

การวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบาง รูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน

Nonlinear Static Analysis of Egg-Shaped Toroidal Shells under Internal Pressure

วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา^{1*} คมกร ไชยเดชธร² เสริมศักดิ์ ดิยะแสงทอง³ และ สิทธิศักดิ์ แจ่มนาม⁴
^{1*,2,3}สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน
⁴ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
E-mail: ^{1*}weeraphan.ji@rmuti.ac.th, ²komkorn@rmuti.ac.th, ³sermsak.ti@rmuti.ac.th,
⁴sittisak.j@eng.kmutnb.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูปและความโค้ง-การเสียรูปในทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์และความโค้งได้ถูกนำมาพิจารณาในฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่ และเขียนในรูปแบบที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณแบบไม่เป็นเชิงเส้น การศึกษาครั้งนี้ ใช้วิธีตัวคูณแบบลากรองจ์ในการป้องกันปัญหาความไม่ต่อเนื่องที่เกิดขึ้นกับจุดเชื่อมต่อของโครงสร้างและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเมอร์ริเดียน ผลการศึกษาพบว่า ค่าการเสียรูปที่ได้จากงานวิจัยในครั้งนี้มีความถูกต้องเมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูป ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่แสดงค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่ภายใต้การแปรเปลี่ยนแรงดันภายใน อัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดและอัตราส่วนความยาวรัศมีการตัดต่อความยาวรัศมีหน้าตัดของโครงสร้างเปลือกบางได้ถูกนำเสนอในบทความนี้

คำสำคัญ: การวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้น โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน ฟังก์ชันพลังงาน วิธีตัวคูณแบบลากรองจ์

* Corresponding author, e-mail: weeraphan.ji@rmuti.ac.th

Abstract

This paper presents a nonlinear static analysis of egg-shaped toroidal shells under internal pressure. Strain- and curvature-displacement relations are considered in the energy functional of the egg-shaped toroidal shell system in terms of the metric tensor and curvature components, and are written in terms of the appropriate form for nonlinear analysis. Lagrange multiplier's method is introduced in the present formulation to enforce the discontinuity effect. The numerical results in terms of the meridian and normal to the meridian displacements can be obtained by nonlinear finite element method. The toroidal shell displacements from the present formulation are found to be in close agreement with the finite element commercial software results. Finally, the effects of the internal pressure, cross-sectional radii ratio, and bend-to-cross-sectional radii ratio on the numerical results in terms of toroidal shell displacements are demonstrated in this paper.

Keywords: Nonlinear Static Analysis, Egg-Shaped Toroidal Shells, Internal Pressure, Energy Functional, Lagrange Multiplier's Method

1. ที่มาและความสำคัญ

โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยาง (Toroidal Shells) เป็นโครงสร้างที่มีการใช้งานอย่างหลากหลายในภาคอุตสาหกรรม เช่น ถังสำหรับบรรจุเชื้อเพลิง ถังบรรจุก๊าซธรรมชาติ ถังรับแรงดันสูง หรือข้อต่อสำหรับงานท่อในงานอุตสาหกรรมปิโตรเคมี เป็นต้น [1-3] นอกจากการใช้งานในภาคอุตสาหกรรมแล้ว ยังพบว่าในปัจจุบันได้มีการศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับการใช้งานโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางในงานทางด้านวิศวกรรมโยธา ดังแสดงในงานวิจัยของ Zingoni และ Enoma [4] ที่ได้ทำการวิเคราะห์กำลังและเสถียรภาพของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงอิลิปติก (Elliptic Toroidal Dome) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำในแนวตั้ง ซึ่งจะแตกต่างจากการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางทั่วไปที่จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่แรงดันกระทำในแนวตั้งฉากกับโครงสร้างเปลือกบางนั่นเอง แต่ในปัจจุบันการใช้งานโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่เริ่มได้รับความนิยมในภาคอุตสาหกรรมและงานวิศวกรรมนอกชายฝั่ง [5-6] เนื่องจากโครงสร้างดังกล่าวสามารถรับแรงดันได้สูงกว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปหน้าตัดมาตรฐาน [7]

การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางรับแรงดันโดยทั่วไปจะสามารถวิเคราะห์เป็นปัญหาแบบสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Problems) ได้ ดังแสดงในงานวิจัยของ Sanders และ Liepins [8] ที่ใช้ทฤษฎีการแปลงเมมเบรนให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น (Linearized Membrane Theory) ในการหาค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางหน้าตัดวงกลมในกรณีที่ความหนาของโครงสร้างมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดหน้าตัดของโครงสร้างเพื่อลดปัญหาการคำนวณค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอด (Apex) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางที่ไม่สามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนเพียงอย่างเดียว Jiammeepreecha และ Chucheepsakul [9] ได้ทำการศึกษาผลตอบสนองของโครงสร้างเปลือกบางแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ติดตั้งในน้ำทะเลลึกโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน

ในการวิเคราะห์ หลังจากนั้น Jiammeepreecha และคณะ [10] ได้พัฒนาแบบจำลองโดยเพิ่มผลของของเหลวและเงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ติดตั้งในน้ำทะเลลึก โดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน จนกระทั่งในปี 2021 ได้เพิ่มผลของพลังงานความเครียดเนื่องจากแรงดัดเข้าไปในสมการสำหรับการวิเคราะห์ในงานวิจัยของ Jiammeepreecha และคณะ [11] สำหรับสมการแบบแม่นยำตรงสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางโดยใช้ทฤษฎีการเสีรูปขนาดเล็กได้ถูกนำเสนอในงานวิจัยของ Sun [12] สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดวงรีได้มีการศึกษาโดย Sutcliffe [13], Galletly [14], Zingoni และคณะ [15] และ Tangbanjongkij และคณะ [16-17] เป็นต้น จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าโครงสร้างดังกล่าวได้ทำการศึกษาเฉพาะโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดวงกลมและวงรีเท่านั้น ยกเว้นงานวิจัยของ Enoma และ Zingoni [18] ที่ได้ทำการศึกษาค่ากำลังและเสถียรภาพของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดผสม

แต่เป็นการศึกษาเฉพาะผลของค่าการเสีรูปขนาดเล็ก (Small Displacement) เนื่องจากเป็นข้อจำกัดของสมการสำหรับการวิเคราะห์ (Analytical Formulation) ในขณะที่น้ำหนักบรรทุกหรือแรงดันที่กระทำต่อโครงสร้างเปลือกบางมีค่ามาก ดังนั้นการศึกษาเฉพาะผลของการเสีรูปขนาดเล็กจึงอาจจะให้คำตอบที่ไม่ครอบคลุมปัญหาที่เกิดขึ้น การวิเคราะห์เพื่อหาคำตอบแบบไม่เป็นเชิงเส้นโดยพิจารณาผลของค่าการเสีรูปขนาดใหญ่ (Large Displacement) จึงมีความสำคัญอย่างมากสำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่ใช้ในงานวิศวกรรมดังกล่าว

2. วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยในโครงการนี้จะเป็นการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน โดยใช้หลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) [19-20] ในการจำลองรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางและเขียนฟังก์ชันพลังงาน (Energy Functional) ของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายในโดยอาศัยหลักการงานเสมือน (Principle of Virtual Work) [21-22] โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสีรูป และความโค้ง-การเสีรูป สามารถนิยามได้จากหลักการของความเครียดลากรองจ์ (Lagrangian Strains) [23] จากนั้นใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับเทคนิคตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange Multiplier's Technique) [24] ในการจำกัดการเสีรูปและความลาดชันของแต่ละชิ้นส่วนย่อยให้เกิดความต่อเนื่อง การหาคำตอบเชิงตัวเลขสำหรับผลลัพธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Results) จะใช้กระบวนการกระทำซ้ำ (Iterative Procedure) สำหรับค่าการเสีรูปที่เกิดขึ้นในโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน

3. ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์

3.1 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

วัสดุของโครงสร้างเปลือกบางมีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นโดยที่พลังงานความเครียดจะถูกเขียนในรูปของฟังก์ชันกำลังสองของค่าความเครียดลากรองจ์ โดยที่ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าคงที่ไม่มีเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสียรูป และค่าการเสียรูปที่เกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักของโครงสร้างจะมีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่เกิดจากแรงดันภายในที่กระทำต่อโครงสร้าง จึงไม่นำมาพิจารณา

3.2 แบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่

รูปที่ 1 แสดงค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน กำหนดให้โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางขึ้นส่วนบริเวณด้านนอก (Extrados) และด้านใน (Intrados) ที่มีความยาวรัศมี b (จุดศูนย์กลาง C_1 และ C_2 ตามลำดับ) จะถูกเชื่อมต่อกับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางขึ้นส่วนที่มีความยาวรัศมี a (จุดศูนย์กลาง C_3 และ C_4) ดังนั้นกำหนดให้ S^a คือ พื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางขึ้นส่วนที่มีความยาวรัศมี a ในขณะที่ S_o^b และ S_i^b คือ พื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางขึ้นส่วนที่มีความยาวรัศมี b สำหรับบริเวณด้านนอกและด้านใน ตามลำดับ นอกจากนี้ยังกำหนดให้จุดเชื่อมต่อของโครงสร้างเปลือกบางส่วนบนของระนาบอีควาเตอร์ (Equatorial Plane) คือ J_i^u and J_o^u สำหรับเชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว S^a กับพื้นผิว S_i^b และพื้นผิว S_o^b ตามลำดับ เช่นเดียวกันกับจุดเชื่อมต่อของโครงสร้างเปลือกบางส่วนล่างของระนาบอีควาเตอร์คือ J_i^l and J_o^l สำหรับเชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว S^a กับพื้นผิว S_i^b และพื้นผิว S_o^b ตามลำดับ ที่ตำแหน่งระนาบอีควาเตอร์ จุดเชื่อมต่อระหว่างโครงสร้างส่วนบนและส่วนล่างจะแทนสัญลักษณ์ด้วย J_o^c และ J_i^c ที่ตำแหน่งโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางขึ้นส่วนบริเวณด้านนอกและด้านในตามลำดับ

ถ้ากำหนดให้พิกัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางตามแนวทิศทางเมอร์ริเดียนและลองจิจูดมีค่าเป็นมุม θ และ ϕ ตามลำดับ ดังนั้นที่จุดเชื่อมต่อ J_o^u และ J_o^l จะมีค่ามุม θ เท่ากับ β ในขณะที่จุดเชื่อมต่อ J_i^u และ J_i^l จะมีค่ามุม θ เท่ากับ $180^\circ - \beta$ และระยะทาง c จะมีค่าเท่ากับ $c = (b-a)\cos\beta$ ซึ่งเป็นระยะทางในแนวราบวัดตามแกนรัศมี R จากตำแหน่งของจุดศูนย์กลาง C_1 ไปยังจุดศูนย์กลาง C_3 (หรือ C_4) ส่วนระยะทาง d จะมีค่าเท่ากับระยะทางในแนวตั้งวัดตามแกนหมุน Z จากตำแหน่งของจุดศูนย์กลาง C_1 (หรือ C_2) ไปยังจุดเชื่อมต่อ J_i^u (หรือ J_o^u , J_i^l และ J_o^l) นั่นคือมีค่าเท่ากับ $d = b\sin\beta$ สุดท้าย e คือ ระยะทางในแนวราบวัดจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางหรือความยาวรัศมีการตัด C_3 (หรือ C_4)

3.3 หลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์

สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่ที่ตำแหน่งพื้นผิว S_o^b จะสามารถเขียนเวกเตอร์ระบุตำแหน่งได้ดังสมการที่ (1)

$$\mathbf{R}_o^b = (e - c + b \cos \theta) \cos \phi \mathbf{i} + (e - c + b \cos \theta) \sin \phi \mathbf{j} + b \sin \theta \mathbf{k} \quad (1)$$

จากหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ [18] จะสามารถคำนวณหาค่าองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ (Metric Tensor Component) ได้ดังสมการที่ (2)

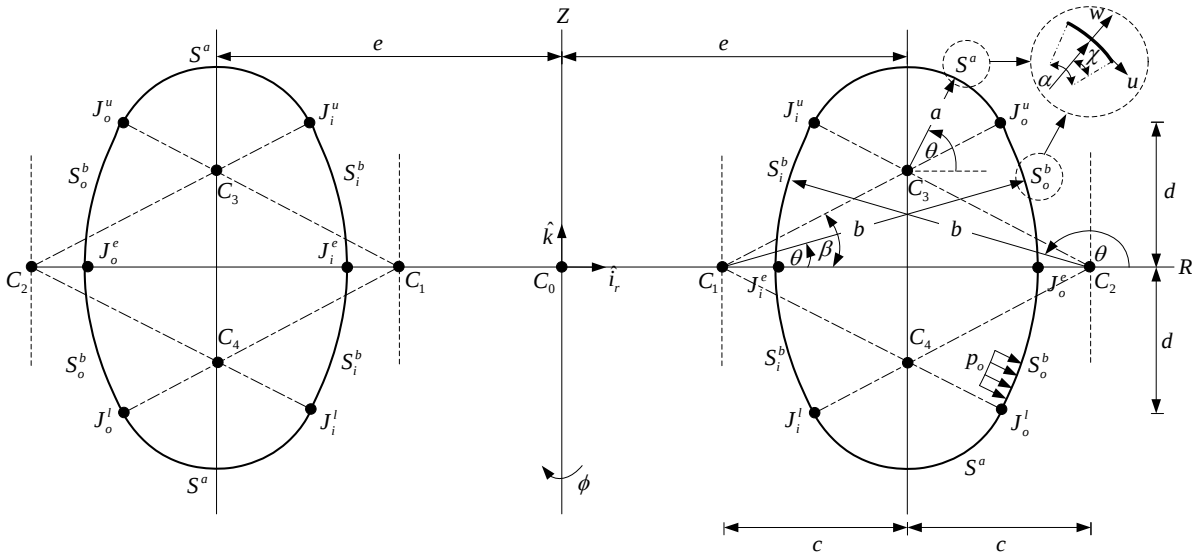
$$E_o^b = \frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\theta} \cdot \frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\theta} = b^2 \quad (2n)$$

$$G_o^b = \frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\phi} \cdot \frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\phi} = (e - c + b \cos \theta)^2 \quad (29)$$

เวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย (Unit Normal Vector) กับพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางที่ศูนย์กลางความหนา (Middle Surface) จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (3)

$$\hat{\mathbf{n}}_o^b = \frac{1}{A_o^b B_o^b} \left(\frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\theta} \times \frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\phi} \right) = -\cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{i}} - \cos\theta \sin\phi \hat{\mathbf{j}} - \sin\theta \hat{\mathbf{k}} \quad (3)$$

เมื่อ $A_o^b = \sqrt{E_o^b}$ และ $B_o^b = \sqrt{G_o^b}$ ดังนั้นค่าองค์ประกอบเทนเซอร์ความโค้ง (Curvature Tensor Component) ของพื้นผิว S_o^b จะคำนวณได้จากสมการที่ (4)



รูปที่ 1 รูปทรงเรขาคณิตและพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่อหุ้มหน้าต่างรูปทรงไข่

$$L_o^b = \left(\frac{d^2 \mathbf{R}_o^b}{d\theta^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_o^b = A_o^b \quad (4n)$$

$$N_o^b = \left(\frac{d^2 \mathbf{R}_o^b}{d\phi^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_o^b = B_o^b \cos \theta \quad (49)$$

จากสมการที่ (2) และ (4) จะสามารถหาค่าความโค้งหลัก (Principal Curvature) ของพื้นผิว S_o^b ได้ดังสมการที่ (5)

$$(\kappa_o^b)_1 = \frac{L_o^b}{E_o^b} = \frac{1}{b} \quad (5n)$$

$$(\kappa_o^b)_2 = \frac{N_o^b}{G_o^b} = \frac{\cos \theta}{B_o^b} \quad (59)$$

เนื่องจากเป็นปัญหาสมมาตรของโครงสร้างเปลือกบาง (Axisymmetric Shells) ดังนั้นเส้นของความโค้งหลักจะซ้อนทับกับเส้นพิกัด (Coordinate Lines) ดังสมการที่ (6)

$$\frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\theta} \cdot \frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\phi} = \left(\frac{d^2\mathbf{R}_o^b}{d\theta d\phi} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_o^b = 0 \quad (6)$$

สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่ที่ตำแหน่งพื้นผิว S^a จะสามารถเขียนเวกเตอร์ระบุตำแหน่งได้ดังสมการที่ (7)

$$\mathbf{R}^a = (e + a \cos \theta) \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + (e + a \cos \theta) \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + (d + a \sin \theta) \hat{\mathbf{k}} \quad (7)$$

จากสมการที่ (7) ค่าองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ ได้ดังสมการที่ (8)

$$E^a = \frac{d\mathbf{R}^a}{d\theta} \cdot \frac{d\mathbf{R}^a}{d\theta} = a^2 \quad (8ก)$$

$$G^a = \frac{d\mathbf{R}^a}{d\phi} \cdot \frac{d\mathbf{R}^a}{d\phi} = (e + a \cos \theta)^2 \quad (8ข)$$

เวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยกับพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางที่ศูนย์กลางความหนาจะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (9)

$$\hat{\mathbf{n}}^a = \frac{1}{A^a B^a} \left(\frac{d\mathbf{R}^a}{d\theta} \times \frac{d\mathbf{R}^a}{d\phi} \right) = -\cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (9)$$

เมื่อ $A^a = \sqrt{E^a}$ และ $B^a = \sqrt{G^a}$ ดังนั้นค่าองค์ประกอบเทนเซอร์ความโค้งของพื้นผิว S^a จะคำนวณได้จากสมการที่ (10)

$$L^a = \left(\frac{d^2\mathbf{R}^a}{d\theta^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}^a = A^a \quad (10ก)$$

$$N^a = \left(\frac{d^2\mathbf{R}^a}{d\phi^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}^a = B^a \cos \theta \quad (10ข)$$

จากสมการที่ (2) และ (4) จะสามารถหาค่าความโค้งหลักของพื้นผิว S^a ได้ดังสมการที่ (11)

$$(\kappa^a)_1 = \frac{L^a}{E^a} = \frac{1}{a} \quad (11ก)$$

$$(\kappa^a)_2 = \frac{N^a}{G^a} = \frac{\cos \theta}{B^a} \quad (11ข)$$

เนื่องจากเป็นปัญหาสมมาตรของโครงสร้างเปลือกบาง (Axisymmetric Shells) ดังนั้นเส้นของความโค้งหลักจะซ้อนทับกับเส้นพิกัดดังสมการที่ (12)

$$\frac{d\mathbf{R}^a}{d\theta} \cdot \frac{d\mathbf{R}^a}{d\phi} = \left(\frac{d^2\mathbf{R}^a}{d\theta d\phi} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}^a = 0 \quad (12)$$

สำหรับพื้นผิว S_i^b จะสามารถนิยามเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่ได้ดังสมการที่ (13)

$$\mathbf{R}_i^b = (e + c + b \cos \theta) \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + (e + c + b \cos \theta) \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + b \sin \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (13)$$

ดังนั้นค่าองค์ประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์และองค์ประกอบของเทนเซอร์ความโค้งสามารถหาได้โดยการแทนที่ $c = -c$ ลงในสมการที่ (1) และ (2) ตามลำดับ ในขณะที่ค่าเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย ($\hat{n}_i^b$) และค่าความโค้งหลัก (κ_i^b) ของพื้นผิว S_i^b จะมีค่าดังสมการที่ (3) และ (5) ตามลำดับ

3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูป

การหาความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูป (Strain-Displacement Relation) และความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูป (Curvature-Displacement Relation) สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยวงหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันสม่ำเสมอจากภายนอก จะสามารถนิยามได้จาก Mase และ Mase [23] และ Langhaar [25] ตามลำดับ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ (u, v, w) คือ องค์ประกอบของค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์เดียน แนวพิกัดลองจิจูด และแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์เดียนตามลำดับ เนื่องจากแรงดันภายในจะกระทำสม่ำเสมอตลอดหน้าตัด โครงสร้างส่งผลทำให้การเสียรูปของโครงสร้างเป็นปัญหาสมมาตรรอบแกนหมุน (Shell of Revolution) ดังนั้นค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดลองจิจูดจะไม่นำมาพิจารณา ($v = 0$) ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูป และความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูปจะสามารถคำนวณได้โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบางที่สภาวะหลังการเสียรูปสำหรับพื้นผิว S_o^b ดังสมการที่ (14)

$$\tilde{\mathbf{R}}_o^b = \mathbf{R}_o^b + \frac{d\mathbf{R}_o^b}{d\theta} \left(\frac{u^b}{A_o^b} \right) + \hat{\mathbf{n}}_o^b w^b \quad (14)$$

ดังนั้นองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ที่สภาวะหลังการเสียรูปจะมีค่าดังสมการที่ (15)

$$\tilde{E}_o^b = \frac{d\tilde{\mathbf{R}}_o^b}{d\theta} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{R}}_o^b}{d\theta} = \left[b + \frac{du_o^b}{d\theta} - w_o^b \right]^2 + \left[u_o^b + \frac{dw_o^b}{d\theta} \right]^2 \quad (15ก)$$

$$\tilde{G}_o^b = \frac{d\tilde{\mathbf{R}}_o^b}{d\phi} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{R}}_o^b}{d\phi} = \left[B_o^b - u_o^b \sin \theta - w_o^b \cos \theta \right]^2 \quad (15ข)$$

จากสมการที่ (2) และ (15) จะสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูปในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ ดังสมการที่ (16)

$$\varepsilon_{o,\theta}^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{E}_o^b - E_o^b}{E_o^b} \right) = \frac{1}{b} \left[\frac{du_o^b}{d\theta} - w_o^b \right] + \frac{1}{2b^2} \left[\left(\frac{du_o^b}{d\theta} - w_o^b \right)^2 + \left(u_o^b + \frac{dw_o^b}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (16ก)$$

$$\varepsilon_{o,\phi}^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{G}_o^b - G_o^b}{G_o^b} \right) = -\frac{u_o^b \sin \theta + w_o^b \cos \theta}{B_o^b} + \frac{1}{2} \left[\frac{u_o^b \sin \theta + w_o^b \cos \theta}{B_o^b} \right]^2 \quad (16ข)$$

จากทฤษฎีโครงสร้างเปลือกบางของ Langhaar [25] จะสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูปในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์และองค์ประกอบเทนเซอร์ความโค้ง ได้ดังสมการที่ (17)

$$\kappa_{o,\theta}^b = - \left[\frac{1}{A_o^b} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{A_o^b} \frac{\partial w_o^b}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{A_o^b B_o^b} \left(\frac{\partial A_o^b}{\partial \phi} \frac{\partial w_o^b}{\partial \phi} \right) \right] \quad (17ก)$$

$$\kappa_{o,\phi}^b = - \left[\frac{1}{B_o^b (A_o^b)^2} \left(\frac{\partial B_o^b}{\partial \theta} \frac{\partial w_o^b}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{B_o^b} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{B_o^b} \frac{\partial w_o^b}{\partial \phi} \right) \right] \quad (17ข)$$

กำหนดให้ $[\mathbf{g}_o^b] = \begin{bmatrix} u_o^b & w_o^b & \frac{du_o^b}{d\theta} & \frac{dw_o^b}{d\theta} & \frac{d^2u_o^b}{d\theta^2} & \frac{d^2w_o^b}{d\theta^2} \end{bmatrix}$ จะสามารถเขียนสมการที่ (16) และ (17)

ในรูปแบบของเมตริกซ์ดังสมการที่ (18)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{o,i}^b = [\mathbf{L}_{o,i}^b] \{\mathbf{g}_o^b\} + \frac{1}{2} [\mathbf{g}_o^b] [\mathbf{H}_{o,i}^b] \{\mathbf{g}_o^b\} \quad (18ก)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{o,i}^b = [\mathbf{S}_{o,i}^b] \{\mathbf{g}_o^b\} \quad (18ข)$$

เมื่อ $\{\mathbf{L}_{o,i}^b\}$ และ $\{\mathbf{S}_{o,i}^b\}$ คือ เวกเตอร์ของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูปของพื้นผิว S_o^b ตามลำดับ ขณะที่ $[\mathbf{H}_{o,i}^b]$ คือ เมตริกซ์สมมาตรของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเสียรูปของพื้นผิว S_o^b

สำหรับพื้นผิว S^a จะสามารถนิยามเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่ที่สภาวะหลังการเสียรูป ได้ดังสมการที่ (19)

$$\tilde{\mathbf{R}}^a = \mathbf{R}^a + \frac{d\mathbf{R}^a}{d\theta} \left(\frac{u^a}{A^a} \right) + \hat{\mathbf{n}}^a w^a \quad (19)$$

ดังนั้นองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ที่สภาวะหลังการเสียรูปจะมีค่าดังสมการที่ (20)

$$\tilde{E}^a = \frac{d\tilde{\mathbf{R}}^a}{d\theta} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{R}}^a}{d\theta} = \left[a + \frac{du^a}{d\theta} - w^a \right]^2 + \left[u^a + \frac{dw^a}{d\theta} \right]^2 \quad (20ก)$$

$$\tilde{G}^a = \frac{d\tilde{\mathbf{R}}^a}{d\phi} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{R}}^a}{d\phi} = \left[B^a - u^a \sin \theta - w^a \cos \theta \right]^2 \quad (20ข)$$

จากสมการที่ (8) และ (20) จะสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูปในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ ดังสมการที่ (21)

$$\varepsilon_\theta^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{E}^a - E^a}{E^a} \right) = \frac{1}{a} \left[\frac{du^a}{d\theta} - w^a \right] + \frac{1}{2a^2} \left[\left(\frac{du^a}{d\theta} - w^a \right)^2 + \left(u^a + \frac{dw^a}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (21ก)$$

$$\varepsilon_\phi^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{G}^a - G^a}{G^a} \right) = -\frac{u^a \sin \theta + w^a \cos \theta}{B^a} + \frac{1}{2} \left[\frac{u^a \sin \theta + w^a \cos \theta}{B^a} \right]^2 \quad (21ข)$$

ดังนั้นจะสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูปในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ และองค์ประกอบเทนเซอร์ความโค้ง ได้ดังสมการที่ (22)

$$\kappa_\theta^a = - \left[\frac{1}{A^a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{A^a} \frac{\partial w^a}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{A^a B^a} \left(\frac{\partial A^a}{\partial \phi} \frac{\partial w^a}{\partial \phi} \right) \right] \quad (22ก)$$

$$\kappa_\phi^a = - \left[\frac{1}{B^a (A^a)^2} \left(\frac{\partial B^a}{\partial \theta} \frac{\partial w^a}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{B^a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{B^a} \frac{\partial w^a}{\partial \phi} \right) \right] \quad (22ข)$$

กำหนดให้ $[\mathbf{g}^a] = \begin{bmatrix} u^a & w^a & \frac{du^a}{d\theta} & \frac{dw^a}{d\theta} & \frac{d^2u^a}{d\theta^2} & \frac{d^2w^a}{d\theta^2} \end{bmatrix}$ จะสามารถเขียนสมการที่ (21) และ (22)

ในรูปแบบของเมตริกซ์ดังสมการที่ (23)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^a = [\mathbf{L}_i^a] \{\mathbf{g}^a\} + \frac{1}{2} [\mathbf{g}^a] [\mathbf{H}_i^a] \{\mathbf{g}^a\} \quad (23ก)$$

$$\mathbf{\kappa}_i^a = [\mathbf{S}_i^a] \{\mathbf{g}^a\} \quad (23ข)$$

เมื่อ $\{\mathbf{L}_i^a\}$ และ $\{\mathbf{S}_i^a\}$ คือ เวกเตอร์ของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูปของพื้นผิว S^a ตามลำดับ ขณะที่ $[\mathbf{H}_i^a]$ คือ เมตริกซ์สมมาตรของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเสียรูปของพื้นผิว S^a

สำหรับพื้นผิว S_i^b จะสามารถนิยามเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่ที่สภาวะหลังการเสียรูป ได้ดังสมการที่ (24)

$$\tilde{\mathbf{R}}_i^b = \mathbf{R}_i^b + \frac{d\mathbf{R}_i^b}{d\theta} \left(\frac{u_i^b}{A_i^b} \right) + \hat{\mathbf{n}}_i^b w_i^b \quad (24)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูป และความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูป สำหรับพื้นผิวที่สภาวะหลังการเสียรูป S_i^b จะสามารถหาได้โดยแทนที่ตัวห้อย o ด้วย i ในสมการที่ (16) ถึง (18) ตามลำดับ ดังนั้น

กำหนดให้ $[\mathbf{g}_i^b] = \left[u_i^b \quad w_i^b \quad \frac{du_i^b}{d\theta} \quad \frac{dw_i^b}{d\theta} \quad \frac{d^2u_i^b}{d\theta^2} \quad \frac{d^2w_i^b}{d\theta^2} \right]$ เราจะสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูปและความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูปในรูปแบบของเมตริกซ์ดังสมการที่ (25) และ (26)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i,i}^b = [\mathbf{L}_{i,i}^b] \{\mathbf{g}_i^b\} + \frac{1}{2} [\mathbf{g}_i^b] [\mathbf{H}_{i,i}^b] \{\mathbf{g}_i^b\} \quad (25)$$

$$\mathbf{\kappa}_{i,i}^b = [\mathbf{S}_{i,i}^b] \{\mathbf{g}_i^b\} \quad (26)$$

เมื่อ $\{\mathbf{L}_{i,i}^b\}$ และ $\{\mathbf{S}_{i,i}^b\}$ คือ เวกเตอร์ของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูปของพื้นผิว S_i^b ตามลำดับ ขณะที่ $[\mathbf{H}_{i,i}^b]$ คือ เมตริกซ์สมมาตรของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเสียรูปของพื้นผิว S_i^b

3.5 สมการแปรผันของระบบโครงสร้างเปลือกบาง

การสร้างสมการแปรผัน (Variational Formulation) ของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายในจะประกอบไปด้วยพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนและการดัด และงานเสมือนเนื่องจากแรงดันภายใน ซึ่งจะถูกรวบรวมได้โดยอาศัยหลักการของงานเสมือน [21-22] สำหรับวัสดุของโครงสร้างเปลือกบางที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นจะสามารถคำนวณค่าพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรน (Strain Energy due to Membrane) ได้ดังสมการที่ (27)

$$[U_m] = \begin{bmatrix} U_m^U & 0 \\ 0 & U_m^L \end{bmatrix} \quad (27)$$

เมื่อ U_m^U และ U_m^L คือ พลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนสำหรับโครงสร้างเปลือกบางส่วนบนและส่วนล่างตามลำดับ ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (28)

$$[U_m^U] = \begin{bmatrix} U_{o,m}^b & 0 & 0 \\ 0 & U_m^a & 0 \\ 0 & 0 & U_{i,m}^b \end{bmatrix} \quad (28ก)$$

$$[U_m^L] = \begin{bmatrix} U_{o,m}^b & 0 & 0 \\ 0 & U_m^a & 0 \\ 0 & 0 & U_{i,m}^b \end{bmatrix} \quad (28ข)$$

เมื่อ $U_{o,m}^b$, U_m^a และ $U_{i,m}^b$ คือ พลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนสำหรับพื้นผิว S_o^b , S^a และ S_i^b ตามลำดับ ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (29)

$$U_{o,m}^b = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\varepsilon_o^b] [C'] \{\varepsilon_o^b\} d\theta \quad (29ก)$$

$$U_m^a = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\varepsilon^a] [C'] \{\varepsilon^a\} d\theta \quad (29ข)$$

$$U_{i,m}^b = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\varepsilon_i^b] [C'] \{\varepsilon_i^b\} d\theta \quad (29ค)$$

เมื่อ $[C']$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งเนื่องจากการยืดหดตัว (Extensional Rigidity) ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (30)

$$[C'] = \frac{E'h}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

เมื่อ h คือ ความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง, E' คือ โมดูลัสยืดหยุ่น (Elastic Modulus) และ μ คือ อัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's Ratio) ดังนั้นจากงานวิจัยของ Jiammeepreecha และคณะ [11] จะสามารถเขียนสมการแปรผันของพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนในสมการที่ (29) ดังสมการที่ (31)

$$\delta U_{o,m}^b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}_o^b] \left[[\mathbf{k}_{o,m}^b] + \frac{1}{2} [\mathbf{n}_{o,1m}^b] + \frac{1}{3} [\mathbf{n}_{o,2m}^b] \right] \{\mathbf{g}_o^b\} d\theta \quad (31ก)$$

$$\delta U_m^a = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}^a] \left[[\mathbf{k}_m^a] + \frac{1}{2} [\mathbf{n}_{1m}^a] + \frac{1}{3} [\mathbf{n}_{2m}^a] \right] \{\mathbf{g}^a\} d\theta \quad (31ข)$$

$$\delta U_{i,m}^b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}_i^b] \left[[\mathbf{k}_{i,m}^b] + \frac{1}{2} [\mathbf{n}_{i,1m}^b] + \frac{1}{3} [\mathbf{n}_{i,2m}^b] \right] \{\mathbf{g}_i^b\} d\theta \quad (31ค)$$

เมื่อ $[\mathbf{k}_{o,m}^b]$, $[\mathbf{k}_m^a]$ และ $[\mathbf{k}_{i,m}^b]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งจากผลของเมมเบรนแบบเชิงเส้น สำหรับพื้นผิว S_o^b , S^a และ S_i^b ตามลำดับ ดังสมการที่ (32)

$$[\mathbf{k}_{o,m}^b] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{C}'_{ij} \left(\{\mathbf{L}_{o,i}^b\} [\mathbf{L}_{o,j}^b] \right) \quad (32ก)$$

$$[\mathbf{k}_m^a] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{C}'_{ij} \left(\{\mathbf{L}_i^a\} [\mathbf{L}_j^a] \right) \quad (32ข)$$

$$[\mathbf{k}_{i,m}^b] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{C}'_{ij} \left(\{\mathbf{L}_{i,i}^b\} [\mathbf{L}_{i,j}^b] \right) \quad (32ค)$$

ในขณะที่ $[\mathbf{n}_{o,1m}^b]$ และ $[\mathbf{n}_{o,2m}^b]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งจากผลของเมมเบรนแบบไม่เป็นเชิงเส้น สำหรับพื้นผิว S_o^b ดังสมการที่ (33)

$$[\mathbf{n}_{o,1m}^b] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{C}'_{ij} \left[\left(\{\mathbf{L}_{o,i}^b\} [\mathbf{g}_o^b] \right) [\mathbf{H}_{o,j}^b] + \left([\mathbf{g}_o^b] \{\mathbf{L}_{o,i}^b\} \right) [\mathbf{H}_{o,j}^b] + [\mathbf{H}_{o,i}^b] \left(\{\mathbf{g}_o^b\} [\mathbf{L}_{o,j}^b] \right) \right] \quad (33ก)$$

$$[\mathbf{n}_{o,2m}^b] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{C}'_{ij} \left[\begin{aligned} & [\mathbf{H}_{o,i}^b] (\{\mathbf{g}_o^b\} [\mathbf{g}_o^b]) [\mathbf{H}_{o,j}^b] + \\ & \frac{1}{2} ([\mathbf{g}_o^b] [\mathbf{H}_{o,j}^b] \{\mathbf{g}_o^b\}) [\mathbf{H}_{o,i}^b] \end{aligned} \right] \quad (33ข)$$

สุดท้าย $[\mathbf{n}_{1m}^a]$ และ $[\mathbf{n}_{2m}^a]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งจากผลของเมมเบรนแบบไม่เป็นเชิงเส้น สำหรับพื้นผิว S^a ดังสมการที่ (34)

$$[\mathbf{n}_{1m}^a] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{C}'_{ij} \left[\begin{aligned} & (\{\mathbf{L}_i^a\} [\mathbf{g}^a]) [\mathbf{H}_j^a] + \\ & ([\mathbf{g}^a] \{\mathbf{L}_i^a\}) [\mathbf{H}_j^a] + [\mathbf{H}_i^a] (\{\mathbf{g}^a\} [\mathbf{L}_j^a]) \end{aligned} \right] \quad (34ก)$$

$$[\mathbf{n}_{2m}^a] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{C}'_{ij} \left[\begin{aligned} & [\mathbf{H}_i^a] (\{\mathbf{g}_o^b\} [\mathbf{g}^a]) [\mathbf{H}_j^a] + \\ & \frac{1}{2} ([\mathbf{g}^a] [\mathbf{H}_j^a] \{\mathbf{g}^a\}) [\mathbf{H}_i^a] \end{aligned} \right] \quad (34ข)$$

สำหรับพื้นผิว S_i^b ค่าเมตริกซ์ความแข็งแกร่งจากผลของเมมเบรนแบบไม่เป็นเชิงเส้น $[\mathbf{n}_{i,1m}^b]$ และ $[\mathbf{n}_{i,2m}^b]$ จะสามารถนิยามได้โดยการแทนที่ตัวห้อย o ด้วย i ในสมการที่ (33ก) และ (33ข) ตามลำดับ

สำหรับพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัด (Strain Energy due to Bending) ในโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่ จะมีค่าดังสมการที่ (35)

$$[U_b] = \begin{bmatrix} U_b^U & 0 \\ 0 & U_b^L \end{bmatrix} \quad (35)$$

เมื่อ U_b^U และ U_b^L คือ พลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัดสำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางหน้าตัดรูปทรงไข่ส่วนบนและส่วนล่างตามลำดับ ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (36)

$$[U_b^U] = [U_b^L] = \begin{bmatrix} U_{o,b}^b & 0 & 0 \\ 0 & U_b^a & 0 \\ 0 & 0 & U_{i,b}^b \end{bmatrix} \quad (36)$$

เมื่อ $U_{o,b}^b$, U_b^a และ $U_{i,b}^b$ คือ พลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัดสำหรับพื้นผิว S_o^b , S^a และ S_i^b ตามลำดับ ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (37)

$$U_{o,b}^b = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\kappa_o^b] [D'] \{\kappa_o^b\} d\theta \quad (37ก)$$

$$U_b^a = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\kappa^a] [D'] \{\kappa^a\} d\theta \quad (37ข)$$

$$U_{i,b}^b = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\kappa_i^b] [D'] \{\kappa_i^b\} d\theta \quad (37ค)$$

เมื่อ $[D']$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งเนื่องจากการดัด (Bending Rigidity) ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (38)

$$[D'] = \frac{E'h^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

ดังนั้นจากหลักการของ Jiammeepreecha และคณะ [11] จะสามารถเขียนสมการแปรผันของพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัดในสมการที่ (37) ดังสมการที่ (39)

$$\delta U_{o,b}^b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}_o^b] [\mathbf{k}_{o,b}^b] \{\mathbf{g}_o^b\} d\theta \quad (39ก)$$

$$\delta U_b^a = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}^a] [\mathbf{k}_b^a] \{\mathbf{g}^a\} d\theta \quad (39ข)$$

$$\delta U_{i,b}^b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}_i^b] [\mathbf{k}_{i,b}^b] \{\mathbf{g}_i^b\} d\theta \quad (39ค)$$

เมื่อ $[\mathbf{k}_{o,b}^b]$, $[\mathbf{k}_b^a]$ และ $[\mathbf{k}_{i,b}^b]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแรงจากผลของแรงดัด สำหรับพื้นผิว S_o^b , S^a และ S_i^b ตามลำดับ มีค่าดังสมการที่ (40)

$$[\mathbf{k}_{o,b}^b] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{D}'_{ij} (\{\mathbf{S}_{o,i}^b\} [\mathbf{S}_{o,j}^b]) \quad (40ก)$$

$$[\mathbf{k}_b^a] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{D}'_{ij} (\{\mathbf{S}_i^a\} [\mathbf{S}_j^a]) \quad (40ข)$$

$$[\mathbf{k}_{i,b}^b] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{D}'_{ij} (\{\mathbf{S}_{i,i}^b\} [\mathbf{S}_{i,j}^b]) \quad (40ค)$$

สุดท้ายจะเป็นการหางานเสมือนเนื่องจากแรงดันภายในที่กระทำต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงทรงแท่งอย่างหน้าตัดรูปทรงไข่ โดยแบ่งเป็น 3 ส่วน ดังสมการที่ (41)

$$\delta \Omega_o^b = -p_o \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\delta \mathbf{w}_o^b\} A_o^b B_o^b d\theta \quad (41ก)$$

$$\delta \Omega^a = -p_o \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\delta \mathbf{w}^a\} A^a B^a d\theta \quad (41ข)$$

$$\delta \Omega_i^b = -p_o \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\delta \mathbf{w}_i^b\} A_i^b B_i^b d\theta \quad (41ค)$$

เมื่อ p_o คือ แรงดันสมำเสมอภายใน จากหลักการของงานเสมือน [21-22] จะสามารถเขียนผลรวมงานเสมือน (Total Virtual Work) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงทรงแท่งอย่างหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายในได้ดังสมการที่ (42)

$$\delta \pi = \delta U_m + \delta U_b + \delta \Omega \quad (42)$$

แทนค่าสมการที่ (31), (39) และ (41) ลงในสมการที่ (42) จะได้ดังสมการที่ (43)

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}_o^b] \left[[\mathbf{k}_{o,m}^b] + [\mathbf{k}_{o,b}^b] + \frac{1}{2} [\mathbf{n}_{o,1m}^b] + \frac{1}{3} [\mathbf{n}_{o,2m}^b] \right] \{\mathbf{g}_o^b\} d\theta \\ & + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}^a] \left[[\mathbf{k}_m^a] + [\mathbf{k}_b^a] + \frac{1}{2} [\mathbf{n}_{1m}^a] + \frac{1}{3} [\mathbf{n}_{2m}^a] \right] \{\mathbf{g}^a\} d\theta \\ & + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta [\mathbf{g}_i^b] \left[[\mathbf{k}_{i,m}^b] + [\mathbf{k}_{i,b}^b] + \frac{1}{2} [\mathbf{n}_{i,1m}^b] + \frac{1}{3} [\mathbf{n}_{i,2m}^b] \right] \{\mathbf{g}_i^b\} d\theta \\ & - p_o \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\delta \mathbf{w}_o^b\} A_o^b B_o^b d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\delta \mathbf{w}^a\} A^a B^a d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\delta \mathbf{w}_i^b\} A_i^b B_i^b d\theta \right] \end{aligned} \quad (43)$$

3.6 เงื่อนไขของความต่อเนื่อง

พิจารณาโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงทรงแท่งอย่างหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันแบบสมำเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 2 จะพบว่าที่จุดเชื่อมต่อ J_o^u และ J_o^l ทำหน้าที่เชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว S_o^b และ S^a ในขณะที่จุดเชื่อมต่อ J_i^u และ J_i^l จะทำหน้าที่เชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว S_i^b และ S^a ซึ่งจุดเชื่อมต่อทุกจุดจำเป็นต้องกำหนดให้มีความต่อเนื่องและราบเรียบเพื่อให้ค่าการเสียรูปและความลาดชันมีความสอดคล้องและต่อเนื่องกันระหว่างพื้นผิวทั้งสองส่วน ดังนั้นงานวิจัยในโครงการนี้จึงกำหนดให้ชิ้นส่วนย่อยมีความต่อเนื่องโดยใช้หลักการของตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange

Multiplier Technique) [24] ดังนั้นจะสามารถเขียนเงื่อนไขของความต่อเนื่องที่จุดเชื่อมต่อ J_o^u และ J_o^l ได้ดังสมการที่ (44)

$$G_1 = u_o^b - u^a = 0 \quad (44ก)$$

$$G_2 = w_o^b - w^a = 0 \quad (44ข)$$

$$G_3 = \frac{du_o^b}{d\theta} - \frac{du^a}{d\theta} = 0 \quad (44ค)$$

$$G_4 = \frac{dw_o^b}{d\theta} - \frac{dw^a}{d\theta} = 0 \quad (44ง)$$

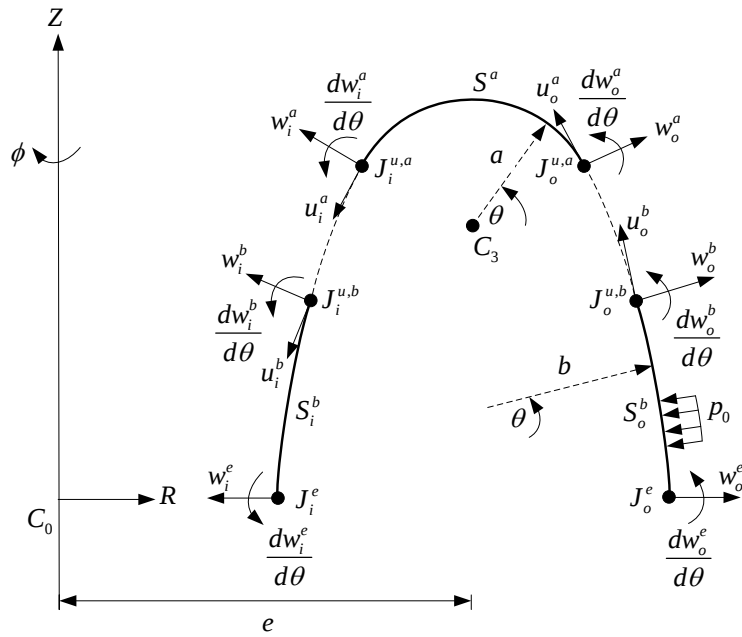
และเงื่อนไขของความต่อเนื่องที่จุดเชื่อมต่อ J_i^u และ J_i^l จะมีค่าดังสมการที่ (45)

$$G_5 = u^a - u_i^b = 0 \quad (45ก)$$

$$G_6 = w^a - w_i^b = 0 \quad (45ข)$$

$$G_7 = \frac{du^a}{d\theta} - \frac{du_i^b}{d\theta} = 0 \quad (45ค)$$

$$G_8 = \frac{dw^a}{d\theta} - \frac{dw_i^b}{d\theta} = 0 \quad (45ง)$$



รูปที่ 2 เงื่อนไขความต่อเนื่องของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วยางหน้าตัดรูปทรงไข

3.7 ผลรวมงานเสมือนประยุกต์

จากผลรวมงานเสมือนในสมการที่ (43) และเงื่อนไขความสอดคล้องในสมการที่ (44) และ (45) จะสามารถเขียนผลรวมงานเสมือนประยุกต์ (Modified Total Virtual Work) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วยางหน้าตัดรูปทรงไขรับแรงดันแบบสม่ำเสมอได้ดังสมการที่ (46)

$$\delta\pi^* = \delta\pi + \delta\pi_c \quad (46)$$

เมื่อ $\delta\pi$ คือ ผลรวมงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วยางหน้าตัดรูปทรงไขรับแรงดันแบบสม่ำเสมอ ในสมการที่ (43) ในขณะที่ $\delta\pi_c$ เป็นเงื่อนไขของความต่อเนื่องที่จุดเชื่อมต่อ ซึ่งจะสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (47)

$$\begin{aligned}\delta\pi_c = & (u_o^b - u^a)\delta\lambda_1 + (w_o^b - w^a)\delta\lambda_2 + \left(\frac{du_o^b}{d\theta} - \frac{du^a}{d\theta}\right)\delta\lambda_3 + \left(\frac{dw_o^b}{d\theta} - \frac{dw^a}{d\theta}\right)\delta\lambda_4 \\ & + (u^a - u_i^b)\delta\lambda_5 + (w^a - w_i^b)\delta\lambda_6 + \left(\frac{du^a}{d\theta} - \frac{du_i^b}{d\theta}\right)\delta\lambda_7 + \left(\frac{dw^a}{d\theta} - \frac{dw_i^b}{d\theta}\right)\delta\lambda_8\end{aligned}\quad (47)$$

เมื่อ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$ คือ ค่าตัวคูณลากรองจ์ โดยสามารถหาได้จากสมการที่ (44) และ (45) ดังนั้นสมการที่ (47) จะสามารถเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ดังสมการที่ (48)

$$\delta\pi_c = \{\delta\lambda\}^T ([G]^T \{D\}) \quad (48)$$

เมื่อ $[D]$ และ $[G]$ สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (49) และ (50)

$$\text{ในที่นี้ } [D] = \begin{bmatrix} u_o^b & w_o^b & \frac{du_o^b}{d\theta} & \frac{dw_o^b}{d\theta} & u^a & w^a & \frac{du^a}{d\theta} & \frac{dw^a}{d\theta} & \dots \\ \dots & u^a & w^a & \frac{du^a}{d\theta} & \frac{dw^a}{d\theta} & u_i^b & w_i^b & \frac{du_i^b}{d\theta} & \frac{dw_i^b}{d\theta} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[I] \\ [I] \\ -[I] \end{bmatrix} \quad (50)$$

เมื่อ $[I]$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (51)

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

จากสมการที่ (48) ค่า λ_i จะสามารถหาได้โดยอัตโนมัติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ (Iterative Procedure) สำหรับผลลัพธ์เชิงตัวเลขแบบไม่เป็นเชิงเส้น

4. วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้จะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข [24] โดยมีรายละเอียดดังนี้

4.1 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากรูปที่ 1 จะทำการแบ่งโครงสร้างเปลือกบางออกเป็นชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัด θ งานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าในการประมาณค่าการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัสและแนวเส้นตั้งฉาก ดังสมการที่ (52)

$$\{\mathbf{g}\} = [\boldsymbol{\Psi}]\{\mathbf{d}\} \quad (52)$$

เมื่อ $[\mathbf{g}]$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ, $[\mathbf{d}]$ คือ เวกเตอร์ของดิกกรีอิสระที่จุดต่อ และ $[\boldsymbol{\Psi}]$ คือ เมตริกซ์ ฟังก์ชันรูปร่างฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (53)

$$[\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} u(\varphi) & w(\varphi) & \frac{du(\varphi)}{d\theta} & \frac{dw(\varphi)}{d\theta} & \frac{d^2u(\varphi)}{d\theta^2} & \frac{d^2w(\varphi)}{d\theta^2} \end{bmatrix} \quad (53ก)$$

$$[\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} u(0) & w(0) & \frac{du(0)}{d\theta} & \frac{dw(0)}{d\theta} & \frac{d^2u(0)}{d\theta^2} & \frac{d^2w(0)}{d\theta^2} & \dots \\ \dots & u(\alpha) & w(\alpha) & \frac{du(\alpha)}{d\theta} & \frac{dw(\alpha)}{d\theta} & \frac{d^2u(\alpha)}{d\theta^2} & \frac{d^2w(\alpha)}{d\theta^2} \end{bmatrix} \quad (53ข)$$

$$[\boldsymbol{\Psi}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & N_6 \\ \frac{dN_1}{d\varphi} & 0 & \frac{dN_2}{d\varphi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{d\varphi} & 0 & \frac{dN_2}{d\varphi} & \dots & \frac{dN_6}{d\varphi} \\ \frac{d^2N_1}{d\varphi^2} & 0 & \frac{d^2N_2}{d\varphi^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{d^2N_1}{d\varphi^2} & 0 & \frac{d^2N_2}{d\varphi^2} & \dots & \frac{d^2N_6}{d\varphi^2} \end{bmatrix} \quad (53ค)$$

สำหรับฟังก์ชันรูปร่างฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ห้าจะสามารถดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ในงานวิจัยของ Jiammeepreecha และคณะ [11] จากนั้นแทนค่าสมการที่ (52) ลงในสมการที่ (43) จะสามารถเขียนผลรวมงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วยางหน้าตัดรูปทรงไข่ ดังสมการที่ (54)

$$\begin{aligned} \delta\pi = & [\delta\mathbf{d}] \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\boldsymbol{\Psi}]^T \left[[\mathbf{k}_{o,m}^b] + [\mathbf{k}_{o,b}^b] + \frac{1}{2}[\mathbf{n}_{o,1m}^b] + \frac{1}{3}[\mathbf{n}_{o,2m}^b] \right] [\boldsymbol{\Psi}] d\theta \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{f}_o^b\} \\ & + [\delta\mathbf{d}] \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\boldsymbol{\Psi}]^T \left[[\mathbf{k}_m^a] + [\mathbf{k}_b^a] + \frac{1}{2}[\mathbf{n}_{1m}^a] + \frac{1}{3}[\mathbf{n}_{2m}^a] \right] [\boldsymbol{\Psi}] d\theta \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{f}^a\} \\ & + [\delta\mathbf{d}] \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\boldsymbol{\Psi}]^T \left[[\mathbf{k}_{i,m}^b] + [\mathbf{k}_{i,b}^b] + \frac{1}{2}[\mathbf{n}_{i,1m}^b] + \frac{1}{3}[\mathbf{n}_{i,2m}^b] \right] [\boldsymbol{\Psi}] d\theta \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{f}_i^b\} \end{aligned} \quad (54)$$

และ $\{\mathbf{f}_o^b\}$, $\{\mathbf{f}^a\}$ และ $\{\mathbf{f}_i^b\}$ คือ ค่าเวกเตอร์ของแรงในชิ้นส่วนย่อย ซึ่งคำนวณได้จากสมการ

$$\{\mathbf{f}_o^b\} = -p_o [\delta\mathbf{w}_o^b] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\boldsymbol{\Psi}\} A_o^b B_o^b d\theta \quad (55ก)$$

$$\{\mathbf{f}^a\} = -p_o [\delta\mathbf{w}^a] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\boldsymbol{\Psi}\} A^a B^a d\theta \quad (55ข)$$

$$\{\mathbf{f}_i^b\} = -p_o [\delta\mathbf{w}_i^b] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\boldsymbol{\Psi}\} A_i^b B_i^b d\theta \quad (55ค)$$

เนื่องจากดิกกรีอิสระเฉพาะที่ (Local Degree of Freedom) $\{\mathbf{d}\}$ เหมือนกับดิกกรีอิสระรวม (Global Degree of Freedom) $\{\mathbf{D}\}$ ดังนั้นผลรวมงานเสมือนประยุกต์ในสมการที่ (54) จะอยู่ในสภาวะสมดุลได้โดยการกำหนดให้มีค่าดังสมการที่ (56)

$$\delta\pi^* = \left(\frac{\partial\pi^*}{\partial D_i} \right) \delta D_i + \left(\frac{\partial\pi^*}{\partial \lambda_i} \right) \delta \lambda_i = 0 \quad (56)$$

เนื่องจาก δD_i และ $\delta \lambda_i$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นเทอมที่หนึ่งและสองในสมการที่ (54) จะต้องมีเงื่อนไขดังสมการที่ (57)

$$\frac{\partial\pi^*}{\partial D_i} = \frac{\partial\pi}{\partial D_i} + \frac{\partial\pi_c}{\partial D_i} = 0 \quad (57ก)$$

$$\frac{\partial\pi^*}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial\pi}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial\pi_c}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (57ข)$$

ดังนั้น สมการที่ (56) จะสามารถเขียนได้ในรูปแบบของเมตริกซ์ดังสมการที่ (58)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_o^b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_i^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_o^b \\ \mathbf{D}^a \\ \mathbf{D}_i^b \\ \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_o^b \\ \mathbf{F}^a \\ \mathbf{F}_i^b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (58)$$

เมื่อ $\mathbf{K}_o^b$, $\mathbf{K}^a$ และ $\mathbf{K}_i^b$ จะมีค่าดังสมการที่ (59)

$$\mathbf{K}_o^b = [\mathbf{K}_{o,m}^b] + [\mathbf{K}_{o,b}^b] + \frac{1}{2}[\mathbf{N}_{o,1m}^b] + \frac{1}{3}[\mathbf{N}_{o,2m}^b] \quad (59ก)$$

$$\mathbf{K}^a = [\mathbf{K}_m^a] + [\mathbf{K}_b^a] + \frac{1}{2}[\mathbf{N}_{1m}^a] + \frac{1}{3}[\mathbf{N}_{2m}^a] \quad (59ข)$$

$$\mathbf{K}_i^b = [\mathbf{K}_{i,m}^b] + [\mathbf{K}_{i,b}^b] + \frac{1}{2}[\mathbf{N}_{i,1m}^b] + \frac{1}{3}[\mathbf{N}_{i,2m}^b] \quad (59ค)$$

เนื่องจากเป็นปัญหาของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตร ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งจุด J_o^e และ J_i^e ของโครงสร้างเปลือกบางจะมีค่าดังสมการที่ (60)

$$u_o^b = u_i^b = \frac{dw_o^b}{d\theta} = \frac{dw_i^b}{d\theta} = 0 \quad (60)$$

โดยที่ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นดังแสดงในสมการที่ (58) จะต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเนื่องจากความสมมาตรตามแนวแกนจากสมการที่ (60) จึงจะสามารถคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้ด้วยวิธีกระบวนการทำซ้ำ (Iterative Procedure)

4.2 พื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบาง

เนื่องจากข้อดีของโครงสร้างประเภทนี้จะมีประสิทธิภาพในการบรรจุได้สูงกว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมมาตรฐานเมื่อพิจารณาอัตราส่วนของพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้นหัวข้อแรกจะเป็นการศึกษาพื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วางหน้าตัดรูปทรงไข่ โดยคำนวณได้จากหลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ [25] ดังสมการที่ (61) และ (62)

$$S = 2\pi \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} A_o^b B_o^b d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} A^a B^a d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} A_i^b B_i^b d\theta \right] \quad (61)$$

$$V = \frac{2\pi}{3} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} (\mathbf{R}_o^b \cdot \hat{\mathbf{n}}_o^b) A_o^b B_o^b d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\mathbf{R}^a \cdot \hat{\mathbf{n}}^a) A^a B^a d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\mathbf{R}_i^b \cdot \hat{\mathbf{n}}_i^b) A_i^b B_i^b d\theta \right] \quad (62)$$

5. ผลการวิเคราะห์

ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับเทคนิคตัวคูณลากรองจ์ในการกำหนดเงื่อนไขของความต่อเนื่อง และใช้กระบวนการทำซ้ำในการหาผลลัพธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ในการศึกษาครั้งนี้จะใช้ค่าพารามิเตอร์สมบัติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่ดังแสดงในตารางที่ 1 สำหรับการแบ่งชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัด โดยกำหนดให้แต่ละชิ้นส่วนย่อยมีความยาวส่วนโค้งไม่เกิน 0.05 เมตร

5.1 พื้นผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่

ตารางที่ 2 แสดงค่าพื้นผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่ พบว่าค่าอัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างจะมีค่าลดลงเมื่อค่ามุมที่รองรับส่วนโค้ง (β) และค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัด (b/a) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น

5.2 พฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน

การตรวจสอบความถูกต้องของผลการศึกษาพฤติกรรมทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ 1 ซึ่งจะพบว่าการเสียรูปที่เกิดขึ้นจะมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในโปรแกรม ABAQUS [26] ดังแสดงในรูปที่ 3 โดยที่ค่าระยะการเสียรูปตามแนวราบจะแตกต่างกันในบริเวณระนาบอิกซ์เตอร์ ทั้งด้านนอกและด้านในของโครงสร้าง ในขณะที่ค่าระยะการเสียรูปตามแนวตั้งจะเกิดความแตกต่างที่บริเวณจุดยอดของโครงสร้าง ดังแสดงในรูปที่ 4 ทั้งนี้เกิดจากข้อแตกต่างของฟังก์ชันรูปร่าง สำหรับชิ้นส่วนย่อยที่ใช้ในการศึกษา โดยในงานวิจัยนี้จะใช้ชิ้นส่วนย่อยที่นิยามแบบฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า แต่ชิ้นส่วนย่อยโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตร (SAX2) ในโปรแกรม ABAQUS จะนิยามฟังก์ชันรูปร่างอันดับที่สอง ดังนั้นเมื่อเราได้ตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองที่ได้จากงานวิจัยในบทความนี้ก็จะสามารถทำการศึกษาผลของค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 ที่ส่งผลกระทบต่อค่าการเสียรูปทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน ซึ่งจะมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

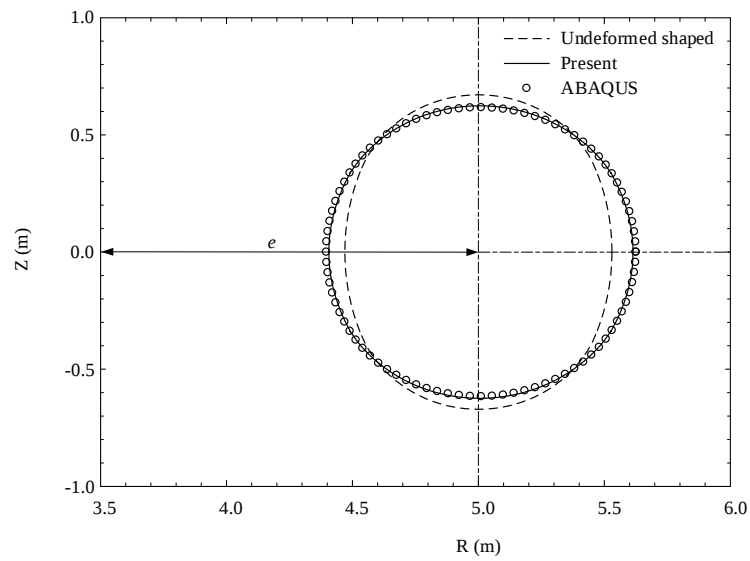
รายการ	ปริมาณ
ความยาวรัศมีส่วนบนและล่าง (a)	0.5 เมตร
ความยาวรัศมีส่วนกลาง (b)	1.0 เมตร
ความยาวรัศมีการตัด (e)	5.0 เมตร
ความหนาของโครงสร้าง (h)	0.05 เมตร
แรงดันสม่ำเสมอภายใน (p_o)	1 เมกะปาสคาล
มุมที่รองรับส่วนโค้ง (β)	20 องศา
มอดุลัสยืดหยุ่น (E')	200×10^3 เมกะปาสคาล
อัตราส่วนปัวส์ซอง (μ)	0.3

5.3 ผลของการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยาง

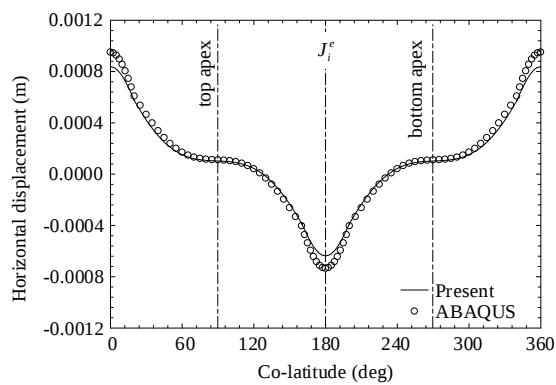
สำหรับการศึกษาค่าพารามิเตอร์แรกที่จะเริ่มทำการศึกษาจะเป็นผลของการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่ โดยทำการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในตั้งแต่ 0.5 ถึง 2.5 เมกะปาสคาล โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งจะพบว่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าแรงดันภายในมีค่าเพิ่มสูงขึ้นดังแสดงในรูปที่ 5 โดยที่ค่าการเสียรูปที่มีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าแรงดันภายในที่เพิ่มสูงขึ้น

ตารางที่ 2 พื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่

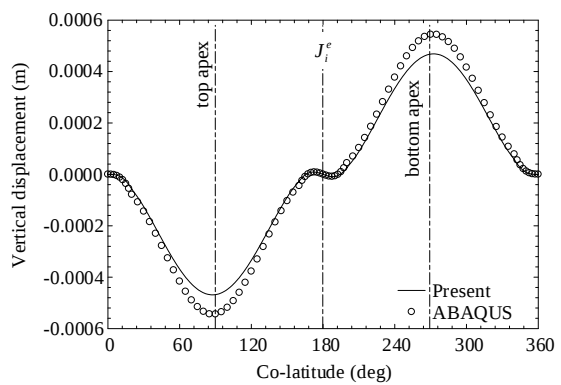
b/a	<i>b</i> (องศา)	S (ตารางเมตร)	V (ลูกบาศก์เมตร)	S/V
2	20	120.628	36.075	3.344
	25	126.112	39.219	3.216
	30	131.595	42.546	3.093
	35	137.078	46.080	2.975
	40	142.561	49.838	2.860
3	20	142.561	48.345	2.949
	25	153.527	55.439	2.769
	30	164.493	63.264	2.600
	35	175.460	71.916	2.440
	40	186.426	81.465	2.288
4	20	164.493	61.485	2.675
	25	180.943	73.334	2.467
	30	197.392	86.828	2.273
	35	213.841	102.183	2.093
	40	230.291	119.555	1.926
5	20	186.426	75.494	2.469
	25	208.358	92.903	2.243
	30	230.291	113.238	2.034
	35	252.223	136.880	1.843
	40	274.156	164.109	1.671



รูปที่ 3 การเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน

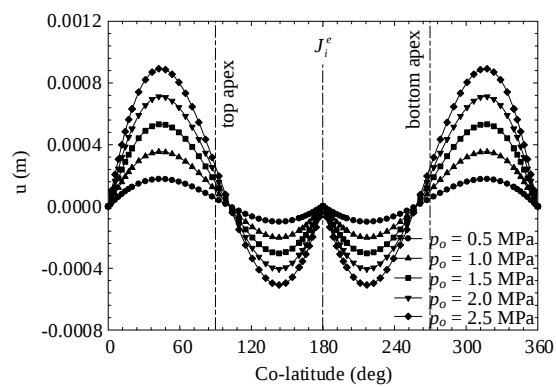


(ก) ค่าการเสียรูปตามแนวราบ

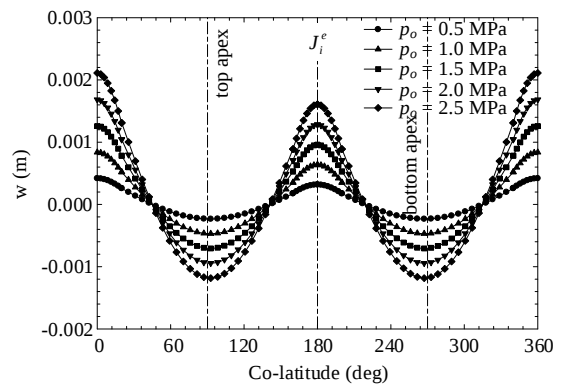


(ข) ค่าการเสียรูปตามแนวตั้ง

รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดัน



(ก) ค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน

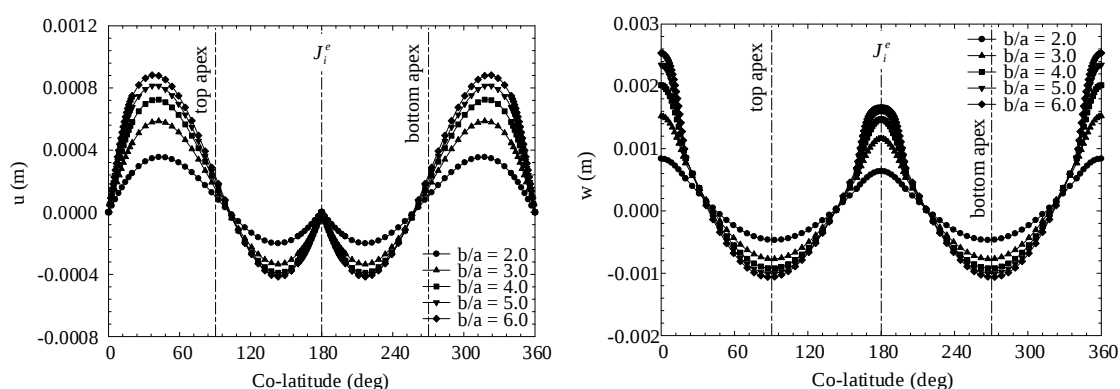


(ข) ค่าการเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน

รูปที่ 5 ผลของการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยาง

5.4 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยาง

การศึกษาผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่จะสามารถทำได้โดยการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีของโครงสร้างเปลือกบาง ตั้งแต่ 2.0 ถึง 6.0 โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 และความยาวรัศมีของโครงสร้างส่วนบนและล่างมีค่าคงที่เท่ากับ 0.5 เมตร ไม่มีการเปลี่ยนแปลง พบว่า การเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนจะมีค่าสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวรัศมี (b/a) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 6 ทั้งนี้เนื่องจากการเพิ่มค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีของโครงสร้างเปลือกบาง (b/a) จะส่งผลทำให้พื้นที่ผิวของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 2 และการเพิ่มค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดจะส่งผลทำให้ค่าความแข็งแรงเนื่องจากการดัดมีค่าลดลง ดังแสดงในสมการที่ (5) ซึ่งจะส่งผลทำให้พื้นที่ผิวที่รองรับแรงดันภายในมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย

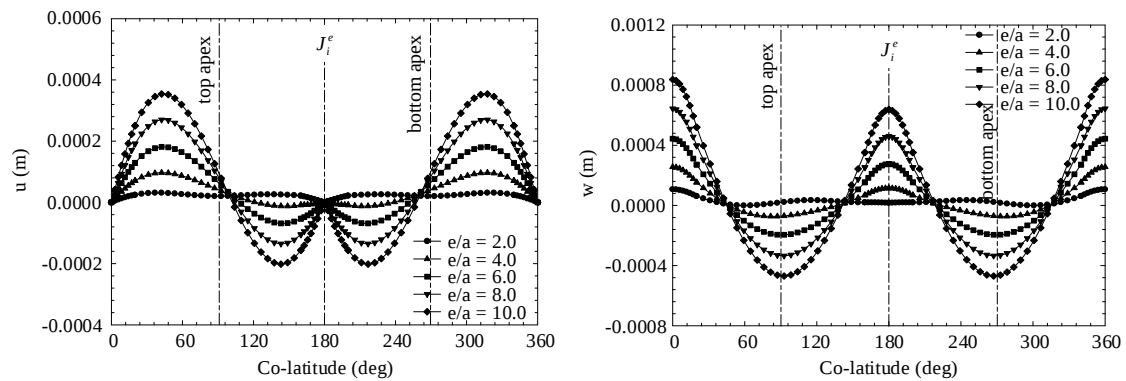


(ก) ค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน (ข) ค่าการเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน

รูปที่ 6 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีหน้าตัดที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยาง

5.5 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีการดัดต่อความยาวรัศมีหน้าตัดที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยาง

ในหัวข้อนี้จะเป็นการศึกษาผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีการดัดต่อความยาวรัศมีหน้าตัด (e/a) ที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่มีเฉพาะในโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางเท่านั้นแตกต่างจากโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงอื่น ๆ โดยทำการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมี (e/a) ตั้งแต่ 2.0 ถึง 10.0 ในขณะที่ความยาวรัศมีของโครงสร้างส่วนบนและล่างมีค่าคงที่เท่ากับ 0.5 เมตร และค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลง จะพบว่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนจะมีค่าสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีการดัด (e/a) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7 เนื่องจากการเพิ่มค่าความยาวรัศมีการดัด (e) จะส่งผลทำให้พื้นที่ผิวที่รองรับแรงดันภายในมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ในขณะที่ค่าความโค้ง (Curvature) ตามแนวทิศทางลองจิจูดจะมีค่าลดลง ดังแสดงในสมการที่ (5ข) และ (11ข) ซึ่งทำให้ค่าความแข็งแรงเนื่องจากการดัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางมีค่าลดลงตามไปด้วย



(ก) ค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน (ข) ค่าการเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน

รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีการตัดต่อความยาวรัศมีหน้าตัดที่มีต่อ
โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยาง

6. สรุปผลการศึกษา

งานวิจัยนี้นำเสนอผลการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายใน โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูปและความโค้ง-การเสียรูปจะเขียนในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์และความโค้ง และสร้างฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วยางหน้าตัดรูปทรงไข่รับแรงดันภายในโดยใช้สมการแปรผัน ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับวิธีการหาค่าต่ำสุดในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าการเสียรูปแบบไม่เป็นเชิงเส้น ผลการศึกษาพบว่าค่าการเสียรูปจะเป็นสัดส่วนกับการเปลี่ยนแปลงค่าแรงดันภายใน สำหรับค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบาง จะพบว่าการเพิ่มค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีและอัตราส่วนความยาวรัศมีการตัดต่อความยาวรัศมีหน้าตัดของโครงสร้างเปลือกบางจะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเนื่องจากพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มสูงขึ้น

7. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับการสนับสนุนจากกองทุนส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม ตามสัญญาเลขที่ FF66-P1-035

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] Zingoni, A. (2015). Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics. *Thin-Walled Structures*, 87, 102-114.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.10.016>
- [2] Jiammeepreecha, W. (2016). Finite element analysis of toroidal membrane under external pressure. *UBU Engineering Journal*, 9(2), 47-56. (in Thai).

- [3] Chaidachatorn, K., Jiammeepreecha, W., & Jamnam, S. (2021). Axisymmetric and antisymmetric free vibrations of inflated toroidal membrane. *The Journal of KMUTNB*, 31(4), 661-674. (in Thai).
- [4] Zingoni, A., & Enoma, N. (2020). On the strength and stability of elliptic toroidal domes. *Engineering Structures*, 207, 110241. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110241>
- [5] Zhang, J., Dai, M., Wang, F., Tang, W., & Zhao, X. (2021). Buckling performance of egg-shaped shells fabricated through free hydroforming. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 193, 104435. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104435>
- [6] Huang, H., Zou, M.S., & Jiang, L.W. (2021). Analysis of characteristic of acoustic radiation from axisymmetric pressure-resistant egg-shaped shells in the ocean environment. *Applied Ocean Research*, 116, 102890. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102890>
- [7] Zhang, J., Wang, M., Wang, W., & Tang, W. (2017). Buckling of egg-shaped shells subjected to external pressure. *Thin-Walled Structures*, 113, 122-128. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104435>
- [8] Sanders Jr, J.L., & Liepins, A. (1963). Toroidal membrane under internal pressure. *AIAA Journal*, 1(9), 2105-2110. <https://doi.org/10.2514/3.2001>
- [9] Jiammeepreecha, W., & Chucheepsakul, S. (2017). Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell. *Thin Walled Structures*, 116, 12-18. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.001>
- [10] Jiammeepreecha, W., Suebsuk, J., & Chucheepsakul, S. (2020). Nonlinear static analysis of liquid-containment toroidal shell under hydrostatic pressure. *Journal of Structural Engineering*, 146(1), 04019169. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.000246](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.000246)
- [11] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., & Chucheepsakul, S. (2021). Nonlinear static response of an underwater elastic toroidal storage container. *International Journal of Solids and Structures*, 228, 111134. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111134>
- [12] Sun, B. (2021). Small Symmetrical deformation of thin torus with circular cross-section. *Thin-Walled Structures*, 163, 107680. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107680>
- [13] Sutcliffe, W.J. (1971). Stress analysis of toroidal shells of elliptical cross-section. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(11), 951-958. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(71\)90081-6](https://doi.org/10.1016/0020-7403(71)90081-6)
- [14] Galletly, G.D. (1998). Elastic buckling of complete toroidal shells of elliptical cross-section subjected to uniform internal pressure. *Thin-Walled Structures*, 30(1), 23-34. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(97\)00030-X](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(97)00030-X)

- [15] Zingoni, A., Enoma, N., & Govender, N. (2015). Equatorial bending of an elliptic toroidal shell. *Thin-Walled Structures*, 96, 286-294. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.08.017>
- [16] Tangbanjongkij, C., Chucheepsakul, S., Pulngern, T., & Jiammeepreecha, W. (2022). Analytical and numerical approaches for stress and displacement components of pressurized elliptic toroidal vessels. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 199, 104675. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2022.104675>
- [17] Tangbanjongkij, C., Chucheepsakul, S., Pulngern, T., & Jiammeepreecha, W. (2023). Axisymmetric buckling analysis of submerged hemi-elliptic toroidal shells. *Thin-Walled Structures*, 183, 110383. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110383>
- [18] Enoma, N., & Zingoni, A. (2020). Analytical formulation and numerical modelling for multi-shell toroidal pressure vessels. *Computers and Structures*, 232, 105811. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.013>
- [19] Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S., & Huang, T. (2014). Nonlinear static analysis of deep water axisymmetric spherical half drop shell. *KMUTT Research and Development Journal*, 37(2), 239-255. (in Thai).
- [20] Jiammeepreecha, W., & Chucheepsakul, S. (2017). Nonlinear free vibration of internally pressurized axisymmetric spherical shell. *KMUTT Research and Development Journal*, 40(4), 509-532. (in Thai).
- [21] Langhaar, H.L. (1962). *Energy methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [22] Jiammeepreecha, W., & Chucheepsakul, S. (2019). Nonlinear free vibration analysis of a toroidal pressure container under constrained volume condition. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 19(10), 1950118. <https://doi.org/10.1142/S0219455419501189>
- [23] Mase, G.T., & Mase, G.E. (1999). *Continuum mechanics for engineers*, CRC Press.
- [24] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., & Witt, R.J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons.
- [25] Langhaar, H.L. (1964). *Foundations of practical shell analysis*. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [26] Abaqus. (2016). *ABAQUS Analysis User's Manual*, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Pawtucket.