



วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๖๙ ฉบับที่ ๗๑๒ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๗

Volume 69 Number 712 September – December 2024

บทความวิชาการ Academic Article

ปัญหาการแบ่งแผ่นไม้

1

The Plank Partition Problem

วรเชษฐ สมนะณี

คณิต คิด สอน: เมื่อครูจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์

11

Teaching Mathematics: When Using Active Learning in Mathematics Classroom

เมธาสิทธิ์ ธีรรัตนศรีสกุล วันดี เกษมสุขพิพัฒน์ และชานนท์ จันทรา

บทความวิจัย Research Article

การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วบนกราฟไตรไซคลิก

28

Finding The Number of Spanning Trees on The Tricyclic Graph

ปฐยา มีสุข และนิรุตต์ พิพรรธนจินดา

รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของรูปสามเหลี่ยม

43

On The Rectangle Flanks of A Triangle

คมสัน ไชยกาล อินทัช โพธิ์หล้า และอรรณพ แก้วขาว



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา ๖๙ ฉบับที่ ๗๑๒ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๗

ISSN XXXX-XXXX (Online)

Mathematical Journal
by The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King
Volume 69 Number 712 September – December 2024

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดิ์ ท่านผู้อ่านทุกท่าน

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เป็นการดำเนินการทางวิชาการหนึ่งของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย เพื่อเป็นประโยชน์แก่สมาชิก นักเรียน นิสิต นักศึกษา รวมถึงผู้สนใจทางคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์หนึ่งที่มีความสำคัญและมีการพัฒนาให้ทันยุคทันสมัยอยู่เสมอ โดยเนื้อหาในวารสารคณิตศาสตร์ฯ จะเป็นบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่มีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์

ในปีนี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดให้มีการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ในสามระดับคือ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ทั้งประเภททีม และประเภทบุคคล ในวันอาทิตย์ที่ 10 พฤศจิกายน พ.ศ. 2567 ที่ผ่านมา โดยมีสนามสอบทั่วประเทศ 8 แห่ง คือ กรุงเทพมหานคร นครปฐม เชียงใหม่ พิษณุโลก นครราชสีมา อุบลราชธานี สุราษฎร์ธานี และสงขลา มีนักเรียนให้ความสนใจสมัครเข้าร่วมการแข่งขันรวมกว่าหมื่นคน โดยสามารถติดตามผลการสอบแข่งขันได้ทางเฟสบุ๊กของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ

กองบรรณาธิการขอขอบคุณผู้เขียนบทความทุกท่านที่ให้ความสนใจในการส่งบทความ มาเผยแพร่ในวารสารคณิตศาสตร์ฯ และขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ให้ความอนุเคราะห์ในการประเมินบทความ ให้เป็นบทความที่มีคุณภาพ สำหรับเผยแพร่ในวารสารฉบับนี้ สุดท้ายนี้กองบรรณาธิการ ขอเชิญชวนคณาจารย์ นักวิชาการ นักวิจัย นิสิต นักศึกษา นักเรียน และผู้ที่เกี่ยวข้องทุกท่าน ร่วมส่งบทความ เพื่อตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารคณิตศาสตร์ฯ ฉบับต่อ ๆ ไป

ในนามวารสารคณิตศาสตร์ฯ ขอให้ปีใหม่นี้นำพาการเริ่มต้นใหม่ เป้าหมายใหม่ที่สดใสมาสู่ทุกท่าน ขอให้ท่านและครอบครัว มีแต่ความสุขในปีใหม่นี้

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพ็ชรสกุล

ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ณัฐชัย ลีนาวงศ์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี |
| 4. รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 6. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงศ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. ศ. ดร.จิราวัลย์ จิตระเวช | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 3. รศ. ดร.กาญจน์ภา อมรัชกุล | สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ |
| 4. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 5. รศ. ดร.ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 6. รศ. ดร.พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 7. รศ. ดร.มณฑิรา ดวงสาพล | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 8. รศ. ดร.มาลินี ชัยยะ | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 9. รศ. ดร.รณสรณ์ ชินรัมย์ | มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ |
| 10. รศ. ดร.ศิริรัตน์ สิงห์ตันต์ | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 11. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |
| 12. รศ. ดร.อังคณา บุญยัด | มหาวิทยาลัยขอนแก่น |
| 13. ผศ. ดร.กนกพร ช่างทอง | มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี |
| 14. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 15. ผศ. ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว | มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ |
| 16. ผศ. ดร.สุรีย์พร ชาวแพรกน้อย | มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| 17. ผศ. ดร.เอื้ออารี บุญเพิ่ม | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปี 2566 - 2568

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์รจิต วัฒนสินธุ์	ที่ปรึกษา
2. ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	นายกสมาคม
3. รองศาสตราจารย์ ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	อุปนายก
4. รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ	เลขาธิการ
5. รองศาสตราจารย์ ดร.เอี่ยมพร พักสุวรรณ	เหรัญญิก
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ปณิดา ศิริกุลวิเชฐ	ปฎิคม
7. อาจารย์ประไพ เสนาบุญญฤทธิ์	ประชาสัมพันธ์
8. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วาสนา สุขกระสานติ	หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหารวารสารคณิตศาสตร์
9. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด	การอบรมครูและการประกวดโครงงาน
10. รองศาสตราจารย์ ดร.รัชลิดา ลิปิกรณ์	ผู้จัดการสารสนเทศ
11. ศาสตราจารย์ ดร.ยศนันต์ มีมาก	กรรมการ
12. รองศาสตราจารย์ ดร.แก่ง วิบูลย์ชัย	กรรมการ
13. รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐไชย สีนาวงศ์	กรรมการ
14. รองศาสตราจารย์ทิพวัลย์ สันติวิภาณนท์	กรรมการ
15. รองศาสตราจารย์ธีรวัฒน์ ประกอบผล	กรรมการ
16. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ	กรรมการ
17. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลีวรติยกุล	กรรมการ
18. รองศาสตราจารย์ ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
19. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
20. รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง	กรรมการ
21. ผู้ช่วยศาสตราจารย์กรองแก้ว หวังนิเวศน์กุล	กรรมการ
22. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงศ์พล เรือนคง	กรรมการ
23. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิริพงศ์ ศิริสุข	กรรมการ
24. อาจารย์นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
25. อาจารย์ ดร.พีรพัฒน์ สุทธิมาศ	กรรมการ
26. อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันทจักรภรณ์	กรรมการ
27. ดร.อำพล ดวงแป้น	กรรมการ
28. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการ
29. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้น จึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของ บทความที่จะรับ ตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือ คณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น • วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี • เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย • บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน • วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่าง ถูกต้อง

การพิจารณา กลั่นกรองบทความ ของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจาก ผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้องจำนวน 3 ท่าน โดยไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับ ผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จาก ผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่ง บทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่ อยู่ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และ ภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตามข้อกำหนดใน การจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่ง กองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสาร คณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือ หน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือ กระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคม คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความสำหรับพิมพ์ได้ที่
<https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/index> หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความ
 กรุณาปฏิบัติตามข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่าง
 เคร่งครัด จากนั้นอัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document
 Format (PDF) พร้อมไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์
 (แบบฟอร์มส่งบทความ MJMATH.docx) ขึ้นที่ระบบการส่งบทความที่ <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถ
 ติดต่อกองบรรณาธิการฝ่ายบริหารของวารสาร ได้ที่ MathThaiOrg@gmail.com



วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๖๙ ฉบับที่ ๗๑๒ กันยายน – ธันวาคม ๒๕๖๗

Volume 69 Number 712 September – December 2024

บทความวิชาการ *Academic Article*

ปัญหาการแบ่งแผ่นไม้

1

The Plank Partition Problem

วรเชษฐ สมนะณี

คณิต คิด สอน: เมื่อครูจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์

11

Teaching Mathematics: When Using Active Learning in Mathematics Classroom

เมธาสิทธิ์ ธีรรัตนศรีสกุล วันดี เกษมสุขพิพัฒน์ และชานนท์ จันทรา

บทความวิจัย *Research Article*

การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วบนกราฟไตรไซคลิก

28

Finding The Number of Spanning Trees on The Tricyclic Graph

ปฐยา มีสุข และนิรุตต์ พิพรรธจินดา

รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของรูปสามเหลี่ยม

43

On The Rectangle Flanks of A Triangle

คมสัน ไชยกาล อินทัช โพธิหั่ว และอรรณพ แก้วขาว



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 69 เล่มที่ 712 กันยายน – ธันวาคม 2567

<https://www.mathassociation.or.th>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

ปัญหาการแบ่งแผ่นไม้

The Plank Partition Problem

DOI: 10.14456/mj-math.2024.1

วรเชษฐ์ สมมะณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ เชียงใหม่ 50300

Worachead Sommanee

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Chiangmai Rajabhat University, Chiangmai 50300

Email: worachead_som@cmru.ac.th

วันที่รับบทความ : 12 พฤศจิกายน 2565

วันที่แก้ไขบทความ : 1 สิงหาคม 2566

วันที่ตอบรับบทความ : 13 ธันวาคม 2567

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เราจะพิสูจน์วิธีการแบ่งแผ่นไม้ออกเป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน โดยแผ่นไม้มีความกว้าง a หน่วย และความยาวมากกว่า $\sqrt{m^2 - a^2}$ หน่วย เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่า a และ k หาร m ลงตัว โดยใช้เพียงไม้บรรทัดและอุปกรณ์สำหรับการตัด ซึ่งเป็นการประยุกต์ใช้ความรู้ทางเรขาคณิตช่วยในการแก้ปัญหาย่างง่าย

คำสำคัญ: เส้นขนาน ความคล้าย

ABSTRACT

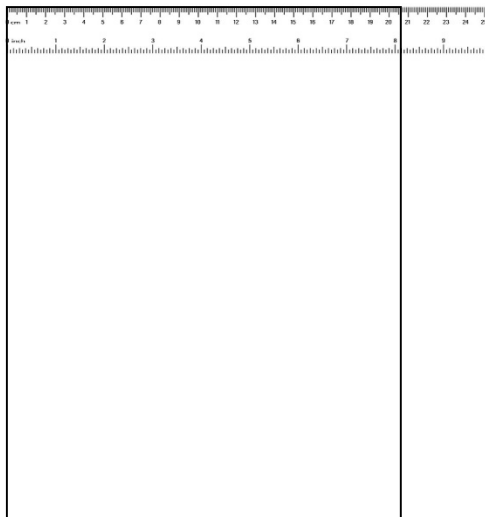
In this paper, we prove the method for a partition of a plank to be the same k parts where a width of the plank is a units and its length is greater than $\sqrt{m^2 - a^2}$ units when m is the least positive integer such that $m > a$ and m is divided by k , by

using a ruler and an equipment for cutting. This is an application of a geometrical knowledge to solve the problem easily.

Keywords: Parallel, Similarity

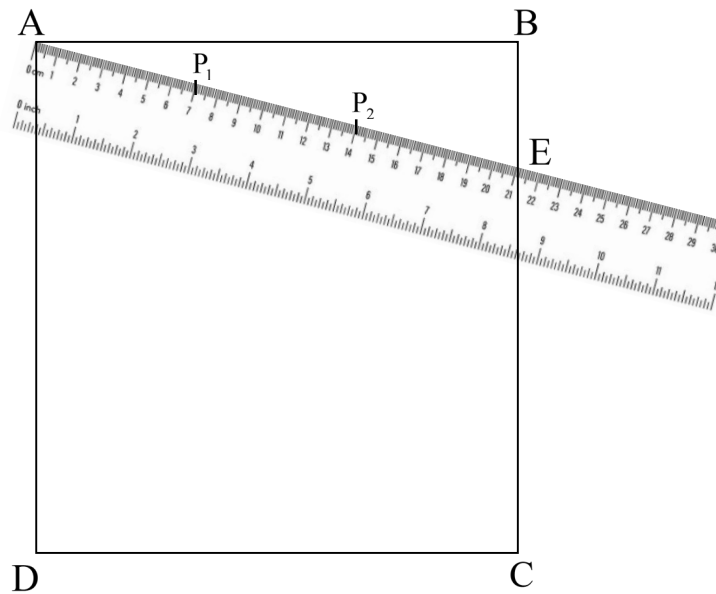
1. บทนำ

บ่อยครั้งผู้ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์มักจะเกิดคำถามว่า “เรียนคณิตศาสตร์ไปเพื่ออะไร” เพราะไม่ได้นำไปใช้ในชีวิตจริง ปัญหาต่อไปนี้ผู้เขียนได้เห็นจากคลิปวิดีโอของอัน บ้านทองกวาว [2] ที่นำเสนอวิธีแบ่งช่องเท่า ๆ กัน ไม่ต้องใช้เครื่องคิดเลข ซึ่งเป็นเรื่องราวของช่างไม้คนหนึ่ง ที่ต้องการแบ่งแผ่นไม้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน โดยใช้เพียงไม้บรรทัดและอุปกรณ์สำหรับการตัด ซึ่งแผ่นไม้ดังกล่าวมีความกว้างมากกว่า 20 เซนติเมตร แต่ไม่เกิน 21 เซนติเมตร

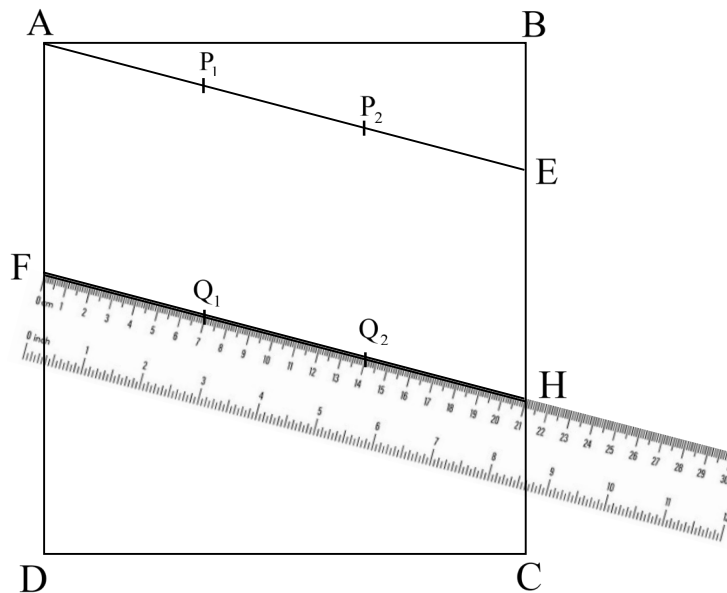


ทั้งนี้ หากแผ่นไม้มีความกว้าง 20.57 เซนติเมตร โดยปกติถ้าใช้เครื่องคิดเลขหาร 20.57 ด้วย 3 จะได้ผลลัพธ์ประมาณ 6.8566 เซนติเมตร ซึ่งไม่สามารถกำหนดระยะดังกล่าวที่แน่นอนบนไม้บรรทัดได้ ช่างไม้จึงแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยวิธีการดังต่อไปนี้

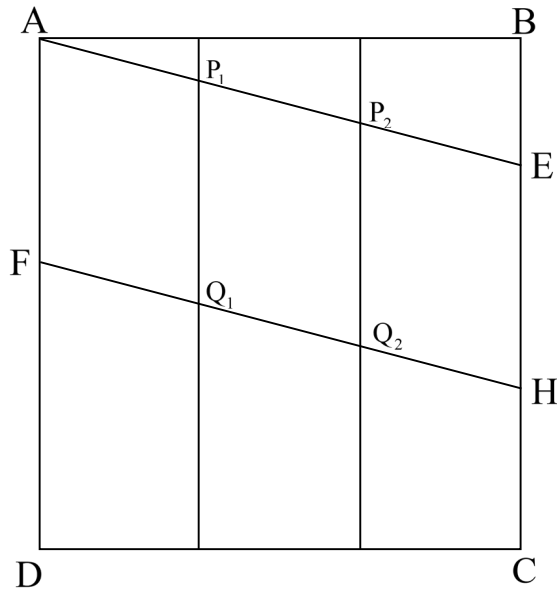
ขั้นที่ 1 ใช้ไม้บรรทัดที่มีความยาวอย่างน้อย 21 เซนติเมตร เอียงจากจุด A ให้ไปตัดกับด้าน BC ที่จุด E โดยที่ความยาวจากจุด A ไปยังจุด E เป็น 21 เซนติเมตร พอติ ดังรูป ดังนั้นเราจะสามารถแบ่งส่วนของเส้นตรง AE บนไม้บรรทัดเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน ได้พอติ ที่จุด P_1 และ P_2 โดยที่จุด P_1 เป็นจุดที่ระยะ 7 เซนติเมตร และจุด P_2 เป็นจุดที่ระยะ 14 เซนติเมตร ตามลำดับ ทำเครื่องหมายที่จุด P_1 และ P_2



ขั้นที่ 2 เลือกจุดจุดหนึ่งบนด้าน AD เรียกจุดนั้นว่าจุด F ดำเนินการเช่นเดียวกันกับขั้นที่ 1 ที่จุด F โดยเอียงไม้บรรทัดจากจุด F ให้ไปตัดกับด้าน BC ที่จุด H โดยที่ FH ความยาว 21 เซนติเมตร ดังรูป แบ่งส่วนของเส้นตรง FH ที่จุด Q_1 และ Q_2 โดยที่จุด Q_1 เป็นจุดที่ระยะ 7 เซนติเมตร และจุด Q_2 เป็นจุดที่ระยะ 14 เซนติเมตร ตามลำดับให้ทำเครื่องหมายที่จุด Q_1 และ Q_2



ขั้นที่ 3 ลากเส้นตรงผ่านจุด P_1 และ Q_1 และเส้นตรงผ่านจุด P_2 และ Q_2



ขั้นที่ 4 ใช้อุปกรณ์สำหรับการตัด ตัดตามแนวเส้นตรง P_1Q_1 และ P_2Q_2

ซึ่งช่างไม้ได้สรุปว่า แผ่นไม้ทั้ง 3 แผ่นจะมีขนาดที่เท่ากัน ตามต้องการ

ในหัวข้อต่อไป จะแสดงการพิสูจน์ เพื่อตรวจสอบวิธีดังกล่าวว่า สามารถแบ่งแผ่นไม้ให้มีขนาดเท่า ๆ กันได้ จริงหรือไม่ พร้อมทั้งขยายปัญหาการแบ่งแผ่นไม้เป็นกรณีทั่วไป

2. การพิสูจน์

ในการพิสูจน์ อาศัยความรู้ทางเรขาคณิต ในเรื่องต่อไปนี้ เส้นขนาน เส้นตั้งฉาก การเท่ากัน ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม และสามเหลี่ยมคล้าย

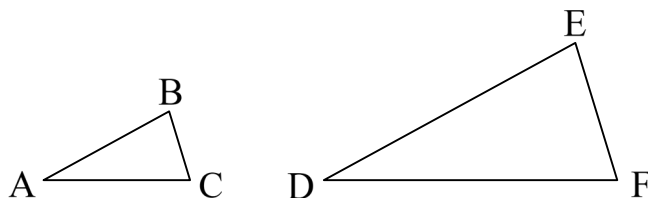
บทนิยาม 2.1 [1] รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันทั้งสองด้าน

บทนิยาม 2.2 [1] รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีสี่มุมฉาก

บทนิยาม 2.3 [1] ระยะห่างระหว่างเส้นกับจุดที่ไม่อยู่ในเส้นนั้น คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง ที่ลากจากจุดนั้นไปตั้งฉากกับเส้นตรงดังกล่าว

บทนิยาม 2.4 [1] รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ มุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และความยาวด้านที่สมนัยกันเท่ากัน

บทนิยาม 2.5 [1] รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน ก็ต่อเมื่อ มุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และ อัตราส่วนของความยาวด้านที่สมนัยกันเท่ากัน



จากรูป ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม DEF จะเขียนแทนด้วย $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ดังนั้น $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ก็ต่อเมื่อ 1. $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ และ $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$

$$2. \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

สัจพจน์ 2.1 [1] ถ้าเส้นขนานสองเส้นมีเส้นตัดขวาง แล้ว มุมที่สมนัยกันแต่ละคู่ย่อมมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.2 [1] (มุม-มุม-ด้าน) สำหรับ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ กำหนดให้ $AB = DE$, $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$ และ $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$ แล้ว $\triangle ABC$ เท่ากันทุกประการกับ $\triangle DEF$

ทฤษฎีบท 2.3 [1] ถ้ามุมที่สมนัยกันสองมุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดเท่ากัน แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะคล้ายกัน

ทฤษฎีบท 2.4 [1] ถ้าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกับเส้นเดียวกัน แล้ว เส้นตรงสองเส้นนั้นจะขนานกัน

ทฤษฎีบท 2.5 [1] ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดขวางเส้นขนานคู่หนึ่ง แล้ว มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางรวมกันเป็น 180 องศา

ทฤษฎีบท 2.6 [1] ถ้าด้านสองด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งขนานกันและมีความยาวเท่ากัน แล้ว รูปสี่เหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบท 2.7 [1] ณ จุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเส้นหนึ่ง จะมีเส้นตรงผ่านจุดนั้นที่ขนานกับเส้นตรงดังกล่าวเพียงเส้นเดียว

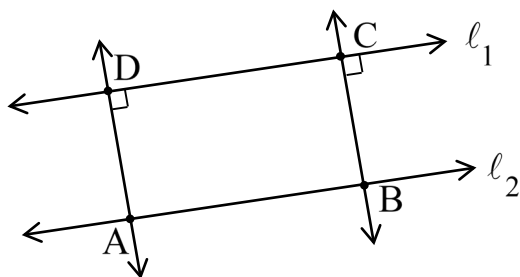
ทฤษฎีบท 2.8 [1] ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมมีความยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.9 [1] มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นใด ๆ โดยที่จุด A และจุด B เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง l_2 ถ้าระยะห่างระหว่างเส้นตรง l_1 กับจุด A และระยะห่างระหว่างเส้นตรง l_1 กับจุด B เท่ากัน แล้ว l_1 ขนานกับ l_2 (เขียนแทนด้วย $l_1 \parallel l_2$)

บทพิสูจน์ สมมติให้ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง l_1 กับจุด A และระยะห่างระหว่างเส้นตรง l_1 กับจุด B เท่ากัน

โดยบทนิยาม 2.3 จะได้ว่า ส่วนของเส้นตรง AD และส่วนของเส้นตรง BC ตั้งฉากกับเส้นตรง l_1 และ $AD = BC$ เมื่อจุด D และจุด C เป็นจุดที่ลากจากจุด A และจุด B มาตั้งฉากกับเส้นตรง l_1 ตามลำดับ



เนื่องจาก $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง l_1 โดยทฤษฎีบท 2.4 ได้ว่า $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ดังนั้นรูปสี่เหลี่ยม ABCD มีด้าน AD ขนานกับด้าน BC และ $AD = BC$ โดยทฤษฎีบท 2.6 ได้ว่ารูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้น ด้าน AB และด้าน DC ขนานกัน เพราะฉะนั้น $l_1 \parallel l_2$ □

กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีความกว้าง a หน่วย

กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่า a ซึ่งหารด้วย k ลงตัว และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีความยาวมากกว่า $\sqrt{m^2 - a^2}$ หน่วย

ถัดไปจะพิสูจน์ว่า สามารถแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ออกเป็น k ส่วนที่มีขนาดเท่า ๆ กันได้ โดยใช้วิธีการที่ได้กล่าวไว้ในบทนำ

บทพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด A ไปตัดกับด้าน BC ที่จุด E โดยที่ $AE = m$ แบ่งส่วนของเส้น AE เป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน ที่จุด $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_{k-1}E = \frac{m}{k}$$

และได้ว่า

$$AP_2 = \frac{2m}{k}, AP_3 = \frac{3m}{k}, \dots, AP_i = \frac{i \times m}{k}, \dots, AP_{k-1} = \frac{(k-1) \times m}{k}$$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, k-1$

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $BE = \sqrt{m^2 - a^2}$ ดังนั้น $BC > \sqrt{m^2 - a^2}$

ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ให้ขนานกับด้าน AB ตัดด้าน BC ที่จุด G (สามารถทำได้โดยทฤษฎีบท 2.7) ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม ABGF เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้ว่า $AB = FG$ (โดยทฤษฎีบท 2.8)

เนื่องจาก $\widehat{DAB} = 90^\circ = \widehat{ABC}$ จึงได้ว่า $\widehat{AFG} = 90^\circ = \widehat{BGF}$ (โดยทฤษฎีบท 2.9) และได้ว่า $\widehat{FGC} = 90^\circ = \widehat{DFG}$

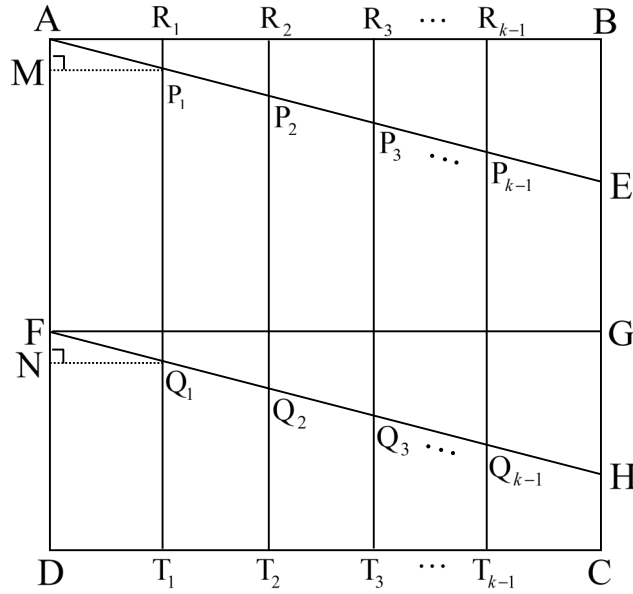
ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ให้ขนานกับด้าน AE ตัดด้าน BC ที่จุด H

จาก $\overline{BC}$ เป็นเส้นตัดขวางของ $\overline{AE}$ และ $\overline{FH}$ ซึ่ง $\overline{AE} \parallel \overline{FH}$ ดังนั้น $\widehat{AEB} = \widehat{FHG}$ (โดยสัจพจน์ 2.1) จาก $AB = FG$, $\widehat{ABE} = \widehat{FGH}$ และ $\widehat{AEB} = \widehat{FHG}$ จะได้ $\triangle ABE$ เท่ากันทุกประการกับ $\triangle FGH$ (โดยทฤษฎีบท 2.2) จาก $\widehat{EAB} = \widehat{HFG}$ และ $FH = AE = m$ ดังนั้นสามารถแบ่งส่วนของเส้นตรง FH ออกเป็น k ส่วนเท่า ๆ กันได้ที่จุด $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$FQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_{k-1}H = \frac{m}{k}$$

ให้ R_i และ T_i เป็นจุดตัดของเส้นตรง P_iQ_i กับส่วนของเส้นตรง AB และ DC ตามลำดับ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, k-1$

ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด P_1 และ Q_1 ไปตั้งฉากกับด้าน AD ที่จุด M และจุด N ตามลำดับ ดังรูป



พิจารณารูป $\triangle AMP_1$ และ $\triangle FNQ_1$ จาก $\widehat{DAB} = \widehat{DFG}$ และ $\widehat{EAB} = \widehat{HFG}$ ดังนั้น $\widehat{DAE} = \widehat{DFH}$

เนื่องจาก $\widehat{MAP_1} = \widehat{DAE} = \widehat{DFH} = \widehat{FNQ_1}$, $\widehat{AMP_1} = 90^\circ = \widehat{FNQ_1}$ และ $AP_1 = FQ_1$ จะได้ $\triangle AMP_1$ และ $\triangle FNQ_1$ เท่ากันทุกประการ (โดยทฤษฎีบท 2.2) ดังนั้น $MP_1 = NQ_1$ ซึ่ง MP_1 และ NQ_1 เป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง $\overline{AD}$ กับจุด P_1 และ Q_1 ตามลำดับ โดยทฤษฎีบท 2.10 จะได้ว่า $\overline{AD} \parallel \overline{R_1T_1}$

จาก $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัดขวางของ $\overline{AD}$ และ $\overline{R_1T_1}$ โดยที่ $\widehat{DAB} = 90^\circ$ ดังนั้น $\widehat{AR_1P_1} = 90^\circ$ (โดยทฤษฎีบท 2.5) ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\overline{AD} \parallel \overline{R_iT_i}$ และ $\widehat{AR_iP_i} = 90^\circ$ สำหรับ $i = 2, 3, \dots, k-1$

พิจารณารูป $\triangle AR_iP_i$ และ $\triangle ABE$ เนื่องจาก $\widehat{P_iAR_i} = \widehat{EAB}$ และ $\widehat{AR_iP_i} = 90^\circ = \widehat{ABE}$ ดังนั้น $\triangle AR_iP_i \sim \triangle ABE$ (โดยทฤษฎีบท 2.3) และได้ว่า $\frac{AR_i}{a} = \frac{AP_i}{AE} = \frac{m}{k} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{k}$ หรือ $AR_i = \frac{a}{k}$ ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\triangle AR_iP_i \sim \triangle ABE$ สำหรับ $i = 2, 3, \dots, k-1$ ดังนั้น

$$\frac{AR_i}{a} = \frac{AP_i}{AE} = \left(\frac{i \times m}{k} \right) \times \frac{1}{m} = \frac{i}{k} \quad \text{นั่นคือ} \quad AR_i = \frac{i \times a}{k} \quad \text{สำหรับ} \quad i = 2, 3, \dots, k-1$$

$$\text{จาก } AR_2 = AR_1 + R_1R_2 \text{ จะได้ } R_1R_2 = AR_2 - AR_1 = \frac{2a}{k} - \frac{a}{k} = \frac{a}{k}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$R_i R_{i+1} = AR_{i+1} - AR_i = \frac{(i+1)a}{k} - \frac{i \times a}{k} = \frac{a}{k}$$

สำหรับ $i = 2, 3, \dots, k-2$

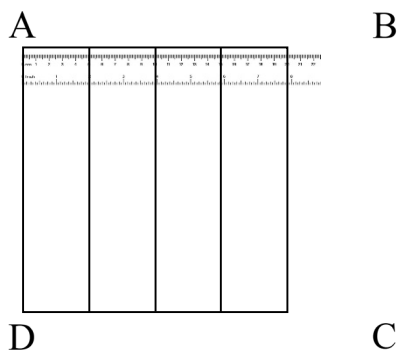
จาก $a = AB = AR_{k-1} + R_{k-1}B$ จะได้ว่า

$$R_{k-1}B = a - AR_{k-1} = a - \frac{(k-1)a}{k} = \frac{a}{k}$$

ดังนั้น $AR_1 = R_1R_2 = R_2R_3 = \dots = R_{k-1}B = \frac{a}{k}$

จึงสรุปได้ว่า แผ่นไม้แต่ละส่วนมีขนาดเท่ากัน □

หมายเหตุ ในการพิสูจน์นี้ จะยกเว้นกรณี $a = m$ เพราะถ้า $a = m$ สามารถแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังกล่าวเป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน ได้เลย เช่น แผ่นไม้มีความกว้าง 20 เซนติเมตร ต้องการแบ่งเป็น 4 ส่วน เท่า ๆ กัน สามารถแบ่งให้แต่ละส่วนยาว 5 เซนติเมตร บนด้าน AB และ DC โดยใช้ไม้บรรทัดได้ ดังรูป



3. สรุป

การแบ่งแผ่นไม้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง a หน่วย ออกเป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน ด้วยวิธีตามขั้นที่ 1 – ขั้นที่ 4 ในบทนำ สามารถทำได้จริง เมื่อแผ่นไม้มีความยาวมากกว่า $\sqrt{m^2 - a^2}$ หน่วย โดย m เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่า a ซึ่งหารด้วย k ลงตัว ดังนั้น ปัญหานี้จึงเป็นตัวอย่างของการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง ซึ่งผู้ที่ประสบปัญหาเช่นเดียวกันสามารถนำวิธีการดังกล่าวไปใช้ได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] พวงทอง พร้อมไท. (2547). *เรขาคณิต*. มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่.
Promthi, P. (2004). *Geometry*. Chiangmai Rajabhat University.
- [2] อ้น บ้านทองกวาว. (2565, 27 ตุลาคม). *วิธีแบ่งช่องเท่า ๆ กัน ไม่ต้องใช้เครื่องคิดเลข* [วิดีโอ].
https://www.tiktok.com/@btk_channel/video/7159041977584012571?_r=1&_t=8o vqY9lUp77
Aon Baanthongkwao. (2022, 27 October). *How to Divide The Squares Equally without Using A Calculator* [video].
https://www.tiktok.com/@btk_channel/video/7159041977584012571?_r=1&_t=8o vqY9lUp77



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 69 เล่มที่ 712 กันยายน – ธันวาคม 2567

<https://www.mathassociation.or.th>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

คณิต คิด สอน: เมื่อครูจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ Teaching Mathematics: When Using Active Learning in Mathematics Classroom

DOI: 10.14456/mj-math.2024.2

เมธาสิตี ธัญรัตน์ศรีสกุล^{1,*} วันดี เกษมสุขพิพัฒน์² และชานนท์ จันทรา³

¹กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนราชินีบูรณะ จังหวัดนครปฐม 73000

^{2,3}สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพมหานคร 10900

Mathasiti Tanyarattanasrisakul^{1,*} Wandee Kasemsukpipat² and Chanon Chuntra³

¹Mathematics Department, Rachineeburana School, Nakhon Pathom 73000

^{2,3}Division of Mathematics, Faculty of Education, Kasetsart University, Bangkok 10900

Email: ¹mathasiti24@gmail.com ²feduwdk@ku.ac.th ³feducnc@ku.ac.th

วันที่รับบทความ : 7 ธันวาคม 2566

วันที่แก้ไขบทความ : 24 กรกฎาคม 2567

วันที่ตอบรับบทความ : 13 ธันวาคม 2567

บทคัดย่อ

การจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ ไม่ได้เป็นเพียงการจัดกิจกรรมที่เน้นความสนุกสนานหรือบ่งชี้เพียงการจัดให้มีการอภิปรายกลุ่ม การลงมือปฏิบัติ และการสอนผู้อื่นหรือการนำความรู้ไปใช้ในทันทีเท่านั้น บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอแนวคิดการจัดการเรียนรู้เชิงรุก ลักษณะการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ และตัวอย่างการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์

*ผู้เขียนหลัก

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำคัญของบทความ ประกอบด้วย 1) การจัดการเรียนรู้เชิงรุก เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้อย่างกระตือรือร้น ได้ใช้ความรู้ ทักษะ และกระบวนการคิดขั้นสูง เพื่อสร้างความรู้ด้วยตนเองจากการปฏิสัมพันธ์ทางสังคม ผ่านกลไกสำคัญของการเรียนรู้ คือ การดูดซึมประสบการณ์ และการปรับเปลี่ยนโครงสร้างความรู้ความเข้าใจ เพื่อให้เกิดความสมดุล 2) การจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ มีลักษณะสำคัญ คือ การนำเสนอกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เชิญชวนให้นักเรียนมีส่วนร่วม การมีส่วนร่วมของนักเรียนในกิจกรรมเพื่อตอบสนองต่อความสงสัยใคร่รู้ การสะท้อนผลหลังกิจกรรมการเรียนรู้ และการเข้าร่วมและมีปฏิสัมพันธ์กับสังคม เพื่อสื่อสารและอภิปรายเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่แฝงอยู่ในกิจกรรม และ 3) ตัวอย่างการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่งเป็นการจัดการเรียนรู้ผ่านกิจกรรมที่มีชื่อว่า “เรขาคณิตบนร่มแปดเหลี่ยม” เริ่มต้นจากการนำเสนอข้อมูลที่สร้างความสนใจ การจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้ใช้คณิตศาสตร์หาคำตอบที่ตนเองตั้งไว้ การสะท้อนสิ่งที่ได้เรียนรู้ และการอภิปรายเพื่อสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ตนเองได้รับ

คำสำคัญ: การจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส กิจกรรมเรขาคณิตบนร่มแปดเหลี่ยม

ABSTRACT

Active learning in mathematics goes beyond simply having fun activities, group discussions, hands-on activities, transferring knowledge to others, or immediate application of knowledge. This academic article aims to present the concept of active learning, its characteristics in mathematics education, and example of active learning in mathematics, specifically on the Pythagorean theorem. The main points include: 1) Active learning approach encourages students to actively participate in learning activities, using their knowledge, skills, and higher-order thinking processes to construct their understanding through social interactions. It involves the assimilation of new experiences and the accommodation of their existing schemas to achieve equilibration; 2) The key features of active learning in mathematics include presenting mathematical activities that invite student participation, engaging students in activities that respond to their curiosity, reflecting on learning activities, and participating in

social interactions to communicate and discuss mathematical concepts embedded in the activities; and 3) One example of using active learning in mathematics on Pythagorean theorem is a lesson called “Geometry on an Octagonal Umbrella”. It starts with presenting engaging information, organizing activities where students use mathematics to find answers to their questions, reflecting on what they have learned, and discussing to communicate their mathematical ideas.

Keywords: Active learning in mathematics, Pythagorean theorem, Geometry on an octagonal umbrella activity

1. บทนำ

ความมุ่งหมายประการหนึ่งของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 คือ การให้นักเรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องด้วยคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ช่วยให้นักเรียนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ประสบความสำเร็จ จะต้องเตรียมนักเรียนให้มีความพร้อมที่จะเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ พร้อมทั้งจะประกอบอาชีพเมื่อสำเร็จการศึกษา หรือสามารถศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้นได้ [1]

แนวการสอนหนึ่งที่ได้รับ ความสนใจและเป็นจุดเน้นในเชิงนโยบายของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ได้แก่ การเรียนรู้เชิงรุก (active learning) ซึ่งวาทกรรมที่ได้รับการกล่าวถึงเป็นอย่างมากของการเรียนรู้เชิงรุก คือ นักเรียนลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง และมีส่วนร่วมในบทเรียนอย่างกระตือรือร้น หลายคนจึงตีความว่าเป็นความสนุกสนานในการเรียนรู้ผ่านกระบวนการกลุ่ม ให้นักเรียนเล่นเกม ร้องเพลง มีการแข่งขันกัน เพื่อสร้างบรรยากาศที่สะท้อนถึงความกระตือรือร้น ในอีกมุมหนึ่งตีความแบ่งแยกลักษณะของการเรียนรู้เชิงรุกและการเรียนรู้เชิงรับ (passive learning) ไปที่พฤติกรรมการสอนของครู ตามกรวยแห่งประสบการณ์การเรียนรู้ (cone of experience) ของ Dale [4] ที่มักถูกนำเสนอเพื่ออธิบายการเรียนรู้เชิงรุก ทำให้เข้าใจว่า การเรียนรู้เชิงรุก เป็นการให้นักเรียนได้อภิปรายกลุ่ม ลงมือปฏิบัติ และสอนผู้อื่นหรือนำไปใช้ในทันที

ในขณะที่การเรียนรู้เชิงรุกเป็นการให้นักเรียนฟังบรรยายจากครู อ่านข้อความ ฟัง ดู หรือชมการสาธิตจากครู

ความเข้าใจดังกล่าวส่งผลสืบเนื่องมาสู่การสร้างแนวปฏิบัติสำหรับการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ที่ดีความว่า การให้นักเรียนลงมือปฏิบัติผ่านการทำแบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ การให้นักเรียนเข้ากลุ่มทำงานร่วมกันและพูดคุยกันเพื่อหวังให้เป็นการอภิปราย และการให้นักเรียนทำใบงานด้วยกันเป็นคู่แบบเพื่อนช่วยเพื่อนเพื่อให้เกิดการสอนผู้อื่น เป็นการเรียนรู้เชิงรุก ซึ่งเป็นแนวปฏิบัติที่คลาดเคลื่อนและยังไม่เพียงพอสำหรับการเรียนรู้เชิงรุก เพื่อพัฒนาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอแนวคิดการจัดการเรียนรู้เชิงรุก ลักษณะการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ และตัวอย่างการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ผ่านกิจกรรมที่มีชื่อว่า “เรขาคณิตบนร่มแปดเหลี่ยม”

2. แนวคิดการจัดการเรียนรู้เชิงรุก

คำว่า “การเรียนรู้เชิงรุก” ที่ใช้กันในปัจจุบัน พบว่า มีความหมายครอบคลุมการปฏิบัติของนักเรียนและครู ซึ่งสื่อความหมายถึงบทบาทของนักเรียนที่ต้องมีการเรียนรู้เชิงรุก ในขณะที่ครูก็ต้องมีบทบาทในการจัดการเรียนรู้เชิงรุกด้วย ดังนั้น เพื่อสะท้อนให้เห็นถึงบทบาทของครูที่ชัดเจน บทความนี้จะใช้คำว่า การจัดการเรียนรู้เชิงรุกเป็นหลัก ซึ่งอาจมีการให้ความหมายไม่คงที่ [2] แต่มีสาระสำคัญเดียวกัน คือ เป็นการจัดการเรียนรู้ใด ๆ ก็ตามที่ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติสิ่งต่าง ๆ และคิดในสิ่งที่ตนเองกระทำอยู่ [2, 7] ภายใต้สมมติฐานพื้นฐาน 2 ประการ คือ 1) การเรียนรู้เป็นความพยายามโดยธรรมชาติของมนุษย์ และ 2) แต่ละบุคคลมีแนวทางการเรียนรู้ที่ต่างกัน นักเรียนถูกเปลี่ยนบทบาทจากผู้รับความรู้ (receive) ไปสู่การมีส่วนร่วมในการสร้างความรู้ (co-creators) [7] นั่นคือ เปิดโอกาสให้นักเรียนเข้ามามีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมด้วยพลังปัญญา ร่างกาย จิตใจ สังคม ได้ความรู้ด้วยความเข้าใจ และสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงได้ การจัดการเรียนรู้เชิงรุกสนับสนุนด้วยทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง (constructivism) ที่มีสมมติฐานว่า บุคคลไม่สามารถรับความรู้ผ่านประสาทสัมผัสหรือด้วยวิธีการบอกเล่าและสื่อสารถ่ายทอดความรู้จากผู้อื่น แต่ความรู้จะเกิดขึ้นด้วยการสร้างขึ้นภายในตัวบุคคลเอง จากการปรับโครงสร้างความรู้ความเข้าใจ (mental structure) ให้สอดคล้องหรือนำไปใช้งานในสถานการณ์ใหม่ได้ [8] ทั้งนี้ การเรียนรู้จะเกิดขึ้นจากกระบวนการที่สร้างขึ้นมามีภายในตนเองอย่างต่อเนื่องผ่านการดูดซึม (assimilation) และการปรับเปลี่ยนโครงสร้าง (accommodation) เพื่อให้เกิดความสมดุล (equilibration) ผ่าน

การได้รับประสบการณ์ใหม่ที่ก่อให้เกิดความไม่สมดุลจากการปฏิสัมพันธ์ทางสังคม ทำให้บุคคลต้องปรับเปลี่ยนความรู้ความเข้าใจที่มีอยู่เดิมให้เข้ากับประสบการณ์ใหม่ เพื่อให้ตนเองมีโครงสร้างความรู้ความเข้าใจที่มีความสมดุลอีกครั้ง [6] สะท้อนให้เห็นว่า การจัดการเรียนรู้เชิงรุกที่อยู่ภายใต้ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง มีลักษณะสำคัญ คือ การจัดประสบการณ์ให้นักเรียนลงมือทำงานที่ต้องเผชิญความขัดแย้งกับความรู้ความเข้าใจเดิมหรือรับรู้ว่าความรู้ความเข้าใจที่มีอยู่เดิมไม่เพียงพอ ซึ่งอาศัยการปฏิสัมพันธ์ทางสังคมเข้ามาช่วยให้นักเรียนพบกับความขัดแย้ง เสนอข้อมูลใหม่เพื่อให้นักเรียนนำไปปรับ ผสาน หรือสร้างความรู้ความเข้าใจใหม่ จากนั้นให้นักเรียนนำความรู้ใหม่นั้นมาใช้เพื่อสะท้อนให้เห็นถึงการปรับโครงสร้างความรู้ความเข้าใจที่ได้ผนวกข้อมูลใหม่นั้นแล้ว ทั้งนี้ปฏิสัมพันธ์ทางสังคมจะเข้ามามีส่วนช่วยตรวจสอบว่า ความรู้ความเข้าใจถูกต้องและสอดคล้องกับสิ่งที่ได้เรียนรู้หรือไม่ รวมทั้งยังช่วยในการขยายความรู้ความเข้าใจนั้นในมุมมองที่ต่างออกไป ครูผู้สอนจำเป็นต้องช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกให้นักเรียนสร้างความรู้ที่ถูกต้อง อาจทำได้โดยใช้รูปแบบการแสดงแทนความคิดที่เหมาะสมกับนักเรียนตามแนวคิดของบรูเนอร์ ได้แก่ การแสดงแทนความคิดด้วยการกระทำ (enactive representation) ซึ่งเป็นการเรียนรู้ผ่านการสัมผัสจับต้องกับสิ่งของจริงด้วยตัวนักเรียนเอง การแสดงแทนความคิดด้วยการนิยภาพ (iconic representation) เป็นการเรียนรู้โดยใช้ภาพแทนสิ่งของจริง และการแสดงแทนความคิดด้วยสัญลักษณ์ (symbolic representation) เป็นการเรียนรู้ผ่านสิ่งที่เป็นามธรรมโดยใช้ภาษาและสัญลักษณ์ต่าง ๆ รวมทั้งปรับบทบาทเป็นผู้อำนวยความสะดวก ช่วยเหลือ แนะนำนักเรียนให้เกิดการเรียนรู้ เมื่อพบว่านักเรียนยังไม่สามารถทำกิจกรรมที่กำหนดได้ ตามแนวคิดเรื่องพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ (zone of proximal development) ของไวทสกี้ เพื่อให้นักเรียนขยายขอบเขตของการทำได้ให้กว้างขึ้น และเพื่อเป็นการช่วยให้นักเรียนมีสมาธิสนใจกับบทเรียน อาจใช้สถานการณ์ที่ดึงดูดความสนใจเพื่อให้นักเรียนเกิดความใส่ใจ เมื่อเกิดความใส่ใจแล้ว ข้อมูลต่าง ๆ จะเข้าไปอยู่ในหน่วยความจำระยะสั้นและพร้อมที่จะนำไปใช้ในการทำกิจกรรมการเรียนรู้ต่อไปตามทฤษฎีการประมวลผลข้อมูล (cognitive information processing) ซึ่งจะช่วยส่งเสริมให้เกิดการสร้างความรู้ด้วยตนเองได้สำเร็จ [6]

โดยสรุปแล้ว การจัดการเรียนรู้เชิงรุก เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้อย่างกระตือรือร้น ได้ใช้ความรู้ ทักษะ และกระบวนการคิดขั้นสูงเพื่อสร้างความรู้ด้วยตนเองจากการปฏิสัมพันธ์ทางสังคม ผ่านกลไกสำคัญของการเรียนรู้ คือ การดูซึม และการปรับเปลี่ยนโครงสร้างความรู้ความเข้าใจเพื่อให้เกิดความสมดุล อย่างไรก็ตาม การจัดการเรียนรู้

คณิตศาสตร์ได้มีการนำแนวคิดการจัดการเรียนรู้เชิงรุกมาใช้ในระยะหนึ่งแล้ว ซึ่งจะอธิบายไว้ในหัวข้อถัดไป

3. การจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์

การจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ เป็นการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมอย่างกระตือรือร้นผ่านงานทางคณิตศาสตร์ [3] ซึ่งเป็นกิจกรรมหรือปัญหาที่ออกแบบมาเพื่อให้ นักเรียนมีส่วนร่วมในการคิดและฝึกฝนทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไปจนถึงการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนและไม่คุ้นเคย โดยเป็นการเปลี่ยนบทบาทครูจากการใช้วิธีการแบบบรรยาย ไปสู่ห้องเรียนที่นักเรียนเป็นศูนย์กลาง [9] ผ่านการจัดการเรียนรู้ที่ดึงดูดให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ [12] โดยใช้ประสบการณ์และการมีปฏิสัมพันธ์ต่อโลกหรือสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวของนักเรียน มากกว่าอาศัยหนังสือตำราเรียนพื้นฐานเป็นที่ยึดหรือแหล่งข้อมูลของการเรียนรู้ รวมทั้งใช้ประโยชน์จากความอยากรู้อยากเห็นตามธรรมชาติของนักเรียน เพื่อกระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้ มอบประสบการณ์ที่หลากหลาย น่าสนใจ โดยใช้ทั้งสื่อทางกายภาพและสิ่งแวดล้อม และสามารถปรับมาเป็นการเรียนรู้รายบุคคลเมื่อนักเรียนเกิดความพร้อม [9] ลักษณะหนึ่งของการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนจะแสดงบทบาทเชิงรุก (active role) ในการเรียนรู้ของตนเองมากกว่าการรับข้อมูลจากครู โดยนักเรียนได้สื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์ ไตร่ตรอง สะท้อนคิด รวมทั้งได้ร่วมอภิปรายเพื่อแลกเปลี่ยนมุมมองที่ต่างกันไป [5]

ช่วงเวลาที่ผ่านมา การจัดการเรียนรู้เชิงรุกได้รับความสนใจและเป็นจุดเน้นสำหรับการพัฒนาการรู้เรื่องคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก ดังที่สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM) ได้เน้นย้ำและชี้ให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้เชิงรุกช่วยปรับปรุงประสิทธิภาพการปฏิบัติงานทางคณิตศาสตร์และเพิ่มขีดความสามารถในการใช้คณิตศาสตร์เพื่อแสวงหาความรู้ทางวิชาการและวิชาชีพให้กับนักเรียน [10] อย่างไรก็ตามการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์เป็นแนวคิดที่มีมาระยะหนึ่งแล้ว Smith [13] ได้อธิบายว่า ตั้งแต่คริสต์ศักราช 1982 หรือพุทธศักราช 2525 ได้มีการเน้นให้ใช้การจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนมากขึ้น โดยให้เหตุผลว่า คณิตศาสตร์สามารถเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพผ่านการมีส่วนร่วมในการทดลอง การตั้งคำถาม การไตร่ตรอง สะท้อนคิด การค้นพบ การประดิษฐ์ และการอภิปราย ดังนั้น บทบาทหน้าที่ของครูสำหรับการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง จึงเป็นการเตรียมการและจัดประสบการณ์ต่าง ๆ

ที่ช่วยให้นักเรียนสร้างและพัฒนาความเข้าใจในคณิตศาสตร์ของตนเอง นั่นคือ การอำนวยความสะดวกให้นักเรียนมีโครงสร้างความรู้ความเข้าใจที่ขยายและลุ่มลึกมากขึ้นกว่าเดิม ผู้เขียนได้นำแนวคิดของ Smith [13] ที่อธิบายถึงลักษณะสำคัญของการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ มาอธิบายเชื่อมโยงให้เห็นถึงแนวทางปฏิบัติที่สนับสนุนด้วยทฤษฎีการเรียนรู้ ได้ดังนี้

1. การนำเสนอกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ (presentation) ในการจัดการเรียนรู้เชิงรุก ควรนำเสนอกิจกรรมที่เชิญชวนให้นักเรียนมีส่วนร่วมและใช้ความสามารถในการคิดอย่างเต็มที่ เช่น การใช้เกม ปริศนา สถานการณ์ที่ชวนสงสัยและสร้างความประหลาดใจ เพื่อกระตุ้นความอยากรู้อยากเห็น และดึงความสนใจของนักเรียนออกมาได้อย่างเต็มที่ และที่สำคัญกิจกรรมนั้น ควรนำไปสู่ข้อมูลที่ขัดแย้งกับความรู้ความเข้าใจเดิม หรือสร้างการรับรู้ว่า ความรู้ความเข้าใจเดิมที่นักเรียนมีอยู่ไม่เพียงพอ อนึ่ง เมื่อนักเรียนได้รับข้อมูลที่น่าสนใจ จะเกิดความสนใจ ซึ่งทำให้ข้อมูลนั้นเข้าไปอยู่ในหน่วยความจำระยะสั้น พร้อมทั้งจะใช้งานในกิจกรรมการเรียนรู้ที่กำลังจะเกิดขึ้น และนำไปสู่กลไกการสร้างความรู้ด้วยตนเองในลำดับต่อไป

2. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (pupil activity) ในการจัดการเรียนรู้เชิงรุก นักเรียนต้องดำเนินการหาคำตอบให้กับความสงสัยใคร่รู้ของตนเอง สร้างความเข้าใจในสิ่งที่กำลังคิดและทำ ลักษณะสำคัญของกิจกรรมการเรียนรู้ที่จะสร้างการมีส่วนร่วมของนักเรียน คือ เป็นกิจกรรมที่นักเรียนได้เรียนรู้ผ่านสถานการณ์ใหม่ที่ไม่น่าเบื่อ และไม่ใช้กิจวัตรประจำของการเรียนคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ เมื่อนักเรียนลงมือทำกิจกรรมแล้ว จะพบว่าสิ่งที่กำลังเรียนรู้อยู่นั้นขัดแย้งกับความรู้เดิมที่มีหรือความรู้เดิมไม่เพียงพอที่จะหาคำตอบได้ นักเรียนจะดูดซึมข้อมูลความรู้ที่ครูนำเสนอเข้าไปปรับโครงสร้างความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องนั้น หรือหากเป็นข้อมูลความรู้ใหม่ที่ไม่เกี่ยวข้องกับความรู้เดิม นักเรียนจะสร้างโครงสร้างความรู้ความเข้าใจขึ้นมาอีกโครงสร้างหนึ่ง และกลับสู่ความสมดุลอีกครั้ง

3. การสะท้อนผลหลังกิจกรรมการเรียนรู้ (reflection) เมื่อทำกิจกรรมหรืองานทางคณิตศาสตร์เสร็จสิ้น ครูควรจัดให้มีการทบทวนการเรียนรู้ที่ได้จากการทำกิจกรรมร่วมกัน ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการช่วยให้นักเรียนบูรณาการและเชื่อมโยงความคิดทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับกับความรู้และประสบการณ์เดิมที่มีอยู่ ทั้งนี้การให้นักเรียนสะท้อนผลด้วยตนเองเป็นรายบุคคลตามลำพังไม่ได้รับประกันว่านักเรียนได้เรียนรู้แล้ว ขั้นตอนนี้ยังเป็นการตรวจสอบว่า นักเรียนได้สร้างความรู้ที่ถูกต้องหรือไม่ ซึ่งเป็นผลมาจากการลงมือทำกิจกรรมและได้ดูดซึมข้อมูลความรู้เข้าไปปรับโครงสร้างความรู้

ความเข้าใจให้อยู่ในความสมดุล การสะท้อนผลจะช่วยให้ครูผู้สอนทราบว่า ข้อมูลความรู้ใหม่ได้เข้าไปต่อเติมกับโครงสร้างความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนมี และเกิดเป็นความรู้ใหม่ที่ถูกต้องหรือไม่ หากพบว่าไม่ถูกต้อง จะได้ทำการแก้ไขได้ในทันที

4. การเข้าร่วมและปฏิสัมพันธ์กับสังคม (socialization) หลังร่วมกิจกรรมการเรียนรู้และได้พัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องใดเรื่องหนึ่งแล้ว นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมให้อภิปรายหรือสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์นั้นกับผู้อื่น ซึ่งจะสะท้อนให้เห็นถึงความรู้ ความเข้าใจ และการใช้ภาษาที่เหมาะสม เป็นการขัดเกลาให้นักเรียนมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ดี และช่วยต่อเติมแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนเองให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น และขั้นตอนนี้เอง จะช่วยให้นักเรียนรับรู้ว่าคุณสมบัติที่สร้างขึ้นมีความสอดคล้องหรือขัดแย้งกับสังคม รวมทั้งยังเป็นโอกาสที่นักเรียนจะได้ขยายแนวคิดของตนเองผ่านการดูซึม และการปรับเปลี่ยนโครงสร้างความรู้ความเข้าใจเพื่อให้เกิดความสมดุลอย่างต่อเนื่องในระหว่างทำกิจกรรม อีกมุมหนึ่ง การปฏิสัมพันธ์กับสังคมนักเรียนจะได้พบความช่วยเหลือในการเรียนรู้จากทั้งเพื่อนและครู และทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนรู้ได้เร็วขึ้น

โดยสรุปแล้ว การจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ใช้กิจกรรมหรืองานทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับเรื่องที่นักเรียนสนใจมากระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ ส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมและได้รับประสบการณ์การใช้คณิตศาสตร์เพื่อสร้างความรู้หรือตอบคำถามจากความสงสัยของตนเอง ได้ไตร่ตรอง สะท้อนคิด และอภิปรายเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะสำคัญ คือ การนำเสนอกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เชิญชวนให้นักเรียนมีส่วนร่วม การมีส่วนร่วมของนักเรียนในกิจกรรมเพื่อตอบสนองความสงสัยใคร่รู้ของตนเอง การสะท้อนผลหลังกิจกรรมการเรียนรู้ และการเข้าร่วมและมีปฏิสัมพันธ์กับสังคม เพื่อสื่อสารและอภิปรายเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่แฝงอยู่ในกิจกรรม และเพื่อให้เห็นลักษณะของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ชัดเจนยิ่งขึ้น ทั้งนี้ ขอยกตัวอย่างการจัดการเรียนรู้เชิงรุกไว้ในหัวข้อถัดไป

4. ตัวอย่างการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์

การจัดการเรียนรู้เชิงรุก เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ในรายวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ครูคณิตศาสตร์มีความคุ้นเคยในเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นอย่างดีอยู่แล้ว กิจกรรมดังกล่าวมีชื่อว่า “เรขาคณิตบนร่มแปดเหลี่ยม” ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ฐานคิดจาก

สถานการณ์ที่เสนอโดยสภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM) [11] ซึ่งมีจุดประสงค์การเรียนรู้ คือ 1) นักเรียนนำทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดได้ 2) นักเรียนมีทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ สามารถเชื่อมโยงความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสกับชีวิตจริงได้ 3) นักเรียนมีทักษะการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ สามารถอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนเองให้ผู้อื่นเข้าใจได้ และ 4) นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำความเข้าใจปัญหาและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้กิจกรรมดังกล่าวสามารถใช้ในการจัดการเรียนรู้หลังจากที่นักเรียนได้เรียนทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปแล้ว หรืออาจจะนำไปปรับใช้เพื่อสอนทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปพร้อมกันในช่วงของการหาความสูงของรูปสามเหลี่ยมก็ได้เช่นกัน ลักษณะการจัดการเรียนรู้ของกิจกรรมเรขาคณิตบนร่มแปดเหลี่ยมเป็นดังนี้

1. ให้นักเรียนชมภาพร่มบนหน้าจอที่ครูแสดงดังรูปที่ 4.1 จากนั้นใช้คำถาม “นักเรียนเห็นสิ่งใดในภาพนี้บ้าง” ซึ่งนักเรียนอาจตอบว่า “ร่มที่มีสีต่าง ๆ กัน” “ร่มเหล่านี้มีรูปร่างเหมือนแปดเหลี่ยม” “รูปแปดเหลี่ยมประกอบขึ้นจากรูปสามเหลี่ยมแปดรูป” “มีร่มสีฟ้าแค่สองคันในรูปนี้” “ด้ามจับของร่มเป็นสีดำ” “ร่มดูเหมือนซีกหนึ่งของโลก” เป็นต้น และใช้คำถาม “นักเรียนมีข้อสงสัยใดบ้าง” ซึ่งนักเรียนอาจตอบว่า “ร่มทั้งหมดนี้จะมีขนาดเท่ากันไหม” “ร่มทั้งหมดนี้มีรูปร่างเป็นแปดเหลี่ยมใช่ไหม” “มีร่มทั้งหมดอยู่กี่คัน” “วันนี้ฝนจะตกหรือคะ” เป็นต้น



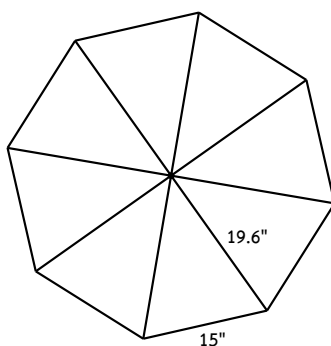
รูปที่ 4.1 ร่มแปดเหลี่ยม (ที่มา [https://www.nctm.org/Classroom-](https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Features/Notice-and-Wonder/Lesson-Plans/downloads/Umbrella-7-10/)

[Resources/Features/Notice-and-Wonder/Lesson-Plans/downloads/Umbrella-7-10/](https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Features/Notice-and-Wonder/Lesson-Plans/downloads/Umbrella-7-10/))

2. ครูพูดคุยกับนักเรียนและอธิบายว่า ทุกคำถามของนักเรียนน่าสนใจทั้งสิ้น มีนักเรียนคนใดสามารถเปลี่ยนคำถามดังกล่าวมาเป็นคำถามทางคณิตศาสตร์ได้บ้าง จากนั้นให้นักเรียนยกมือขึ้นตอบคำถามนี้ 3 - 4 คน นักเรียนอาจตั้งคำถามว่า “ร่มแต่ละคันขนาดเป็นเท่าไร” “รูปแปดเหลี่ยมนั้นขนาดเท่าไร” “รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีพื้นที่เท่าไร” หรือ “ร่มนี้สามารถคลุมพื้นที่ได้ทั้งหมดเท่าไร”

จากคำถามเหล่านี้ ครูอธิบายให้นักเรียนทราบว่า นักเรียนจำเป็นต้องมีข้อมูลการมาร่วมมาช่วยในการหาคำตอบ

3. ครูนำเสนอข้อมูลเกี่ยวกับส่วนประกอบต่าง ๆ ของร่มแปดเหลี่ยมให้นักเรียนทราบ ดังนี้ “บริษัท Rain Away ซึ่งทำการผลิตร่มออกจำหน่าย โดยออกแบบร่มที่มีด้ามจับและมีผ้าคาดเพดาน (canopy) แบบแปดเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปสามเหลี่ยมแปดชิ้น รูปสามเหลี่ยมแต่ละชิ้นเชื่อมต่อกันด้วยโครงอลูมิเนียม และรูปสามเหลี่ยมแต่ละชิ้นที่ประกอบกันเป็นผ้าคาดเพดาน มีฐานยาว 15 นิ้ว และความยาวด้านข้างยาวละ 19.6 นิ้ว” จากนั้น ครูขออาสาสมัคร 1 คน ออกมาวาดภาพประกอบ เมื่อนักเรียนวาดภาพบนกระดานได้ถูกต้องแล้ว ครูใช้ภาพนั้นในการจัดการเรียนรู้ในขั้นต่อไป ทั้งนี้ ภาพที่นักเรียนวาดควรสอดคล้องกับรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ภาพร่มที่แสดงความยาวฐานและความยาวด้านข้างของรูปสามเหลี่ยมที่ประกอบเป็นผ้าคาดเพดาน (ที่มา <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Features/Notice-and-Wonder/Lesson-Plans/downloads/Umbrella-7-10/>)

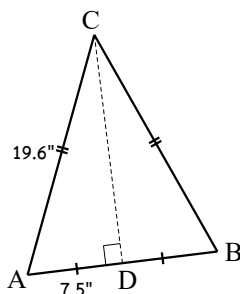
4. จากภาพที่นักเรียนวาดในข้อ 3 ครูให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถามดังนี้

4.1 รูปสามเหลี่ยมในภาพเป็นรูปสามเหลี่ยมประเภทใด เพราะเหตุใด

คำถามนี้นักเรียนสามารถตอบได้โดยง่ายว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แต่อาจให้เหตุผลที่แตกต่างกัน เช่น “เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมทั้งแปดรูปเหมือนกันและต้องนำมาประกอบเป็นรูปแปดเหลี่ยมได้พอดี แสดงว่า ความยาวด้านข้างอีกข้างหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมต้องเท่ากับ 19.6 นิ้ว ด้วย” หรือ “เนื่องจากสถานการณ์ระบุว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละชิ้นที่ประกอบกันเป็นผ้าคาดเพดานมีด้านข้างยาว 19.6 นิ้ว แสดงว่าทั้งสองข้างยาวเท่ากัน” เป็นต้น ให้นักเรียนอภิปรายในแ่งมุมต่าง ๆ อย่างรอบคอบ

4.2 รูปสามเหลี่ยมนั้นมีพื้นที่เท่าใด และนักเรียนมีวิธีการหาพื้นที่อย่างไร

เพื่อตอบคำถามนี้ ครูเลือกนักเรียน 1 คน ตอบคำถาม “ในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม นักเรียนคิดว่าต้องทราบสิ่งใดบ้าง” (ความยาวฐาน ความสูง และสูตรการคำนวณหาพื้นที่) และเลือกนักเรียนอีก 1 คน วาดภาพประกอบและเขียนระบุความยาวฐานและความสูงที่นักเรียนหมายถึงว่าคือส่วนใด จากนั้น ครูให้นักเรียนทั้งห้องพิจารณาว่า ภาพที่นักเรียนวาดซึ่งระบุความยาวฐานและความสูงถูกต้องหรือไม่ และใช้คำถาม “ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดลงมาตั้งฉากที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ทำให้เกิดอะไรขึ้น” ให้นักเรียนร่วมกันอธิบาย สุดท้าย ครูทำการสรุปให้นักเรียนทั้งห้องทราบว่า ผลที่เกิดขึ้น คือ ส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งฐาน ซึ่งนักเรียนควรเขียนภาพที่มีลักษณะสอดคล้องกับรูปที่ 4.3 และระบุได้ว่า $AB = 15$ นิ้ว $AD = BD = 7.5$ นิ้ว และ $AC = 19.6$ นิ้ว



รูปที่ 4.3 รายละเอียดส่วนต่าง ๆ ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งประกอบกันเป็นโครงสร้างของผ้าคาดพาดาน

จากนั้น ครูให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันว่า จะหาความสูงของรูปสามเหลี่ยมนี้ หรือหาความยาวด้าน CD ได้อย่างไร เมื่อนักเรียนเกิดความสงสัยและพยายามคิดหาวิธีสักครู่หนึ่งแล้วพบว่า ข้อมูลที่ปรากฏยังไม่เพียงพอที่จะหาคำตอบได้ ครูจึงเชื่อมโยงไปสู่ทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่นักเรียนได้เรียนไปแล้ว (หรือครูอาจทำการสอนในขั้นนี้) และให้นักเรียนอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส เช่น บอกได้ว่า ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ผลรวมของความยาวด้านประกอบมุมฉากยกกำลังสอง เท่ากับความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสอง ครูเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและแสดงความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามในรูปของตัวแปร หรือทบทวนผ่านตัวแสดงแทนทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากขึ้น ต่อไปครูให้นักเรียนเชื่อมโยงทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาใช้กับรูปสามเหลี่ยม ACD ซึ่งถ้านักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD ซึ่งมี D เป็นมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ว่า $AD^2 + CD^2 = AC^2$ ทำให้ได้ว่า $7.5^2 + CD^2 = 19.6^2$ และได้ผลลัพธ์ คือ $CD \approx 18.11$ ซึ่งหมายถึง

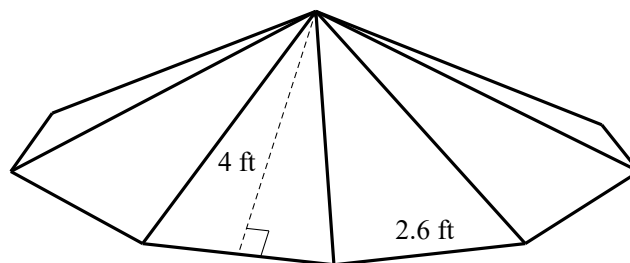
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปนี้ สูงประมาณ 18.11 นิ้ว ครูปล่อยให้เวลานักเรียนแต่ละคนคำนวณและได้คำตอบด้วยตนเองว่า รูปสามเหลี่ยมนั้นมีพื้นที่ประมาณ 135.83 ตารางนิ้ว

5. ครูนำนักเรียนพิจารณาว่าจากคำถามทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนสงสัย มีคำถามใดที่ยังไม่ได้รับคำตอบหรือไม่ ซึ่งนักเรียนอาจตอบว่ายังมีคำถามที่ว่า “รมนี่สามารถคลุมพื้นที่ได้ทั้งหมดเท่าไร” ครูใช้คำถามนี้เพื่อให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบด้วยวิธีการและมุมมองต่าง ๆ ในกรณีหนึ่งนักเรียนอาจคูณพื้นที่โดยประมาณของรูปสามเหลี่ยมที่คำนวณได้ด้วยจำนวนรูปสามเหลี่ยม ทำให้ได้ผลลัพธ์เป็น 1,086.64 ตารางนิ้ว จุดนี้ ครูอาจให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่า พื้นที่ที่รมนี่คลุมได้ทั้งหมดหมายถึงส่วนใด เป็นส่วนของพื้นที่ผ้ามืดเตาดิน หรือเป็นส่วนภาพฉายจากด้านบนของร่ม และสำหรับการใช้งานร่ม นักเรียนคิดว่าพื้นที่ที่รมนี่คลุมได้ทั้งหมด ควรหมายถึงส่วนใด นักเรียนบางคนอาจอภิปรายและชี้ให้เห็นว่า “ปกติร่มจะใช้บังแดดหรือกันฝนในบริเวณศีรษะของเรา ดังนั้น ส่วนที่รมนี่คลุมได้ควรจะเป็นส่วนผ้าทั้งหมดนั้นมากกว่า” โอกาสนี้ ครูอาจสอนให้นักเรียนรู้จักการสร้างข้อตกลงเบื้องต้น (assumption) ของการคำนวณ เช่น รมนี่สามารถคลุมพื้นที่ได้ประมาณ 1,086.64 ตารางนิ้ว เมื่อพื้นที่ในที่นี้คือพื้นที่ของผ้ามืดเตาดิน ลำดับถัดมา ใช้คำถามกับนักเรียนทั้งห้องว่า “นักเรียนคิดว่า ร่มที่คลุมพื้นที่ได้ขนาด 1,086.64 ตารางนิ้ว นักเรียนสามารถใช้งานได้พร้อมกันได้ทั้งหมดกี่คน” เพื่อให้นักเรียนคาดคะเนพื้นที่กับการนำร่มไปใช้ เช่นเดียวกันกับคำถามอื่น ๆ ที่นักเรียนสงสัย และตั้งคำถามขึ้นในช่วงแรก แต่ยังไม่ได้รับคำตอบ ครูจะช่วยให้นักเรียนได้รับคำตอบทั้งหมด และร่วมกันอภิปรายถึงวิธีการได้มาซึ่งคำตอบรวมทั้งความสมเหตุสมผลของคำตอบเหล่านั้น

6. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ให้แต่ละกลุ่มร่วมกันพูดคุยทบทวนความรู้และสิ่งที่ได้จากการทำกิจกรรมร่วมกัน เขียนสะท้อนผลสิ่งที่ได้เรียนรู้ทั้งความรู้ทางคณิตศาสตร์ มุมมองและประสบการณ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา หรือสิ่งที่ได้เรียนรู้อื่น ๆ ในรูปแบบแผนภาพหรืออินโฟกราฟิก กลุ่มละ 5 ประเด็น และนำเสนอหน้าชั้นเรียนทุกกลุ่ม โดยกลุ่มที่ 1 นำเสนอ 1 ประเด็น และกลุ่มถัดไปจะนำเสนอประเด็นที่ไม่ซ้ำกับกลุ่มก่อนหน้า ทำเช่นนี้จนครบทุกประเด็นที่นักเรียนเขียนในชั้นตอนนี้ ทั้งนี้ครูทำการตรวจสอบว่าสิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้มีความถูกต้องหรือเป็นสิ่งที่ก่อให้เกิดประโยชน์กับนักเรียนหรือไม่

7. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนทั้งห้องว่า “นักเรียนเคยเห็นร่มที่ใหญ่กว่านี้หรือไม่ เห็นที่ไหน” นักเรียนอาจตอบว่าเห็นที่ตลาดนัดหรือชายทะเล เป็นต้น ครูจึงนำเสนอสถานการณ์เกี่ยวกับร่มที่มีขนาดใหญ่กว่าเดิม ดังนี้ “บริษัท Rain Away ได้ออกแบบร่มขนาดใหญ่ที่ใช้สำหรับกางบริเวณลาน

กว้าง เช่น ตลาดนัดและชายทะเล ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยม ดังรูป” แสดงภาพโครงสร้างของร่มสี่เหลี่ยมดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 รูปเรขาคณิตแทนโครงสร้างผ้าคาดเพดานของร่มสี่เหลี่ยม

(ที่มา <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Features/Notice-and-Wonder/Lesson-Plans/downloads/Umbrella-7-10/>)

ครูให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนและใช้ข้อมูลนี้ร่วมกันตอบคำถามต่อไปนี้

- 7.1 รูปสามเหลี่ยมในภาพเป็นรูปสามเหลี่ยมประเภทใด (รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)
- 7.2 ก้านอลูมิเนียมแต่ละชั้นยาวกี่ฟุต แล้วนักเรียนมีวิธีการหาอย่างไร (ยาวประมาณ 4.21 ฟุต หาได้จากการคำนวณตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส)
- 7.3 ปริมาณผ้าที่ใช้ทำผ้าคาดเพดานรูปสามเหลี่ยมแต่ละชั้นเป็นเท่าใด (ประมาณ 5.2 ตารางฟุต)
- 7.4 การทำร่มนี้หนึ่งคัน ต้องใช้ผ้าคาดเพดานประมาณเท่าใด (ประมาณ 52 ตารางฟุต)

จากการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ด้วยกิจกรรม “เรขาคณิตบนร่มแปดเหลี่ยม” ที่อธิบายไว้ข้างต้น สะท้อนให้เห็นถึงการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ดังนี้

1. ครูให้นักเรียนเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ร่มแปดเหลี่ยมผ่านการตั้งคำถามของตนเอง จะเห็นว่าในการจัดการเรียนรู้ ครูได้ให้นักเรียนตั้งคำถามที่ตนเองสงสัย ส่วนมากเป็นคำถามทั่วไปที่ไม่จำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ แต่หลังจากนั้น ครูให้นักเรียนเปลี่ยนคำถามให้เป็นคำถามทางคณิตศาสตร์ จุดนี้นักเรียนจะเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ได้เอง ซึ่งครูคาดหวังให้ชั้นเรียนเกิดคำถามที่สำคัญคือ “รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีพื้นที่เท่าไร” ซึ่งจะต้องใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการหาคำตอบ อย่างไรก็ตาม ทุกคำถามทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนตั้งขึ้นเป็นความท้าทายนักเรียนในการหาคำตอบและเกิดความสนใจที่จะเรียนรู้มากขึ้น สอดคล้องกับลักษณะการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ ที่ควรนำเสนอกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนมีส่วนร่วม

และใช้ความสามารถในการคิด เช่น การใช้เกม ปริศนา หรือการใช้สถานการณ์ที่ชวนสงสัยหรือสร้างความประหลาดใจเพื่อสร้างความสนใจในบทเรียน และสนับสนุนด้วยทฤษฎีการประมวลผลข้อมูล ที่อธิบายว่าเมื่อเกิดความสนใจแล้วข้อมูลนั้นจะเข้าไปอยู่ในหน่วยความจำระยะสั้นและพร้อมที่จะนำไปใช้ในการทำกิจกรรมการเรียนรู้ต่อไป

2. การหาความสูงของรูปสามเหลี่ยม เมื่อนักเรียนเกิดความสงสัยและพยายามคิดหาวิธีสักครู่หนึ่ง แล้วพบว่าข้อมูลที่มีปรากฏยังไม่เพียงพอที่จะหาคำตอบได้ ครูจึงชี้แนะให้ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาช่วยในการหาคำตอบ ขั้นนี้จะเห็นว่าจากการที่ครูจัดกิจกรรมและให้ประสบการณ์ต่าง ๆ เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม จนสุดท้ายนักเรียนจำเป็นต้องหาความสูงของรูปสามเหลี่ยม แต่กลับพบว่าไม่สามารถทำได้ เนื่องจากความรู้ที่มีไม่เพียงพอ ครูจึงชี้แนะ (หรืออาจทำการสอนทฤษฎีบทพีทาโกรัส) และท้ายที่สุดนักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปใช้หาความสูงและหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมได้สำเร็จ สอดคล้องกับลักษณะการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ ที่ควรให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรม ดำเนินการเพื่อหาคำตอบให้กับความสงสัยใคร่รู้ สร้างความเข้าใจในสิ่งที่กำลังคิดและทำ และเป็นไปตามกลไกการสร้างความรู้ด้วยตนเอง นั่นคือ ช่วงที่นักเรียนใช้ความรู้และประสบการณ์เดิมเกี่ยวกับการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พบความขัดแย้ง คือ ความรู้ที่มีไม่เพียงพอ ซึ่งนักเรียนกำลังอยู่ในสถานะที่ไม่สมดุล เนื่องจากยังไม่สามารถแก้ปัญหาได้ในสถานการณ์การเรียนรู้ที่เผชิญอยู่ได้ นักเรียนจึงนำความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่ครูชี้แนะมาใช้ พร้อมทั้งปรับโครงสร้างความรู้ความเข้าใจใหม่ว่า สามารถนำทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาช่วยหาความสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ และทำการแก้ปัญหาได้สำเร็จ ทำให้ปัญหาที่เผชิญอยู่หมดไปและโครงสร้างความรู้ความเข้าใจของนักเรียนกลับสู่ความสมดุลอีกครั้ง อีกมุมหนึ่งจะเห็นว่า เมื่อนักเรียนพบอุปสรรคในการเรียนรู้ นั่นคือไม่สามารถหาความสูงของรูปสามเหลี่ยมได้ ครูได้เข้าไปช่วยชี้แนะ (หรือสอน) ว่าสามารถใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาคำตอบได้ เป็นการช่วยเหลือให้นักเรียนสามารถทำได้ เป็นไปตามแนวคิดเรื่องพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ ที่อธิบายว่า นักเรียนสามารถเรียนรู้และก้าวข้ามขีดจำกัดได้หากได้รับความช่วยเหลือ และในขั้นตอนเดียวกันนี้ ครูได้ให้นักเรียนอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส เช่น บอกได้ว่าในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ผลรวมของความยาวด้านประกอบมุมฉากยกกำลังสอง เท่ากับความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสอง ในประเด็นเดียวกันนี้ ครูเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและแสดงความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามในรูปตัวแปร เริ่มต้นเป็นการให้นักเรียนแสดงความเข้าใจผ่านการใช้ภาษา ซึ่งอาจมีนักเรียนหลายคนในห้องที่ไม่เข้าใจ ครูจึงใช้การเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

มาช่วยในการอธิบาย เป็นไปตามการใช้รูปแบบการแสดงแทนความคิดที่เหมาะสมกับนักเรียน ซึ่งครูเลือกที่จะใช้การแสดงแทนความคิดด้วยการนี้ภาพมาช่วยนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจการแสดงแทนความคิดด้วยสัญลักษณ์

3. การแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน โดยให้แต่ละกลุ่มร่วมกันทบทวนความรู้และสิ่งที่ได้จากการทำกิจกรรม และนำเสนอให้ครูฟังทีละกลุ่ม เป็นการให้นักเรียนได้สะท้อนในสิ่งที่ได้เรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและการนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการหาความสูงของรูปสามเหลี่ยม สอดคล้องกับลักษณะการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ที่ควรจัดให้มีการสะท้อนผลการเรียนรู้ซึ่งช่วยให้นักเรียนบูรณาการเชื่อมโยงความคิดทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับกับความรู้และประสบการณ์เดิมที่มี และยังเป็นการตรวจสอบว่านักเรียนได้สร้างความรู้ที่ถูกต้องหรือไม่

4. หลังจากนักเรียนประสบความสำเร็จในการทำกิจกรรมเกี่ยวกับร่แปดเหลี่ยมแล้ว นักเรียนได้รับข้อมูลสถานการณ์ร่สี่เหลี่ยมและจับคู่กับเพื่อนเพื่อร่วมกันตอบคำถามที่กำหนด ซึ่งครูออกแบบคำถามให้มีการใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกัน สอดคล้องกับลักษณะการจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ ที่หลังจากนักเรียนร่วมกิจกรรมการเรียนรู้และได้พัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องใดเรื่องหนึ่งแล้ว นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมให้อภิปรายและสื่อสารแนวคิดกับผู้อื่น ในกิจกรรมการเรียนรู้นี้ได้ใช้สถานการณ์ที่คล้ายคลึงกันเป็นจุดเริ่มต้นของการอภิปราย ซึ่งจะสะท้อนให้เห็นถึงความรู้ ความเข้าใจ และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน อีกทั้งช่วยต่อเติมแนวคิดว่าคณิตศาสตร์ของตนเองให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น เป็นไปตามกลไกของการสร้างความรู้ด้วยตนเอง ที่ใช้ปฏิสัมพันธ์ทางสังคมในการปรับโครงสร้างความรู้ความเข้าใจให้มีความสมดุล ขั้นตอนนี้จะช่วยให้นักเรียนรับรู้ ว่า ความรู้ที่สร้างขึ้นสอดคล้องหรือขัดแย้งกับความรู้ของเพื่อนหรือไม่ รวมทั้งยังเป็นโอกาสที่นักเรียนได้ขยายแนวคิดของตนเองจากความรู้ของเพื่อนผ่านการดูซึม และการปรับเปลี่ยนโครงสร้างความรู้ความเข้าใจเพื่อให้เกิดความสมดุลอย่างต่อเนื่องในระหว่างทำกิจกรรมคู่ อีกมุมหนึ่ง นักเรียนจะได้รับความช่วยเหลือในการเรียนรู้จากเพื่อน ทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนรู้ได้เร็วขึ้น

5. สรุป

การจัดการเรียนรู้เชิงรุกในวิชาคณิตศาสตร์ ครูควรให้ความสำคัญกับงานทางคณิตศาสตร์ที่จะกระตุ้นให้นักเรียนเชื่อมโยงระหว่างสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริงกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ด้วยความสงสัยใคร่รู้ของนักเรียนเอง ส่งเสริมให้นักเรียนได้ปฏิบัติงานทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิด

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง แสดงการมีส่วนร่วมในการอภิปราย แลกเปลี่ยน มุมมอง สืบค้น ตรวจสอบ ต่อเติมแนวคิด และสื่อสารเพื่อสะท้อนความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เป้าหมายสำคัญ คือ การพัฒนาแนวคิดและการปฏิบัติงานทางคณิตศาสตร์ รวมทั้ง เพิ่มขีดความสามารถในการใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญและจำเป็นของความพร้อมที่จะเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ พร้อมทั้งจะประกอบอาชีพเมื่อสำเร็จการศึกษา หรือสามารถศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้นได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2560). *ตัวชี้วัดสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
Office of the Basic Education Commission. (2017). *Indicators and Core Content of Mathematics Learning Group (Revised edition 2017) According to the Basic Education Core Curriculum 2008*. Bangkok: The Secretariat of the House of Representatives.
- [2] Bonwell, C. C. and Eison, J. A. (1991). *Active Learning: Creating Excitement in the Classroom*. Washington, D.C.: The George Washington University, School of Education and Human Development.
- [3] Boyer, K. R. (2002). Using Active Learning Strategies to Motivate Students. *Mathematical Teaching in the Middle School*, 8 (1), p. 48 – 51.
- [4] Dale, E. (1946). *Audio-Visual Methods in Teaching*. New York: The Dryden Press.
- [5] Draper, R. J. (1997). Active Learning in Mathematics: Desktop Teaching. *The Mathematics Teacher*, 90 (8), p. 622 – 625.
- [6] Driscoll, M. P. (2014). *Psychology of Learning for Instruction*. US: Pearson.
- [7] Fedler, R. M. and Brent, R. (1996). Navigating the Bumpy Road to Student-Centered Instruction. *College Teaching*, 44 (2), p. 43 – 47.
- [8] Glasersfeld, E. V. (1990). *An Exposition of Constructivism: Why Some Like It Radical*, in Davis, R.B., Maher, C.A. Noddings, N. (Eds.), *Constructivist View on the*

- Teaching and Learning of Mathematics* (p. 19 – 29), Reston: National Council of Teachers of Mathematics
- [9] Masalski, W. J. (1978). Mathematics and the Active Learning Approach. *Arithmetic Teacher*, 26 (2), p. 10 – 12.
- [10] National Council of Teachers of Mathematics. (2016). *NCTM Supports CBMS's Efforts for Active Learning in the Classroom*. Retrieved 1 October, 2023, from <https://www.nctm.org/News-and-Calendar/News/NCTM-News-Releases>
- [11] National Council of Teachers of Mathematics. (2023). *Notice and Wonder: Umbrellar 7-10*. Retrieved 22 September, 2023, from <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Features/Notice-and-Wonder/Lesson-Plans/downloads/Umbrella-7-10/>
- [12] Reinholz, D., Johnson, E., Larson, C. A., Johnstone, A. S., Smith, J., Mullins, B., Fortune, N., Keene, K. and Shah, N. (2022). When Active Learning Is Inequitable: Women's Participation Predicts Gender Inequities in Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 53 (3), p. 204 – 226.
- [13] Smith, J. (1999). Active learning of Mathematics. *Mathematical Teaching in the Middle School*, 5 (2), p. 108 – 110.



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 69 เล่มที่ 712 กันยายน – ธันวาคม 2567

<https://www.mathassociation.or.th>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วบนกราฟไตรไซคลิก

Finding The Number of Spanning Trees on The Tricyclic Graph

DOI: 10.14456/mj-math.2024.3

ปัฐยา มีสุข¹ และนิรุตต์ พิพรรณจินดา^{2,*}

¹โรงเรียนวัดทองคั้ง “ไพโรจน์ประชาสรรค์” ชลบุรี 20000

²โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
กำแพงเพชร 62000

Padtaya Meesuk¹ and Nirutt Pipattanajinda^{2,*}

¹ Watthongkung School, Chonburi 20000

² Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Kamphaeng Phet Rajabhat University, Kamphaeng Phet, 62000

Email: ¹pad.padtaya@gmail.com ²nirutt.p@gmail.com

วันที่รับบทความ : 22 มิถุนายน 2563

วันที่แก้ไขบทความ : 22 ตุลาคม 2565

วันที่ตอบรับบทความ : 13 ธันวาคม 2567

บทคัดย่อ

สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{Z}^+$ และกราฟเชื่อมโยง G ที่มีอันดับ n จะเรียก G ว่า กราฟ k -ไซคลิก ถ้า G เป็นกราฟที่มีขนาด $m = n + k - 1$ และเรียกกราฟ 3-ไซคลิก ว่า กราฟไตรไซคลิก ในบทความนี้จะเป็นการแสดงวิธีการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิก โดยพิจารณา

* ผู้เขียนหลัก

กราฟไตรไซคลิกเป็น 4 รูปแบบ ตามจำนวนของวัฏจักรของกราฟ จากนั้นใช้หลักการนับในการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิกในแต่ละรูปแบบ

คำสำคัญ: ต้นไม้แบบแผ่ทั่ว จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ กราฟไตรไซคลิก

ABSTRACT

For each $k \in \mathbb{Z}^+$ and a connected graph G of order n , G is said to be a k -cyclic graph if G is a graph with size $m = n + k - 1$ and a 3-cyclic graph is said to be a tricyclic graph. In this paper, we find the number of spanning trees on the tricyclic graph, considering 4 types from the number of cycles. Then use the counting techniques to find the number of spanning trees on the tricyclic graph of each type.

Keywords: Spanning tree, Number of spanning trees of graph, Tricyclic

1. บทนำและความรู้พื้นฐาน

การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ คือ การหาจำนวนกราฟย่อยแบบแผ่ทั่วที่เป็นรูปต้นไม้ทั้งหมดในกราฟ ซึ่งในปี ค.ศ. 1847 Gustav Kirchhoff [5] ได้แสดงวิธีการหาโดยใช้ตัวกำหนดของเมทริกซ์บางประการของกราฟ ต่อมาในปี ค.ศ. 1889 Arthur Cayley [4] ได้ขยายสูตรไปในหลากหลายทิศทาง โดยการใช้ระดับชั้นของจุดมาพิจารณา จากทั้งสองแนวคิดนี้ส่งผลให้มีการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟออกมามากอย่างต่อเนื่อง เช่น ในปี ค.ศ. 1990 Moh'd Z. Abu-Sbeih [3] ได้แนะนำวิธีการแบบใหม่ในการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟบริบูรณ์ K_n และกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ $K_{n,m}$ ในปี ค.ศ. 2010 Jianxi Li, Wai Chee Shiu และ An Chang [7] ได้แสดงขอบเขตบนของจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟโดยใช้อันดับ ขนาด ระดับชั้นค่ามากที่สุด-น้อยที่สุด จำนวนของสภาพเชื่อมโยง และรงคเลขของกราฟในการพิจารณา ในปี ค.ศ. 2014 Jianxi Li และ Wai Chee Shiu [6] ได้แสดงสูตรการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของการดำเนินการบวกของกราฟ และในปี ค.ศ. 2020 ปัฐยา มีสุข และ นิรุทธิ์ พิพรรณจินดา [2] ได้แสดงการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ และการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไไบไซคลิก

สำหรับในบทความนี้จะเป็นการขยายวงศ์ของกราฟที่จะนำมาพิจารณาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ กล่าวคือ การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิก หรือกราฟ 3-ไซคลิก ซึ่งมีวิธีการที่ซับซ้อนกว่ากราฟไบไซคลิก

ต่อไปจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟที่จำเป็นต้องใช้ในที่นี้ จะเรียก G ว่า **กราฟ** เมื่อ $G = (V(G), E(G))$ โดยที่เซต $V(G) \neq \emptyset$ เป็นเซตจำกัด จะเรียกว่า **เซตของจุด** เรียกสมาชิก $v \in V(G)$ ว่า **จุด**ของกราฟ G และเรียกเซต $E(G)$ ว่า **เซตของเส้น** ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตย่อยที่มีสองสมาชิกใน $V(G)$ นั่นคือ $E(G) \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G)\}$ เรียกสมาชิก $e \in E(G)$ ว่า **เส้น**ของกราฟ G ถ้า $e = \{u, v\} \in E(G)$ เขียนอย่างง่ายในรูป $e = uv$ และจะเรียกว่า u **ประชิดกับ** v ทั้งนี้จะเรียกจำนวนจุดและจำนวนเส้นในกราฟ G ว่า **อันดับและขนาด**ของกราฟ G ตามลำดับ

สำหรับกราฟ $G = (V(G), E(G))$ และกราฟ $H = (V(H), E(H))$ จะเรียกกราฟ H ว่า **กราฟย่อย**ของกราฟ G ถ้า H เป็นกราฟที่ $V(H) \subseteq V(G)$ และ $E(H) \subseteq E(G)$ และใช้สัญลักษณ์ $H \subseteq G$ แทน H เป็นกราฟย่อยของ G และจะเรียกกราฟย่อย H ของ G ว่า **กราฟย่อยแบบแผ่ทั่ว**ของกราฟ G ถ้า H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ที่ $V(H) = V(G)$

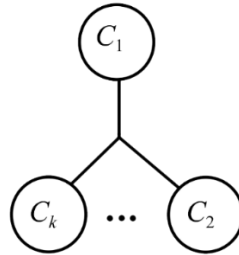
ให้ G เป็นกราฟ โดยที่ $e \in E(G)$ แล้ว $G \setminus e$ จะหมายถึง กราฟย่อยแบบแผ่ทั่วของ G ที่ได้จากการลบเส้น e จากกราฟ G นั่นคือ $V(G \setminus e) = V(G)$ และ $E(G \setminus e) = E(G) - \{e\}$ ทำนองเดียวกัน ถ้า $T = \{e_1, e_2, \dots, e_s\} \subseteq E(G)$ แล้ว $G \setminus T$ จะหมายถึง กราฟย่อยแบบแผ่ทั่วของ G ที่ได้จากการลบเส้น $e_1, e_2, \dots, e_s$ จากกราฟ G

เรียกวิถีปิด $u - v$ ที่มีความยาวมากกว่าหรือเท่ากับ 3 ว่า **วัฏจักร** เรียกกราฟ G ว่า **กราฟเชื่อมโยง** ถ้าแต่ละ $u, v \in V(G)$ จะได้ว่า G บรรจุวิถี $u - v$ และเรียกกราฟ G ว่า **กราฟไม่เชื่อมโยง** ถ้ากราฟ G ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

สำหรับกราฟเชื่อมโยง G จะเรียกเส้น $e \in E(G)$ ว่า **เส้นตัด** ถ้า $G \setminus e$ เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง จะเรียกกราฟ G ว่า **ต้นไม้** ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่บรรจุวัฏจักร จะเรียกกราฟย่อยแบบแผ่ทั่ว T ของกราฟ G ว่า **ต้นไม้แบบแผ่ทั่ว**ของกราฟ G ถ้า T เป็นต้นไม้ กำหนดสัญลักษณ์ $\tau(G)$ แทนจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่แตกต่างกันทั้งหมดของกราฟ G

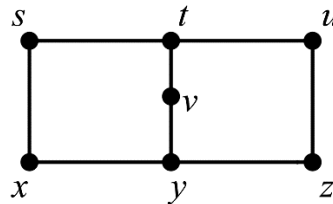
ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีอันดับ n จะเรียกกราฟ G ว่า **k -ไซคลิก** เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงและมีขนาด $n + k - 1$ ยิ่งไปกว่านั้นจะเรียก G ว่า **กราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน** ถ้า G เป็นกราฟ k -ไซคลิก ซึ่งแต่ละ 2 วัฏจักร C_i และ C_j ไต ๆ ในกราฟ G จะเป็นวัฏจักรที่มี

เส้นแตกต่างกัน นั่นคือ $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$ ในกรณีที่ $k \in \{1, 2, 3\}$ จะกำหนดชื่อเรียกเฉพาะสำหรับกราฟ k -ไซคลิก คือ กราฟยูนิไซคลิก กราฟไบไซคลิก และ กราฟไตรไซคลิก ตามลำดับ สำหรับโครงสร้างของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกันจะมีได้หลายแบบ ซึ่งจะแสดงตัวอย่างของแผนภาพของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน จำนวน 1 แบบ ดังรูปที่ 1.1



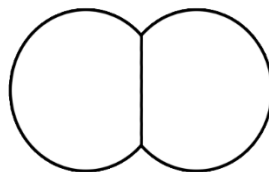
รูปที่ 1.1 ตัวอย่างของแผนภาพของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน

หมายเหตุ สำหรับกราฟ k -ไซคลิก G ที่มีอันดับ n จะหมายความว่า G ที่มีขนาดเป็น $n + k - 1$ แต่ไม่สามารถสรุปได้ว่า G บรรจุจำนวน k วัฏจักรได้ เช่น ให้ G เป็นกราฟดังรูปที่ 1.2 จะได้ว่ากราฟ G มีอันดับ 7 และมีขนาดเป็น 8 ดังนั้น G จะเป็นกราฟไบไซคลิก แต่จะเห็นว่า G เป็นกราฟที่มี 3 วัฏจักร ได้แก่ $C_1: s, t, v, y, x, s$, $C_2: t, u, z, y, v, t$ และ $C_3: s, t, u, z, y, x, s$



รูปที่ 1.2 กราฟไบไซคลิก

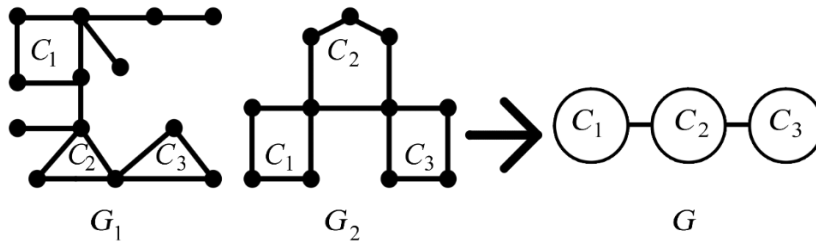
สำหรับกราฟไบไซคลิกในรูปที่ 1.2 จะเขียนเป็นแผนภาพทั่วไปเป็นวัฏจักรจำนวน 2 วัฏจักรติดกัน โดยระหว่าง 2 วัฏจักรจะมีเส้นร่วมกันอย่างน้อย 1 เส้น ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 แผนภาพทั่วไปของกราฟไบไซคลิกที่มีลักษณะดังรูปที่ 1.2

ในกรณีที่กราฟบรรจุวัฏจักร 2 วัฏจักรที่แตกต่างกัน โดยจะมีเพียงวิธีจำนวน 1 วิธีเชื่อมระหว่าง 2 วัฏจักร ซึ่งวิธีที่เชื่อมดังกล่าวอาจมีวิธีอื่น ๆ เชื่อมโยงกับวิธีนั้นได้ด้วย จะเขียนเป็นแผนภาพทั่วไป

เป็นวัฏจักรจำนวน 2 วัฏจักร ที่มีเส้นเชื่อม 1 เส้น เนื่องจากแต่ละเส้นบนวิธีจะเป็นเส้นตัด ในการหาต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟจึงไม่สามารถลบเส้นใด ๆ บนวิธีได้ สำหรับการเขียนแผนภาพทั่วไปของกราฟดังกล่าวนี้มีดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 แผนภาพ G_1 และ G_2 สามารถเขียนเป็นแผนภาพทั่วไปได้รูปแบบเดียวกัน

ต่อไปจะเป็นบทตั้งที่จำเป็นในการพิสูจน์ในบทความนี้ โดยบทตั้ง 1.1 – 1.2 เป็นบทตั้งที่ทราบกันดีอยู่แล้ว ผู้อ่านสามารถพบได้จากหนังสือทฤษฎีกราฟเบื้องต้นทั่วไป เช่น ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนิรุทธิ์ พิพรรณจินดา [1] และบทตั้ง 1.3 – 1.5 เป็นบทตั้งที่เกี่ยวกับจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน กราฟยูนิไซคลิก และกราฟไบไซคลิก ตามลำดับ

บทตั้ง 1.1 [1] สำหรับกราฟเชื่อมโยง G จะได้ว่าเส้น $e \in E(G)$ จะเป็นเส้นตัดในกราฟ G ก็ต่อเมื่อ e ไม่เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักรของกราฟ G

บทตั้ง 1.2 [1] ให้ G เป็นกราฟที่มีอันดับ n และขนาด m ถ้า G มีสมบัติ 2 ข้อใด ๆ จาก 3 ข้อต่อไปนี้

- (1) G เป็นกราฟเชื่อมโยง
- (2) G ไม่บรรจุวัฏจักร
- (3) $m = n - 1$

แล้ว G จะเป็นต้นไม้

บทตั้ง 1.3 [2] ให้ G เป็นกราฟ k -ไซคลิกที่แตกต่างกัน เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ ที่มี C_i เป็นวัฏจักรในกราฟ G เมื่อ $i = 1, 2, \dots, k$ ถ้า $|E(C_i)| = q_i$ แล้ว $\tau(G) = \prod_{i=1}^k q_i$

บทตั้ง 1.4 [2] ให้ G เป็นกราฟยูนิไซคลิกที่มี C เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า $|E(C)| = q$ แล้ว $\tau(G) = q$

บทตั้ง 1.5 [2] ให้ G เป็นกราฟไบไซคลิกที่มี C_1 และ C_2 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า $|E(C_i)| = q_i$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ แล้ว $\tau(G) = q_1 q_2 - s^2$

2. การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ตัวของกราฟไตรไซคลิก

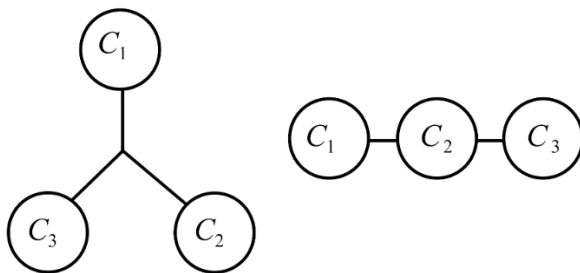
จากที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ผ่านมาว่า จะเรียกกราฟ G อันดับ n ว่า กราฟไตรไซคลิก ถ้ากราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยงและมีขนาดเป็น $n + 2$ ในที่นี้เพื่อให้ง่ายต่อการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ จะแบ่งกราฟไตรไซคลิกเป็น 4 กลุ่ม ตามรูปแบบโครงสร้างของวัฏจักรที่ปรากฏในกราฟ โดยพิจารณาจากรูปแบบของวัฏจักรจำนวน 3 วัฏจักร ดังนี้

รูปแบบ A ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่อยู่ในรูปแบบของกราฟ 3-ไซคลิกที่แตกต่างกัน โดยวัฏจักรทั้ง 3 วัฏจักรไม่ใช่เส้นร่วมกันเลย มีแผนภาพทั่วไปดังรูปที่ 2.1

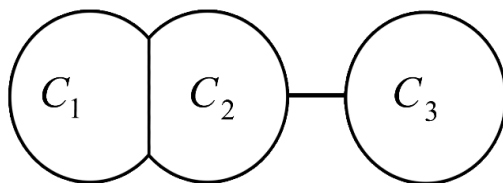
รูปแบบ B ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่มีวัฏจักรจำนวน 2 วัฏจักรใช้เส้นร่วมกัน มีแผนภาพทั่วไปดังรูปที่ 2.2

รูปแบบ C ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่วัฏจักรที่ 1 ใช้เส้นร่วมกับวัฏจักรที่ 2 และวัฏจักรที่ 2 ใช้เส้นร่วมกับวัฏจักรที่ 3 แต่วัฏจักรที่ 1 และวัฏจักรที่ 3 ไม่ใช่เส้นร่วมกัน มีแผนภาพทั่วไปดังรูปที่ 2.3

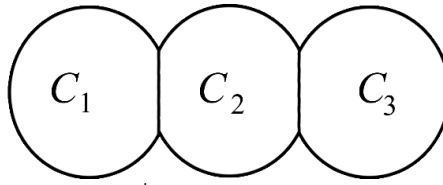
รูปแบบ D ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่วัฏจักรทั้ง 3 วัฏจักรใช้เส้นร่วมกันทั้งหมด มีแผนภาพทั่วไปดังรูปที่ 2.4



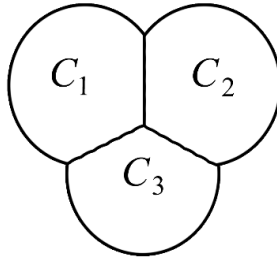
รูปที่ 2.1 แผนภาพทั่วไปของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ A



รูปที่ 2.2 แผนภาพทั่วไปของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ B



รูปที่ 2.3 แผนภาพทั่วไปของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ C



รูปที่ 2.4 แผนภาพทั่วไปของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ D

สำหรับกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ A เป็นกราฟไตรไซคลิกที่แตกต่างกันสามารถหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิกที่แตกต่างกัน รูปแบบ A ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่ $|E(C_i)| = q_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 q_i$$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดจากบทตั้ง 1.3

□

การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ B, C และ D จะแสดงโดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ B ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่ $|E(C_i)| = q_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$

ถ้า $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ และ $|E(C_1) \cap E(C_3)| = |E(C_2) \cap E(C_3)| = 0$ แล้ว

$$\tau(G) = (q_1 q_2 - s^2) q_3$$

บทพิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ B ดังรูปที่ 2.2

เนื่องจากต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G เกิดจากการลบเส้น 1 เส้นของแต่ละวัฏจักร

ถ้า $e \in E(C_3)$ แล้ว $G \setminus e$ จะเป็นกราฟไบไซคลิก จากบทตั้ง 1.5 จะได้ $\tau(G \setminus e) = q_1 q_2 - s^2$

เนื่องจาก $|E(C_3)| = q_3$ ดังนั้น

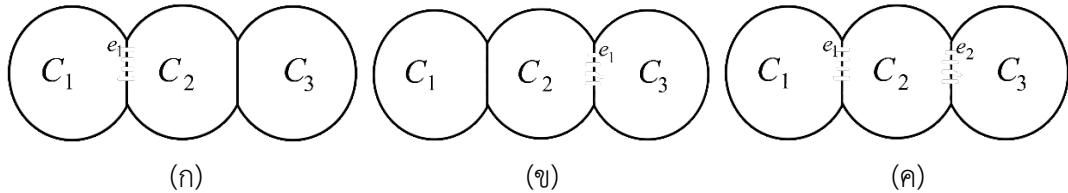
$$\tau(G) = \sum_{e_i \in E(C_3)} \tau(G \setminus e_i) = (q_1 q_2 - s^2) q_3 \quad \square$$

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ C ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G

ถ้า $|E(C_1) - E(C_2)| = q_1$, $|E(C_2) - E(C_1) - E(C_3)| = q_2$, $|E(C_3) - E(C_2)| = q_3$,
 $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_1$, $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_2$ และ $|E(C_1) \cap E(C_3)| = 0$ แล้ว

$$\tau(G) = q_1 q_2 q_3 + s_1 (q_1 + q_2) q_3 + s_2 q_1 (q_2 + q_3) + s_1 s_2 (q_1 + q_2 + q_3)$$

บทพิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์จะแบ่งออกเป็น 4 กรณี ประกอบด้วย กรณี 1 ไม่ลบเส้นร่วมระหว่าง 2 วัฏจักรเลย และ กรณี 2 – 4 การลบเส้นบนเส้นร่วมระหว่าง 2 วัฏจักร จำนวนไม่เกิน 2 เส้น จากนั้นจึงทำการพิจารณาลบเส้นบนวัฏจักรที่ไม่ใช่เส้นร่วม ดังรูปที่ 2.5 (ก) - (ค)



รูปที่ 2.5 แผนภาพทั่วไปของการแบ่งกรณีตามการลบเส้นบนเส้นร่วมระหว่าง 2 วัฏจักร

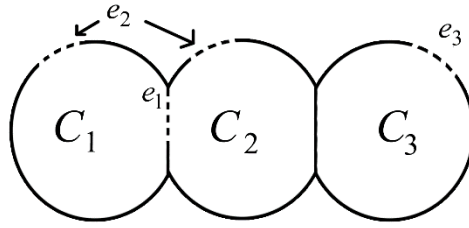
กรณี 1 ถ้าต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G คือกราฟ $G\{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $e_1 \in E(C_1) - E(C_2)$,
 $e_2 \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ และ $e_3 \in E(C_3) - E(C_2)$

จาก $|E(C_1) - E(C_2)| = q_1$, $|E(C_2) - E(C_1) - E(C_3)| = q_2$, $|E(C_3) - E(C_2)| = q_3$

โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ว่า ต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G คำนวณได้จากผลคูณของ q_1, q_2 และ q_3 นั่นคือ $\tau(G\{e_1, e_2, e_3\}) = q_1 q_2 q_3$

กรณี 2 ถ้า $e_1 \in E(C_1) \cap E(C_2)$

เพื่อไม่ให้เกิดกรณีการลบเส้นที่ซ้ำกับกรณีตามรูปที่ 2.5 (ค) จะพิจารณาลบเส้นบนวัฏจักรที่ไม่ใช่เส้นร่วมจำนวน 2 เส้น ได้แก่ $e_2 \in E(C_1) - E(C_2)$ หรือ $e_2 \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ และ $e_3 \in E(C_3) - E(C_2)$ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G\{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $e_1 \in E(C_1) \cap E(C_2)$

โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ว่า $\tau(G \setminus e_1) = (q_1 + q_2)q_3$

เนื่องจาก $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_1$ ดังนั้น

$$\sum_{e_i \in E(C_1) \cap E(C_2)} \tau(G \setminus e_i) = s_1(q_1 + q_2)q_3$$

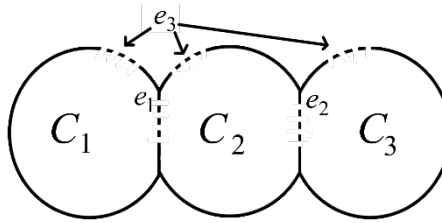
กรณี 3 ถ้า $e_1 \in E(C_2) \cap E(C_3)$

จะสามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกับกรณี 2 ดังนั้น

$$\sum_{e_i \in E(C_2) \cap E(C_3)} \tau(G \setminus e_i) = s_2 q_1 (q_2 + q_3)$$

กรณี 4 ถ้า $e_1 \in E(C_1) \cap E(C_2)$ และ $e_2 \in E(C_2) \cap E(C_3)$

จะพิจารณาลบเส้นบนวัฏจักรที่ไม่ใช่เส้นร่วมจำนวน 1 เส้น ได้แก่ $e_3 \in E(G) - (E(C_1) \cap E(C_2)) - (E(C_2) \cap E(C_3))$ ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G\{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $e_1 \in E(C_1) \cap E(C_2)$, $e_2 \in E(C_2) \cap E(C_3)$

โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ว่า $\tau(G \setminus \{e_1, e_2\}) = q_1 + q_2 + q_3$

เนื่องจาก $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_1$ และ $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_2$ ดังนั้น

$$\sum_{\substack{e_i \in E(C_1) \cap E(C_2) \\ e_j \in E(C_2) \cap E(C_3)}} \tau(G \setminus \{e_i, e_j\}) = s_1 s_2 (q_1 + q_2 + q_3)$$

จากกรณี 1 - 4 จะได้

$$\tau(G) = q_1 q_2 q_3 + s_1 (q_1 + q_2) q_3 + s_2 q_1 (q_2 + q_3) + s_1 s_2 (q_1 + q_2 + q_3)$$

□

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก รูปแบบ D ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ซึ่ง $|E(C_i)| = r_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ i \neq j}} s_j$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_3$, $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_1$,

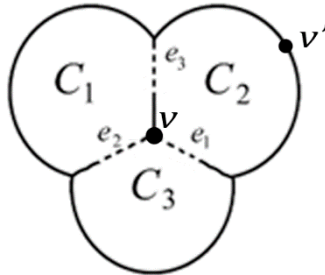
$|E(C_1) \cap E(C_3)| = s_2$, $s = s_1 + s_2 + s_3$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 r_i + \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} r_i r_j (s_i + s_j) + t \sum_{i=1}^3 r_i$$

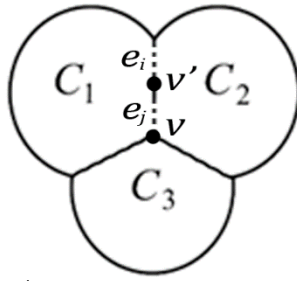
เมื่อ $t = \binom{S}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{S_i}{2}$

บทพิสูจน์ ให้ $S_1 = E(C_2) \cap E(C_3)$, $S_2 = E(C_1) \cap E(C_3)$, $S_3 = E(C_1) \cap E(C_2)$

ถ้า $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq S_1 \cup S_2 \cup S_3$ จะได้ $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ เป็นกราฟย่อยของกราฟ G (1) ถ้าแต่ละ e_1, e_2, e_3 เป็นเส้นที่บรรจุอยู่ในเซต S_1, S_2, S_3 ที่แตกต่างกันทั้งหมด จะได้ว่ามีจุด v และ v' ในกราฟ $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ ไม่เชื่อมโยงกัน เมื่อ $v \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$ และ v' เป็นจุดภายในบางวัฏจักร C_k ที่ไม่มีเส้นร่วมกับวัฏจักรอื่น ดังรูปที่ 2.9 (2) ถ้า $e_i, e_j \in S_k$ สำหรับบาง $k \in \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่ามีจุด v และ v' ในกราฟ $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ ไม่เชื่อมโยงกัน เมื่อ $v \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$ และ v' เป็นจุดปลายของเส้น e_i และ e_j หรือ v' เป็นจุดที่ประชิดกับเส้นร่วมของเซต S_k ที่อยู่ระหว่างเส้น e_i และ e_j ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.9 แผนภาพของกราฟไม่เชื่อมโยง $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $v \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$ และ v' เป็นจุดภายในบางวัฏจักร C_k ที่ไม่มีเส้นร่วมกับวัฏจักรอื่น



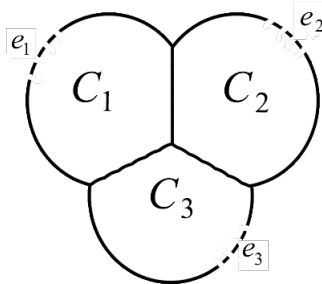
รูปที่ 2.10 แผนภาพของกราฟไม่เชื่อมโยง $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ เมื่อ $v \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$

และ v' เป็นจุดที่ประชิดกับเส้นร่วมของเซต S_k ที่อยู่ระหว่างเส้น e_i และ e_j

ดังนั้น ต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G คือ กราฟ $G \setminus E'$ เมื่อ $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ โดยที่ $E' \not\subseteq S_1 \cup S_2 \cup S_3$ จะมี 3 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ถ้า $e'_i \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3$ สำหรับ $i \in \{1, 2, 3\}$ โดยที่ $e'_1 \in E(C_1) - (E(C_2) \cup E(C_3))$,

$e'_2 \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ และ $e'_3 \in E(C_3) - (E(C_1) \cup E(C_2))$ จะได้ $G \setminus E'$ เป็นต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.11

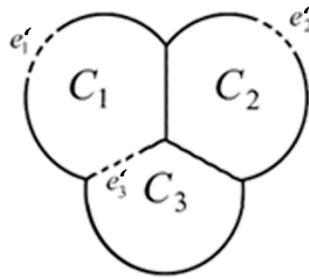


รูปที่ 2.11 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G \setminus E'$ ที่ได้จากกรณี 1

โดยหลักการนับ จะได้ $\tau_1(G) = r_1 r_2 r_3$ เมื่อ $\tau_1(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E' ที่ได้จากกรณี 1

กรณี 2 พิจารณาเป็น 3 กรณีย่อย ได้แก่

กรณี 2.1 ถ้า $e'_3 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ โดยที่ $e'_3 \in S_1 \cup S_2$, $e'_1 \in E(C_1) - (E(C_2) \cup E(C_3))$ และ $e'_2 \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ จะได้ $G \setminus E'$ เป็นต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.12



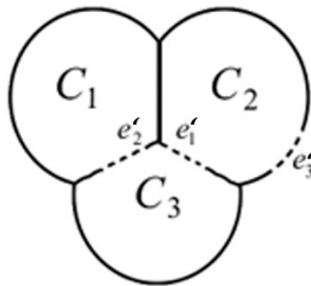
รูปที่ 2.12 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G \setminus E'$ ที่ได้จากกรณี 2.1

โดยหลักการนับ จะได้ $\tau_{2.1}(G) = r_1 r_2 (s_1 + s_2)$ เมื่อ $\tau_{2.1}(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E' ที่ได้จากกรณี 2.1

กรณี 2.2 ถ้า $e_2' \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ โดยที่ $e_2' \in S_1 \cup S_3$, $e_1' \in E(C_1) - (E(C_2) \cup E(C_3))$ และ $e_3' \in E(C_3) - (E(C_1) \cup E(C_2))$ จะได้ $\tau_{2.2}(G) = r_1 r_3 (s_1 + s_3)$ เมื่อ $\tau_{2.2}(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E'

กรณี 2.3 ถ้า $e_1' \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ โดยที่ $e_1' \in S_2 \cup S_3$, $e_2' \in E(C_2) - (E(C_1) \cup E(C_3))$ และ $e_3' \in E(C_3) - (E(C_1) \cup E(C_2))$ จะได้ $\tau_{2.3}(G) = r_2 r_3 (s_2 + s_3)$ เมื่อ $\tau_{2.3}(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E'

กรณี 3 ถ้า $e_1' \in S_i$, $e_2' \in S_j$ โดยที่ $i \neq j$ และ $e_3' \in E(G) - (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ จะได้ $G \setminus E'$ เป็นต้นไม้แบบแผ่ทั่วที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G \setminus E'$ ที่ได้จากกรณี 3

โดยหลักการนับ จะได้ $\tau_3(G) = (r_1 + r_2 + r_3) \left(\binom{s}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2} \right)$ เมื่อ $\tau_3(G)$ หมายถึง จำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ G ที่ได้จากการลบเส้นใน E' ที่ได้จากกรณี 3

จากกรณี 1, 2 และ 3 จะได้

$$\begin{aligned}\tau(G) = & r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 (s_1 + s_2) + r_1 r_3 (s_1 + s_3) + r_2 r_3 (s_2 + s_3) \\ & + (r_1 + r_2 + r_3) \left(\binom{S}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2} \right)\end{aligned}$$

ให้ $t = \binom{S}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2}$ จะได้

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 r_i + \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} r_i r_j (s_i + s_j) + t \sum_{i=1}^3 r_i \quad \square$$

3. สรุป

ในการศึกษาการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิก ได้แบ่งการศึกษาดังออกเป็น 4 รูปแบบตามโครงสร้างของวัฏจักรที่ปรากฏในกราฟ ดังนี้

รูปแบบ A ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่อยู่ในรูปแบบของกราฟ 3-ไซคลิกที่แตกต่างกัน โดยวัฏจักรทั้ง 3 วัฏจักรไม่ใช้เส้นร่วมกันเลย

รูปแบบ B ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่มีวัฏจักรจำนวน 2 วัฏจักรใช้เส้นร่วมกัน

รูปแบบ C ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่วัฏจักรที่ 1 ใช้เส้นร่วมกับวัฏจักรที่ 2 และวัฏจักรที่ 2 ใช้เส้นร่วมกับวัฏจักรที่ 3 แต่วัฏจักรที่ 1 และวัฏจักรที่ 3 ไม่ใช้เส้นร่วมกัน

รูปแบบ D ได้แก่ กราฟไตรไซคลิกที่วัฏจักรทั้ง 3 วัฏจักรใช้เส้นร่วมกันทั้งหมด

ซึ่งได้สูตรของการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิกทั้ง 4 กรณี ดังนี้

รูปแบบ A ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิกที่แตกต่างกัน ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่ $|E(C_i)| = q_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 q_i$$

รูปแบบ B ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่ $|E(C_i)| = q_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$

ถ้า $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ และ $|E(C_1) \cap E(C_3)| = |E(C_2) \cap E(C_3)| = 0$ แล้ว

$$\tau(G) = (q_1 q_2 - s^2) q_3$$

รูปแบบ C ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G

ถ้า $|E(C_1) - E(C_2)| = q_1$, $|E(C_2) - E(C_1) - E(C_3)| = q_2$, $|E(C_3) - E(C_2)| = q_3$,

$|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_1$, $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_2$ และ $|E(C_1) \cap E(C_3)| = 0$ แล้ว

$$\tau(G) = q_1 q_2 q_3 + s_1(q_1 + q_2)q_3 + s_2 q_1(q_2 + q_3) + s_1 s_2(q_1 + q_2 + q_3)$$

รูปแบบ D ให้ G เป็นกราฟไตรไซคลิก ที่มี C_1, C_2 และ C_3 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ซึ่ง

$|E(C_i)| = r_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ i \neq j}} s_j$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s_3$, $|E(C_2) \cap E(C_3)| = s_1$,

$|E(C_1) \cap E(C_3)| = s_2$, $s = s_1 + s_2 + s_3$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^3 r_i + \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} r_i r_j (s_i + s_j) + t \sum_{i=1}^3 r_i$$

เมื่อ $t = \binom{s}{2} - \sum_{i=1}^3 \binom{s_i}{2}$

สำหรับผู้สนใจในการศึกษาต่อ สามารถนำขั้นตอนวิธีการหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟไตรไซคลิกไปสู่การหาจำนวนต้นไม้แบบแผ่ทั่วของกราฟ k -ไซคลิก ที่มีลักษณะเฉพาะบางประการได้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้ให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการจัดทำบทความฉบับนี้จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] นิรุตต์ พิพรรณจินดา. (2560). *ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น*. กำแพงเพชร: มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร.
- Pipattanajinda, N. (2017). *Introduction to graph theory*. Kampheng Phet: Kamphaeng Phet Rajabhat University.
- [2] ปฐยา มีสุข และ นิรุตต์ พิพรรณจินดา. (2563). สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร. *วารสารคณิตศาสตร์ราชภัฏ*. 5 (1), น. 23 – 34.

- Meesuk, M., and Pipattanajinda, N. (2020). A Formula for Finding The Number of Spanning Trees on The Bicyclic Graph. *Rajabhat Mathematics Journal*. 5 (1), p. 23 – 34.
- [3] Abu-Sbeih, M. Z. (1990). On The Number of Spanning Tree of K_n and $K_{n,m}$. *Discrete Mathematics*, 84 (2), p. 205 – 207.
- [4] Cayley, A. (1889). A Theorem on Trees, *Quart. J. Pure Appl. Math.* 23, p. 376 – 378.
- [5] Kirchhoff, G. (1847). Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird, *Annalen der Physik*, 148, p. 497 – 508.
- [6] Li, J. and Shiu, W. C. (2014). The Number of Spanning Trees of Composite Graphs. *J. of Combi. Math. and Combi. Compu.* 89, p. 45 – 52.
- [7] Li, J., Shiu, W. C. and Chang, A. (2010). The Number of Spanning Trees of A Graph. *Appl. Math. Letters*. 23 (3), p. 286 – 290.



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา 69 เล่มที่ 712 กันยายน – ธันวาคม 2567

<https://www.mathassociation.or.th>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของรูปสามเหลี่ยม On The Rectangle Flanks of A Triangle

DOI: 10.14456/mj-math.2024.4

คมสัน ไชยกาล¹ อินทัช โพธิ์ล้ำ² และอรรณพ แก้วขาว^{3,*}

^{1,2,3} ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี 20131

Komsan Chaiyakarn¹ Intouch Pothilar² and Annop Kaewkhao^{3,*}

^{1,2,3} Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, ChonBuri 20131

Email: ¹Komsan@gmail.com ²Intouch@gmail.com ³Tor_idin@buu.ac.th

วันที่รับบทความ : 23 เมษายน 2567

วันที่แก้ไขบทความ : 15 สิงหาคม 2567

วันที่ตอบรับบทความ : 13 ธันวาคม 2567

บทคัดย่อ

บทความนี้ จะแสดงว่า อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีค่าเท่ากับ 3 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และอัตราส่วนนี้มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$ เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ด้านอิสระมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาน

คำสำคัญ: สี่เหลี่ยมขนานข้าง

* ผู้เขียนหลัก

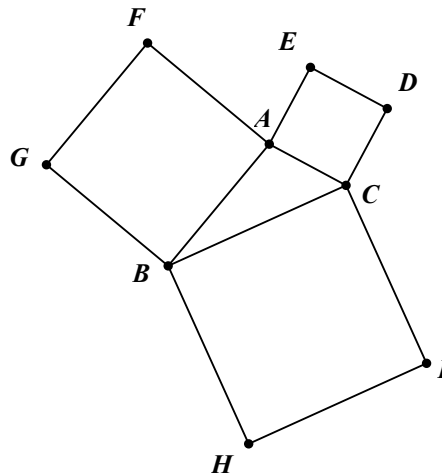
ABSTRACT

In this paper, we show that if the rectangle flanks of triangle are squares, then the ratio of the sum of the areas of the 2nd order rectangle flanks to the sum of the areas of the 1st order rectangle flanks is 3. On the other hand, the ratio equal to $\frac{3}{4}$ if the length of the free side is half of the length of the flank side.

Keywords: Rectangle flanks

1. บทนำ

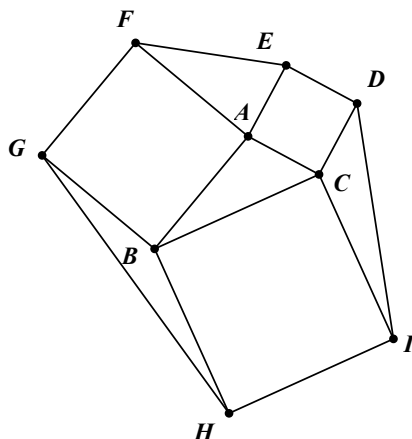
กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านร่วมกับ $\triangle ABC$ ว่ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้าง (Rectangle flanks) อันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$



รูปที่ 1.1 รูปสี่เหลี่ยมขนานข้าง อันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$

จากรูปที่ 1.1 จะเห็นว่า $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ เรียกด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ ที่เป็นด้านร่วมกับรูปสามเหลี่ยมว่า **ด้านขนาน (Flank side)** และเรียกด้านที่ประชิดกับด้านขนานว่า **ด้านอิสระ (Free side)**

เรียกรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ว่า **รูปสามเหลี่ยมขนานข้าง (Triangle flank)** ของ $\triangle ABC$



รูปที่ 1.2 รูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$

จากรูปที่ 1.2 จะได้ว่า $\triangle AEF$, $\triangle BGH$ และ $\triangle CID$ เป็นรูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$

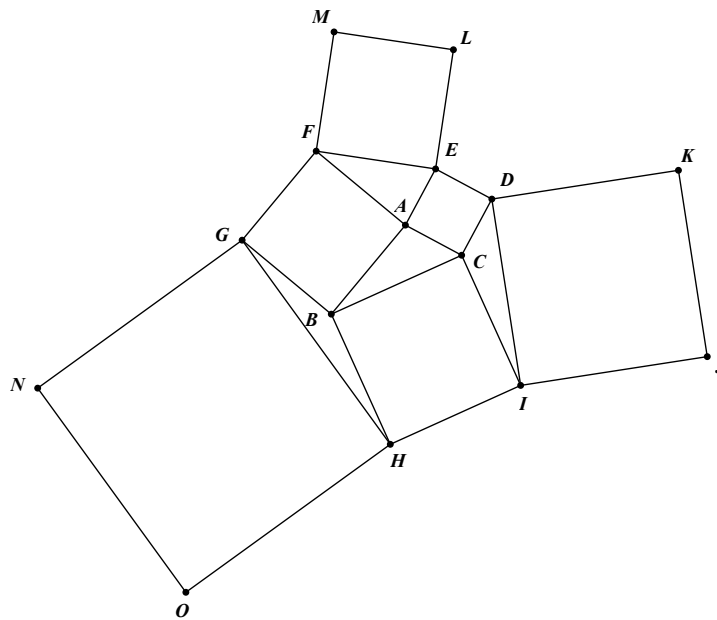
ในปี ค.ศ. 2005 Gilbey [1] ได้แสดงให้เห็นว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วรูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ แต่ละรูปจะมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ABC$ นั่นคือ $[AEF] = [BGH] = [CID] = [ABC]$

ในปี ค.ศ. 2018 Syawaludin และคณะ [2] ได้แสดงว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ ทั้งสามรูปมีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาน แล้วรูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ ทั้งสามรูปจะมีพื้นที่เท่ากัน นั่นคือ $[AEF] = [BGH] = [CID]$

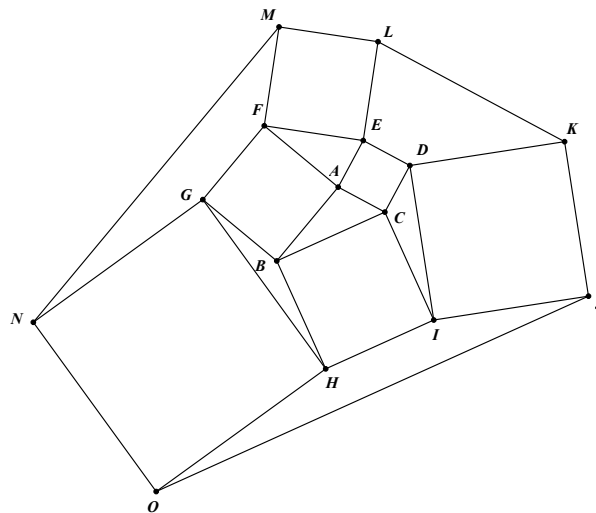
พิจารณารูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ จะเรียก รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างของรูปสามเหลี่ยมขนานข้างของ $\triangle ABC$ ที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ ว่า **รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ของ $\triangle ABC$**

จากรูปที่ 1.3 จะเห็นว่า $\square FELM$, $\square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ของ $\triangle ABC$

Syawaludin และคณะ [2] ยังได้แสดงให้เห็นอีกด้วยว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างทั้งสองอันดับเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วรูปสี่เหลี่ยมที่เกิดจากรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งมีพื้นที่เท่ากัน และมีพื้นที่เป็น 5 เท่าของ $\triangle ABC$ นั่นคือ $\square GFMN$, $\square IHOJ$ และ $\square EDKL$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และ $[GFMN] = [IHOJ] = [EDKL] = 5[ABC]$ ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.3 รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ของ $\triangle ABC$



รูปที่ 1.4 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูของ Syawaludin และคณะ

ในบทความนี้ เราสนใจความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และเมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านขนาน

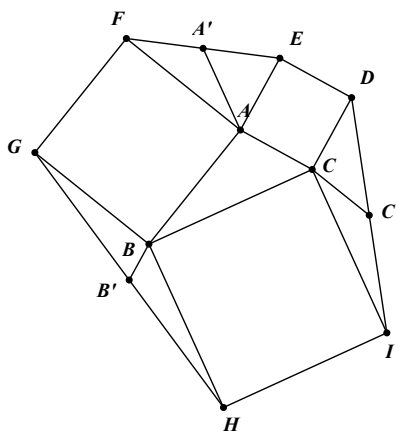
2. สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดข้าง

ในหัวข้อนี้ จะแสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 เมื่อรูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยเริ่มจากบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 2.1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 1 ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

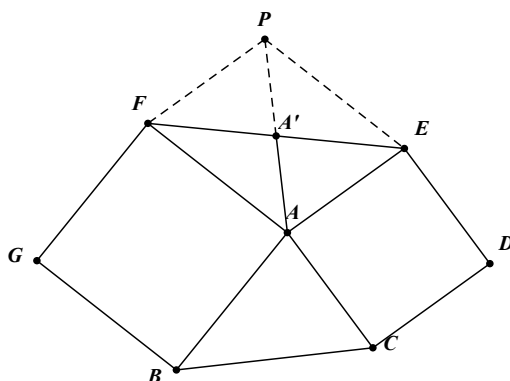
ถ้า A' , B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF , GH และ ID ตามลำดับ แล้ว

$$AA' = \frac{BC}{2}, BB' = \frac{AC}{2} \text{ และ } CC' = \frac{AB}{2}$$



รูปที่ 2.1 ภาพประกอบบทตั้ง 2.1

บทพิสูจน์ ให้ P เป็นจุดที่ทำให้ $\square AEPF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ภาพประกอบบทพิสูจน์บทตั้ง 2.1

เนื่องจาก A' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF ซึ่งเป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $AEPF$ จะได้ A' อยู่บนเส้นทแยงมุม AP และ $AA' = \frac{AP}{2}$

พิจารณาที่จุด A จะได้ $180^\circ = \angle FAE + \angle CAB = (\angle FAP + \angle PAE) + \angle CAB$

เนื่องจาก $\overline{PE} \parallel \overline{FA}$ จะได้ $\angle FAP = \angle APE$ ดังนั้น $180^\circ = \angle APE + \angle PAE + \angle CAB$ นั่นคือ $\angle CAB = 180^\circ - (\angle APE + \angle PAE)$ ดังนั้น $\angle CAB = \angle AEP$

เนื่องจาก $AC = AE$, $\angle CAB = \angle AEP$ และ $AB = PE$ จะได้ $\triangle ABC \cong \triangle EPA$ ดังนั้น $AP = BC$ นั่นคือ $AA' = \frac{BC}{2}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $BB' = \frac{AC}{2}$ และ $CC' = \frac{AB}{2}$ □

ต่อไปจะแสดงว่า อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ มีค่าเท่ากับ 3 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และมี $\square FELM$, $\square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 2

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างทุกรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้ว $\frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} = 3$

บทพิสูจน์ ให้ A' , B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF , GH และ ID ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.3

โดยทฤษฎีบทของสจวร์ต (Stewart's theorem) และบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า

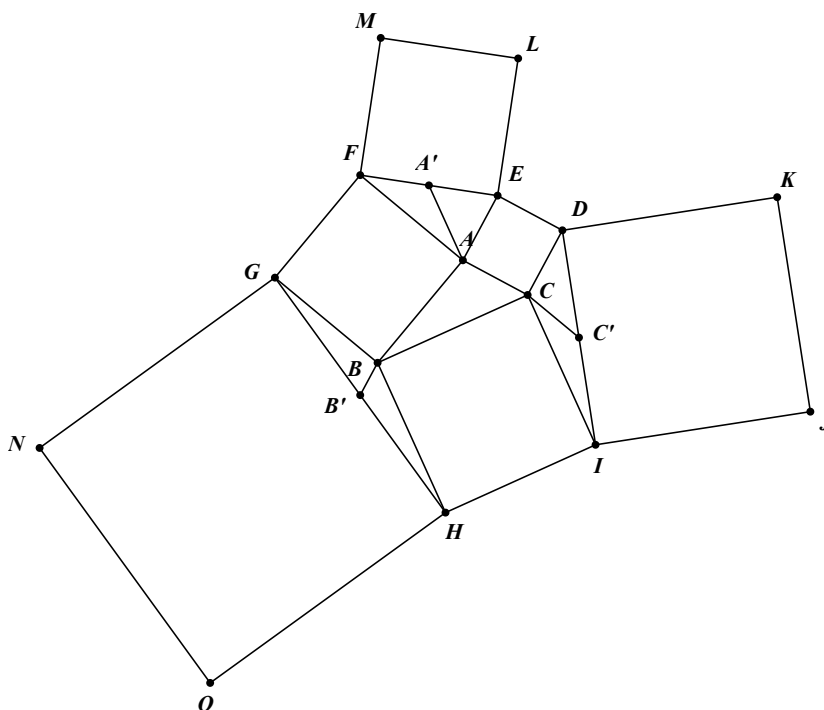
$$(AA')^2 = \frac{1}{2} \left(AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \right)$$

นั่นคือ $\frac{BC^2}{4} = \frac{AC^2}{2} + \frac{AB^2}{2} - \frac{EF^2}{4}$ ดังนั้น $BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - EF^2$

นั่นคือ $EF^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $GH^2 = 2BA^2 + 2BC^2 - AC^2$ และ $DI^2 = 2CA^2 + 2CB^2 - AB^2$

ดังนั้น $\frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} = \frac{EF^2 + GH^2 + DI^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$



รูปที่ 2.3 ภาพประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) + (2BA^2 + 2BC^2 - AC^2) + (2CA^2 + 2CB^2 - AB^2)}{AC^2 + AB^2 + BC^2} \\
 &= \frac{3AB^2 + 3AC^2 + 3BC^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

□

3. สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดข้าง

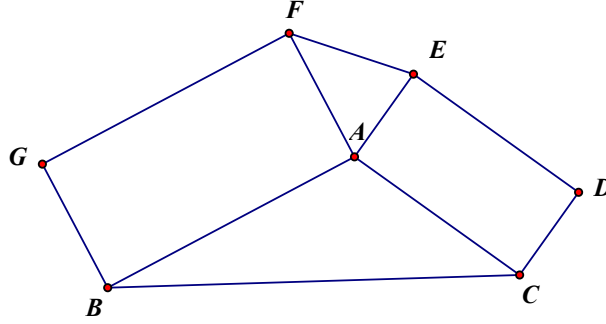
ในหัวข้อนี้ จะแสดงว่า เมื่อสี่เหลี่ยมขนาดข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาดแล้ว อัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 2 ต่อผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 1 ของ $\triangle ABC$ มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 1 และมี $\square FELM$, $\square HGNO$ และ $\square DIJK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาดข้างอันดับที่ 2

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมขนานข้างมีความยาวด้านอิสระเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านขนาน แล้ว

$$\frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} = \frac{3}{4}$$

บทพิสูจน์ พิจารณา $\triangle AEF$ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ภาพประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1

โดยกฎของโคไซน์ จะได้ $EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2(AE)(AF)\cos(\angle FAE)$

นั่นคือ $EF^2 = AE^2 + AF^2 + 2(AE)(AF)\cos(\angle CAB)$

เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างมีด้านอิสระยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาน จะได้ $AE = \frac{AC}{2}$

และ $AF = \frac{AB}{2}$ ดังนั้น

$$4EF^2 = AC^2 + AB^2 + 2(AC)(AB)\cos(\angle CAB) \quad (1)$$

พิจารณา $\triangle ABC$ โดยกฎของโคไซน์ จะได้

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos(\angle CAB) \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $4EF^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$

นั่นคือ $EF^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $GH^2 = \frac{BA^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$ และ $DI^2 = \frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} &= \frac{EF^2 + GH^2 + DI^2}{AC^2 + AB^2 + BC^2} \\ &= \frac{\left(\frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}\right) + \left(\frac{BA^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}\right) + \left(\frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}\right)}{AC^2 + AB^2 + BC^2} \end{aligned}$$

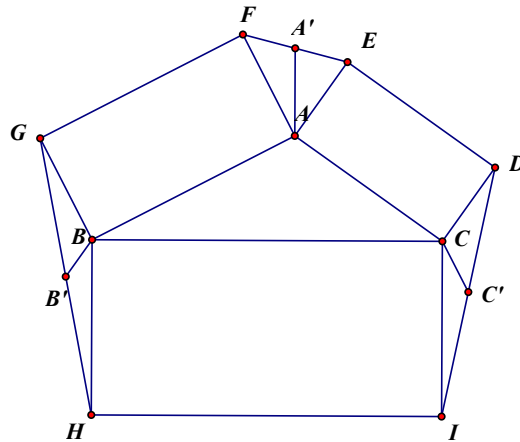
$$= \frac{\frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2)}{AC^2 + AB^2 + BC^2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

นั่นคือ $\frac{[FELM] + [HGNO] + [DIJK]}{[ACDE] + [BAFG] + [CBHI]} = \frac{3}{4}$ □

จากการพิสูจน์ข้างต้น ยังสามารถหาความสัมพันธ์ของขนาดของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม ขนาบข้างกับด้านของรูปสามเหลี่ยมตั้งต้นได้ ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.2 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\square ACDE$, $\square BAFG$ และ $\square CBHI$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 ซึ่งด้านอิสระยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านขนาน ถ้า A' , B' และ C' เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EF , GH และ ID ตามลำดับ แล้ว $AA' = \frac{BC}{4}$, $BB' = \frac{AC}{4}$ และ $CC' = \frac{AB}{4}$



รูปที่ 3.2 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.2

บทพิสูจน์ จากบทพิสูจน์ข้างต้น ได้ว่า $EF^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

เนื่องจาก $AE = \frac{AC}{2}$ และ $AF = \frac{AB}{2}$ จะได้

$$BC^2 = 8 \left(AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \right) \quad (3)$$

พิจารณา $\triangle AEF$ โดยทฤษฎีบทของสจวร์ต จะได้ $(AA')^2 = \frac{1}{2} \left(AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \right)$ หรือ

$$2(AA')^2 = AE^2 + AF^2 - \frac{EF^2}{2} \quad (4)$$

จาก (3) และ (4) จะได้ $BC^2 = 16(AA')^2$ นั่นคือ $AA' = \frac{BC}{4}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $BB' = \frac{AC}{4}$ และ $CC' = \frac{AB}{4}$ □

4. สรุป

จากข้างต้นพบว่า การศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ของรูปสามเหลี่ยมนั้นค่อนข้างเรียบง่ายและน่าสนใจ ซึ่งนำไปพิจารณาต่อไปว่า ในกรณีที่ด้านอิสระและด้านขนานมีความสัมพันธ์กันเป็นอัตราส่วน k แล้วความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนานข้างอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ของรูปสามเหลี่ยมนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าคงที่ k หรือไม่อย่างไร

เอกสารอ้างอิง

- [1] Gilbey, J. (2005). Responding to Geoff Fauxs Challenge. *Mathematics Teaching*, 190, p. 16
- [2] Syawaludin, M. R., Mashadi, M. and Gemawati, S. (2018). Modification Cross' Theorem on Triangle with Congruence. *Pekanbaru Indonesia*, 4 (5), p. 40 - 44

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ใน วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้	ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.
ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.	ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.
ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.	ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.
การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.	เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้
ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ
อีเมล : ภาษาอังกฤษ
บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ
บทนำ เนื้อหา สรุป : ภาษาไทย หรือ ภาษาอังกฤษ อย่างใดอย่างหนึ่ง
เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น

2.1 2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาต ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับใต้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป”

เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป

เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ

“ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ใต้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nSTRU.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทยก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณະวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

สมาชิกของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

มี 2 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ และสมาชิกสามัญ

สมาชิกสามัญ ได้แก่ ผู้ที่มีความสนใจทางคณิตศาสตร์ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ เมื่อได้รับหนังสืออนุญาตจากสมาคมฯ เป็นลายลักษณ์อักษร
2. มีสิทธิเข้าถึงวารสารคณิตศาสตร์ ฉบับเต็มในรูปแบบออนไลน์
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

ค่าสมัครสมาชิก ประกอบด้วย

1. ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท
2. ค่าสมาชิกสามัญ ตลอดชีพ 3,000 บาท และ รายปี 250 บาท

วาระการเป็นสมาชิกสามัญรายปี เริ่มตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม ถึงวันที่ 31 ธันวาคม ของปี

กรอกใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

<https://www.mathassociation.or.th> หัวข้อ “สมาชิกสมาคม”



ใบสมัครสมาชิก

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

☐ สมาชิกใหม่

☐ ต่ออายุ เลขสมาชิกเดิม.....

วันที่ เดือน พ.ศ.

ข้าพเจ้า (ชื่อ - สกุล) อาชีพ

เบอร์โทรศัพท์ อีเมล

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท)

☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน 30 บาท

รวมเป็นเงิน บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังบัญชีเลขที่ 162-0-25671-1 ธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับการจัดส่งเอกสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ซอย หมู่ที่

ถนน ตำบล อำเภอ

จังหวัด รหัสไปรษณีย์

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....

รับเงินค่าสมาชิกจำนวน.....

วันที่.....

ลงนาม..... ผู้สมัคร

(.....)

สมัครสมาชิก โดย (1) สแกน QR-Code หรือเข้าถึง <https://bit.ly/37yC835>

หรือ (2) ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน มาที่

(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตู้ ป.ณ. 202 ปณ.จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332 หรือ

(ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบต่อไป



การสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี 2567

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

การสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี 2567 โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เป็นการสอบแข่งขันในสามระดับ คือ ระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยมีการแข่งขันสองประเภท คือ ประเภทบุคคลและประเภททีม

กำหนดการสอบ ในวันอาทิตย์ที่ 10 พฤศจิกายน พ.ศ. 2567 เวลา 9:00 – 12:00 น.

ระดับประถมศึกษา เวลาสอบ 2 ชั่วโมง

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย เวลาสอบ 3 ชั่วโมง

สนามสอบ มีทั้งหมด 8 แห่ง ดังนี้

1. มหาวิทยาลัยรามคำแหง กรุงเทพมหานคร
2. โรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย จังหวัดนครปฐม
3. มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่
4. โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก
5. โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา จังหวัดนครราชสีมา
6. โรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช จังหวัดอุบลราชธานี
7. โรงเรียนธิดาแม่พระ จังหวัดสุราษฎร์ธานี
8. โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา

รางวัลในการแข่งขันในแต่ละระดับ แบ่งเป็น

	ประเภทบุคคล	ประเภททีม
ระดับประเทศ	3 รางวัล	2 รางวัล
ระดับภูมิภาค (5 กลุ่ม)	3 รางวัล	2 รางวัล
ระดับทั่วไป	นักเรียนที่ได้คะแนนสอบตามเกณฑ์ จะได้รับเกียรติบัตร	

ระดับภูมิภาค แบ่งเป็น 5 กลุ่ม ตามโรงเรียนดังนี้

กลุ่มที่ 1 โรงเรียนในกรุงเทพมหานคร โรงเรียนมหิตลวิทย์านุสรณ์ และโรงเรียนกำเนิดวิทย์

กลุ่มที่ 2 โรงเรียนในภาคเหนือ

กลุ่มที่ 3 โรงเรียนในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

กลุ่มที่ 4 โรงเรียนในภาคกลาง ยกเว้นโรงเรียน ในกลุ่มที่ 1

กลุ่มที่ 5 โรงเรียนในภาคใต้

หมายเหตุ ผู้แข่งขันแต่ละคนจะได้รับเงินรางวัลเฉพาะรางวัลสูงสุดเท่านั้น



ข้อสอบและเฉลยแนวคิด การสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี 2567

สามารถอ่านได้ที่ <https://www.mathassociation.or.th/bookshelf/examStore>



ผลการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี 2567

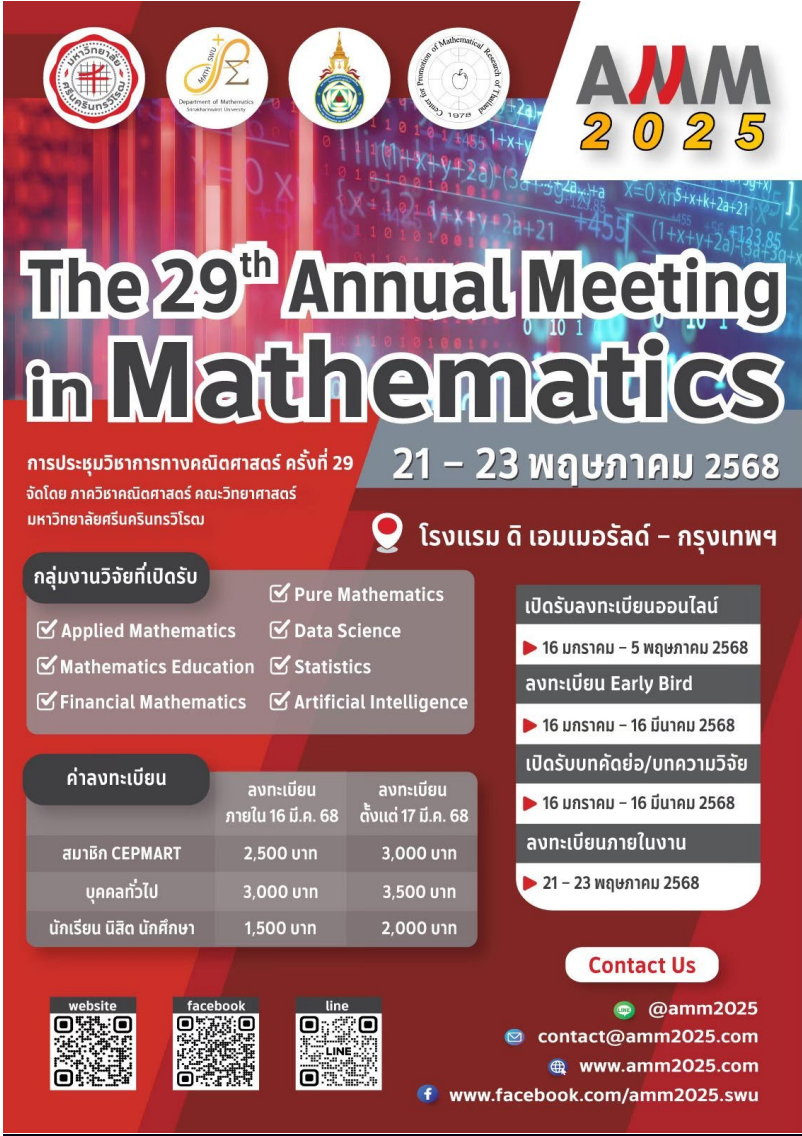
สามารถเข้าดูผลการสอบได้ที่ <https://www.mathassociation.or.th/exam2567>

การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ระดับชาติ ครั้งที่ 29 ประจำปี 2568

The 29th Annual Meeting in Mathematics (AMM2025)

ภายใต้หัวข้อ “Lead a better future with mathematics”

จัดโดย ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ



AMM 2025

The 29th Annual Meeting in Mathematics

การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 29 21 – 23 พฤษภาคม 2568
จัดโดย ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

📍 โรงแรม ดี เอ็ม เออร์อัล – กรุงเทพฯ

กลุ่มงานวิจัยที่เปิดรับ

- ☑ Pure Mathematics
- ☑ Applied Mathematics
- ☑ Mathematics Education
- ☑ Financial Mathematics
- ☑ Data Science
- ☑ Statistics
- ☑ Artificial Intelligence

ค่าลงทะเบียน

	ลงทะเบียน ภายใน 16 มี.ค. 68	ลงทะเบียน ตั้งแต่ 17 มี.ค. 68
สมาชิก CEP MART	2,500 บาท	3,000 บาท
บุคคลทั่วไป	3,000 บาท	3,500 บาท
นักเรียน นิสิต นักศึกษา	1,500 บาท	2,000 บาท

เปิดรับลงทะเบียนออนไลน์

▶ 16 มกราคม – 5 พฤษภาคม 2568

ลงทะเบียน Early Bird

▶ 16 มกราคม – 16 มีนาคม 2568

เปิดรับบทความ/บทความวิจัย

▶ 16 มกราคม – 16 มีนาคม 2568

ลงทะเบียนภายในงาน

▶ 21 – 23 พฤษภาคม 2568

Contact Us

- @amm2025
- contact@amm2025.com
- www.amm2025.com
- www.facebook.com/amm2025.swu

website, facebook, line QR codes

การประชุมวิชาการระดับปริญญาตรีด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ครั้งที่ 13 ประจำปี 2568

The 13th Undergraduate in Applied Mathematics Conference (UAMC 2025)

จัดโดย ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง



The poster for the 13th Undergraduate in Applied Mathematics Conference (UAMC 2025) features a blue and white color scheme with a grid background. At the top, it displays the logos of the School of Science-KMITL 65 and KMITL, along with the UAMC 2025 logo. The main title is in Thai and English, followed by the date and venue. A timeline of events is provided at the bottom, and contact information is listed in a dark blue box.

ขอเรียนเชิญร่วมส่งผลงาน
การประชุมวิชาการระดับปริญญาตรี
ด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 13
The 13th Undergraduate in Applied Mathematics Conference
(UAMC 2025)

วันที่ 30 มีนาคม 2568

ณ สำนักการเรียนรู้ตลอดชีวิตพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
KMITL Lifelong Learning Center (KLLC)

กลุ่มการนำเสนอทั้งแบบบรรยายและโปสเตอร์

- Pure Mathematics
- Data Science / AI / Statistics
- Differential Equations / Modern Calculus / Numerical Analysis
- Mathematical Modeling / Simulations
- Mathematics for Industry / Finance / Insurance

กำหนดการลงทะเบียนและส่งผลงาน

15 ธันวาคม 2567	28 กุมภาพันธ์ 2568	14 มีนาคม 2568	21 มีนาคม 2568	30 มีนาคม 2568
เปิดรับสมัคร ส่งผลงาน เปิดรับลงทะเบียนร่วมงาน	วันสุดท้ายในการส่งบทความ สำหรับผลงานที่จะนำเสนอในงานประชุม	ประกาศผลการคัดเลือก ผลงานที่จะนำเสนอในงานประชุม	วันสุดท้ายของการลงทะเบียนเข้าร่วมงาน และส่งบทความแบบขยาย (Extended abstract)	กำหนดการจัดงาน UAMC 2025

ดูรายละเอียดและส่งผลงานได้ที่
<http://www.math.sci.kmitl.ac.th/uamc2025/index.html>

สอบถามรายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่

- โทรศัพท์ 0-2329-8000-11 ต่อ 6187
- Facebook : MATH KMITL
- E-mail : uamc2025@kmitl.ac.th

ผู้ประสานงานการประชุม

- ผศ.ดร.ศุภระวรรณ มะเวชะ sukrawan.ta@kmitl.ac.th
- ผศ.ดร.จิรภัทร หยกรัตนศักดิ์ jiraphat.yo@kmitl.ac.th
- ผศ.ดร.ณัฐพร ชื่นเจริญ nattaporn.ch@kmitl.ac.th

กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2567 – 2568

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของสมาคมที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์

- วารสารคณิตศาสตร์ (TCI) จำนวน 3 ฉบับต่อปี
- Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี

2. อบรมความรู้คณิตศาสตร์

ดูข้อมูล รายละเอียด และกำหนดการ ได้ที่ <https://www.mathassociation.or.th> ในหัวข้อ กิจกรรมสมาคม

3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย

จัดสอบแข่งขัน ประจำปี พ.ศ. 2567 วันอาทิตย์ที่ 10 พฤศจิกายน พ.ศ. 2567

4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี ครั้งที่ 29 ประจำปี 2568

(The 29th Annual Meeting in Mathematics : AMM2025)

ระหว่างวันที่ 21 - 23 พฤษภาคม พ.ศ. 2568 โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ร่วมกับ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เป็นเจ้าภาพ

5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทย

เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์

- ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

ดูข้อมูลและกำหนดการได้ที่ <https://www.mathassociation.or.th> ในหัวข้อ กิจกรรมสมาคม

- ประชุมวิชาการระดับปริญญาตรี ด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 13 ประจำปี 2568

(The 13th Undergraduate in Applied Mathematics Conference : UAMC2025)

ในวันที่ 30 มีนาคม พ.ศ. 2568 โดย ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เป็นเจ้าภาพ

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

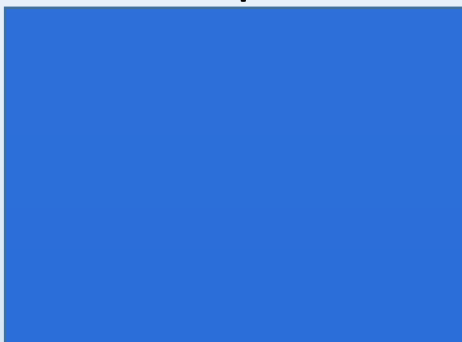
ชั้น 9 อาคารมหาวชิราวุธ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ และโทรสาร 02-252-7980



สี HEX #0064C8
RGB 0 80 210
Transparent 20%



Mathematical Journal

Volume 69 Number 712 September - December 2024

สีปก