mathematics, Heldermann Verlag, Berlin, p. 195 – 213.

[9] Płonka, J. (1994). *Proper and inner hypersubstitutions of varieties*: in Proceedings of the International Conference: Summer School on General Algebra and Ordered Sets 1994, Palacký University Olomouc, p. 106 – 115.

[10] Pöschel, R. (1989). The equational logic for graph algebras, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 35 (3), p. 273 – 282.

[11] Pöschel, R. (1990). Graph algebras and graph varieties. *Algebra Universalis*, 27 (4), p. 559 – 577.

[12] Pöschel, R. and Wessel, W. (1987). Classes of graphs definable by graph algebras identities or quasiidentities: *Commentations Mathematicae Universitatis Carolinae*, 28, p. 581 – 592.

[13] Shallon, C. R. (1979). *Nonfinitely based finite algebras derived from lattices*, Ph.D. Dissertation, University. of California, Los Angeles.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ใน
วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้

ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.

ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.

ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.

ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.

การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.

เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลด ได้ที่ http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้ ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อีเมล : ภาษาอังกฤษ

บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

บทนำ เนื้อหา สรุป : ภาษาไทย หรือ ภาษาอังกฤษ อย่างใดอย่างหนึ่ง

เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “**คำสำคัญ**:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “**Keywords**:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1 2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาตให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับใต้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป” เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ “ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิงให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกที่ปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทยก่อนจนครบแล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวชิรุณหิศ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

สมาชิกของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

มี 2 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ และสมาชิกสามัญ

สมาชิกสามัญ ได้แก่ ผู้ที่มีความสนใจทางคณิตศาสตร์ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ เมื่อได้รับหนังสืออนุญาตจากสมาคมฯ เป็นลายลักษณ์อักษร
2. มีสิทธิเข้าถึงวารสารคณิตศาสตร์ ฉบับเต็มในรูปแบบออนไลน์
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

ค่าสมัครสมาชิก ประกอบด้วย

1. ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท
2. ค่าสมาชิกสามัญ ตลอดชีพ 3,000 บาท และ รายปี 250 บาท

วาระการเป็นสมาชิกสามัญรายปี *เริ่มตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม ถึงวันที่ 31 ธันวาคม ของปี*

ดาวน์โหลด ใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

http://www.mathassociation.net หัวข้อ “สมัคร”

ใบสมัครสมาชิก
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

☐ สมาชิกใหม่
☐ ต่ออายุ เลขสมาชิกเดิม.....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. .....

ข้าพเจ้า (ชื่อ - สกุล) ..... อาชีพ .....

เบอร์โทรศัพท์ ..... อีเมล .....

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท) ☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน 30 บาท

รวมเป็นเงิน ..... บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังบัญชีเลขที่ 162-0-25671-1 ธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ชั้น 9 อาคารมหาวชิรุณหิศ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับการจัดส่งเอกสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ..... ซอย ..... หมู่ที่ .....

ถนน ..... ตำบล ..... อำเภอ .....

จังหวัด ..... รหัสไปรษณีย์ .....

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....
รับเงินค่าสมาชิกจำนวน.....
วันที่.....

ลงนาม..... ผู้สมัคร
(.....)

สมัครสมาชิก โดย (1) สแกน QR-Code หรือเข้าลิงค์ https://bit.ly/37yC835
หรือ **(2) ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน** มาที่
(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ตู้ ป.ณ. 2022 ปณฝ.จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332 หรือ
(ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com
แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบต่อไป

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ รับรางวัล ผู้ทำคุณประโยชน์ให้แก่กระทรวงศึกษาธิการ ประจำปีพุทธศักราช 2566

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

จัดการประชุมใหญ่สามัญประจำปี 2565

เมื่อวันพฤหัสบดีที่ 20 เมษายน พ.ศ. 2566

ณ ห้อง S106 อาคารบรรยายรวม 5 คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต

วาระการประชุม

วาระที่ 1 เรื่องแจ้งเพื่อทราบ

วาระที่ 2 รับรองรายงานการประชุมใหญ่สามัญประจำปี 2564

วาระที่ 3 รายงานผลงานประจำปี 2565

วาระที่ 4 เรื่องเพื่อพิจารณา

4.1 รับรองงบแสดงฐานะการเงินสมาคมฯ สิ้นสุดวันที่ 31 ธันวาคม พ.ศ. 2565

4.2 แต่งตั้งผู้ตรวจบัญชี พ.ศ. 2566

4.3 รับรองรายชื่อกรรมการบริหารสมาคมฯ วาระปี 2566 – 2568

การอบรมครูภาคฤดูร้อน ปี 2566

โดย

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ร่วมกับ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

ในรูปแบบ onsite ณ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต

ระหว่างวันพฤหัสบดีที่ 20 และวันศุกร์ที่ 21 เมษายน พ.ศ. 2566

ระดับประถมศึกษา	
หัวข้อการอบรม	**วิทยากร**
ห้องเรียนคณิตศาสตร์ ที่เสริมสร้างบรรยากาศการเรียนรู้อย่างมีความหมาย	ผศ. ดร.ทรงชัย อักษรคิด อ. ดร.สกล ตั้งเก้าสกุล
การเรียนรู้อย่างมีความสุขในห้องเรียนคณิตศาสตร์	อ. ดร.กฤษฎา วรพิน อ.บุษกร เอี๊ยวเจริญ
โจทย์ลูกผสมคลายปมทีละขั้น	อ. ดร.ณัฐพล สนพะเนาว์
ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น	
หัวข้อการอบรม	**วิทยากร**
คณิตศาสตร์สำคัญไฉน ตอน ตามหาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน	อ. ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ อ. ดร.ธัชพล พลรัตน์ อ. ดร.ธีรเชษฐ์ เรืองสุขอนันต์
จุดประกายการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์สู่การเรียนรู้ฐานสมรรถนะ	อ. ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ อ. ดร.ธัชพล พลรัตน์ อ. ดร.ธีรเชษฐ์ เรืองสุขอนันต์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	
หัวข้อการอบรม	**วิทยากร**
คณิตศาสตร์ในเกมและคณิตศาสตร์เชิงการจัด	รศ. ดร.ชานนท์ พรมสกล
วิทยาการเชิงข้อมูลเบื้องต้น	ผศ. ดร.ชัยณรงค์ เกษามูล
เขียนกราฟให้สนุกพร้อมประยุกต์แก้ปัญหา	อ. ดร.ณัฐพล สนพะเนาว์
คณิตศาสตร์การพนันรู้ทันเจ้ามือ	รศ. ดร.วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล

จัดโดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

จัดโดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

จัดโดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2566

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของสมาคมที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์
   - *วารสารคณิตศาสตร์ (TCI กลุ่ม 2) จำนวน 3 ฉบับต่อปี*
   - *Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี*
2. อบรมความรู้คณิตศาสตร์
   ดูข้อมูล รายละเอียดและกำหนดการ ได้ที่ https://www.mathassociation.net
3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
   จัดสอบแข่งขัน ประจำปี 2566 ในเดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2566
4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี ครั้งที่ 27 ประจำปี 2566
   (The 27th Annual Meeting in Mathematics 2023 (AMM2023))
   ระหว่างวันที่ 31 พฤษภาคม – 2 มิถุนายน พ.ศ. 2566 โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ร่วมกับ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ เป็นเจ้าภาพ
5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์
   - *ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)*
     ดูข้อมูลและกำหนดการได้ที่ https://www.mathassociation.net *ในหัวข้อประกวดโครงงาน*
   - *ประชุมวิชาการระดับปริญญาตรี ด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 11 ประจำปี 2566*
     (The 11th Undergraduate in Applied Mathematics Conference 2023 (UAMC 2023))
     ระหว่างวันที่ 29 – 30 เมษายน พ.ศ. 2566 โดย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี เป็นเจ้าภาพ

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวชิรุณหิศ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทรศัพท์ และโทรสาร 02–252-7980
www.mathassociation.net MathThaiOrg@gmail.com

สี HEX #0080FE

RGB 00 80 254

สันปก

Mathematical Journal

Volume 68 Number 709 January - April 2023