



วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๗๑ ฉบับที่ ๗๑๕ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๔

Volume 71 Number 715 May – August 2026

บทความวิชาการ *Academic Article*

การใช้เมทริกซ์จาโคเบียนในการแปลงตัวดำเนินการแคลคูลัสเวกเตอร์
จากพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นพิกัดทรงกลม

1

A Jacobian Matrix Approach to Transform Vector Calculus Operators
from Cartesian to Spherical Coordinates

มาร์คุ ก้าวไกล ชีมา

คณิต คิด วิเคราะห์ : กิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอส

15

Analytical Thinking in Mathematics: Learning Activities on

Finding the General Term of S-Pattern Numbers

เมธาสีทิธี ธีญรัตน์ศรีสกุล



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปริมา ๗๑ ฉบับที่ ๗๑๕ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๙

ISSN XXXX-XXXX (Online)

Mathematical Journal
by The Mathematical Association of Thailand
Under The Patronage of His Majesty The King
Volume 71 Number 715 May – August 2026

ที่ปรึกษา นายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
(ศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

หัวหน้ากองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิชย์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถานที่ติดต่อ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2252-7980 อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

คุยกับกองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

สวัสดี ท่านผู้อ่านวารสารคณิตศาสตร์ทุกท่าน

ยินดีต้อนรับทุกท่านสู่วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ฉบับที่ 715 ประจำเดือนพฤษภาคม ถึง สิงหาคม 2569 วารสารฉบับนี้ ได้รวบรวมบทความวิชาการซึ่งเป็นองค์ความรู้ทั้งเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ ในสาขาคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ประยุกต์ และคณิตศาสตร์ศึกษา โดยมุ่งหวังให้เป็นรากฐานสำคัญในการต่อยอดงานวิจัย และร่วมพัฒนาการเรียนการสอนให้เท่าทันต่อการเปลี่ยนแปลงของโลกยุคปัจจุบันต่อไป

ในช่วงเวลานี้ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ อยู่ระหว่างเปิดรับสมัครเพื่อเข้าร่วมการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี 2569 ซึ่งจะจัดการสอบในวันอาทิตย์ที่ 1 พฤศจิกายน 2569 ณ สนามสอบทั่วประเทศ รวม 15 แห่ง จึงขอเชิญชวนสมาชิกทุกท่านร่วมส่งบุตรหลานและนักเรียนเข้าร่วมการสอบแข่งขันในครั้งนี้ เพื่อประเมินศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของตนเอง และพัฒนาต่อยอดต่อไป

ในนามของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ขอขอบพระคุณคณะผู้จัดทำ ผู้ทรงคุณวุฒิ และนักวิชาการทุกท่าน ที่ได้ร่วมกันสร้างสรรค์บทความอันมีคุณค่า และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าบทความในวารสารฉบับนี้ จะเป็นประโยชน์และสร้างแรงบันดาลใจในการขับเคลื่อนสังคมแห่งการเรียนรู้ที่ยั่งยืนสืบไป

กองบรรณาธิการฝ่ายบริหาร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานดี
รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล
ว่าที่ร้อยเอก ภณัฐ ก้วยเจริญพานิช์

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ฉัฐไชย์ สีนาวงศ์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 3. รศ. ดร.มณฑิรา ดวงสาพล | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 4. รศ. ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี |
| 5. รศ. ดร.สมพงศ์ จิตต์มัน | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 6. รศ. ดร.อุทุมพร พลาวงศ์ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |

กองบรรณาธิการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. ศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี | จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร.ชานนท์ จันทรา | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 3. รศ. ดร.พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 4. รศ. ดร.รณสรณ์ ชินรัมย์ | มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ |
| 5. รศ. ดร.ศิริรัตน์ สิงห์ตัน | มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 6. รศ. ดร.เสนอ คุณประเสริฐ | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ |
| 7. รศ. ดร.อังคณา บุญยี่ด | มหาวิทยาลัยขอนแก่น |
| 8. ผศ. ดร.กนกพร ช่างทอง | มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี |
| 9. ผศ. ดร.ณทัย ฤกษ์ฤทัยรัตน์ | มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |
| 10. ผศ. ดร.พงษ์สัณฐ์ ประกฤตศรี | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตศรีราชา |
| 11. ผศ. ดร.มาลินี ชัยยะ | มหาวิทยาลัยศิลปากร |
| 12. ผศ. ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| 13. ผศ. ดร.ศุภณัฐ ชัยดี | มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 14. ผศ. ดร.สุริย์พร ชาวแพรงน้อย | มหาวิทยาลัยนเรศวร |
| 15. ผศ. ดร.เอื้ออารี บุญเพิ่ม | มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ |
| 16. ดร.จุฬารัตน์ ต้นประเสริฐ | สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ |
| 17. ดร.เทพชัย ทรัพย์นิธิ | สมาคมปัญญาประดิษฐ์ประเทศไทย |

คณะกรรมการบริหารสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปี 2568 - 2570

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์	ที่ปรึกษา
2. ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช	ที่ปรึกษา
3. ศาสตราจารย์ ดร.รติพันธ์ บุญเคลือบ	นายกสมาคมฯ
4. รองศาสตราจารย์ ดร.อุทุมพร พลาวงศ์	อุปนายก
5. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วาสนา สุขกระสานติ	เลขาธิการ
6. อาจารย์ ดร.กิริติ แก้วรักษ์	ผู้ช่วยเลขาธิการ
7. รองศาสตราจารย์ทิพย์วัลย์ สันติวิภาณนท์	เหรัญญิก
8. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ปณิดา ศิริกุลวิเชฐ	ปฎิคม
9. ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)	กรรมการโดยตำแหน่ง
10. ผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย (CEPMART)	กรรมการโดยตำแหน่ง
11. ศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลิ่วกิตติยกุล	กรรมการ
12. รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐไชย สีนาวงค์	กรรมการ
13. รองศาสตราจารย์ อีรวัฒน์ ประกอบผล	กรรมการ
14. รองศาสตราจารย์ ดร.มณฑิรา ดวงสาพล	กรรมการ
15. รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ	กรรมการ
16. รองศาสตราจารย์ ดร.วิราวรรณ ชินวิริยสิทธิ์	กรรมการ
17. รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล	กรรมการ
18. รองศาสตราจารย์ ดร.สมพงศ์ จิตต์มัน	กรรมการ
19. รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพงศ์ ศิริสุข	กรรมการ
20. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด	กรรมการ
21. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์	กรรมการ
22. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงศ์พล เรือนคง	กรรมการ
23. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พีรพัฒน์ สุทธิมาศ	กรรมการ
24. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลี ศาสนพิทักษ์	กรรมการ
25. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรุณวรรณ บริพันธ์	กรรมการ
26. อาจารย์นวลน้อย เจริญผล	กรรมการ
27. อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันทจักรภรณ์	กรรมการ
28. ดร.รัตติยา มีษา	กรรมการ
29. ดร.อำพล ดวงแป้น	กรรมการ

กติกาและคำแนะนำสำหรับผู้ประสงค์ส่งบทความเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ เป็นวารสารวิจัยและวิชาการ เปิดรับบทความวิจัย บทความวิชาการ และบทความทั่วไป ที่เป็นทั้งภาษาไทย และภาษาอังกฤษ โดยทุกบทความจะได้รับการคัดกรองจากผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์

กติกาของวารสารคณิตศาสตร์

วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ได้ปฏิบัติตามเกณฑ์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพของศูนย์ดัชนีการอ้างอิงวารสารไทย (Thai Journal Citation Index Center : TCI) อย่างเคร่งครัด ดังนั้น จึงกำหนดกติกาและแนวทางในการบริหารจัดการวารสารคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชื่อวารสาร (ภาษาไทย)	วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชื่อวารสาร (ภาษาอังกฤษ)	Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King
กำหนดการเผยแพร่	ปีละ 3 ฉบับ ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน ฉบับที่ 2 พฤษภาคม – สิงหาคม ฉบับที่ 3 กันยายน – ธันวาคม
ขอบเขตของ บทความที่จะรับ ตีพิมพ์ในวารสาร	บทความจะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา หรือ คณิตศาสตร์ประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ เช่น • วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี • เศรษฐศาสตร์ การเงิน และการประกันภัย • บริหารธุรกิจ โลจิสติกส์ และซัพพลายเชน • วิศวกรรมศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่มีการนำทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้อย่าง ถูกต้อง

การพิจารณา กลั่นกรองบทความ ของวารสาร	ทุกบทความก่อนลงตีพิมพ์ในวารสารต้องได้รับการพิจารณากลั่นกรองจาก ผู้ทรงคุณวุฒิในสาขาที่เกี่ยวข้องจำนวน 3 ท่าน โดยไม่มีส่วนได้ส่วนเสียกับ ผู้เขียน และบทความจะต้องได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (Accepted) จาก ผู้ทรงคุณวุฒิอย่างน้อย 2 ท่าน ทั้งนี้บทความจากผู้เขียนภายในสมาคมฯ จะได้รับการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกทั้งหมด
ข้อตกลงการส่ง บทความ	บทความที่จะลงตีพิมพ์ต้องไม่เคยตีพิมพ์เผยแพร่ที่ไหนมาก่อน และต้องไม่ อยู่ระหว่างพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารฉบับอื่น บทความต้องพิมพ์ด้วยอักษรฟอนต์ TH Sarabun New ทั้งภาษาไทย และ ภาษาอังกฤษ โดยมีความยาวไม่เกิน 20 หน้า และปฏิบัติตามข้อกำหนดใน การจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ของวารสารคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด
ลิขสิทธิ์วารสาร	เนื้อหา รูปภาพ และข้อมูลในบทความที่ลงตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์ ถือเป็นข้อคิดเห็นและความรับผิดชอบของผู้เขียนบทความโดยตรง ซึ่ง กองบรรณาธิการวารสาร ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วย หรือร่วมรับผิดชอบใด ๆ บทความ ข้อมูล เนื้อหา รูปภาพ ฯลฯ ที่ได้รับการลงตีพิมพ์ในวารสาร คณิตศาสตร์ ถือเป็นลิขสิทธิ์ของวารสารคณิตศาสตร์ หากบุคคลหรือ หน่วยงานใดต้องการนำส่วนหนึ่งส่วนใด หรือ ทั้งหมด ไปเผยแพร่ต่อหรือ กระทำการใด ๆ จะต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสมาคม คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ก่อนเท่านั้น

การส่งบทความและการติดต่อกองบรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์

ผู้ประสงค์จะส่งบทความ สามารถดาวน์โหลดไฟล์ template บทความสำหรับพิมพ์ได้ที่
<https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/index> หัวข้อ user_Manual ทั้งนี้ขอความ
 กรุณาปฏิบัติตามข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ และคำแนะนำใน template อย่าง
 เคร่งครัด จากนั้นอัปโหลดไฟล์บทความทั้งชนิด Microsoft Word และ Portable Document
 Format (PDF) พร้อมไฟล์แบบฟอร์มการส่งบทความเพื่อพิจารณาตีพิมพ์ในวารสารคณิตศาสตร์
 (แบบฟอร์มส่งบทความ MJMATH.docx) ขึ้นที่ระบบการส่งบทความที่ <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATH/about/submissions> หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยใด ๆ สามารถ
 ติดต่อกองบรรณาธิการฝ่ายบริหารของวารสาร ได้ที่ MathThaiOrg@gmail.com



วารสารคณิตศาสตร์

โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

Mathematical Journal

by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King

ปริมา ๗๑ ฉบับที่ ๗๑๕ พฤษภาคม – สิงหาคม ๒๕๖๙

Volume 71 Number 715 May – August 2026

บทความวิชาการ *Academic Article*

การใช้เมทริกซ์จาโคเบียนในการแปลงตัวดำเนินการแคลคูลัสเวกเตอร์
จากพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นพิกัดทรงกลม

1

A Jacobian Matrix Approach to Transform Vector Calculus Operators
from Cartesian to Spherical Coordinates

มาร์คุ ก้าวไกล ชีมา

คณิต คิด วิเคราะห์ : กิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอส

15

Analytical Thinking in Mathematics: Learning Activities on
Finding the General Term of S-Pattern Numbers

เมธาสีทิธี ธีญรัตน์ศรีสกุล



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา 71 เล่มที่ 715 พฤษภาคม – สิงหาคม 2569

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

การใช้เมทริกซ์จาโคเบียนในการแปลงตัวดำเนินการแคลคูลัสเวกเตอร์

จากพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นพิกัดทรงกลม

A Jacobian Matrix Approach to Transform Vector Calculus

Operators from Cartesian to Spherical Coordinates

DOI: 10.14456/mj-math.2026.2

มาร์คู ก้าวไกล ซิมา

วิทยาลัยแพทยศาสตร์นานาชาติจุฬาภรณ์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Marcu Kaoklai Sima

Chulabhorn International College of Medicine, Thammasat University, Pathumthani 12120

Email: marcusima72@gmail.com

วันที่รับบทความ : 24 สิงหาคม 2567

วันที่แก้ไขบทความ : 9 เมษายน 2568

วันที่ตอบรับบทความ : 30 สิงหาคม 2569

บทคัดย่อ

บทความนี้จะสำรวจเมทริกซ์จาโคเบียนจากทั้งมุมมองทางเรขาคณิตและเชิงวิเคราะห์ โดยเน้นที่การเกิดขึ้นของเมทริกซ์จากการแปลงองค์ประกอบปริมาตรกณิกนันต์ หลังจากนั้นจะสาธิตวิธีการใช้เมทริกซ์จาโคเบียน เพื่อแปลงตัวดำเนินการแคลคูลัสเวกเตอร์หลักจากพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นพิกัดทรงกลม

คำสำคัญ: เมทริกซ์จาโคเบียน ฟิวด์เวกเตอร์ เกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ เคิร์ล

ABSTRACT

This paper will explore the Jacobian matrix from both geometric and analytical perspective, focusing on how it arises from the transformation of infinitesimal volume elements. Then, as a practical application, we will demonstrate how the Jacobian can be used to transform key vector calculus operators from Cartesian to spherical coordinates.

Keywords: Jacobian matrix, Vector field, Gradient, Divergence, Curl

1. Introduction

The Jacobian matrix is a mathematical tool that shows how a set of variables changes with respect to another set. Each entry in the matrix corresponds to a partial derivative. Its structure allows powerful ways to handle coordinate transformations and analyze local behavior of functions [1].

One particular application of the Jacobian is in vector calculus, where there are several key operators such as the gradient, divergence, and curl. While these operators are typically expressed in Cartesian coordinates, many problems—especially where spherical symmetry occurs—are easier to solve using spherical coordinates [3]. Therefore, to work effectively in spherical coordinates, these operators need to be transformed accordingly.

While it is possible to derive these transformations using the multivariable chain rule, such derivations are rarely fully shown in most calculus textbooks. The steps are often abbreviated or spread out across different topics, making it difficult for readers to grasp the full transformation process. The Jacobian approach therefore aims to offer a more systematic and unified method that ties together geometry, linear algebra, and differential calculus [4].

2. Spherical Coordinates

Before going into the derivations, let us review about the spherical coordinates. A problem featuring a spherical shape (a sphere, or a hemispherical shell) is often easier to solve using spherical coordinates [3].

Compared to the Cartesian coordinates of (x, y, z) , spherical coordinates are expressed as (r, θ, φ) where r is the radial distance from the origin, θ is the polar angle, and φ is the azimuthal angle [2]. Note that in this paper, we will use the physics convention as specified by the ISO standard 80000-2:2019.

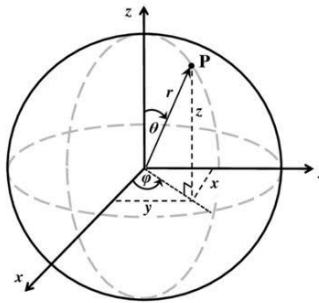


Figure 2.1 3D diagram of spherical coordinates.

From Figure 2.1, we can use the Cartesian coordinates to express spherical coordinates [2].

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \quad (2)$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (3)$$

On the contrary, we can also express Cartesian coordinates in terms of spherical coordinates by the following expressions:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta \quad (4)$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta \quad (5)$$

$$z = r \cos \theta \quad (6)$$

In spherical coordinates, the unit vectors $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, and $\hat{\varphi}$ point in directions of increasing r , θ , and φ , respectively. Unlike Cartesian unit vectors, these are not fixed

and vary with position. They are defined relative to the geometry of a sphere. However, their orientation can be expressed in terms of Cartesian unit vectors as follows [3]:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}} \cos \varphi \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \varphi \sin \theta + \hat{\mathbf{k}} \cos \theta \quad (7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{i}} \cos \varphi \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \varphi \cos \theta - \hat{\mathbf{k}} \sin \theta \quad (8)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{i}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{j}} \cos \varphi \quad (9)$$

Geometrically, the radial unit vector $\hat{\mathbf{r}}$ points directly outward away from the origin. The polar unit vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is tangent to a vertical circle centered at the origin with a diameter on the z -axis. The azimuthal unit vector $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ is tangent to a horizontal circle in the xy plane and centered on the z -axis in an anticlockwise sense (just as in 2D polar coordinates) [3]. Remember that these unit vectors are of magnitude one.

3. The Jacobian

The Jacobian matrix and determinant are used when transitioning between coordinate systems occurs. Geometrically, they can represent the factor by which areas or volumes are scaled when changing coordinates. Suppose we have a density function $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ and want to calculate its mass. We have to use an integral as the density of each point can vary. To simplify our calculation, we can switch to a different coordinate system $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ with a scale factor $\mathbf{J}$ (Jacobian). This can be represented below as:

$$\iiint f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} = \iiint f(\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})) \mathbf{J} d\mathbf{u} d\mathbf{v} d\mathbf{w} \quad (10)$$

Here, we have expressed $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ in terms of our new coordinates as functions of $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ denoted below.

$$x = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$y = \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$z = \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

We know that $d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z}$ represents the infinitesimal volume element (a rectangular prism) in Cartesian coordinates. However, after applying the transformation, this volume element is distorted and becomes a shape called a parallelepiped.

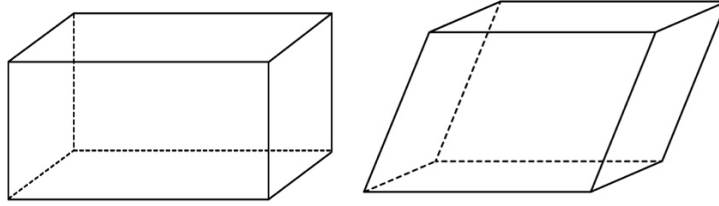


Figure 3.1 A rectangular prism and a parallelepiped.

We can label each side of the parallelepiped with a vector.

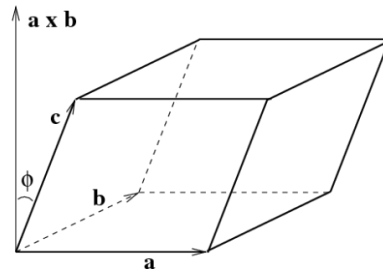


Figure 3.2 Parallelepiped labelled with vectors **a**, **b**, **c**.

We know that the volume of the parallelepiped is calculated by:

$$\begin{aligned} V &= \text{area of base} \cdot \text{height} \\ &= (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta) \cdot |\mathbf{c}| \cos \phi \\ &= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \end{aligned}$$

In order to find the vectors **a**, **b**, **c**, we can use the relationship between our coordinates system. In Figure 3.1, we consider the sides of the infinitesimal volume element of the rectangular prism to be vectors $dx\hat{i}$, $dy\hat{j}$, $dz\hat{k}$ respectively. Once we have changed into our new coordinates, the vectors will be shifted. Given that x, y, z are functions of u, v, w , the transformed vectors could have components in the $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ directions after applying the transformation. We can represent these changes with the following expressions.

$$\begin{aligned} dx &\rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} \delta u \hat{i} + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v \hat{j} + \frac{\partial x}{\partial w} \delta w \hat{k} \\ dy &\rightarrow \frac{\partial y}{\partial u} \delta u \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \delta v \hat{j} + \frac{\partial y}{\partial w} \delta w \hat{k} \\ dz &\rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} \delta u \hat{i} + \frac{\partial z}{\partial v} \delta v \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial w} \delta w \hat{k} \end{aligned}$$

These new vectors now represent the vectors **a**, **b**, **c** respectively. To find the volume of the parallelepiped, we will take the triple product of **a**, **b** and **c**. This can be computed by finding the determinant of a 3x3 matrix (Jacobian matrix) arranged in the order below. Note that we have factored out $\delta u \delta v \delta w$.

$$dx dy dz \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} \delta u \delta v \delta w = \mathbf{J} \delta u \delta v \delta w$$

We have now shown how the volume element has been transformed under our new coordinates. Furthermore, as the infinitesimal quantities $\delta u, \delta v, \delta w$ approaches zero, they will converge to their differential forms of du, dv, dw . Hence, our new volume integral can be written as:

$$\iiint dx dy dz = \iiint \mathbf{J} du dv dw$$

Going back to equation (10), since we have already parameterized our density function using the new coordinates, we can now calculate the mass using the transformed volume integral. Thus, we have finally showed how the Jacobian (the determinant of the 3x3 matrix in the previous page) behaves like a factor when changing between coordinate systems.

Lastly, the Jacobian matrix can be generally expressed as:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

4. The Gradient

The gradient operator defined by the symbol $\vec{\nabla}$ (del, nabla) and has partial derivatives as its components [2]. In Cartesian coordinates, it is represented as:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (11)$$

We can apply the gradient operator to a multivariable function, resulting in the gradient vector.

$$\vec{\nabla}f = \hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Similar to how taking the derivative of a function would give the rate of change at any point, the gradient operator not only gives the rate of change but also indicates the direction of the fastest increase for a multivariable function.

5. The Divergence

The divergence of a vector function is the scalar product between the gradient operator and a vector function [2]. In Cartesian coordinates, it is represented as:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (12)$$

You can think of the divergence as a way to represent the rate at which a vector field spreads out or converges into a given point in space. A value greater than zero would mean that the field lines (flux) are radiating outwards, while a value less than zero would mean that the field lines (flux) are converging inwards [2].

6. The Curl

The curl of a vector function is the vector product between the gradient operator and a vector function [2]. We can carry out this operation by setting up a 3×3 matrix and calculating its determinant. The result of calculating the curl is a vector. In Cartesian coordinates, it is represented as:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}\end{aligned}$$

You can think of the curl as a measure of the net circulation of field lines at a point. For example, when an electric current is running through a wire, it creates a magnetic field around the wire. By calculating the curl, we can determine both the direction in which the magnetic field rotates and its rate (magnitude) at any given point.

7. Gradient Operator in Spherical Coordinates

Now that we have familiarize ourselves with the Jacobian and all the vector calculus operators, let's see how the Jacobian matrix can be used to transform the gradient from Cartesian to spherical.

Firstly, the gradient operator in Cartesian is represented by equation (11). However, we want it to be in terms of r, θ, φ . We can use the chain rule which will give us:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \quad (15)$$

We can now use matrix notation to represent equations (13), (14), and (15) altogether. The matrix on the right side is the Jacobian matrix (**J**).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Going back to equations (4), (5), and (6). We can take the partial derivative with respect to each variables, giving us:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{J} = \vec{\nabla} \end{aligned}$$

Here, the Jacobian is acting as a scaling factor to the gradient in Cartesian. Solving for $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, we can take the inverse of the Jacobian matrix.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Although the detailed steps for computing the inverse of a 3×3 matrix especially one involving trigonometric functions are complicated and requires lots of algebraic manipulation, the final result is provided for completeness. The detailed calculations are omitted to maintain focus on the primary analysis.

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \varphi \sin \theta}{r} & \frac{\sin \varphi \sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\cos \varphi \cos \theta}{r \sin \theta} & \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r \sin \theta} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{bmatrix}$$

One property of the dot product is that when two perpendicular vectors are dotted together, the answer will be zero. We can utilize this property to find the coefficients of each of the components by multiplying the transformed gradient operator with the spherical unit vectors $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ respectively.

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \sin \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

We have finally derived the gradient operator in spherical coordinates using the Jacobian matrix and applying its inverse. Thus, the gradient in spherical coordinates is expressed as:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

Compare to just using the chain rule, using the Jacobian matrix provides a more structured and organized approach. By encapsulating all the partial derivatives into a single matrix, it shows how each component changes across coordinate systems.

8. The Divergence in Spherical Coordinates

We know that the divergence in Cartesian coordinates is defined by equation (12). It is the dot product between the gradient operator and a vector field. In order to transform it into spherical coordinates, we can first take the same approach as we did for the gradient (equations (13), (14), and (15)).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\cos \varphi \sin \theta}{r} & \frac{\sin \varphi \sin \theta}{r} & -\frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\cos \varphi \cos \theta}{r \sin \theta} & \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r \sin \theta} & 0 \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Here, we have used the inverse of the Jacobian matrix to obtain $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ in terms of r, θ, φ . Next, let us express F_x, F_y, F_z in terms of F_r, F_θ, F_φ . This can be done by manipulating the unit vectors.

Firstly, writing equations (7), (8), and (9) in matrix notation.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix}$$

As before, in order to express $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ in terms of $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$, we can take the inverse of the matrix. However, since this is an orthogonal matrix, the inverse is simply its transpose.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix}$$

We can now use this relationship to express F_x, F_y, F_z in terms of F_r, F_θ, F_ϕ .

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix}$$

Multiplying out the matrix will give us:

$$\begin{aligned} F_x &= \cos \varphi \sin \theta F_r + \cos \varphi \cos \theta F_\theta - \sin \varphi F_\phi \\ F_y &= \sin \varphi \sin \theta F_r + \sin \varphi \cos \theta F_\theta + \cos \varphi F_\phi \\ F_z &= \cos \theta F_r - \sin \theta F_\theta \end{aligned}$$

Putting this altogether will give us:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta F_r & \cos \varphi \cos \theta F_\theta & -\sin \varphi F_\phi \\ \sin \varphi \sin \theta F_r & \sin \varphi \cos \theta F_\theta & \cos \varphi F_\phi \\ \cos \theta F_r & -\sin \theta F_\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Again, we shall omit the algebraic manipulation in order to maintain focus on the primary analysis. Thus, after all of the tedious algebraic manipulation, we are left with:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{2}{r} F_r \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} F_\theta \right) + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \varphi} \right)$$

Notice that the first two terms come from the product rule for derivatives. We can reverse this to help simplifying the first two terms. Hence, the divergence in spherical coordinates is given as:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 F_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} F_\theta \sin \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\phi$$

9. The Curl in Spherical Coordinates

Before we start deriving the curl in spherical coordinates, let us look at another notation of the curl involving unit vectors first in Cartesian coordinates.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\hat{i} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \right) + \left(\hat{j} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \right) + \left(\hat{k} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \right)$$

This notation helps us visualize how each component of the curl is related to the changes in the vector field in the directions of the coordinate axes. It highlights how the curl is constructed from partial derivatives in different directions.

Now, suppose we have a vector field in spherical coordinate expressed as:

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\phi \hat{\phi}$$

From Section 7, we have already found the coefficients of the unit vectors when it is transformed into spherical coordinates. Thus, we can write the following:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\hat{r} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial r} \right) + \left(\frac{\hat{\theta}}{r} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial \phi} \right)$$

In order to make our derivation easier, let us work with each component separately. Starting with $\hat{r}$ component:

$$\hat{r} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial r} = \hat{r} \times \frac{\partial (F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\phi \hat{\phi})}{\partial r}$$

We shall use the product rule on the second term. This will give us:

$$\frac{\partial (F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\phi \hat{\phi})}{\partial r} = \hat{r} \frac{\partial F_r}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{\partial F_\phi}{\partial r}$$

Note that we have referred to equations (7), (8), and (9) for the partial derivatives of $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ with respect to r . Next, we will cross it with the unit vector $\hat{r}$.

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial r} &= \hat{r} \times \left(\hat{r} \frac{\partial F_r}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{\partial F_\phi}{\partial r} \right) \\ &= \hat{\phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial r} \end{aligned} \tag{16}$$

Moving on to the $\hat{\theta}$ component.

$$\frac{\hat{\theta}}{r} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} = \frac{\hat{\theta}}{r} \times \frac{\partial (F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi})}{\partial \theta}$$

Using the product rule again on the second term.

$$\frac{\partial (F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi})}{\partial \theta} = \hat{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + F_r \hat{\theta} + \hat{\theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} - F_\theta \hat{r} + \hat{\varphi} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}$$

Note that we have referred to equations (7), (8), and (9) again for the partial derivatives of $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ with respect to θ . Next, we will cross it with the unit vector $\hat{\theta}$.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\theta}}{r} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} &= \frac{\hat{\theta}}{r} \times \left(\hat{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + F_r \hat{\theta} + \hat{\theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} - F_\theta \hat{r} + \hat{\varphi} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{\hat{\varphi}}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r} F_\theta + \frac{\hat{r}}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (17)$$

Lastly, consider the $\hat{\varphi}$ component. Since this requires a lot more algebraic manipulation and space, we shall omit the working out and skip to the final answer.

$$\frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi} = \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} - F_\varphi \frac{\hat{\theta}}{r} + F_\varphi \cos \theta \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \quad (18)$$

Combine equations (16), (17), and (18) together and group all the $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ together, respectively.

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta F_\varphi - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} r F_\varphi - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} r F_\theta - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi}$$

Here we have taken out the common factors and use the product rule for derivatives to simplify things. To finalize our derivation, we can write it in the conventional matrix form (determinant of a 3x3 matrix).

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \frac{r^2 \sin \theta}{\partial} & \frac{r \sin \theta}{\partial} & \frac{r}{\partial} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

Thus, we have finally derived the curl in spherical coordinates.

10. Conclusion

In this paper, we have explored the Jacobian and its role in deriving vector calculus operators from Cartesian to spherical coordinates [3]. By visualizing how the Jacobian arises from the deformation of infinitesimal volume elements, we provided a clear and intuitive framework for understanding coordinate transformations [1]. This approach allowed us to derive the gradient, divergence, and curl in spherical coordinates, offering an alternative approach to the abbreviated derivations often seen in traditional calculus textbooks. Future work could extend this framework to more complex coordinate systems such as the curvilinear systems, or integrate them with numerical methods for even broader applications [4].

References

- [1] *Jacobians, Taylor's Series, Maxima & Minima*. In *Himalaya's Mathematics B.Sc. Semester – I* (Chapter 7). (n.d.) Himalaya Publishing House. Retrieved from: https://www.dbscience.org/wp-content/uploads/2022/10/Ch-7-Jacobian-Taylors-Max-Min-F-Sem-I_compressed.pdf
- [2] McMullen, C. (2023). *Calculus with Multiple Variables Essential Skills Workbook*. Las Vegas: Zishka Publishing.
- [3] Spherical coordinate system. (2026, September 1). In *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system
- [4] Tong, D. (n.d.) *Vector Calculus*. Centre for Mathematical Science, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge. Retrieved from: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/vc/vc.pdf>



วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ปริมา 71 เล่มที่ 715 พฤษภาคม – สิงหาคม 2569

<http://www.mathassociation.net>

Email: MathThaiOrg@gmail.com

คณิต คิด วิเคราะห์ : กิจกรรมการเรียนรู้

เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอส

Analytical Thinking in Mathematics: Learning Activities on Finding the General Term of S-Pattern Numbers

DOI: 10.14456/mj-math.2026.3

เมธาสิทธิ์ ธัญรัตน์ศรีสกุล

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนราชินีบูรณะ จังหวัดนครปฐม 73000

Mathasit Tanyarattanasrisakul

Mathematics Department, Rachineeburana School, Nakhon Pathom 73000

Email: mathasit24@gmail.com

วันที่รับบทความ : 20 ธันวาคม 2566

วันที่แก้ไขบทความ : 12 ธันวาคม 2567

วันที่ตอบรับบทความ : 29 สิงหาคม 2569

บทคัดย่อ

การคิดวิเคราะห์เป็นทักษะสำคัญสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และสามารถส่งเสริมให้เกิดขึ้นได้ผ่านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เหมาะสม บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอแนวคิดและแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอส ที่ส่งเสริมทักษะการคิดวิเคราะห์ ซึ่งทักษะการคิดวิเคราะห์ หมายถึง ความสามารถของบุคคลในการแยกแยะส่วนต่าง ๆ ของข้อมูลออกเป็นส่วนย่อยเพื่อเข้าใจหลักการหรือความสัมพันธ์ของสิ่งที่วิเคราะห์ และขยายความรู้อย่างมีเหตุผลเพื่อนำไปสู่การสร้างข้อมูลหรือข้อสรุปใหม่ โดยผู้เขียนได้เลือกใช้แนวคิดของ Marzano และ Kendall ที่จำแนกทักษะการคิดวิเคราะห์เป็น 5 ด้าน ได้แก่ การจับคู่

การแบ่งประเภท การวิเคราะห์ข้อผิดพลาด การสร้างหลักการทั่วไป และการระบุ มาใช้ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านการตั้งคำถามของครูและการทำกิจกรรมกลุ่มที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงรูปตัวเอส ซึ่งเป็นจำนวนประเภทหนึ่งที่สามารถแสดงแทนด้วยการจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนระนาบ ให้มีลักษณะเป็นตัวอักษร “S” ในภาษาอังกฤษ

คำสำคัญ: ทักษะการคิดวิเคราะห์ การหาพจน์ทั่วไป จำนวนเชิงรูปตัวเอส

ABSTRACT

Analytical thinking is a critical skill for learning mathematics and can be fostered through appropriately designed learning activities. This article aims to present concepts and approaches for organizing learning activities on finding the general term of S-pattern numbers that promote analytical thinking skills. The key content includes the concept of analytical thinking, refers to an individual's ability to dissect information into smaller components to understand principles or relationships and to rationally expand knowledge, leading to the creation of new information or conclusions. In this article, the authors adopt the framework of Marzano and Kendall, which categorizes analytical thinking skills into five aspects: matching, classifying, analyzing errors, generalizing, and specifying. These aspects are used to design learning activities involving teacher questioning and group tasks related to S-shaped figurate numbers, numbers represent a specific type of arrangement of square tiles on a plane forming the shape of the letter “S” in English.

Keywords: Analytical thinking skills, Finding general term, S-Pattern numbers

1. บทนำ

การคิดวิเคราะห์ (Analytical Thinking) เป็นทักษะสำคัญที่ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบแนวคิดและข้อเท็จจริงผ่านองค์ประกอบที่เชื่อมโยงสัมพันธ์กันอยู่ ทำให้เข้าใจสถานการณ์และขั้นตอนวิธีการทำงานที่เป็นลำดับขั้นตอนได้ชัดเจนยิ่งขึ้น [14] สะท้อนให้เห็นว่านักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์ที่ดี ย่อมมีความชาญฉลาดในการแก้ปัญหาและมีพื้นฐานสำหรับการฝึกทักษะสำคัญอื่น ๆ ที่จำเป็นได้ด้วยตนเองในอนาคต เช่น ทักษะการคิดสร้างสรรค์ ทักษะการคิดอย่างมีวิจารณญาณ และทักษะการแก้ปัญหา [9, 11] ในมุมมองทางคณิตศาสตร์ศึกษา การคิดวิเคราะห์เป็น

ทักษะที่สำคัญสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนเช่นกัน เนื่องจากเป็นพื้นฐานของการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (non-routine problem) การมีทักษะการคิดวิเคราะห์ที่ดีจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจส่วนต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหา แยกแยะกลั่นกรอง และแจกแจงข้อเท็จจริง พิจารณาวิธีการที่เหมาะสม รวมทั้งสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผล และสอดคล้องกับบริบทปัญหา [13, 18] อย่างไรก็ตาม นักเรียนจะมีทักษะการคิดวิเคราะห์ที่ดีได้นั้น ต้องอาศัยการส่งเสริมประสบการณ์การเรียนรู้ รวมทั้งการฝึกฝนจากกิจกรรมการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นพัฒนาการคิด [1]

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอแนวคิดและแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอสที่ส่งเสริมทักษะการคิดวิเคราะห์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาที่กำลังศึกษาในเรื่อง ลำดับและอนุกรม หรือใช้เป็นกิจกรรมส่งเสริมทักษะการคิดนอกเวลาเรียน เพื่อเป็นแนวทางการออกแบบและจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้กับผู้ที่สนใจต่อไป

2. ทักษะการคิดวิเคราะห์

ทักษะการคิดวิเคราะห์ (Analytical Thinking Skills) มีการให้ความหมายโดยนักวิชาการหลายท่าน แต่โดยส่วนมากจะใช้แนวคิดจากอนุกรมวิธานของ Bloom ซึ่งเป็นแนวคิดดั้งเดิมที่มีชื่อเสียงทางด้านการศึกษา แนวคิดของ Anderson และ Krathwohl และแนวคิดของ Marzano และ Kendall โดยมีคำที่ใช้ร่วมกันคือ การแยกแยะออกเป็นส่วนย่อย และตรวจสอบความสัมพันธ์ของสิ่งเหล่านั้น

ตามแนวคิดของ Bloom [7] ให้ความหมายของการคิดวิเคราะห์ว่าเป็นการแยกเนื้อหาของสิ่งที่ทำการวิเคราะห์ออกเป็นส่วนประกอบย่อย ๆ และพิจารณาว่าส่วนเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร มีองค์ประกอบ 3 ด้าน ดังนี้

- 1) การวิเคราะห์ส่วนประกอบ (Analysis of Elements) เป็นความสามารถในการแยกแยะเนื้อหาออกเป็นส่วนประกอบย่อย เพื่อระบุหรือจำแนกองค์ประกอบของสิ่งนั้น
- 2) การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ (Analysis of Relations) เป็นความสามารถในการระบุความสัมพันธ์ที่ทำให้ส่วนประกอบเหล่านั้นเชื่อมโยงกัน
- 3) การวิเคราะห์หลักการจัดระบบ (Analysis of Organizational Principles) เป็นความสามารถในการระบุหลักการ หรือวิธีการเรียงลำดับ ที่ทำให้ส่วนประกอบเหล่านั้นรวมกันเป็นหนึ่งเดียว ซึ่งรวมถึงเจตนาของผู้ที่สร้างสิ่งนั้นไว้

Anderson และ Krathwohl [4] ได้นำแนวคิดของ Bloom มาปรับปรุงใหม่ โดยให้ความหมายของการคิดวิเคราะห์เช่นเดียวกัน แต่มีการปรับคำที่ใช้เรียกองค์ประกอบ 3 ด้าน ดังนี้

1) การแยกแยะ (Differentiating) เป็นความสามารถในการจำแนกส่วนประกอบของโครงสร้างทั้งหมด โดยพิจารณาความเกี่ยวข้องหรือความสำคัญแต่ละส่วน เช่น การแยกข้อมูลที่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง หรือข้อมูลสำคัญออกจากข้อมูลที่ไม่สำคัญและให้ความสนใจกับข้อมูลที่สำคัญ

2) การจัดระบบ (Organizing) เป็นความสามารถในการระบุดังประกอบหรือจัดกลุ่มสิ่งที่มีลักษณะเหมือนกันหรืออยู่ภายใต้เงื่อนไขเดียวกันเข้าเป็นกลุ่มเดียวกัน

3) การระบุคุณลักษณะ (Attributing) เป็นความสามารถในการพิจารณามุมมอง อคติ ค่านิยม หรือเจตนาที่อยู่เบื้องหลังของสิ่งที่ถูกนำเสนอ ส่วนมากจะเกี่ยวข้องกับกิจกรรมการอ่านบทความและตีความมุมมองของผู้เขียนบทความนั้น

ขณะที่ Marzano และ Kendall [15] ได้อธิบายว่า การคิดวิเคราะห์เป็นความสามารถในการแยกแยะส่วนต่าง ๆ ในโครงสร้างของข้อมูลที่สัมพันธ์กัน เพื่อการขยายความรู้อย่างมีเหตุผล ซึ่งนำไปสู่การสร้างข้อมูลหรือข้อสรุปใหม่ โดยจำแนกเป็น 5 องค์ประกอบ ดังนี้

1) การจับคู่ (Matching) เป็นความสามารถในการระบุความเหมือนหรือความแตกต่างของข้อมูล มีพฤติกรรมที่สำคัญ ได้แก่ การจัดหมวดหมู่ การระบุความแตกต่าง การแยกแยะ การเรียงลำดับ และการเปรียบเทียบ

2) การแบ่งประเภท (Classifying) เป็นความสามารถในการระบุหลักการที่ทำให้ข้อมูลถูกจัดอยู่ในกลุ่มเดียวกัน มีพฤติกรรมที่สำคัญ ได้แก่ การระบุประเภท การระบุหมวดหมู่สำหรับข้อมูลแต่ละกลุ่มได้อย่างครบถ้วน และระบุหมวดหมู่ที่ทำให้ลดหรือเพิ่มจำนวนกลุ่มข้อมูลได้

3) การวิเคราะห์ข้อผิดพลาด (Analyzing Errors) เป็นความสามารถในการระบุข้อผิดพลาดเกี่ยวกับความรู้และกระบวนการที่ใช้ มีพฤติกรรมที่สำคัญ ได้แก่ การระบุปัญหา การระบุสิ่งที่เข้าใจผิด การวิพากษ์วิจารณ์ และการปรับปรุงแก้ไข

4) การสร้างหลักการทั่วไป (Generalizing) เป็นความสามารถในการสรุปหลักการทั่วไปจากข้อมูลที่ทราบ มีพฤติกรรมที่สำคัญ ได้แก่ การระบุสิ่งที่สรุปได้ การระบุสิ่งที่สามารถอนุมานได้ การระบุหลักการ และการสร้างกฎ

5) การระบุ (Specifying) เป็นความสามารถในการคาดการณ์และสร้างข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการนำความรู้และกระบวนการไปใช้ มีพฤติกรรมที่สำคัญ ได้แก่ การระบุสิ่งที่คาดว่าจะเกิดขึ้น การระบุเงื่อนไขของการนำไปใช้ และการสร้างข้อโต้แย้งเพื่อยืนยันความถูกต้องของข้อมูล

แม้ว่าจะมีการนิยามความหมายของการคิดวิเคราะห์ไว้คล้ายคลึงกัน แต่แนวคิดของ Marzano และ Kendall จะเน้นไปที่การเรียนรู้ในตนเองและการแก้ปัญหา ส่วนแนวคิดของ Bloom และ Anderson และ Krathwohl จะเน้นพฤติกรรมการเรียนรู้ทั่วไปที่สามารถปรับใช้ได้ในทุกวิชา [10]

ในปัจจุบันมีงานวิจัยที่ค้นพบแนวทางการพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ของนักเรียนอย่างหลากหลาย เช่น การส่งเสริมผ่านการตั้งคำถามของครูในกิจกรรมการเรียนรู้ [17] การปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนหรือการทำกิจกรรมกลุ่ม [16] การจัดการเรียนรู้แบบสะเต็มศึกษา [12] การจัดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ [3, 16] การใช้กลยุทธ์การให้ข้อมูลป้อนกลับ [5] การจัดการเรียนรู้โดยใช้สมองเป็นฐานร่วมกับแผนผังความคิด [2]

โดยสรุปแล้ว ทักษะการคิดวิเคราะห์เป็นความสามารถของบุคคลในการแยกแยะส่วนต่าง ๆ ของข้อมูลออกเป็นส่วนย่อย เพื่อเข้าใจหลักการหรือความสัมพันธ์ของสิ่งที่วิเคราะห์ และขยายความรู้อย่างมีเหตุผล เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อมูลหรือข้อสรุปใหม่ ในบทความนี้ผู้เขียนเลือกใช้แนวคิดของ Marzano และ Kendall มาใช้ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านการตั้งคำถามของครูและการทำกิจกรรมกลุ่มที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงรูปตัวเอส เนื่องจากมีองค์ประกอบที่แสดงพฤติกรรมการปฏิบัติที่ชัดเจน ต่อเนื่อง เป็นลำดับ และเน้นไปที่การแก้ปัญหา

3. จำนวนเชิงรูปตัวเอส

จำนวนเชิงรูปภาพ (Figurate Numbers) หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า จำนวนเชิงรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Numbers) หมายถึง จำนวนซึ่งเขียนแทนด้วยจุดที่เรียงตัวกันบนระนาบในลักษณะของรูปหลายเหลี่ยมปกติ โดยจำนวนแรกจะเป็น 1 เสมอ หรือจุดหนึ่งจุดนั่นเอง ส่วนจำนวนที่สองจะเท่ากับจำนวนจุดยอดมุมของรูปหลายเหลี่ยมปกตินั้น [6]

สำหรับจำนวนเชิงรูปตัวเอส (S-Pattern Numbers) ในบทความนี้ เป็นจำนวนประเภทหนึ่งที่เกิดแปลงมาจากจำนวนเชิงรูปภาพ ซึ่งแสดงแทนด้วยการจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเดียวกันบนระนาบให้มีลักษณะเป็นตัวอักษร “S” ในภาษาอังกฤษ การศึกษาเกี่ยวกับจำนวนนี้มีความเด่นชัดด้านการเชื่อมโยงระหว่างเรขาคณิต เลขคณิต และพีชคณิต เพื่อสร้างตัวแสดงแทนเชิงคณิตศาสตร์ในสิ่งเดียวกัน และเชื่อมโยงระหว่างความรู้สึกเชิงจำนวน (number sense) กับ

ความรู้สึกเชิงปริภูมิ (spatial sense) Chandler, Gyamfi และ Preston [8] ได้นำเสนอจำนวนเชิงรูปตัวเอสในรูปแบบของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา โดยใช้ชื่อว่า S-Pattern Task จำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 1–5 เขียนแทนด้วย S_1, S_2, S_3, S_4 และ S_5 ตามลำดับ โดยสามารถแสดงการจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แทนจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 1–5 ได้ดังรูปที่ 3.1

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
				
รูปที่ 1	รูปที่ 2	รูปที่ 3	รูปที่ 4	รูปที่ 5

รูปที่ 3.1 การจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 1 – 5

จากรูปที่ 3.1 ผู้เขียนนิยามจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ n คือ จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเดียวกันซึ่งเรียงกันเป็นรูปตัวเอส วิธีการเขียนรูปแสดงแทนจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ n ทำได้โดยการเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเดียวกันประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในแนวตั้ง ขนาดกว้าง $n - 1$ หน่วย และสูง $n + 1$ หน่วย จากนั้นต่อเติมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มุมล่างซ้ายและมุมบนขวา มุมละ 1 รูป

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ S_n แทน จำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ n จะได้ว่า $S_n = n^2 + 1$ ในอีกมุมหนึ่ง สามารถเขียนจำนวนเชิงรูปตัวเอสในรูปอนุกรม ได้เป็น

$$S_n = 1 + [1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)]$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$S_1 = 1 + 1 = 2$$

$$S_2 = 1 + [1 + 3] = 5$$

$$S_3 = 1 + [1 + 3 + 5] = 10$$

$$S_4 = 1 + [1 + 3 + 5 + 7] = 17$$

$$S_5 = 1 + [1 + 3 + 5 + 7 + 9] = 26$$

โดยสรุป จะได้ว่า จำนวนเชิงรูปตัวเอส มีพื้นฐานมาจากจำนวนเชิงรูปภาพ ซึ่งสามารถแสดงแทนด้วยการจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนระนาบให้มีลักษณะเป็นตัวอักษร “S” ในภาษาอังกฤษ การศึกษาจำนวนเชิงรูปตัวเอส จะสร้างการเชื่อมโยงระหว่างเรขาคณิต เลขคณิต และพีชคณิต สะท้อนให้เห็นถึงการใช้ตัวแสดงแทนเชิงคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย การนำจำนวนเชิงรูปตัวเอสไปใช้ในการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดทักษะการคิดวิเคราะห์ ครูผู้สอนจำเป็นต้องลำดับขั้นตอนและออกแบบกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้จับคู่ แบ่งประเภท วิเคราะห์ข้อผิดพลาด สร้างหลักการทั่วไป และระบุเงื่อนไขการนำไปใช้ ดังตัวอย่างที่จะได้อธิบายไว้ในหัวข้อถัดไป

4. แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอส ให้บรรลุเป้าหมายที่ตั้งไว้ ซึ่งคือ การส่งเสริมทักษะการคิดวิเคราะห์ของนักเรียน มีกลยุทธ์สำคัญ คือ ต้องเป็นการจัดกิจกรรมที่ส่งเสริมความสามารถทั้ง 5 องค์ประกอบของทักษะการคิดวิเคราะห์ ซึ่งสามารถใช้รูปแบบ วิธีการ หรือเทคนิคการจัดการเรียนรู้ที่เหมาะสมและสนองต่อศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกันได้อย่างหลากหลาย หรืออาจใช้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการตั้งคำถามของครูและการทำกิจกรรมกลุ่มที่สืบสวนหาคำตอบไปตามองค์ประกอบทั้ง 5 ด้าน

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอส ประกอบด้วย 6 กิจกรรม ดังนี้

1. กิจกรรมเตรียมความพร้อม

1) ครูทบทวนความหมายและการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ โดยให้นักเรียนร่วมกันอภิปราย และยกตัวอย่างการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 2-3 ตัวอย่าง เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

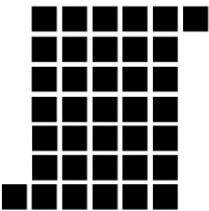
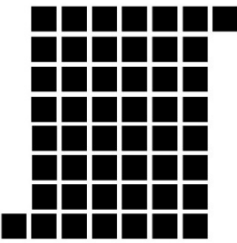
2) ครูแสดงภาพจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 5 บนหน้าจอ เป็นเวลา 3 วินาที แล้วซ่อนภาพ จากนั้น ให้นักเรียนบอกจำนวนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เห็นบนหน้าจอ (ทำซ้ำสองครั้ง หากนักเรียนยังไม่สามารถตอบได้ในการดูครั้งแรก) และอภิปรายวิธีการได้มาซึ่งคำตอบร่วมกัน เช่น นักเรียนคนที่ 1 อาจตอบว่า มี 26 รูป โดยเห็นว่า ส่วนกลางของรูปมี 6 แถว 4 หลัก ทำให้ได้จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น $6 \times 4 = 24$ รูป และนำมารวมกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทางซ้ายและทางขวา ซึ่งมีอีก 2 รูป จึงทำให้ได้คำตอบเป็น 26 รูป นักเรียนคนที่ 2 อาจได้คำตอบเท่ากัน แต่เกิดจากการมองว่า เกิดจากการแบ่งครึ่งรูปในแนวนอนเป็นสองส่วน ซึ่งทำให้ได้รูปที่เหมือนกันภายใต้การหมุน แต่ละส่วนมีจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน 13 รูป ดังนั้น เมื่อนับทั้งสองส่วนรวม จึงได้ว่ามีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน 26 รูป

3) ให้นักเรียนพิจารณาและอภิปรายร่วมกันว่า รูปที่แสดงนั้น มีลักษณะเหมือนตัวอักษรใด จากนั้นอธิบายให้นักเรียนทราบว่า รูปที่แสดงนั้นมีลักษณะเหมือนตัวเอส ซึ่งเป็นรูปที่แสดงแทนจำนวนที่ 5 ของจำนวนเชิงรูปตัวเอส ที่เรานำมาทำกิจกรรมในวันนี้

2. กิจกรรมสำรวจความสัมพันธ์ระหว่าง S_6 และ S_7

1) ครูนำเสนอจำนวนเชิงรูปตัวเอส ดังรูปที่ 3.1 จากนั้นอธิบายให้นักเรียนเข้าใจว่า สิ่งนี้เรียกว่าจำนวนเชิงรูปตัวเอส ซึ่งสามารถแสดงแทนด้วยการจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเดียวกันบนระนาบให้ มีลักษณะเป็นตัวอักษร “S” ในภาษาอังกฤษ และใช้สัญลักษณ์ S_n แทน จำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ n ซึ่งนักเรียนจะเห็นว่า ในรูปที่ 1 ตัวเอสเกิดจากการจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน 2 รูป ดังนั้น $S_1 = 2$ ในรูปที่ 2 ตัวเอสเกิดจากการจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน 5 รูป ดังนั้น $S_2 = 5$ และเช่นเดียวกันกับเมื่อสักครู่นี้ ที่นักเรียนพบว่า $S_5 = 26$

2) ให้นักเรียนแต่ละคนร่างภาพแสดงแทนจำนวนเชิงรูปตัวเอสสองจำนวนถัดไป นั่นคือ S_6 และ S_7 ลงในกระดาษที่แจกให้ เพื่อให้งานนี้สำเร็จ นักเรียนจะอาศัยการสังเกตและเปรียบเทียบความเหมือนและความแตกต่างของจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 1–5 ทั้งนี้ครูควรใช้คำถามเพื่อกระตุ้นการคิดว่า “นักเรียนคิดว่า จำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 1–5 มีความเหมือนและความแตกต่างกันอย่างไรบ้าง” ซึ่งนักเรียนคนที่ 1 อาจสังเกต เห็นว่า ภาพที่แสดงแทนจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 2–5 มีความเหมือนกันตรงที่แถวบนสุดและแถวล่างสุดของแต่ละรูป โดยจะมีจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากัน และเท่ากับจำนวนที่แสดงลำดับของจำนวนเชิงรูปตัวเอส เช่น รูปที่ 4 มีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแถวบนสุดและแถวล่างสุด แถวละ 4 รูป และเห็นว่ามี ความต่างกัน ในรูปที่ 1 ซึ่งไม่มีส่วนตรงกลางเหมือนรูปที่ 2–5 นักเรียนคนที่ 2 อาจเพิ่มเติมว่า สิ่งที่เหมือนกัน คือ ถ้าสนใจการจัดเรียงที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตรงส่วนกลางของจำนวนเชิงรูปตัวเอสแต่ละจำนวน จะมีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นเศษอยู่ 2 รูป แต่ต่างกันตรงที่รูปที่ 1 ที่ไม่มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในส่วนตรงกลาง หากครูนำให้นักเรียนเกิดการอภิปรายในลักษณะดังกล่าวนี้ได้ จะเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความสามารถในการจับคู่ พร้อมทั้งเกิดมุมมองการคิดที่หลากหลาย ซึ่งอาจปรับให้เป็นการคิดเดี่ยวหรือคิดเป็นคู่ได้ตามความพร้อมของนักเรียน จากนั้นครูทำการเฉลยโดยแสดงแทนจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 6 และ 7 ดังรูปที่ 4.1 บนหน้าจอ ให้นักเรียนเปรียบเทียบกับรูปที่ตนเองร่างว่าเหมือนกันหรือไม่

S_6	S_7
	
รูปที่ 6	รูปที่ 7

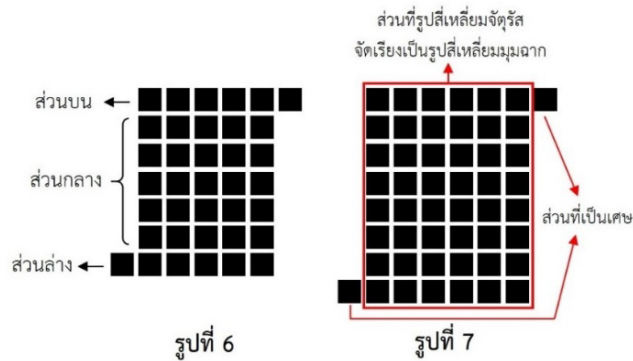
รูปที่ 4.1 จำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 6 และ 7

3. กิจกรรมการหาค่าของ S_{99}

ให้นักเรียนอธิบาย การหาค่าของจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 99 และสรุปคำตอบว่าค่าของ S_{99} เท่ากับเท่าไร เพื่อให้งานนี้สำเร็จ นักเรียนจะต้องพิจารณาแบบรูปของจำนวนผ่านการหาความสัมพันธ์ระหว่างลำดับที่และส่วนประกอบต่าง ๆ ในรูปที่รวมกันเป็นจำนวนเชิงรูปตัวเอส จุดนี้ ครูควรใช้คำถามเพื่อกระตุ้นการคิดของนักเรียนว่า “นักเรียนคิดว่า จำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 1–7 มีส่วนประกอบใดบ้าง และส่วนประกอบเหล่านี้สัมพันธ์กับลำดับที่อย่างไร” เพื่อช่วยให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์และหาคำตอบได้

จากนั้นครูสุ่มนักเรียนตอบคำถาม 2–3 คน และให้เพื่อนในห้องแลกเปลี่ยนมุมมองแนวคิดที่ต่างกันออกไป เช่น นักเรียนคนที่ 1 อาจมองว่ามี 3 ส่วนประกอบ คือ ส่วนบน ส่วนล่าง และส่วนกลางรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งสัมพันธ์กับลำดับที่ โดยจำนวนลำดับที่ 6 ส่วนบนและส่วนล่างมีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แถวละ 6 รูป ส่วนกลางมีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 5×5 ตารางหน่วย หรือเขียนได้เป็น $(6 - 1) \times (6 - 1)$ ตารางหน่วย ดังรูปที่ 4.2 ซ้ายมือ นักเรียนคนที่ 2 อาจมองว่า จำนวนเชิงรูปตัวเอส แต่ละรูปมีเพียง 2 ส่วนประกอบ คือ ส่วนที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตรงกลาง กับส่วนที่เป็นเศษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอีก 2 รูป ส่วนที่เป็นเศษนี้จะเท่ากับ 2 ไม่ว่าจะเป็นจำนวนใดก็ตาม หากพิจารณาจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 7 ส่วนที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตรงกลางจะมีขนาด 6×8 ตารางหน่วย หรือเขียนได้เป็น $(7 - 1) \times (7 + 1)$ ตารางหน่วย ดังรูปที่ 4.2 ขวามือ ซึ่งท้ายที่สุดแล้ว นักเรียนจะสามารถคำนวณและบอกได้ว่า จำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 99 มีค่าเท่ากับ 9,802 โดยนักเรียนคนที่ 1 คำนวณมาจาก $99 + 99 + (98 \times 98)$ และนักเรียนคนที่ 2 คำนวณมาจาก $2 + [(99 - 1) \times (99 + 1)]$

จากนั้นให้นักเรียนออกมาอธิบายแนวคิดของตนเองหน้าชั้นเรียน ขั้นตอนนี้จะส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความสามารถในการแบ่งประเภท เชื่อมโยงความรู้สึกเชิงปริภูมิกับความรู้สึกเชิงจำนวน พร้อมกันได้แสดงให้นักเรียนคนอื่น ๆ เห็นว่า คำตอบหนึ่งอาจเกิดจากวิธีการและมุมมองที่แตกต่างกันออกไป



รูปที่ 4.2 การระบุส่วนประกอบของจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 6 และ 7

4. กิจกรรมการค้นหาค่าจุดผิดพลาด

ครูยกประเด็นการหาค่าจำนวนเชิงรูปตัวเอส โดยใช้ภาพแสดงแทนของจำนวนที่ 5 เป็นกรณีตัวอย่าง และอธิบายให้นักเรียนเข้าใจ แนวคิดที่ใช้การแบ่งครึ่งรูปในแนวนอนเป็นส่วนบนและส่วนล่าง ซึ่งมีจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่ากัน และเท่ากับ $1 + [(5 - 1) \times (5 - 2)] = 13$ ทำให้ได้ว่า $S_5 = 2 \times 13 = 26$ แล้วให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาว่า สามารถใช้แนวคิดนี้ในการหาค่าจำนวนเชิงรูปตัวเอสได้ทุกจำนวนได้หรือไม่ เพราะเหตุใด ซึ่งนักเรียนอาจตอบว่า “ไม่ได้ เนื่องจากภาพที่แสดงจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 4 เราไม่สามารถแบ่งครึ่งในแนวนอนได้” หรือ “ไม่ได้ ลองดูจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ 3 ถึงแม้จะแบ่งครึ่งได้ แต่การคำนวณแต่ละส่วน ไม่ใช่ $1 + [(3 - 1) \times (3 - 2)]$ แน่นนอน” ขั้นนี้จะส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความสามารถในการวิเคราะห์ข้อผิดพลาด ซึ่งนักเรียนสามารถระบุปัญหาหรือข้อผิดพลาดจากการใช้แนวคิดที่ครูเสนอได้

5. กิจกรรมการค้นหาค่าพจน์ทั่วไป

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน ช่วยกันเขียนสูตรสำหรับการหาพจน์ทั่วไป หรือ S_n ของจำนวนเชิงรูปตัวเอส พร้อมทั้งอธิบายแนวคิดลงในกระดาษที่แจกให้ ขั้นตอนนี้ให้นักเรียนจะนำหลักการที่ได้จากขั้นก่อนหน้ามาใช้ในการหาพจน์ทั่วไปในมุมมองที่หลากหลาย ตัวอย่างสูตรการหาพจน์ทั่วไปที่อาจเกิดขึ้นในชั้นเรียนแสดงดังตารางที่ 4.1

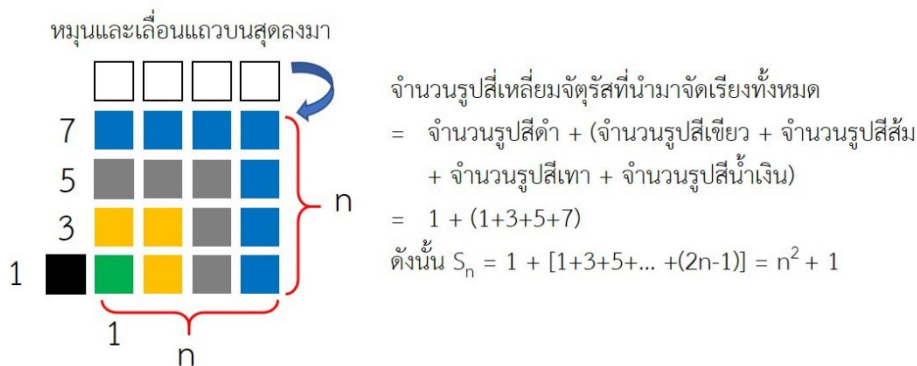
ตารางที่ 4.1 ตัวอย่างสูตรพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอส

กลุ่ม	แนวคิดของนักเรียน	ภาพประกอบ	สูตรพจน์ทั่วไป ของจำนวนเชิงรูปตัวเอส
1	แถวบนและแถวล่าง มีจำนวนเท่ากับ n ซึ่งรวมกันได้ $2n$ ตรงกลางคิดได้เป็น $(n-1) \times (n-1)$ ทำให้ได้ว่า จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่นำมาจัดเรียงเท่ากับ $[(n-1) \times (n-1)] + 2n$	กรณี $n = 5$ 	$S_n = [(n-1) \times (n-1)] + 2n$
2	ต่อเติมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสีแดง เพื่อให้การจัดเรียงทั้งหมดเป็น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $(n+1) \times (n+1)$ ตารางหน่วย แต่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เติมเข้าไปเป็น ส่วนที่ไม่ต้องการ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $n + n = 2n$ ทำให้ได้ว่า จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่นำมาจัดเรียงเท่ากับ $[(n+1) \times (n+1)] - 2n$	กรณี $n = 5$ 	$S_n = [(n+1) \times (n+1)] - 2n$
3	หมุนและเลื่อนแถวบนสุดลงมาเป็น หลักที่สี่ด้านขวามือ (สีน้ำเงิน) ทำให้ได้การจัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยม จัตุรัสขนาด $n \times n = n^2$ เมื่อนำมารวมกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่เป็นเศษอีก 1 รูป ทำให้ได้ว่า จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่นำมาจัดเรียงเท่ากับ $n^2 + 1$	กรณี $n = 4$ หมุนและเลื่อนแถวบนสุดลงมา 	$S_n = n^2 + 1$

สำหรับนักเรียนที่มีความรู้เรื่องอนุกรมเลขคณิต อาจต่อยอดแนวคิดของนักเรียนกลุ่มที่ 3 โดยมองว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $n \times n$ ตารางหน่วย ที่ได้นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมได้เป็น $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$ และเขียน S_n ในรูปอนุกรมได้เป็น

$$S_n = 1 + [1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)] = n^2 + 1$$

แสดงแนวคิดนี้ ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอส โดยใช้อนุกรม

ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มถ่ายภาพผลงานลงในกลุ่มส่งงานออนไลน์ที่สร้างขึ้น จากนั้นครูแสดงภาพผลงานเหล่านั้นบนหน้าจอทีละภาพ พร้อมกับให้นักเรียนร่วมกันศึกษาแนวคิดของเพื่อน ๆ จากภาพที่แสดง ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอสนี้ จะส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความสามารถในการสร้างหลักการทั่วไป ซึ่งเกิดจากการที่นักเรียนสรุปหลักการจากลักษณะการจัดเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปตัวเอส จำนวนที่ 1-7 และสร้างสูตรที่สอดคล้องกันขึ้นมา

6. กิจกรรมการตรวจสอบสูตรพจน์ทั่วไป

1) ครูและนักเรียนพูดคุยถึงสิ่งที่ทำร่วมกันมาทั้งหมดว่า มีลำดับขั้นตอนอย่างไร แล้วสุดท้ายนักเรียนได้รับแนวคิดใดที่เป็นประโยชน์ต่อการเรียนคณิตศาสตร์อย่างไรบ้าง

2) ครูยกประเด็นการหาสูตรพจน์ทั่วไปที่นักเรียนแต่ละกลุ่มสร้างขึ้น ซึ่งจะพบว่า มีความแตกต่างกันในการเขียน และใช้คำถามกับนักเรียนว่า “นักเรียนคิดว่าสูตรการคำนวณของนักเรียนแต่ละกลุ่มเหมือนหรือต่างกัน” จากนั้นให้นักเรียนใช้การจัดรูปพีชคณิต เพื่อให้สูตรพจน์ทั่วไปของนักเรียนอยู่ในรูปอย่างง่าย ซึ่งจะพบว่าสูตรในรูปอย่างง่าย คือ $S_n = n^2 + 1$ ขั้นตอนนี้ นอกจากจะส่งเสริมให้เกิดความสามารถในการสร้างหลักการทั่วไปแล้ว ยังจะเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนใช้ความรู้ทางพีชคณิตมาช่วยในการสร้างข้อสรุป และสร้างการเชื่อมโยงระหว่างมุมมองทางเรขาคณิต เลขคณิต และพีชคณิต ได้เป็นอย่างดี

3) ครูใช้คำถามกับนักเรียนว่า “นักเรียนคิดว่า สามารถแทนค่า n เป็น -10 หรือ 0.5 ลงในสูตรของนักเรียนได้หรือไม่ เพราะเหตุใด” นักเรียนอาจตอบได้โดยง่ายว่า “ไม่ได้ เพราะ n เป็นจำนวนแทนลำดับที่ จะเริ่มตั้งแต่ 1, 2, 3, ...” หรือ “ไม่ได้ เพราะ n ต้องเป็นจำนวนนับ” จากนั้นครูใช้คำถามกับนักเรียนว่า “นักเรียนคิดว่าการนำสูตรของนักเรียนไปใช้ ควรระบุเงื่อนไขใดบ้าง” นักเรียนอาจตอบว่า

“ต้องระบุว่า n เป็นจำนวนนับ” หรือ “ใช้สำหรับจำนวนเชิงรูปตัวเอสเท่านั้น” และครูใช้คำถามต่อว่า “จำนวนเชิงรูปตัวเอสที่ใช้กับสูตรของนักเรียนต้องการมีเขียนรูปตัวเอสอย่างไร” ครูควรปล่อยเวลาให้นักเรียนคิดหาคำอธิบายวิธีการเขียนจำนวนเชิงรูปตัวเอส เพื่อให้สามารถใช้งานสูตรของนักเรียนได้ ซึ่งนักเรียนอาจตอบว่า “วิธีการเขียนรูปแสดงแทนจำนวนเชิงรูปตัวเอส จำนวนที่ n ทำได้โดยการเรียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเดียวกันประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในแนวตั้งขนาดกว้าง $n - 1$ หน่วย และสูง $n + 1$ หน่วย จากนั้นต่อเติมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มุมล่างซ้ายและมุมบนขวา มุมละ 1 รูป” ลำดับถัดไปครูถามนักเรียนว่า “อย่างนั้น แสดงว่าถ้าจะนำสูตรของนักเรียนไปใช้จะต้องเขียนรูปตัวเอสตามวิธีการนี้เท่านั้นใช่หรือไม่” นักเรียนควรตอบว่า “ใช่” ขึ้นตอนนี้จะส่งเสริมความสามารถในการระบุ โดยนักเรียนจะได้สร้างข้อโต้แย้ง เพื่อยืนยันความถูกต้อง รวมทั้งระบุเงื่อนไขของการนำสูตรการหาพจน์ทั่วไปของจำนวนเชิงรูปตัวเอสไปใช้ได้ด้วยตนเอง

โดยสรุปแล้ว การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนรูปตัวเอส ที่ส่งเสริมทักษะการคิดวิเคราะห์จะสอดแทรกกิจกรรมย่อย ๆ ที่ฝึกฝนองค์ประกอบของทักษะการคิดวิเคราะห์ ได้แก่ การจับคู่ การแบ่งประเภท การวิเคราะห์ข้อผิดพลาด การสร้างหลักการทั่วไป และการระบุ โดยครูจะเป็นผู้ตั้งคำถาม ยกกรณีต่าง ๆ ขึ้นมากระตุ้นให้นักเรียนเกิดการคิดและการทำกิจกรรมกลุ่ม รวมทั้งจัดกิจกรรมการเรียนรู้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน เพื่ออำนวยความสะดวกในการคิดของนักเรียน

5. สรุป

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของจำนวนรูปตัวเอส ที่ส่งเสริมทักษะการคิดวิเคราะห์ นอกจากช่วยให้นักเรียนได้ฝึกฝนทุกองค์ประกอบของทักษะการคิดวิเคราะห์ที่จะเป็นพื้นฐานสำคัญของการคิดขั้นสูงอื่น ๆ แล้ว นักเรียนยังได้ฝึกคิดผ่านมุมมองต่าง ๆ ที่เชื่อมโยงสัมพันธ์กัน ทั้งเรขาคณิต เลขคณิต และพีชคณิต นั่นคือ ได้สร้างความเข้าใจผ่านตัวแสดงแทนเชิงคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน และสะท้อนให้เห็นว่าหากครูต้องการพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ สามารถออกแบบกิจกรรมโดยคำนึงถึงการพัฒนาการคิดให้ครบทั้ง 5 องค์ประกอบผ่านการตั้งคำถามของครูและการใช้กิจกรรมกลุ่มได้อีกแนวทางหนึ่ง ดังที่แสดงตัวอย่างไว้ในบทความนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] ไพฑูรย์ สินลารัตน์. (2558). *ศาสตร์การคิด*. กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิต.
Sinlarat, P. (2015). *Science of Thinking*. Bangkok: Dhurakij Pundit University.
- [2] ภัทรพร ทำคาม ดนุชา สลึงค์ และศักดิ์ สุวรรณฉาย. (2561). การพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ด้วยการจัดการเรียนรู้โดยใช้สมองเป็นฐาน (BBL) ร่วมกับแผนผังความคิด. *วารสารราชพฤกษ์*, 16 (1), 124 – 131.
Tamkham, P., Saleewong, D. and Suwonnachaiy, S. (2018). The Development of Analytical Thinking Skill Mathematics Subject of Grade 6 Students through Brain Based Learning with Mind Mapping. *Ratchaphruek Journal*, 16 (1), p. 124 – 131.
- [3] อนุพงศ์ สิงห์อำ ปันดดา สังข์ศรีแก้ว และภูชิต ภูขำนิ. (2567). การพัฒนาความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และการรับรู้ตนเองทางคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติพื้นฐาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้กระบวนการ 5Es ร่วมกับแนวคิดเมตาคognition. *วารสารมนุษยศาสตร์ สังคมศาสตร์ และนวัตกรรม มหาวิทยาลัยกาฬสินธุ์*, 3 (2), 48 – 59.
Singam, A., Sangsrikaew, P. and Phchumni, P. (2024). Ability of Analytical Thinking Critically and Self-efficacy in Mathematics on Basic Statistics in High School Grade 12 by Using the 5Es Process and Metacognition Concept. *Kalasin University Journal of Humanities Social Sciences and Innovation*, 3 (2), p. 48 – 59.
- [4] Anderson, L. W. and Krathwohl, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Education Objectives*. New York: Longman.
- [5] Astuti, Y., Febrianti, S. A., Akbar, B. and Safahi, L. (2021). Students' Analytical Thinking Ability through the Strategy of Giving Feedback on Excretion System Learning. *BIOEDUSCIENCE*, 5 (3), p. 196 – 200.
- [6] Baker, J. (2016). Figurate Numbers. *Spreadsheets in Education (eJSiE)*, 9 (1), p. 1 – 6.
- [7] Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.
- [8] Chandler, K., Gyamfi, K. A. and Preston, R. (2023). Making Connections Explicit. *Mathematics Teacher: Learning & Teaching PK-12*, 116 (8), p. 572 – 585.

- [9] Hanifah, J. A., Cholily, Y.M. and Ummah, S. K. (2023). Analysis of Students' Analytical Thinking Ability and Mathematical Communication Using Online Group Investigation Learning Model. *Mathematics Education Journals*, 7 (1), p. 100 – 113.
- [10] Irvine, J. (2017). A Comparison of Revised Bloom and Marzano's New Taxonomy of Learning. *Research in Higher Education Journal*, 33, p. 1 – 16.
- [11] Joynes, C., Rossignoli, S. and Kuofi, E. F. A. (2019). *21st Century Skills: Evidence of Issues in Definition, Demand and Delivery for Development Contexts*. Brighton, UK: Institute of Development Studies.
- [12] Koyimah, Wahono, W., Nadi, S. and Kurnia, P. B. (2020). Effectiveness of Interactive Microcontroller Based Speed Sensors to Improve Students' Analytic Thinking Skills. *International Journal of Online and Biomedical Engineering*, 16 (9), p. 173 – 182 .
- [13] Maison, Kurniawan, D. A., Wirayuda, R. P. and Chen, D. (2022). Process Skills-Based E-Module: Impact on Analytical Thinking Skills. *Jurnal Penelitian dan Pengembangan Pendidikan Fisika (JPPPF)*, 8 (1), p. 23 – 34.
- [14] Majeed, B. H. (2016). The Conceptual Mathematical Knowledge and Analytical Thinking for the First Stage Students at Math Sciences Department, Faculty of Education for Pure Sciences, IBN Alhaithem, University of Baghdad. *International Journal of Science and Research (IJSR)*, 6 (12), p. 1379 – 1392.
- [15] Marzano, R. J. and Kendall, J. S. (2008). *Designing & Assessing Educational Objectives: Applying the New Taxonomy*. California: Corwin Press.
- [16] Mavuru, L. and Ramnarain, U. (2020). Learners' Socio-Cultural Backgrounds and Science Teaching and Learning: A Case Study of Township Schools in South Africa. *Cultural Studies of Science Education*, 15, p. 1067 – 1095.
- [17] Ong, K. K. A., Hart, C. E. and Chen, P. K. (2016). Promoting Higher-Order Thinking Through Teacher Questioning: A Case Study of a Singapore Science Classroom. *New Waves Educational Research & Development*, 19 (1), p. 1 – 19.

- [18] Qolfathiriyus, A., Sujadi, I. and Indriati, D. (2019). Characteristic Profile of Analytical Thinking in Mathematics Problem Solving. *Journal of Physics: Conf. Series*, 1157 (1), p. 1 – 6.

ข้อกำหนดในการจัดทำเอกสารเพื่อลงตีพิมพ์ใน วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. กระดาษและเลขหน้า

ตั้งค่าขนาดกระดาษ และระยะขอบดังนี้	ขนาดของกระดาษ : 19.05 ซม. x 26.03 ซม.
ระยะกั้นขอบซ้าย (left margin) : 2.22 ซม.	ระยะกั้นขอบขวา (right margin) : 2.22 ซม.
ระยะกั้นขอบบน (top margin) : 2.69 ซม.	ระยะกั้นขอบล่าง (bottom margin) : 2.69 ซม.
การย่อหน้า ระยะละ 0.64 ซม.	เลขหน้า อยู่กึ่งกลางหน้ากระดาษด้านล่าง

2. อักษร

ฟอนต์ของอักษรทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษกำหนดเป็น TH Sarabun New (ดาวน์โหลดได้ที่ <http://www.f0nt.com/release/th-sarabun-new/>) และกำหนดขนาดและลักษณะของอักษร ในส่วนต่าง ๆ ดังนี้
ชื่อบทความใช้อักษรขนาด 20 ตัวหนา ชื่อหัวข้อและชื่อหัวข้อย่อยใช้อักษรขนาด 16 ตัวหนา สำหรับเนื้อหา คำบรรยาย และที่มาของตารางและรูปภาพ ใช้อักษรขนาด 16 ตัวปกติ

3. หัวข้อที่ต้องมีในบทความ

ชื่อบทความ ชื่อผู้เขียน ที่อยู่ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ
อีเมล : ภาษาอังกฤษ
บทคัดย่อ คำสำคัญ : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ
บทนำ เนื้อหา สรุป : ภาษาไทย หรือ ภาษาอังกฤษ อย่างใดอย่างหนึ่ง
เอกสารอ้างอิง : ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

4. การพิมพ์บทคัดย่อ

บทคัดย่อมีเพียงหนึ่งย่อหน้า โดยเป็นการเขียนอย่างกะทัดรัด ได้ใจความ และไม่มีรายการอ้างอิง

5. การพิมพ์คำสำคัญ

คำสำคัญภาษาไทย แต่ละคำให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยไม่มีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “คำสำคัญ:”

คำสำคัญภาษาอังกฤษ แต่ละคำให้ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ ให้เว้นช่องว่าง 1 ช่อง โดยมีจุลภาคคั่น และเริ่มต้นบรรทัดด้วยคำว่า “Keywords:”

6. ชื่อ ที่อยู่ และอีเมลของผู้เขียน

ระบุชื่อผู้เขียนทุกคน และหน่วยงานหรือที่อยู่สำหรับติดต่อ รวมทั้งอีเมลของทุกคน โดยพิมพ์ชิดขอบขวาของกระดาษ

7. การพิมพ์หัวข้อ หรือ หัวข้อย่อย

ตำแหน่งการพิมพ์ให้พิมพ์ชิดขอบซ้ายของกระดาษ และการลำดับหัวข้อ ให้ใช้ตัวเลขในการลำดับหัวข้อ และต่อด้วยจุด เช่น 1. 2. สำหรับหัวข้อย่อยให้ใช้ตัวเลขหัวข้อ ต่อด้วยจุด และตามด้วยตัวเลขลำดับหัวข้อย่อย เช่น 2.1 2.2

8. คำแนะนำอื่น ๆ

คำศัพท์วิชาการภาษาไทย ให้ใช้ตามศัพท์บัญญัติของสำนักงานราชบัณฑิตยสถาน ดูได้ที่

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php>

การเว้นวรรค ให้ใช้ระยะช่องว่าง 1 ช่อง

ตัวแปร ให้พิมพ์ด้วยตัวเอียง

สมการ ให้ใช้การพิมพ์ ไม่อนุญาต ให้ใช้ในลักษณะรูปภาพ สำหรับลำดับหมายเลขกำกับสมการ ให้เขียนหมายเลขอยู่ในวงเล็บเล็ก และวางชิดขอบขวาของกระดาษ

รูปภาพ ต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับได้รูป โดยพิมพ์ในรูปแบบ : “รูปที่ หมายเลขรูป คำบรรยายรูป”

เช่น รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ ทั้งนี้กรณีมีรูปย่อย ให้ใช้ (ก) (ข) (ค) ... ต่อจากหมายเลขรูป

เช่น รูปที่ 1(ก) รูปที่ 1(ข)

ตาราง ให้ใช้เส้นตารางเป็นเส้นสีดำ โดยต้องมีหมายเลข และคำบรรยายกำกับเหนือตาราง โดยพิมพ์ในรูปแบบ

“ตารางที่ หมายเลขตาราง คำบรรยายตาราง”

ทั้งนี้ตำแหน่งของ รูปภาพ ตาราง และคำบรรยาย ให้จัดไว้กึ่งกลางของหน้ากระดาษ และหากนำรูปภาพ หรือ ตาราง มาจากแหล่งอื่น โปรดระบุแหล่งที่มาด้วย โดยระบุไว้ได้รูปภาพหรือตารางนั้น

9. เอกสารอ้างอิง

การพิมพ์รายการเอกสารอ้างอิงใช้ตามหลักเกณฑ์ APA (American Psychological Association) ฉบับที่ 6 (ศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ <https://arc.nstru.ac.th/resources/word/newupload.pdf>) การเรียงลำดับเอกสารอ้างอิง ให้เรียงตามลำดับตามอักษรแรกปรากฏของเอกสารอ้างอิง โดยเริ่มต้นจากเอกสารอ้างอิงภาษาไทยก่อนจนครบ แล้วต่อด้วยเอกสารอ้างอิงภาษาอังกฤษ โดยเอกสารอ้างอิงภาษาไทยจะต้องเขียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณະวิทยาาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2252-7980 Email: MathThaiOrg@gmail.com

วัตถุประสงค์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

1. เพื่อส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษา และงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อพัฒนาและแลกเปลี่ยนความรู้ทางการสอนคณิตศาสตร์
3. เพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อส่งเสริมวิชาชีพที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
5. เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับองค์กรทางคณิตศาสตร์ในประเทศและต่างประเทศ

สมาชิกของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

มี 2 ประเภท คือ สมาชิกกิตติมศักดิ์ และสมาชิกสามัญ

สมาชิกสามัญ ได้แก่ ผู้ที่มีความสนใจทางคณิตศาสตร์ หรือผู้ที่มีวิชาชีพเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สิทธิและหน้าที่ของสมาชิกสามัญ

1. มีสิทธิประดับเครื่องหมายของสมาคมฯ เมื่อได้รับหนังสืออนุญาตจากสมาคมฯ เป็นลายลักษณ์อักษร
2. มีสิทธิเข้าถึงวารสารคณิตศาสตร์ ฉบับเต็มในรูปแบบออนไลน์
3. มีสิทธิเข้าร่วมประชุมสามัญประจำปี และร่วมกิจกรรมที่สมาคมฯ จัดขึ้น
4. มีสิทธิออกเสียงลงคะแนนเลือกกรรมการบริหารสมาคมฯ
5. มีสิทธิได้รับการเสนอชื่อ เพื่อรับการเลือกตั้งเป็นกรรมการบริหารสมาคมฯ
6. มีสิทธิเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจการของสมาคมฯ ต่อคณะกรรมการบริหารสมาคมฯ
7. มีสิทธิขอรับทุนการศึกษาของสมาคมฯ เพื่อตนเอง หรือบุตรของสมาชิก
8. มีหน้าที่รักษาไว้ซึ่งเกียรติและมารยาทอันดีงามของสมาชิก
9. มีหน้าที่ปฏิบัติตามระเบียบข้อบังคับของสมาคมฯ

ค่าสมัครสมาชิก ประกอบด้วย

1. ค่าลงทะเบียนในการสมัครครั้งแรก 30 บาท
2. ค่าสมาชิกสามัญ ตลอดชีพ 3,000 บาท และ รายปี 250 บาท

วาระการเป็นสมาชิกสามัญรายปี เริ่มตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม ถึงวันที่ 31 ธันวาคม ของปี

กรอกใบสมัครสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้ที่

<https://www.mathassociation.or.th> หัวข้อ “สมาชิกสมาคม”



ใบสมัครสมาชิก

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

- ☐ สมาชิกใหม่
☐ ต่ออายุ เลขสมาชิกเดิม.....

วันที่ เดือน พ.ศ.

ข้าพเจ้า (ชื่อ - สกุล) อาชีพ

เบอร์โทรศัพท์ อีเมล

มีความประสงค์จะสมัครเป็นสมาชิกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมาชิกประเภท

- ☐ สมาชิกสามัญตลอดชีพ (3,000 บาท) ☐ สมาชิกสามัญรายปี (250 บาท)

พร้อมใบสมัครนี้ได้ชำระ ค่าสมาชิกและ/หรือ ☐ ค่าลงทะเบียนสมัครครั้งแรก จำนวน 30 บาท

รวมเป็นเงิน บาท (.....)

โดย ☐ โอนเงิน ไปยังบัญชีเลขที่ 162-0-25671-1 ธนาคารกรุงไทย สาขาจามจุรีสแควร์

ชื่อบัญชี : “สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (สอบและอบรม)”

- ☐ เงินสด (ในกรณีที่มาติดต่อด้วยตนเองที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ชั้น 9 อาคารมหาวิทยาลัย คณະวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ที่อยู่สำหรับการจัดส่งเอกสาร กรุณาเขียนตัวบรรจง

ชื่อ.....

เลขที่ ซอย หมู่ที่

ถนน ตำบล อำเภอ

จังหวัด รหัสไปรษณีย์

(สำหรับเจ้าหน้าที่) เลขที่ใบเสร็จ.....

รับเงินค่าสมาชิกจำนวน.....

วันที่.....

ลงนาม..... ผู้สมัคร

(.....)

สมัครสมาชิก โดย (1) สแกน QR-Code หรือเข้าถึง <https://bit.ly/37yC835>

หรือ (2) ส่งใบสมัครสมาชิก พร้อมหลักฐานการโอนเงิน มาที่

(ก) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ตู้ ป.ณ. 202 ปณ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10332 หรือ

(ข) อีเมล MathThaiOrg@gmail.com

แล้วทางสมาคมฯ จะแจ้งยืนยันการสมัครสมาชิกให้ท่านทราบต่อไป



ประกาศ!! สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี 2569

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ในวันอาทิตย์ที่ 1 พฤศจิกายน 2569

🔥เตรียมตัวให้พร้อม แล้วพบกันในสนามสอบค่ะ



$a^2 + b^2 = c^2$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

π

$\sum_{k=1}^n k$

$\sqrt{2}$

เปิดรับสมัคร

สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี 2569

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

 สอบวันอาทิตย์ที่ 1 พฤศจิกายน 2569	 เปิดรับสมัคร 20 สิงหาคม – 15 กันยายน 2569	 15 สนามสอบ ทั่วประเทศ
 ประเภทการแข่งขัน • ประเภทบุคคล • ประเภททีม (ทีมละ 3 คน) สมัครประเภททีม = สมัครประเภทบุคคลอัตโนมัติ	 ระดับการแข่งขัน • ประถมศึกษาตอนปลาย • มัธยมศึกษาตอนต้น • มัธยมศึกษาตอนปลาย	 ค่าสมัครสอบ • บุคคล 230 บาท / คน • ทีม 750 บาท / ทีม



สมัครสอบและแนบหลักฐานการชำระเงิน
สแกน QR Code
หรือผ่านลิงก์ forms.gle/oagxRXtP6zwqk6Kw9



ดูรายละเอียดเพิ่มเติมจากประกาศฉบับเต็ม

กิจกรรมของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปี พ.ศ. 2568 – 2570
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ จัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้เกิดความตื่นตัวทางวิชาการ
ในวงการคณิตศาสตร์ ระดับต่าง ๆ ทั้งให้บริการทางวิชาการแก่สังคม เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของสมาคม
ที่ตั้งไว้ ดังนี้

1. ผลิตวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์

- วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ จำนวน 3 ฉบับต่อปี
- Thai Journal of Mathematics (Scopus) จำนวน 4 ฉบับต่อปี

2. อบรมความรู้คณิตศาสตร์

ดูข้อมูล รายละเอียด และกำหนดการ ได้ที่ <https://www.mathassociation.or.th> ในหัวข้อกิจกรรมสมาคม

3. สอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประจำปี ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
การสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปี 2569 วันอาทิตย์ที่ 1 พฤศจิกายน พ.ศ. 2569

4. จัดประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี

การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 30 ประจำปี พ.ศ. 2569
(The 30th Annual Meeting in Mathematics : AMM 2026)

ระหว่างวันที่ 28 - 30 พฤษภาคม พ.ศ. 2569 โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย
ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ร่วมกับ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยขอนแก่น

5. ร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในการจัดส่งผู้แทนประเทศไทย
เข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

6. สนับสนุนและร่วมมือกับหน่วยงานอื่นในกิจกรรมส่งเสริมวิชาการทางคณิตศาสตร์

- ประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น และมัธยมศึกษาตอนปลาย
โดยร่วมมือกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

ดูข้อมูลและกำหนดการได้ที่ <https://www.mathassociation.or.th> ในหัวข้อกิจกรรมสมาคม

- ประชุมวิชาการระดับปริญญาตรี ด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ ครั้งที่ 14

(The 14th Undergraduate in Applied Mathematics Conference : UAMC 2026)

วันที่ 29 มีนาคม พ.ศ. 2569 โดยศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย

ภายใต้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ร่วมกับ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ชั้น 9 อาคารมหาชิรฐานิธิ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ และโทรสาร 02-252-7980



สี HEX #0050FE
RGB 0 80 254
Transparent 0%



Mathematical Journal

Volume 71 Number 715 May - Aug 2026

สีปก