

ทฤษฎีของ Γ -กึ่งกรุปเกือบขวาพารามีเดียล

Theory of paramedial Γ -right almost semigroups

สุพัตชา ชูพันธ์^{1*} และ ไพโรจน์ เที่ยรระยง²

^{1*, 2}สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

E-mail: ^{1*}suphatcha.c@psru.ac.th, ²pairote.y@psru.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้แนะนำแนวคิดของ Γ -กึ่งกรุปเกือบขวา (Γ -RA-กึ่งกรุป) และตรวจสอบสมบัติของ Γ -กึ่งกรุปเกือบขวา นอกจากนี้ได้แนะนำแนวคิดของ Γ -RA-กึ่งกรุปยืดหยุ่น, Γ -RA-กึ่งกรุปตัดออกข้าม, Γ -RA-กึ่งกรุป, Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียลและ Γ -RA-กึ่งกรุปนิจผลและตรวจสอบโครงสร้างสมบัติของ Γ -RA-กึ่งกรุปที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ในตอนสุดท้ายได้ตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่าง Γ -RA-กึ่งกรุป และ Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียล

คำสำคัญ: Γ -กึ่งกรุปเกือบขวา Γ -RA-กึ่งกรุปตัดออกข้าม Γ -RA-กึ่งกรุปยืดหยุ่น Γ -RA-กึ่งกรุปนิจผล Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียล

Abstract

In this paper, we have introduce the concept of Γ -right almost semigroups (Γ -RA-semigroups), and to investigate it properties. Moreover, we also introduce the concept of flexible Γ -RA-semigroups, cross-cancellative Γ -RA-semigroups, paramedial Γ -RA-semigroups and idempotent Γ -RA-semigroups and investigate its structural properties. Finally, the relationships between Γ -RA-semigroups and paramedial Γ -RA-semigroups were investigated.

Keywords: Γ -RA-semigroup, cross-cancellative Γ -RA-semigroup, flexible Γ -RA-semigroup, idempotent Γ -RA-semigroup, paramedial Γ -RA-semigroup

* Corresponding author, e-mail: suphatcha.c@psru.ac.th

1. บทนำ

ในบทความนี้ได้ศึกษาแนวความคิดของกึ่งกรุปเกือบซ้าย (left almost semigroup) ซึ่งเป็นลักษณะทั่วไป (generalization) ของกึ่งกรุปสลับที่ (commutative semigroup) ซึ่งถูกค้นพบโดย Kazim และ Naseerudin [3] ในปี ค.ศ. 1972 และแนวความคิดของ RA-กึ่งกรุป (RA-semigroup) ถูกนำเสนอโดย Leelavardhini และ Latha [6] ในปี ค.ศ. 2019

โครงสร้างทางพีชคณิตของ Γ -กึ่งกรุป (Γ -semigroup) เป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ และมีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากได้ศึกษาและพัฒนาโครงสร้างดังกล่าวตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 1981, M. K. Sen [8] ก็ได้แนะนำแนวคิดของ Γ -กึ่งกรุป (Γ -semigroup) ซึ่งเป็นลักษณะทั่วไปของกึ่งกรุป (semigroup) ต่อมาในปี ค.ศ. 2008 Hila [2] ได้ให้บางลักษณะเฉพาะของควอซี-ไอดีล (quasi-ideal) ใน Γ -กึ่งกรุปและ Γ -กึ่งกรุปปกติ (regular Γ -semigroup) ในพจน์ของไอดีลซ้าย (left ideal), ไอดีลขวา (right ideal), ควอซี-ไอดีลและไบ-ไอดีล (bi-ideal) ในส่วนของแนวคิด Γ -ไอดีล (Γ -ideal) และ Γ -ไบ-ไอดีล (Γ -bi-ideal) ใน Γ -AG-กรุปพอยด์ (Γ -AG-groupoid) ถูกนำเสนอโดย Shah และ Rehman [9] ในปี ค.ศ. 2010 ซึ่งเซตข้างต้นเป็นลักษณะทั่วไปของไอดีล (ideal) และไบ-ไอดีลตามลำดับ นอกจากนี้ยังให้ลักษณะเฉพาะ (characteristics) ของ Γ -ไอดีลและ Γ -ไบ-ไอดีลใน Γ -AG-กรุปพอยด์ ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Shah และ Rehman [10] ได้แนะนำแนวคิดของ Γ -AG-กรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่เฉพาะที่ (locally associative Γ -AG-groupoid) นอกจากนั้นยังได้แสดงว่าถ้า S เป็น Γ -AG-กรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่เฉพาะที่มีเอกลักษณ์ซ้าย (left identity) แล้ว S/ρ เป็นภาพสาคิสฐานฐานการแยกกันอย่างอ่อนสูงสุด (maximal weakly separative homomorphic image) ของ S ในปีเดียวกันนั้น Khan และคณะ [5] ก็ได้นำเสนอแนวคิดของ Γ -วิภันย์ (Γ -fuzzification) ใน Γ -AG-กรุปพอยด์ซึ่งเป็นลักษณะทั่วไปของ AG-กรุปพอยด์วิภันย์ (fuzzy AG-groupoid) ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Khan และคณะ [4] ได้แนะนำแนวคิดของ Γ -AG-กรุปพอยด์อันดับ (ordered Γ -AG-groupoid) และได้พิสูจน์อีกว่าทุก Γ -ไอดีลใน Γ -AG-กรุปพอยด์อันดับ S เป็น Γ -ไอดีล Γ -เฉพาะ (Γ -prime Γ -ideal) ก็ต่อเมื่อ Γ -ไอดีลเป็น Γ -ไอดีล Γ -นิพผล (Γ -idempotent Γ -ideal) จนถึงปัจจุบันในปี ค.ศ. 2018 Akin [1] ได้แนะนำแนวคิดพีชคณิตอย่างนุ่มวิภันย์ (fuzzy soft algebraic) ซึ่งเป็นลักษณะทั่วไปของ LA- Γ -กึ่งกรุป (LA- Γ -semigroup)

จากการทบทวนวรรณกรรมข้างต้นจึงได้นำแนวคิดของ RA-กึ่งกรุปและ Γ -กึ่งกรุปมาพัฒนาและบูรณา เป็นโครงสร้างทางพีชคณิตใหม่ที่เรียกว่า Γ -RA-กึ่งกรุป และนำเสนอแนวความคิดของ Γ -RA-กึ่งกรุปยืดหยุ่น (flexible Γ -RA-semigroup), Γ -RA-กึ่งกรุปตัดออกข้าม (cross-cancellative Γ -RA-semigroup), Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียล (paramedial Γ -RA-semigroup) และ Γ -RA-กึ่งกรุปนิพผล (idempotent Γ -RA-semigroup) นอกจากนี้ได้ตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่าง Γ -RA-กึ่งกรุป และ Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียล

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 2.1 เพื่อศึกษา RA-กึ่งกรุปและ Γ -กึ่งกรุป
- 2.2 เพื่อนำเสนอแนวความคิดของ Γ -RA-กึ่งกรุป

3. ขอบเขตของการวิจัย

- 3.1 ขอบเขตประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ในการทำวิจัยนี้เป็นการศึกษาและพัฒนาสมบัติต่าง ๆ ในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ RA-กึ่งกรุปและ Γ -กึ่งกรุปจึงไม่มีขอบเขตของประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ศึกษา

- 3.2. ขอบเขตเนื้อหา

ในการทำวิจัยนี้เป็นการศึกษาและพัฒนาสมบัติต่าง ๆ ของ Γ -RA-กึ่งกรุป

- 3.3. ขอบเขตพื้นที่

ในการทำวิจัยนี้เป็นการศึกษาและพัฒนาสมบัติต่าง ๆ ในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ Γ -RA-กึ่งกรุปจึงไม่มีขอบเขตของพื้นที่ศึกษา

4. วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทความนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการสร้างทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ใช้ในการทำวิจัยซึ่งเป็นรูปแบบโครงวิจัยเชิงทฤษฎี จึงไม่มีการลงพื้นที่ แต่จะเป็นการศึกษาหาข้อมูลจากบทความวิจัยต่าง ๆ จากเว็บไซต์ที่เกี่ยวข้องกับ RA-กึ่งกรุปและ Γ -กึ่งกรุป นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ และคาดเดาพฤติกรรมของ Γ -RA-กึ่งกรุปเพื่อสร้างทฤษฎีบทต่าง ๆ โดยเริ่มจากความรู้พื้นฐาน ดังนี้

- 4.1. ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้ได้พัฒนาแนวคิดของ RA-กึ่งกรุปกับ Γ -กึ่งกรุปเพื่อสร้างบทนิยามของ Γ -RA-กึ่งกรุปและให้ความรู้พื้นฐานโดยเริ่มต้นจากบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม 4.1.1 [6] กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่า กึ่งกรุปเกือบขวา (right almost semigroup) หรือเรียกย่อ ๆ ว่า RA-กึ่งกรุป (RA-semigroup) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $\cdot : S \times S \rightarrow S$ จะเขียน $\cdot(a, b)$ ด้วย ab สำหรับทุก $a, b \in S$ และมีสมบัติ $a(bc) = c(ba)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$

บทนิยาม 4.1.2 กำหนดให้ S และ Γ เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่า Γ -กึ่งกรุปเกือบขวา (Γ -right almost semigroup) หรือเรียกย่อ ๆ ว่า Γ -RA-กึ่งกรุป (Γ -RA-semigroup) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $\cdot : S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ จะเขียน $\cdot(a, \alpha, b)$ ด้วย $a\alpha b$ สำหรับทุก $a, b \in S$ และ $\alpha \in \Gamma$ และมีสมบัติ $a\alpha(b\beta c) = c\alpha(b\beta a)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$

ตัวอย่าง 4.1.3 กำหนดให้ S เป็น RA-กึ่งกรุป Γ เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $\cdot : S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ นิยาม $a\alpha b = ab$ สำหรับทุก $a, b \in S$ และ $\alpha \in \Gamma$ เห็นได้ชัดเจนว่า S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุป

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 4.1.3 เห็นได้ชัดเจนว่าทุก RA-กึ่งกรุปจะเป็น Γ -RA-กึ่งกรุปเสมอ แต่บทกลับอาจไม่จริง ดังนี้

ตัวอย่าง 4.1.4 ให้ $\Gamma = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ และ $\cdot: \mathbb{Z} \times \Gamma \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ นิยาม $a\alpha b \mapsto a - \alpha - b$ สำหรับทุก $a, b, c \in \mathbb{Z}$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} a\alpha(b\beta c) &= a\alpha(b - \beta - c) \\ &= a - \alpha - (b - \beta - c) \\ &= a - \alpha - b + \beta + c \\ &= c - \alpha - b + \beta + a \\ &= c - \alpha - (b - \beta - a) \\ &= c\alpha(b - \beta - a) \\ &= c\alpha(b\beta a) \end{aligned}$$

จะได้ว่า S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุป แต่ไม่เป็น RA-กึ่งกรุปเนื่องจากเนื่องจากมี $1, 3 \in \mathbb{Z}$ และ $2 \in \Gamma$ จะได้ว่า $1, 2, 3 \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $3(21) = 0 \neq -4 = 1(23)$

4.2. ทฤษฎีบทหลัก

ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอแนวคิดของ Γ -RA-กึ่งกรุปตัดออกข้าม, Γ -RA-กึ่งกรุปยึดหยุ่น, Γ -RA-กึ่งกรุปพารามิเตอร์และ Γ -RA-กึ่งกรุปนิพจน์ นอกจากนี้ได้พิสูจน์สมบัติบางประการของ Γ -RA-กึ่งกรุป โดยเริ่มต้นจากบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม 4.2.1 กำหนดให้ S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุป จะเรียก S ว่า Γ -RA-กึ่งกรุปยึดหยุ่นก็ต่อเมื่อ $(a\alpha b)\beta a = a\alpha(b\beta a)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ และเรียก S ว่า Γ -RA-กึ่งกรุปตัดออกข้าม ถ้า $a\alpha b = b\alpha c$ แล้ว $a = c$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$ และ $\alpha \in \Gamma$

ทฤษฎีบท 4.2.2 กำหนดให้ S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปตัดออกข้าม ถ้า S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปยึดหยุ่น แล้วสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปที่มีสมบัติสลับที่และ $(a\Gamma b)\Gamma c = a\Gamma(b\Gamma c)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$
2. $a\alpha(b\beta c) = c\alpha(a\beta b) = b\alpha(c\beta a)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$
3. $(a\beta b)\alpha c = (a\beta c)\alpha b = (b\beta c)\alpha a$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$

การพิสูจน์ 1. กำหนดให้ $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ พิจารณา $(a\alpha b)\alpha a = a\alpha(b\alpha a)$ จะได้ $a\alpha b = b\alpha a$ จะได้ว่า S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปที่มีสมบัติสลับที่ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} (a\alpha b)\beta c &= c\beta(b\alpha a) \\ &= a\beta(b\alpha c) \end{aligned}$$

ดังนั้นจึงได้ $(a\Gamma b)\Gamma c = a\Gamma(b\Gamma c)$

2. ให้ $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ พิจารณา

$$\begin{aligned} a\alpha(b\beta c) &= c\alpha(b\beta a) \\ &= c\alpha(a\beta b) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} c\alpha(a\beta b) &= b\alpha(a\beta c) \\ &= b\alpha(c\beta a) \end{aligned}$$

จะได้ $a\alpha(b\beta c) = c\alpha(a\beta b) = b\alpha(c\beta a)$

3. ให้ $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ พิจารณา

$$\begin{aligned} (a\beta b)\alpha c &= c\alpha(a\beta b) \\ &= b\alpha(a\beta c) \\ &= (a\beta c)\alpha b \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} (a\beta c)\alpha b &= b\alpha(a\beta c) \\ &= c\alpha(a\beta b) \\ &= c\alpha(b\beta a) \\ &= a\alpha(b\beta c) \\ &= (b\beta c)\alpha a \end{aligned}$$

จะได้ว่า $(a\beta b)\alpha c = (a\beta c)\alpha b = (b\beta c)\alpha a$

บทนิยาม 4.2.3 กำหนดให้ S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุป จะเรียก S ว่า Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียลก็ต่อเมื่อ $(a\alpha b)\beta(c\gamma d) = (d\alpha b)\beta(c\gamma a)$ สำหรับทุก $a, b, c, d \in S$ และ $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$

และเรียก S ว่า Γ -RA-กึ่งกรุปนิจพลก็ต่อเมื่อ $a\alpha a = a$ สำหรับทุก $a \in S$ และ $\alpha \in \Gamma$

ตัวอย่าง 4.2.4 จากตัวอย่าง 4.1.3 เห็นได้ชัดเจนว่าทุก RA-กึ่งกรุปพารามีเดียลและ RA-กึ่งกรุปนิจพลจะเป็น Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียลและ Γ -RA-กึ่งกรุปนิจพลตามลำดับ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง Γ -RA-กึ่งกรุปกับ Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียล

ทฤษฎีบท 4.2.5 ให้ S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปนิจพล ถ้า S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียลแล้วสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปที่มีสมบัติสลับที่และ $(a\Gamma b)\Gamma c = a\Gamma(b\Gamma c)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$
2. S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปที่มีสมบัติ $a\Gamma(b\Gamma c) = (a\Gamma b)\Gamma(a\Gamma c)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$
3. S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปที่มีสมบัติ $(a\Gamma b)\Gamma c = (a\Gamma c)\Gamma(b\Gamma c)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$
4. $a\alpha(b\beta c) = c\alpha(a\beta b) = b\alpha(c\beta a)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$
5. $(a\beta b)\alpha c = (a\beta c)\alpha b = (b\beta c)\alpha a$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$

การพิสูจน์ 1. ให้ $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 a\alpha b &= (a\beta a)\alpha(b\gamma b) \\
 &= b\alpha(b\gamma(a\beta a)) \\
 &= b\alpha(a\gamma(a\beta b)) \\
 &= (a\beta b)\alpha(a\gamma b) \\
 &= (b\beta b)\alpha(a\gamma a) \\
 &= b\alpha a
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปที่มีสมบัติสลับที่ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 (a\alpha b)\beta c &= (a\alpha b)\beta(c\gamma c) \\
 &= (c\alpha b)\beta(c\gamma a) \\
 &= a\beta(c\gamma(c\alpha b)) \\
 &= a\beta(b\gamma(c\alpha c)) \\
 &= a\beta(b\gamma c)
 \end{aligned}$$

ดังนั้นจึงได้ $(a\Gamma b)\Gamma c = a\Gamma(b\Gamma c)$

2. ให้ $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 a\alpha(b\beta c) &= (a\alpha a)\alpha(b\beta c) \\
 &= c\alpha(b\beta(a\alpha a)) \\
 &= c\alpha(a\beta(a\alpha b)) \\
 &= (a\alpha b)\alpha(a\beta c)
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปที่มีสมบัติ $a\Gamma(b\Gamma c) = (a\Gamma b)\Gamma(a\Gamma c)$

3. ให้ $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 (a\beta b)\alpha c &= (a\beta b)\alpha(c\alpha c) \\
 &= c\alpha(c\alpha(a\beta b)) \\
 &= c\alpha(b\alpha(a\beta c)) \\
 &= (a\beta c)\alpha(b\alpha c)
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า S เป็น Γ -RA-กึ่งกรุปที่มีสมบัติ $(a\Gamma b)\Gamma c = (a\Gamma c)\Gamma(b\Gamma c)$

4. ให้ $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 a\alpha(b\beta c) &= c\alpha(b\beta a) \\
 &= c\alpha(a\beta b)
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 c\alpha(a\beta b) &= b\alpha(a\beta c) \\
 &= b\alpha(c\beta a)
 \end{aligned}$$

จะได้ $a\alpha(b\beta c) = c\alpha(a\beta b) = b\alpha(c\beta a)$

5. ให้ $a, b, c \in S$ และ $\alpha, \beta \in \Gamma$ พิจารณา

$$\begin{aligned}(a\beta b)\alpha c &= c\alpha(a\beta b) \\ &= b\alpha(a\beta c) \\ &= (a\beta c)\alpha b\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}(a\beta c)\alpha b &= b\alpha(a\beta c) \\ &= c\alpha(a\beta b) \\ &= c\alpha(b\beta a) \\ &= a\alpha(b\beta c) \\ &= (b\beta c)\alpha a\end{aligned}$$

จะได้ว่า $(a\beta b)\alpha c = (a\beta c)\alpha b = (b\beta c)\alpha a$

5. สรุปและอภิปรายผล

ในบทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดของ Γ -RA-กึ่งกรุปตัดออกข้าม, Γ -RA-กึ่งกรุปยืดหยุ่น, Γ -RA-กึ่งกรุปพารามีเดียลและ Γ -RA-กึ่งกรุปนิจผล นอกจากนี้ได้พิสูจน์สมบัติบางประการของ Γ -RA-กึ่งกรุปเมื่อเปรียบเทียบกับสมบัติของ Γ -RA-กึ่งกรุปกับสมบัติของ RA-กึ่งกรุปที่ถูกลำเสนอโดย Leelavardhini และ Latha [6] ในปี ค.ศ.2019 สมบัตินี้ได้พิสูจน์แล้วว่าไปในทิศทางเดียวกัน เป้าหมายการวิจัยในอนาคตคือการขยายแนวคิดของ Γ -RA-กึ่งกรุปไปยัง L-R-สลับที่วงจร (L-R-cyclic commutative) ตามแนวทางของ Leelavardhini และ Latha [7]

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Akin, C. (2018). Fuzzy soft LA- (m, n) Γ -ideals in LA- Γ -semigroupoids. International Journal of Mathematics and System Sciences, 1, 1-2.
- [2] Hila, K. (2008). On regular, semiprime and quasi-reflexive Γ -semigroup and minimal quasi-ideals. Lobachevskii J Math 29, 141–152.
- [3] Kazim, M. A., & Naseerudin, M. (1972). On left almost semigroups. The Alig. Bull. Math, 2, 1-7.
- [4] Khan, M., Amjid, V., Zaman, G., & Yaqoob, N. (2014). Characterizations of ordered Γ -Abel-Grassmann's groupoids. Discussiones Mathematicae- General Algebra and Applications, 34(1), 55-73.
- [5] Khan, M., Anis, S., & Faisal, Y. (2013). On fuzzy- Γ -ideals of Γ -Abel-Grassmann's groupoids. Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, 6(8), 1326-1334.

- [6] Leelavardhini, D., & Latha, G.S. (2019). On commutativity of RA-semigroups. IJRAR-International Journal of research and Analytical Reviews (IJRAR), 6(2), 454-463.
- [7] Leelavardhini, D., & Latha, G.S. (2020). RA-semigroups that are L-R-cyclic commutative semigroups. Aegaeum Journal, 8(5), 642-650.
- [8] Sen, M. K. (1981). On Γ -semigroup. Proc. of International Conference on Algebra and its Applications, Decker Publication.
- [9] Shah, T., & Rehman, I. (2010). On Γ -ideals and Γ -bi-ideals in Γ -AG-groupoids. International Journal of Algebra, 4(6), 267-276.
- [10] Shah, T., & Rehman, I. (2013). Decomposition of locally associative Γ -AG-groupoids. Novi Sad J. Math, 43(1), 1-8.