Rattanakosin Journal of Science and Technology: RJST
2022, Volume 4 Issue 3: 40-45
Research Article
Online ISSN: 2673-0553

สองสมการไดโอแฟนไทน์ $16^x + qp^y = z^4$ และ $16^x - qp^y = z^4$

On two Diophantine equations $16^x + qp^y = z^4$ and $16^x - qp^y = z^4$

อภิรัฐ ศิระวรกุล[1] และ สุธน ตาดี[2*]
[1,2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี
E-mail: [1]apirat.si@lawasri.tru.ac.th, [2*]suton.t@lawasri.tru.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงว่าสองสมการไดโอแฟนไทน์ $16^x + qp^y = z^4$ และ $16^x - qp^y = z^4$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$ และ $q \equiv 3 \pmod 4$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยจำนวนเต็มบวก ข้อความคาดการณ์ของกาตาลัน

Abstract

In this paper, we show that two Diophantine equations $16^x + qp^y = z^4$ and $16^x - qp^y = z^4$, where p and q are prime numbers with $p \equiv 3 \pmod 4$ and $q \equiv 3 \pmod 4$, have no positive integer solution.

Keywords: Diophantine equation, Positive integer solution, Catalan's conjecture

1. ที่มาและความสำคัญ

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นอีกสมการหนึ่งที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง เนื่องจากความรู้ที่ได้จากการศึกษาเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้อย่างมากมาย [1], [2], [3], [4] เช่น สมดุลสมการเคมี (Balancing chemical equation), การไหลในเครือข่าย (Network flow) และโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับธุรกิจ (Word problem on business) เป็นต้น โดยที่สมการไดโอแฟนไทน์จะพิจารณาเฉพาะผลเฉลย

* Corresponding author, e-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th
Received date: 12/ 06/ 2022 Revised date: 18/ 09/ 2022 Accepted date: 15/ 12/ 2022

ที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ตัวอย่างงานวิจัยที่เกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์ เช่น Chotchaisthit [5] ได้แสดงว่าผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ $4^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะอยู่ในรูป $(x,p,y,z) \in \{(2,3,2,5)\} \cup \{(r, 2^{r+1}+1, 1,\ 2^r+1): r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(r, 2, 2r+3, 3 \cdot 2^r): r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2015 Chotchaisthit & Worawiset [6], [7], [8] ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ $323^x + 323^{2s}n^y = z^{2t}, 143^x + 143^{2s}n^y = z^{2t}$ และ$483^x + 483^{2s}n^y = z^{2t}$ เมื่อ s,t,n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $n \equiv 5(\mathrm{mod}\ 20)$ หลังจากนั้น Rabago [9] ได้พิสูจน์ว่าสมการ $4^x - p^y = 3z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x,y,z) \in \{(0,0,0),(1,0,1)\}$ ในปีต่อมา Laipaporn *et al.* [10] ได้พบว่าสมการ $3^x + p5^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 5(\mathrm{mod}\ 24)$ หรือ $p \equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปี ค.ศ. 2020 Elshahed & Kamarulhaili [11] ได้แสดงว่าสมการ $(4^n)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูปต่อไปนี้ $(x,y,z,p) \in \{(k, 1, 2^{nk}-1, 2^{nk+1}-1) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0,0,p)\}$

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก (x,y,z) ของสองสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบใหม่ กล่าวคือ สมการไดโอแฟนไทน์ $16^x + qp^y = z^4$ และ $16^x - qp^y = z^4$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ

2. วัตถุประสงค์

เพื่อพิสูจน์ว่าสองสมการไดโอแฟนไทน์ $16^x + qp^y = z^4$ และ $16^x - qp^y = z^4$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ และ $q \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

3. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบท 1 (ข้อความคาดการณ์ของกาตาลัน) ([12]) สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a,b,x,y) = (3,2,2,3)$ เมื่อ a,b,x,y เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $\min\{a,b,x,y\} > 1$

ทฤษฎีบท 2 ([5]) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป $(x,p,y,z) = (2,3,2,5)$ หรือ $(x,p,y,z) = (r, 2^{r+1}+1, 1,\ 2^r+1)$เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $2^{r+1}+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

บทแทรก 3 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x,p,y,z) \in \{(2,3,2,5),(0,3,1,2)\}$

พิสูจน์ ให้ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และเป็นผลเฉลยของสมการ $4^x + p^y = z^2$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 2 จะพบว่ามี 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $(x,p,y,z) = (2,3,2,5)$ การพิสูจน์เสร็จสิ้น

กรณีที่ 2 $(x,p,y,z) = (r, 2^{r+1}+1, 1,\ 2^r+1)$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $p = 2^{r+1}+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า $r \geq 1$ และจาก $p = 2^{r+1}+1$ จะได้ว่า $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ ดังนั้น $r = 0$ จะได้ว่า $(x,p,y,z) = (0,3,1,2)$

ทฤษฎีบท 4 ([9]) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ จะได้ว่า ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x - p^y = z^2$ จะอยู่ในรูป $(x,y,z) \in \{(0,0,0)\} \cup \{(k-1, 1, 2^{k-1}-1)\}$ เมื่อ $p = 2^k - 1$ และ k เป็นจำนวนเฉพาะ และถ้า p ไม่ได้อยู่ในรูป $2^k - 1$ จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์นี้มีผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z) = (0,0,0)$

4. วิธีดำเนินการวิจัย

ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ในงานวิจัยนี้จะเริ่มศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก (x,y,z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $16^x + qp^y = z^4$ หลังจากนั้นจะศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก (x,y,z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $16^x - qp^y = z^4$

ทฤษฎีบท 5 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ และ $q \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์

$$16^x + qp^y = z^4 \qquad (1)$$

ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ สมมติว่า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นผลเฉลยของสมการ (1) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ดังนั้น $z^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ และ

$$(z^2 - 4^x)(z^2 + 4^x) = qp^y \qquad (2)$$

และจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u และ v โดยที่ $u \in \{0,1\}$ ที่ทำให้

$$z^2 - 4^x = q^u p^v \qquad (3)$$

และ $z^2 + 4^x = q^{1-u} p^{y-v}$ (4)

กรณีที่ $u = 0$ จาก (3) จะได้ว่า

$$4^x + p^v = z^2 \qquad (5)$$

และจากบทแทรก 3 และ x เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $(x,p,v,z) = (2,3,2,5)$ ดังนั้นจาก (4) จะได้ว่า $41 = q3^{y-2}$ เพราะฉะนั้น $q = 41$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $q \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$

กรณีที่ $u = 1$ จาก (3) และ (4) จะได้ว่า

$$z^2 - 4^x = qp^v \qquad (6)$$

และ $z^2 + 4^x = p^{y-v}$ (7)

จาก (6) และ (7) จะได้ว่า $y > 2v$ และ

$$2^{2x+1} = p^v(p^{y-2v} - q) \qquad (8)$$

ถ้า $v > 0$ จะได้ว่า $p|2$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 3 (\text{mod } 4)$ เพราะฉะนั้น $v = 0$ และจาก (6) จะได้ว่า $z^2 - 4^x = q$ และเนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $4^x \equiv 0 (\text{mod } 4)$ และจาก $q \equiv 3 (\text{mod } 4)$ จะได้ว่า $z^2 \equiv 3 (\text{mod } 4)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$

ทฤษฎีบท 6 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 (\text{mod } 4)$ และ $q \equiv 3 (\text{mod } 4)$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$16^x - qp^y = z^4 \quad (9)$$

ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ สมมติว่า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นผลเฉลยของสมการ (9) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $z^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$ และ

$$(4^x - z^2)(4^x + z^2) = qp^y \quad (10)$$

และจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u และ v โดยที่ $u \in \{0, 1\}$ ที่ทำให้

$$4^x - z^2 = q^u p^v \quad (11)$$

และ $4^x + z^2 = q^{1-u} p^{y-v}$ (12)

กรณีที่ $u = 0$ จาก (11) และ (12) จะได้ว่า

$$4^x - z^2 = p^v \quad (13)$$

และ $4^x + z^2 = qp^{y-v}$ (14)

จาก (13) และ ทฤษฎีบท 4 และ x เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นจะมีจำนวนเฉพาะ k ซึ่งทำให้ $p = 2^k - 1$

และ $(x, v, z) = (k - 1, 1, 2^{k-1} - 1)$ และจาก (14) จะได้ว่า

$$2^{2k-1} - 2^k + 1 = q(2^k - 1)^{y-1} \quad (15)$$

ดังนั้น $(2^k - 1)^2 + 1 = 2q(2^k - 1)^{y-1}$ (16)

สมมติว่า $y - 1 \geq 2$ จะได้ว่า $(2^k - 1)^2 + 1 < 2q(2^k - 1)^{y-1}$ ดังนั้น $y - 1 = 0$ หรือ 1 ถ้า $y - 1 = 0$ จาก (15) จะได้ว่า $q = 2^{2k-1} - 2^k + 1$ ดังนั้น $q \equiv 1 (\text{mod } 4)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $q \equiv 3 (\text{mod } 4)$ และถ้า $y - 1 = 1$ จาก (16) จะได้ว่า $(2^k - 1)|1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน เนื่องจาก k เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $k \geq 2$ เพราะฉะนั้น $2^k - 1 \geq 3$

กรณีที่ $u = 1$ จาก (11) และ (12) จะได้ว่า

$$4^x - z^2 = qp^v \quad (17)$$

และ $4^x + z^2 = p^{y-v}$ (18)

จาก (17) และ (18) จะได้ว่า $y > 2v$ และ

$$2^{2x+1} = p^v(p^{y-2v} + q) \quad (19)$$

และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 (\text{mod } 4)$ ดังนั้น $v = 0$ ดังนั้น จาก (18) จะได้ว่า

$$4^x + z^2 = p^y \tag{20}$$

และเนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $4^x \equiv 0 \pmod 4$ และจาก $z^2 \equiv 1 \pmod 4$ จะได้ว่า $4^x + z^2 \equiv 1 \pmod 4$ และจาก (20) จะได้ว่า $p^y \equiv 1 \pmod 4$ และเนื่องจาก $p \equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$ เพราะฉะนั้น$(-1)^y \equiv 1 \pmod 4$ ดังนั้น y เป็นจำนวนเต็มคู่ จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $y = 2n$ และจาก (20) จะได้ว่า $(p^n - z)(p^n + z) = 2^{2x}$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ t ที่ทำให้ $p^n - z = 2^t$ และ $p^n + z = 2^{2x-t}$ จะได้ว่า $2x > 2t$ และ $2p^n = 2^t(2^{2x-2t} + 1)$ ดังนั้น $t = 1$ จะได้ว่า

$$p^n - 2^{2x-2} = 1 \tag{21}$$

และจาก x เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $2x - 2 \neq 1$ เพราะฉะนั้น $2x - 2 > 1$

ถ้า $n = 1$ จาก (21) และ $2x - 2 > 1$ จะได้ว่า $p \equiv 1 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 3 \pmod 4$ ดังนั้น $n > 1$ และจาก (21) และทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $2x - 2 = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็มบวก

5. สรุปผลและวิจารณ์

ในงานวิจัยนี้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $16^x + qp^y = z^4$ และ $16^x - qp^y = z^4$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 3 \pmod 4$ และ $q \equiv 3 \pmod 4$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก และสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป คือ ถ้า $p \equiv 1 \pmod 4$ หรือ $q \equiv 1 \pmod 4$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ทั้งสองมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือไม่

6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำงานวิจัยครั้งนี้

7. เอกสารอ้างอิง

[1] Klaška, J. (2017). Real-world applications of number theory. South Bohemia Mathematical Letters, 25(1), 39-47.

[2] Kaur, D. & Sambhor, M. (2017). Diophantine equations and its applications in real life. International Journal of Mathematics and its Applications, 5(2B), 217-222.

[3] Anbuselvi, R. & Sivasankari, J. (2019). Applications of Diophantine equations in chemical equations. Journal of Emerging Technologies and Innovative Research, 6(6), 371-373.

[4] Dhurga, C.K. (2021). A linear Diophantine equation and its real life applications. Advances and Applications in Mathematical Sciences, 20(8), 1389-1394.

[5] Chotchaisthit, S. (2012). On the Diophantine equation $4^x + p^y = z^2$ where p is a prime number. American Journal of Mathematics and Sciences, 1(1), 191-193.

[6] Chotchaisthit, S. & Worawiset, S. (2015). On the Diophantine equation $323^x + 323^{2s}n^y = z^{2t}$ where s, t, n are non-negative integers and $n \equiv 5(\mathrm{mod}\ 20)$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 100(3), 435-442. http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v100i3.11

[7] Chotchaisthit, S. & Worawiset, S. (2015). On the Diophantine equation $143^x + 143^{2s}n^y = z^{2t}$ where s, t, n are non-negative integers and $n \equiv 5(\mathrm{mod}\ 20)$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 100(3), 405-412. http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v100i3.7

[8] Chotchaisthit, S. & Worawiset, S. (2015). On the Diophantine equation $483^x + 483^{2s}n^y = z^{2t}$ where s, t, n are non-negative integers and $n \equiv 5(\mathrm{mod}\ 20)$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 100(4), 461-468. http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v100i4.4

[9] Rabago, J.F.T. (2018). On the Diophantine equation $4^x - p^y = 3z^2$ where p is a prime. Thai Journal of Mathematics, 16(3), 643-650.

[10] Laipaporn, K., Wananiyakul, S. & Khachorncharoenkul, P. (2019). On the Diophantine equation $3^x + p5^y = z^2$. Walailak Journal of Science and Technology, 16(9), 647-653.

[11] Elshahed, A. & Kamarulhaili, H. (2020). On the Diophantine equation $(4^n)^x - p^y = z^2$. WSEAS Transactions on Mathematics, 19, 349-352.

[12] Mihailescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan’s conjecture. Journal für die Reine und Angewante Mathematik, 572, 167-195.