

# การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดด้วยวิธีเบส์ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสีย

## Bayesian Approach for Point Estimation

### under Different loss functions

นิตยา ภูวงศ์<sup>1</sup> ชิตชนก คำนาง<sup>1</sup> และ หยาดพิรุณ ศุภรากรสกุล<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

\*E-mail: yadpirun.suph@pcru.ac.th

#### บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าของพารามิเตอร์แบบจุดสำหรับการแจกแจงปัวซองโดยวิธีเบส์ (Bayes) เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสีย 3 ฟังก์ชัน ได้แก่ ฟังก์ชันการสูญเสียพรีค่อนนารี ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีและฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีทั่วไป และเปรียบเทียบกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

ผลการศึกษา พบว่า ส่วนใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำที่สุดเมื่อพารามิเตอร์มีค่าเท่ากับ 5 ถึง 30 ในขณะที่วิธีเบส์ที่กำหนดฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปี (EN) ให้ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองต่ำที่สุด เมื่อพารามิเตอร์มีค่าเท่ากับ 0.5 ถึง 1 และตัวประมาณแบบเบส์ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียพรีค่อนนารีให้ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองต่ำที่สุด เมื่อพารามิเตอร์มีค่าเท่ากับ 3 ถึง 5

**คำสำคัญ:** การแจกแจงปัวซอง วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีเบส์ ฟังก์ชันการสูญเสีย

#### Abstract

The aim of this research is to investigate the point estimation of the Poisson parameter using a Bayesian approach with an exponential distribution as the prior. The research involves employing Bayesian inference's loss function to derive point estimates under different loss functions, namely precautionary, entropy, and general entropy. The proposed methods are

\* Corresponding author, e-mail: yadpirun.suph@pcru.ac.th

then compared with the maximum likelihood method, with the mean square error (MSE) serving as the performance evaluation criterion.

The findings reveal that the maximum likelihood estimator achieves the lowest MSE values when the true parameter falls within the range of 0.5 to 1. On the other hand, the Bayesian approach under the precautionary loss function yields the smallest MSE values when the true parameter ranges from 3 to 5.

**Keywords:** Poisson distribution, maximum likelihood estimator, Bayesian approach, Loss function

## 1. ที่มาและความสำคัญ

การแจกแจงปัวซองมีบทบาทสำคัญในทางสถิติโดยการสังเกตเหตุการณ์ที่ไม่ต่อเนื่องแต่นับได้ที่สัมพันธ์กับช่วงความต่อเนื่องซึ่งเกิดจากสถานการณ์ต่าง ๆ หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่สนใจในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งหรือพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่ง เช่น จำนวนผู้มาใช้บริการคอมพิวเตอร์ที่ห้องสมุดมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ จำนวนผู้ประสบอุบัติเหตุบริเวณหน้าวิทยาลัยเทคนิคเพชรบูรณ์ เป็นต้น ดังนั้นการแจกแจงปัวซองจึงเป็นการศึกษาเกี่ยวกับจำนวนครั้งของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ เช่น จำนวนนักศึกษาปริญญาตรีของมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่เข้าใช้บริการโรงอาหารเวลาตั้งแต่ 12:00 ถึง 13:00 เป็นต้น

การศึกษาลักษณะของประชากรที่มีขนาดใหญ่จะเป็นเรื่องยากที่จะทราบถึงคุณลักษณะของประชากรนั้นได้ ดังนั้นจึงมีการใช้การอนุมานเชิงสถิติมาใช้ในการศึกษา โดยการอนุมานเชิงสถิติเป็นวิธีการใช้ข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างเพื่อสรุปผลเกี่ยวกับประชากรคือการประมาณค่าพารามิเตอร์ ดังนั้นการประมาณค่าพารามิเตอร์ในทางสถิติ มีแนวคิดโดยทั่วไปว่าพารามิเตอร์เป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า จึงใช้ข้อมูลที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างซึ่งจะได้ตัวสถิติเพื่อใช้อ้างอิงถึงพารามิเตอร์ในประชากร ซึ่งในการประมาณค่าพารามิเตอร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่สนใจด้วยค่าสถิติเพียงค่าเดียวหรือจุดเพียงจุดเดียว ซึ่งการประมาณค่าแบบนี้อาจมีค่าเท่ากับค่าพารามิเตอร์หรืออาจมีโอกาสที่จะได้ค่าคาดเคลื่อนไปจากพารามิเตอร์ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับหน่วยตัวอย่างที่นำมาวิเคราะห์ ส่วนการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ว่าจะอยู่ช่วงใดช่วงหนึ่งด้วยความเชื่อมั่นที่สามารถกำหนดได้

ในการศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ รุ่งตะวัน วัฒนธ และ ชินนะพงษ์ บำรุงทรัพย์ [4] ได้ดำเนินการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 ชนิด คือ การประมาณค่าแบบจุดและการประมาณค่าแบบช่วง การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ผลจากการศึกษาพบว่าวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด คือ วิธีเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา ต่อมา ภูวษา แซ่ฮ้อย (2559) เปรียบเทียบวิธีการประมาณ

ค่าพารามิเตอร์แบบจุดด้วยวิธีเบส์ (Bayesian method) วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square Method) ผลจากการศึกษา พบว่า วิธีเบส์มีประสิทธิภาพดีที่สุดสำหรับทุก ๆ สถานการณ์ที่กำหนดรองลงมา คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด ต่อมา ฉัตรวดี กิจแก้ว และอชฌา อระวีพร [1] ได้เปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่น สำหรับพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบปัวซอง 3 วิธี คือ วิธีการประมาณแบบปกติ (Normal method) วิธีการประมาณแบบไค-สแควร์ (Chi-Square method) และวิธีเบส์ ผลการวิจัย พบว่า ทุกระดับความเชื่อมั่นที่ได้กำหนดให้ผลการศึกษาทั้ง 3 วิธีไม่แตกต่างกัน นอกจากนี้ ธิดา พันแดงพันธ์ และหยาดพิรุณ ศุภรากรสกุล [2] ได้ศึกษาเปรียบเทียบการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ สำหรับการแจกแจงปัวซอง โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีเบส์ โดยวิธีเบส์ศึกษาในกรณีที่กำหนดการแจกแจงก่อน (Prior Distribution) 4 วิธี ได้แก่ การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) การแจกแจงเอกรูป (Uniform Distribution) และเจฟเฟอรี (Jeffreys) ผลจากการศึกษาพบว่าวิธีของเบส์เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพที่ดีที่สุดเกือบทุกกรณี

การหาตัวประมาณค่าด้วยวิธีเบส์ส่วนใหญ่นิยมศึกษาภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสีย (Loss Function) ต่าง ๆ เช่น Supharakonsakun [8] ศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซอง โดยกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมาภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Squared Error Loss Function) และฟังก์ชันการสูญเสียกำลังสอง (Quadratic Loss Function) นอกจากนี้ Hasan et al. [7] ได้ดำเนินการศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมาภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Squared Error Loss Function) และฟังก์ชันการสูญเสียกำลังสอง (Quadratic Loss Function) ฟังก์ชันการสูญเสียเลขชี้กำลังเชิงเส้นดัดแปลง (Modified Linear Exponential Loss Function) ฟังก์ชันการสูญเสียเลขชี้กำลังไม่เชิงเส้น (NonLinear Exponential Loss Function) และต่อมา Chen and Liu [6] ศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมาภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียพรีค่อนนารี (Precautionary Loss Function) และ Singh et al. [7] ได้ศึกษาค่าประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียคลาดเคลื่อนกำลังสอง และฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีทั่วไป (General Entropy Loss Function) และนำไปเปรียบเทียบกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) นอกจากนี้ Naji and Rasheed [9] ได้ศึกษาค่าประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมาภายใต้ฟังก์ชันเอนโทรปี (Entropy Loss Function)

จากการศึกษาข้างต้นคณะผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดทั้ง 2 แนวคิด ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงปัวซอง เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียคลาดเคลื่อนคลื่อนกำลังสอง (Square Error Loss Function) และฟังก์ชันการสูญเสียกำลังสอง (Quadratic Loss Function) เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละวิธีในการประมาณ

## 2. วัตถุประสงค์

2.1 เพื่อศึกษาวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงปัวซองด้วยวิธีเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียพรีค็อกชันนารี ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปี และฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีทั่วไป

2.2 เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงปัวซองด้วยวิธีเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียพรีค็อกชันนารี ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปี และฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีทั่วไปกับวิธีภาวน่าจะเป็นสูงสุด

## 3. ทฤษฎีบทที่ใช้ในการวิจัย

### 3.1 การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution)

การแจกแจงปัวซองเป็นการแจกแจงลักษณะของข้อมูลเป็นการทดลองที่มีการนับจำนวนครั้งของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจที่เกิดขึ้นในขอบเขตที่กำหนด โดยขอบเขตดังกล่าวนี้ อาจเป็นช่วงเวลา อาณาบริเวณพื้นที่หรือปริมาตร ซึ่งจะต้องทราบค่าเฉลี่ยของจำนวนของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจในขอบเขตที่กำหนดให้ นั้น และจำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็นอิสระต่อกัน

บทนิยาม 3.1.1 ถ้า  $X$  เป็นจำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในขอบเขตที่กำหนดที่ได้จากการทดลองปัวซอง จะเรียก  $X$  ว่า การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution) โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น (Probability Function) ดังนี้

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; x = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0$$

เมื่อ  $e \approx 2.71828$  และ  $\lambda$  คือ จำนวนครั้งเฉลี่ยของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจที่เกิดขึ้นในขอบเขตที่กำหนด

ค่าคาดหวัง (Expected Value) และความแปรปรวน (Variance) ของการแจกแจงปัวซอง คือ

$$E(X) = \lambda \text{ และ } V(X) = \lambda$$

### 3.2 การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution)

การแจกแจงแบบเลขชี้กำลังเป็นการแจกแจงที่มีความสัมพันธ์กับการแจกแจงปัวซองเนื่องจากการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง จะเป็นการแจกแจงของระยะเวลาที่รอคอยจนกว่าจะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจขึ้นเป็นครั้งแรก โดยจำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่สนใจที่จะเกิดขึ้นนั้นมีตัวแปรสุ่มแบบปัวซองใช้ในการจำลองจำนวนครั้งของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ในช่วงเวลาที่สนใจ

บทนิยาม 3.2.1 ถ้าตัวแปรสุ่ม  $X$  แทนเวลาที่รอการเกิดเหตุการณ์ครั้งแรก หรือแทนเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์ 2 ครั้งติดต่อกันจะเรียก  $X$  ว่าการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น (Probability Function) ดังนี้

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x} ; x > 0, \theta > 0$$

เมื่อ  $e \approx 2.71828$  และ  $\theta$  คือ อัตราต่อหน่วยเวลาของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจขึ้นเป็นครั้งแรก ค่าคาดหวัง (Expected Value) และความแปรปรวน (Variance) ของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง คือ

$$E(X) = \frac{1}{\theta} \text{ และ } V(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

### 3.3 การแจกแจงแกมมา

บทนิยาม 3.3.1 ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา แทนด้วยสัญลักษณ์  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  โดยที่  $\alpha$  และ  $\beta$  เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา จะได้ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงความหนาแน่นน่าจะเป็น (Probability Density Function) ของการแจกแจงแกมมาเป็น ดังนี้

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}; x > 0; \alpha, \beta > 0$$

ค่าคาดหวัง (Expected Value) และความแปรปรวน (Variance) ของการแจกแจงแกมมา คือ

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \text{ และ } V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

## 4. วิธีดำเนินการวิจัย

### 4.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)

วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) เป็นวิธีดั้งเดิม (Classical Methods) ที่ได้รับความนิยมมากที่สุดวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาตัวประมาณ เนื่องจากง่ายต่อการคำนวณและเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพ วิธีการหาตัวประมาณวิธีนี้จะพิจารณาจากฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) และมีขั้นตอนในการคำนวณดังต่อไปนี้

ให้  $X_1, X_2, \dots, X_n$  เป็นตัวแปรสุ่มอิสระที่มีการแจกแจงปัวซองด้วยพารามิเตอร์  $\lambda$  ที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x_i|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}; x_i = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0$$

จะได้ว่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) คือ ผลคูณฟังก์ชันความน่าจะเป็นจำนวน  $n$  ครั้ง สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\lambda)$$

$$= \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

ลอการิทึม (Logarithm) ของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นคือ

$$\ln L(\lambda) = \ln \left( \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \right)$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i! \right)$$

จากลอการิทึมของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ค่าที่สูงที่สุดของ  $\ln L(\lambda)$  ที่เกิดขึ้นสำหรับค่าพารามิเตอร์  $\lambda$  จะเป็นค่าประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ถ้า  $\ln L(\lambda)$  สามารถหาอนุพันธ์สำหรับพารามิเตอร์  $\lambda$  ได้ จะได้ว่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดหาค่าประมาณได้จาก

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial(-n\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda \right)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i! \right)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\hat{\lambda}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

และจากอนุพันธ์อันดับที่ 2 สำหรับพารามิเตอร์  $\lambda$  จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2}$$

แทนค่า  $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  ทำให้  $\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i} < 0$

ดังนั้น  $\hat{\lambda}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  จึงเป็นตัวประมาณที่มีค่าสูงสุดด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

#### 4.2 วิธีเบย์ (Bayes Method)

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้แนวความคิดเบย์ส์จะมีความแตกต่างจากแนวความคิดดั้งเดิม ซึ่งแนวคิดดั้งเดิมจะพิจารณาว่าค่าพารามิเตอร์เป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าและจะทำการสุ่มตัวอย่างมา เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ ในขณะที่แนวคิดเบย์ส์จะพิจารณาว่าพารามิเตอร์เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจง ซึ่งในการประมาณค่าเราจะนำความรู้เกี่ยวกับตัวแปรสุ่มมาช่วยในการหาตัวประมาณ และตัวประมาณที่ได้ จะอยู่ในรูปการแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) ในการศึกษาครั้งนี้กำหนดการแจกแจงก่อน เป็นการแจกแจงเอ็กซ์โพเนนเชียล ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียต่างๆ โดยมีรายละเอียดในการหาตัวประมาณต่าง ๆ ดังนี้

ให้  $X_1, X_2, \dots, X_n$  เป็นตัวแปรสุ่มอิสระที่มีการแจกแจงปัวซองด้วยพารามิเตอร์  $\lambda$  ที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x_i | \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}; x_i = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0$$

โดยกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution)

ให้  $\lambda$  เป็นการแจกแจงก่อนที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ด้วยพารามิเตอร์  $\theta$  จะได้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$\pi(\lambda) = \theta e^{-\theta\lambda}; \lambda > 0; \theta > 0$$

การแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) สามารถคำนวณหาได้จาก

$$f(\lambda | x_i) = \frac{\left[ \prod_{i=1}^n f(x_i | \lambda) \right] \pi(\lambda)}{\int_0^\infty \left[ \prod_{i=1}^n f(x_i | \lambda) \right] \pi(\lambda) d\lambda}$$

พิจารณา

$$\prod_{i=1}^n f(\lambda | x_i) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

จะได้ว่า

$$\left[ \prod_{i=1}^n f(\lambda | x_i) \right] \pi(\lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \cdot \theta e^{-\lambda(n+\theta)}$$

และ

$$\int_0^\infty \left[ \prod_{i=1}^n f(\lambda | x_i) \right] \pi(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \cdot \theta e^{-\lambda(n+\theta)} d\lambda$$

จะได้ว่า

ดังนั้น

ฟังก์ชันการสูญเสียพรีคอนชันนารีด้วยพารามิเตอร์  $\hat{\psi}$  จะได้ฟังก์ชันการสูญเสียดังนี้

$$L(\hat{\lambda}; \lambda) = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda)^2}{\hat{\lambda}}$$

การหาตัวประมาณพารามิเตอร์ ๑ โดยวิธีเบส์ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียพรีค็อกชันนารี (PR) จะสามารถคำนวณหาได้จาก

พิจารณา



$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i+1} \Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i+3\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i+1\right)(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i+3}} \int_0^\infty \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i+3}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i+3\right)} \lambda^{\left(\sum_{i=1}^n x_i+3\right)-1} e^{-(n+\theta)\lambda} d\lambda \\
 &= \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i+1} \Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i+3\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i+1\right)(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i+3}} \\
 E(\lambda^2 | x) &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i+2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i+1\right)}{(n+\theta)^2}
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\left[E(\lambda^2 | x)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i+2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i+1\right)}{(n+\theta)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น

$$\hat{\lambda}_{PR} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i+2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i+1\right)}}{n+\theta}$$

#### 4.2.2 การแจกแจงภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปี (Entropy loss function)

ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีด้วยพารามิเตอร์  $\hat{\lambda}$  จะได้ฟังก์ชันการสูญเสียดังนี้

$$L(\hat{\lambda}; \lambda) = \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right) - \log\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right) - 1$$

การหาตัวประมาณพารามิเตอร์  $\lambda$  โดยวิธีเบส์ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปี (EN)

จะสามารถคำนวณหาได้จาก

$$\hat{\lambda}_{EN} = \left[E(\lambda^{-1} | x)\right]^{-1}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 E(\lambda^{-1} | x) &= \lambda^{-1} \int_0^\infty \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i+1}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i+1\right)} \lambda^{\left(\sum_{i=1}^n x_i+1\right)-1} e^{-\lambda(n+\theta)} d\lambda \\
 &= \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i+1} \Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i+1\right)(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}} \int_0^\infty \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)} \lambda^{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)-1} e^{-\lambda(n+\theta)} d\lambda
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1} \Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right) (n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}}$$

จะได้ว่า

$$E(\lambda^{-1} | x) = \frac{n+\theta}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\left[E(\lambda^{-1} | x)\right]^{-1} = \left[\frac{n+\theta}{\sum_{i=1}^n x_i}\right]^{-1}$$

ดังนั้น

$$\hat{\lambda}_{EN} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+\theta}$$

4.2.3 การแจกแจงภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีทั่วไป (General Entropy loss function)

ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีทั่วไปด้วยพารามิเตอร์  $\lambda$  จะได้ฟังก์ชันการสูญเสียดังนี้

$$L(\hat{\lambda}; \lambda) = \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right)^c - c \log\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right) - 1; c \neq 0$$

การหาตัวประมาณพารามิเตอร์  $\lambda$  โดยวิธีเบส์ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีทั่วไป (GE)

จะสามารถคำนวณได้จาก

$$\hat{\lambda}_{GE} = \left[E(\lambda^{-c} | x)\right]^{-\frac{1}{c}}$$

พิจารณา

$$E(\lambda^{-c} | x) = \lambda^{-c} \int_0^\infty \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right)} \lambda^{\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right) - 1} e^{-\lambda(n+\theta)} d\lambda$$

$$= \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1} \Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right) (n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c}} \int_0^\infty \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c\right)} \lambda^{\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c\right) - 1} e^{-\lambda(n+\theta)} d\lambda$$

$$= \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right) (n+\theta)^{-c}}$$

จะได้ว่า

$$E(\lambda^{-c} | x) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right)} (n + \theta)^c$$

$$\left[ E(\lambda^{-c} | x) \right]^{-\frac{1}{c}} = \left[ \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right)} (n + \theta)^c \right]^{-\frac{1}{c}}$$

ดังนั้น

$$\hat{\lambda}_{GE} = \left[ \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - c\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right)} \right]^{-\frac{1}{c}} (n + \theta)^{-1}$$

ในการศึกษาครั้งนี้ กำหนดค่า  $c = 2$  และ  $3$  โดยมีรายละเอียดในการหาค่าตัวประมาณได้ดังนี้  
เมื่อกำหนด  $c=2$  ซึ่งสามารถคำนวณหาได้จาก

$$\hat{\lambda}_{GE(c=2)} = \left[ E(\lambda^{-2} | x) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

พิจารณา

$$E(\lambda^{-2} | x) = \lambda^{-2} \int_0^\infty \frac{(n + \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right)} \lambda^{\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right) - 1} e^{-\lambda(n + \theta)} d\lambda$$

$$= \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 2\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right) (n + \theta)^{-2}}$$

จะได้ว่า

$$\left[ E(\lambda^{-2} | x) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 1\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 2\right) (n + \theta)^{-2}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น

$$\hat{\lambda}_{GE(c=2)} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)}}{n + \theta}$$

และ เมื่อกำหนด  $c=3$  ซึ่งสามารถคำนวณหาได้จาก

$$\hat{\lambda}_{GE(c=3)} = \left[ E(\lambda^{-3} | x) \right]^{-\frac{1}{3}}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 E(\lambda^{-3} | x) &= \lambda^{-3} \int_0^\infty \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right)} \lambda^{\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right)-1} e^{-\lambda(n+\theta)} d\lambda \\
 &= \frac{(n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1} \Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 3\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right) (n+\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 3}} \\
 &= \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 3\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right) (n+\theta)^{-3}}
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\left[ E(\lambda^{-3} | x) \right]^{-\frac{1}{3}} = \left[ \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 1\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 2\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - 3\right) (n+\theta)^{-3}} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

ดังนั้น

$$\hat{\lambda}_{GE(c=3)} = \frac{\sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i - 2\right)}}{n+\theta}$$

## 5. ผลการศึกษาและวิจารณ์ผล

### 5.1 ผลการศึกษา

ในการศึกษาครั้งนี้คณะผู้วิจัยจะนำเสนอผลการวิจัยที่ได้จากการเขียนโปรแกรมจำลองสถานการณ์ด้วยโปรแกรม R โดยมีผลการการศึกษาดังนี้

จากตารางที่ 1 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของตัวประมาณค่าแบบจุดสำหรับพารามิเตอร์ เมื่อ  $\theta = 0.25$  ของวิธี MLE,  $\hat{\lambda}_{PR}$ ,  $\hat{\lambda}_{EN}$ ,  $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$  และ  $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$  เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง  $n = 5, 8$  และ  $20$  และพารามิเตอร์  $\lambda = 0.5$  และ  $1$  พบว่า วิธี  $\hat{\lambda}_{EN}$  เป็นวิธีที่ให้ค่า MSE ต่ำที่สุดเมื่อพารามิเตอร์  $\lambda = 3, 5, 10$  และ  $15$  พบว่าวิธี  $\hat{\lambda}_{PR}$  ให้ค่า MSE ต่ำที่สุดในขณะที่พารามิเตอร์  $\lambda = 30$  พบว่า วิธีที่ให้ค่า MSE ต่ำที่สุดคือวิธี MLE และเมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง  $n = 10, 30$  และ  $50$  และพารามิเตอร์  $\lambda = 0.5, 1$  และ  $3$  พบว่า วิธีที่ให้ค่า MSE ต่ำที่สุดคือวิธี  $\hat{\lambda}_{EN}$  ในขณะที่พารามิเตอร์  $\lambda = 5, 10$  และ  $15$  พบว่า วิธี  $\hat{\lambda}_{PR}$  ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด และเมื่อพารามิเตอร์  $\lambda = 20$  และ  $30$  พบว่า วิธีที่ให้ค่า MSE ต่ำที่สุดคือวิธี MLE

จากตารางที่ 2 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของตัวประมาณค่าแบบจุดสำหรับพารามิเตอร์เมื่อ  $\theta = 0.5$  ของวิธี MLE,  $\hat{\lambda}_{PR}$ ,  $\hat{\lambda}_{EN}$ ,  $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$  และ  $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$  เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง  $n = 5,$

8, 10, 20, 30 และ 50 ที่พารามิเตอร์  $\lambda = 0.5$  และ 1 พบว่า วิธี  $\hat{\lambda}_{EN}$  เป็นวิธีที่ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด และเมื่อพารามิเตอร์  $\lambda = 3$  และ 5 พบว่าวิธีที่ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด คือวิธี  $\hat{\lambda}_{PR}$  ในขณะที่พารามิเตอร์  $\lambda$  ที่มีค่าตั้งแต่ 10 ขึ้นไป พบว่าวิธีที่ให้ค่า MSE ต่ำที่สุดคือ วิธี MLE

**ตารางที่ 1** ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์  $\lambda$  สำหรับ  $n=5,8,10$  เมื่อ  $\theta = 0.25$

| $n$ | $\lambda$ | วิธี           |                      |                      |                           |                           |
|-----|-----------|----------------|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|
|     |           | $MLE$          | $\hat{\lambda}_{PR}$ | $\hat{\lambda}_{EN}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$ |
| 5   | 0.5       | 0.09982        | 0.15603              | <b>0.09122</b>       | 0.11522                   | 0.15847                   |
|     | 1         | 0.20160        | 0.24211              | <b>0.18448</b>       | 0.20966                   | 0.26983                   |
|     | 3         | 0.59099        | <b>0.55560</b>       | 0.55743              | 0.59597                   | 0.65502                   |
|     | 5         | 1.01564        | <b>0.92563</b>       | 0.96834              | 1.01999                   | 1.09111                   |
|     | 10        | 1.97769        | <b>1.82832</b>       | 2.01523              | 2.11468                   | 2.23305                   |
|     | 15        | 3.06146        | <b>2.95702</b>       | 3.28057              | 3.42548                   | 3.58914                   |
|     | 20        | <b>4.03996</b> | 4.09166              | 4.54633              | 4.73489                   | 4.94212                   |
|     | 30        | <b>6.06379</b> | 6.74871              | 7.46852              | 7.74542                   | 8.04091                   |
| 8   | 0.5       | 0.06153        | 0.08551              | <b>0.05806</b>       | 0.06753                   | 0.09162                   |
|     | 1         | 0.12518        | 0.14003              | <b>0.11872</b>       | 0.12764                   | 0.14773                   |
|     | 3         | 0.37929        | <b>0.36491</b>       | 0.36495              | 0.38005                   | 0.40302                   |
|     | 5         | 0.64071        | <b>0.60393</b>       | 0.62300              | 0.64434                   | 0.67334                   |
|     | 10        | 1.26013        | <b>1.19950</b>       | 1.27623              | 1.31672                   | 1.36475                   |
|     | 15        | 1.89342        | <b>1.85073</b>       | 1.98009              | 2.03810                   | 2.10360                   |
|     | 20        | <b>2.59726</b> | 2.60903              | 2.79056              | 2.86595                   | 2.94881                   |
|     | 30        | <b>3.89749</b> | 4.20332              | 4.50309              | 4.61789                   | 4.74014                   |
| 10  | 0.5       | 0.04891        | 0.06386              | <b>0.04674</b>       | 0.05260                   | 0.06831                   |
|     | 1         | 0.10092        | 0.11177              | <b>0.09647</b>       | 0.10147                   | 0.11247                   |
|     | 3         | 0.30235        | 0.29375              | <b>0.29253</b>       | 0.30183                   | 0.31615                   |
|     | 5         | 0.51193        | <b>0.48846</b>       | 0.49931              | 0.51259                   | 0.53079                   |
|     | 10        | 1.00216        | <b>0.96172</b>       | 1.00907              | 1.03448                   | 1.06475                   |
|     | 15        | 1.49272        | <b>1.47703</b>       | 1.56797              | 1.60791                   | 1.65268                   |
|     | 20        | <b>1.96206</b> | 1.99238              | 2.11721              | 2.16843                   | 2.22448                   |
|     | 30        | <b>3.06987</b> | 3.26865              | 3.46234              | 3.53651                   | 3.61550                   |

**ตารางที่ 1** (ต่อ) ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซอง สำหรับ  $n=20, 30$  และ  $50$  เมื่อ  $\theta = 0.25$

| $n$ | $\lambda$ | วิธี           |                      |                      |                           |                           |
|-----|-----------|----------------|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|
|     |           | $MLE$          | $\hat{\lambda}_{PR}$ | $\hat{\lambda}_{EN}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$ |
| 20  | 0.5       | 0.02452        | 0.02852              | <b>0.02396</b>       | 0.02502                   | 0.02761                   |
|     | 1         | 0.05036        | 0.05279              | <b>0.04930</b>       | 0.05064                   | 0.05329                   |
|     | 3         | 0.14887        | <b>0.14647</b>       | 0.14670              | 0.14925                   | 0.15304                   |
|     | 5         | 0.25198        | <b>0.24606</b>       | 0.24907              | 0.25253                   | 0.25723                   |
|     | 10        | 0.50105        | <b>0.48970</b>       | 0.50025              | 0.50622                   | 0.51342                   |
|     | 15        | 0.74864        | <b>0.74034</b>       | 0.76076              | 0.77002                   | 0.78051                   |
|     | 20        | <b>1.02810</b> | 1.03334              | 1.06468              | 1.07758                   | 1.09170                   |
|     | 30        | <b>1.49074</b> | 1.52316              | 1.56784              | 1.58518                   | 1.60375                   |
| 30  | 0.5       | 0.01698        | 0.01892              | <b>0.01671</b>       | 0.01709                   | 0.01809                   |
|     | 1         | 0.03330        | 0.03442              | <b>0.03283</b>       | 0.03341                   | 0.03456                   |
|     | 3         | 0.09866        | 0.09779              | <b>0.09750</b>       | 0.09851                   | 0.10006                   |
|     | 5         | 0.16778        | <b>0.16500</b>       | 0.16714              | 0.16895                   | 0.17131                   |
|     | 10        | 0.33872        | <b>0.33423</b>       | 0.33995              | 0.34295                   | 0.34650                   |
|     | 15        | 0.49697        | <b>0.49457</b>       | 0.50457              | 0.50900                   | 0.51398                   |
|     | 20        | <b>0.64930</b> | 0.65035              | 0.66358              | 0.66908                   | 0.67513                   |
|     | 30        | <b>0.98519</b> | 1.01112              | 1.03394              | 1.04265                   | 1.05190                   |
| 50  | 0.5       | 0.01026        | 0.01099              | <b>0.01016</b>       | 0.01029                   | 0.01062                   |
|     | 1         | 0.02014        | 0.02048              | <b>0.01998</b>       | 0.02021                   | 0.02065                   |
|     | 3         | 0.06055        | 0.06024              | <b>0.06010</b>       | 0.06045                   | 0.06100                   |
|     | 5         | 0.10205        | <b>0.10103</b>       | 0.10178              | 0.10243                   | 0.10327                   |
|     | 10        | 0.20359        | <b>0.20205</b>       | 0.20426              | 0.20540                   | 0.20673                   |
|     | 15        | 0.29716        | <b>0.29567</b>       | 0.29887              | 0.30033                   | 0.30199                   |
|     | 20        | <b>0.40789</b> | 0.40892              | 0.41407              | 0.41618                   | 0.41849                   |
|     | 30        | <b>0.58111</b> | 0.59113              | 0.59953              | 0.60273                   | 0.60613                   |

**ตารางที่ 2** ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซองสำหรับ 5, 8 และ 10 เมื่อ 0.5

| $n$ | $\lambda$ | วิธี           |                      |                      |                           |                           |
|-----|-----------|----------------|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|
|     |           | $MLE$          | $\hat{\lambda}_{PR}$ | $\hat{\lambda}_{EN}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$ |
| 5   | 0.5       | 0.10105        | 0.13358              | <b>0.08561</b>       | 0.11218                   | 0.15714                   |
|     | 1         | 0.19942        | 0.19831              | <b>0.17275</b>       | 0.20551                   | 0.27412                   |
|     | 3         | 0.58461        | <b>0.48370</b>       | 0.56486              | 0.62715                   | 0.70855                   |
|     | 5         | 0.99901        | <b>0.86157</b>       | 1.03783              | 1.13130                   | 1.24288                   |
|     | 10        | <b>1.95628</b> | 2.01372              | 2.43074              | 2.60415                   | 2.79509                   |
|     | 15        | <b>2.97611</b> | 3.65648              | 4.32664              | 4.58436                   | 4.85945                   |
|     | 20        | <b>3.88907</b> | 5.58702              | 6.50072              | 6.83957                   | 7.19571                   |
|     | 30        | <b>6.01356</b> | 10.86819             | 12.26648             | 12.76681                  | 13.28436                  |
| 8   | 0.5       | 0.06262        | 0.07684              | <b>0.05632</b>       | 0.06754                   | 0.09288                   |
|     | 1         | 0.12760        | 0.12769              | <b>0.11606</b>       | 0.12754                   | 0.14934                   |
|     | 3         | 0.37538        | <b>0.33266</b>       | 0.36406              | 0.38889                   | 0.42122                   |
|     | 5         | 0.62265        | <b>0.56440</b>       | 0.63517              | 0.67301                   | 0.71816                   |
|     | 10        | <b>1.24577</b> | 1.27543              | 1.45263              | 1.52589                   | 1.60633                   |
|     | 15        | <b>1.85408</b> | 2.13676              | 2.41581              | 2.52300                   | 2.63733                   |
|     | 20        | <b>2.45478</b> | 3.20155              | 3.59017              | 3.73387                   | 3.88469                   |
|     | 30        | <b>3.68207</b> | 5.73981              | 6.32636              | 6.53602                   | 6.75278                   |
| 10  | 0.5       | 0.05076        | 0.06029              | <b>0.04657</b>       | 0.05315                   | 0.06896                   |
|     | 1         | 0.09810        | 0.09757              | <b>0.09149</b>       | 0.09919                   | 0.11282                   |
|     | 3         | 0.29985        | <b>0.27204</b>       | 0.29151              | 0.30733                   | 0.32798                   |
|     | 5         | 0.49088        | <b>0.45292</b>       | 0.49825              | 0.52264                   | 0.55176                   |
|     | 10        | <b>1.00378</b> | 1.01850              | 1.13268              | 1.18000                   | 1.23198                   |
|     | 15        | <b>1.49362</b> | 1.68414              | 1.86839              | 1.93905                   | 2.01436                   |
|     | 20        | <b>2.02854</b> | 2.49400              | 2.74534              | 2.83837                   | 2.93602                   |
|     | 30        | <b>3.03157</b> | 4.34492              | 4.72613              | 4.86243                   | 5.00335                   |

**ตารางที่ 2** (ต่อ) ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์  $\lambda$  สำหรับ  $n=20, 30$  และ 50 เมื่อ  $\theta=0.5$

| $n$ | $\lambda$ | วิธี           |                      |                      |                           |                           |
|-----|-----------|----------------|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|
|     |           | $MLE$          | $\hat{\lambda}_{PR}$ | $\hat{\lambda}_{EN}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$ |
| 20  | 0.5       | 0.02462        | 0.02688              | <b>0.02363</b>       | 0.02507                   | 0.02803                   |
|     | 1         | 0.05017        | 0.04975              | <b>0.04853</b>       | 0.05058                   | 0.05391                   |
|     | 3         | 0.15186        | <b>0.14455</b>       | 0.15042              | 0.15479                   | 0.16039                   |
|     | 5         | 0.25061        | <b>0.24076</b>       | 0.25300              | 0.25948                   | 0.26718                   |
|     | 10        | <b>0.50885</b> | 0.51555              | 0.54675              | 0.55956                   | 0.57357                   |
|     | 15        | <b>0.74772</b> | 0.80408              | 0.85392              | 0.87294                   | 0.89317                   |
|     | 20        | <b>1.01230</b> | 1.13602              | 1.20214              | 1.22658                   | 1.25222                   |
|     | 30        | <b>1.51205</b> | 1.86556              | 1.96645              | 2.00249                   | 2.03972                   |
| 30  | 0.5       | 0.01647        | 0.01768              | <b>0.01599</b>       | 0.01653                   | 0.01767                   |
|     | 1         | 0.03233        | 0.03230              | <b>0.03157</b>       | 0.03242                   | 0.03384                   |
|     | 3         | 0.09966        | <b>0.09642</b>       | 0.09914              | 0.10112                   | 0.10366                   |
|     | 5         | 0.16305        | <b>0.15887</b>       | 0.16458              | 0.16756                   | 0.17109                   |
|     | 10        | <b>0.33631</b> | 0.33941              | 0.35348              | 0.35926                   | 0.36557                   |
|     | 15        | <b>0.49321</b> | 0.51433              | 0.53571              | 0.54391                   | 0.55266                   |
|     | 20        | <b>0.66284</b> | 0.72086              | 0.75103              | 0.76216                   | 0.77384                   |
|     | 30        | <b>1.01028</b> | 1.18435              | 1.23152              | 1.24833                   | 1.26567                   |
| 50  | 0.5       | 0.00983        | 0.01025              | <b>0.00966</b>       | 0.00986                   | 0.01027                   |
|     | 1         | 0.01980        | 0.01986              | <b>0.01948</b>       | 0.01975                   | 0.02022                   |
|     | 3         | 0.06015        | <b>0.05897</b>       | 0.06015              | 0.06094                   | 0.06193                   |
|     | 5         | 0.10295        | <b>0.10150</b>       | 0.10384              | 0.10502                   | 0.10639                   |
|     | 10        | <b>0.20343</b> | 0.20354              | 0.20804              | 0.20997                   | 0.21210                   |
|     | 15        | <b>0.29895</b> | 0.30612              | 0.31380              | 0.31675                   | 0.31990                   |
|     | 20        | <b>0.40489</b> | 0.42178              | 0.43205              | 0.43586                   | 0.43988                   |
|     | 30        | <b>0.58919</b> | 0.65149              | 0.66852              | 0.67459                   | 0.68086                   |



**ตารางที่ 3** ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์  $\lambda$  สำหรับ  $n=5, 8$  และ  $10$  เมื่อ  $\theta = 1$

| $n$ | $\lambda$ | วิธี           |                      |                      |                           |                           |
|-----|-----------|----------------|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|
|     |           | $MLE$          | $\hat{\lambda}_{PR}$ | $\hat{\lambda}_{EN}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$ |
| 5   | 0.5       | 0.10288        | 0.09951              | <b>0.07790</b>       | 0.10775                   | 0.15297                   |
|     | 1         | 0.19739        | <b>0.14455</b>       | 0.16466              | 0.20764                   | 0.28202                   |
|     | 3         | 0.60011        | <b>0.47728</b>       | 0.66064              | 0.75229                   | 0.86061                   |
|     | 5         | <b>1.00785</b> | 1.03004              | 1.37815              | 1.52429                   | 1.68616                   |
|     | 10        | <b>1.98960</b> | 3.32236              | 4.08000              | 4.36238                   | 4.65997                   |
|     | 15        | <b>3.00542</b> | 7.09895              | 8.27935              | 8.70259                   | 9.14091                   |
|     | 20        | <b>3.99355</b> | 12.20142             | 13.79774             | 14.35959                  | 14.93644                  |
|     | 30        | <b>6.13694</b> | 27.31331             | 29.77509             | 30.62542                  | 31.49071                  |
| 8   | 0.5       | 0.06158        | 0.06086              | <b>0.05174</b>       | 0.06543                   | 0.09180                   |
|     | 1         | 0.12411        | <b>0.10135</b>       | 0.11031              | 0.12731                   | 0.15386                   |
|     | 3         | 0.37853        | <b>0.32823</b>       | 0.41230              | 0.45341                   | 0.50137                   |
|     | 5         | <b>0.62987</b> | 0.65467              | 0.81406              | 0.88018                   | 0.95296                   |
|     | 10        | <b>1.25261</b> | 1.85943              | 2.19767              | 2.32333                   | 2.45552                   |
|     | 15        | <b>1.93005</b> | 3.75635              | 4.28164              | 4.06964                   | 4.66414                   |
|     | 20        | <b>2.46389</b> | 6.09827              | 6.80485              | 7.05326                   | 7.30815                   |
|     | 30        | <b>3.75651</b> | 13.06839             | 14.15514             | 14.53027                  | 14.91187                  |
| 10  | 0.5       | 0.05045        | 0.05055              | <b>0.04343</b>       | 0.05145                   | 0.06786                   |
|     | 1         | 0.10156        | <b>0.08593</b>       | 0.09251              | 0.10377                   | 0.12040                   |
|     | 3         | 0.30260        | <b>0.26854</b>       | 0.32385              | 0.35094                   | 0.38250                   |
|     | 5         | <b>0.49949</b> | 0.51863              | 0.62570              | 0.67000                   | 0.71869                   |
|     | 10        | <b>1.00141</b> | 1.45628              | 1.69095              | 1.77775                   | 1.86888                   |
|     | 15        | <b>1.51307</b> | 2.77218              | 3.12698              | 3.25381                   | 3.38495                   |
|     | 20        | <b>1.96824</b> | 4.43120              | 4.90631              | 5.07324                   | 5.24446                   |
|     | 30        | <b>3.05351</b> | 9.11970              | 9.83856              | 10.08672                  | 10.33917                  |

**ตารางที่ 3 (ต่อ)** ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์  $\lambda$  สำหรับ  $n=20, 30$  และ 50 เมื่อ  $\theta = 1$

| $n$ | $\lambda$ | วิธี           |                      |                      |                           |                           |
|-----|-----------|----------------|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|
|     |           | $MLE$          | $\hat{\lambda}_{PR}$ | $\hat{\lambda}_{EN}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$ | $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$ |
| 20  | 0.5       | 0.02533        | 0.02520              | <b>0.02356</b>       | 0.02545                   | 0.02881                   |
|     | 1         | 0.04923        | <b>0.04516</b>       | 0.04707              | 0.05006                   | 0.05429                   |
|     | 3         | 0.15246        | <b>0.14271</b>       | 0.15729              | 0.16446                   | 0.17282                   |
|     | 5         | <b>0.24590</b> | 0.24905              | 0.27716              | 0.28885                   | 0.30170                   |
|     | 10        | <b>0.50021</b> | 0.62562              | 0.68994              | 0.71369                   | 0.73860                   |
|     | 15        | <b>0.75903</b> | 1.09820              | 1.19472              | 1.22920                   | 1.26483                   |
|     | 20        | <b>0.99785</b> | 1.70325              | 1.83596              | 1.88251                   | 1.93021                   |
|     | 30        | <b>1.48558</b> | 3.19566              | 3.39495              | 3.46368                   | 3.53357                   |
| 30  | 0.5       | 0.01656        | 0.01651              | <b>0.01580</b>       | 0.01664                   | 0.01807                   |
|     | 1         | 0.03226        | <b>0.03040</b>       | 0.03142              | 0.03283                   | 0.03478                   |
|     | 3         | 0.09582        | <b>0.09199</b>       | 0.09890              | 0.10226                   | 0.10616                   |
|     | 5         | <b>0.16436</b> | 0.16655              | 0.17975              | 0.18521                   | 0.19119                   |
|     | 10        | <b>0.33152</b> | 0.38311              | 0.41153              | 0.42205                   | 0.43310                   |
|     | 15        | <b>0.50092</b> | 0.66453              | 0.70965              | 0.72574                   | 0.74236                   |
|     | 20        | <b>0.67596</b> | 0.99937              | 1.06028              | 1.08164                   | 1.10352                   |
|     | 30        | <b>1.01863</b> | 1.80742              | 1.89915              | 1.93078                   | 1.96294                   |
| 50  | 0.5       | 0.00998        | 0.01000              | <b>0.00968</b>       | 0.00996                   | 0.01045                   |
|     | 1         | 0.01966        | <b>0.01893</b>       | 0.01939              | 0.01993                   | 0.02068                   |
|     | 3         | 0.05941        | <b>0.05807</b>       | 0.06077              | 0.06206                   | 0.06354                   |
|     | 5         | <b>0.10183</b> | 0.10293              | 0.10798              | 0.11005                   | 0.11231                   |
|     | 10        | <b>0.19714</b> | 0.21968              | 0.23078              | 0.23486                   | 0.23914                   |
|     | 15        | <b>0.30026</b> | 0.35944              | 0.37596              | 0.38185                   | 0.38794                   |
|     | 20        | <b>0.40758</b> | 0.53081              | 0.55362              | 0.56161                   | 0.56979                   |
|     | 30        | <b>0.60380</b> | 0.88605              | 0.91944              | 0.93095                   | 0.94266                   |

จากตารางที่ 3 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของตัวประมาณค่าแบบจุดสำหรับพารามิเตอร์เมื่อ  $\theta = 1$  ของวิธี MLE,  $\hat{\lambda}_{PR}$ ,  $\hat{\lambda}_{EN}$ ,  $\hat{\lambda}_{GE(c=2)}$  และ  $\hat{\lambda}_{GE(c=3)}$  เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง  $n = 5, 8, 10, 20, 30$  และ  $50$  ที่พารามิเตอร์  $\lambda = 0.5$  พบว่า วิธีที่ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด คือวิธี  $\hat{\lambda}_{EN}$  และเมื่อพารามิเตอร์  $\lambda = 1$  และ  $3$  พบว่า วิธี  $\hat{\lambda}_{PR}$  ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด ในขณะที่พารามิเตอร์  $\lambda = 5, 10, 15, 20$  และ  $30$  พบว่า วิธี MLE ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด

## 5.2 วิจัยรณผล

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดสำหรับการแจกแจงปัวซง พบว่า ส่วนใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำที่สุด ในขณะที่วิธีเบส์ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียทั้ง 3 ฟังก์ชันให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น แต่เมื่อ  $\theta = 0.25$  และกำหนดพารามิเตอร์  $\lambda$  ตั้งแต่ 3 ถึง 15 พบว่าวิธีเบส์ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปี (EN) ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำที่สุดและมีประสิทธิภาพดีที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ ภูวษา แซ่ฮุ้ย และคณะ [3] ที่ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดด้วยวิธีเบส์ (Bayesian method) และวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square Method) ผลจากการศึกษาพบว่า วิธีเบส์มีประสิทธิภาพดีที่สุดสำหรับทุก ๆ สถานการณ์ที่กำหนด และสอดคล้องกับงานวิจัยของ ธิดา พันแดงพันธ์ และ หยาตพิรุณ สุภกราสกุล [2] ที่ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซง พบว่า เมื่อกำหนดขนาดพารามิเตอร์เท่ากับ 0.5, 1, 2, 5, 10, 20 ซึ่งพบว่าวิธีเบส์มีประสิทธิภาพดีที่สุด

## 6. สรุปผล

ในการศึกษานี้คณะผู้วิจัยได้นำเสนอการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงปัวซงโดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีเบส์ (Bayes) โดยการกำหนดการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสีย 3 ฟังก์ชัน ได้แก่ ฟังก์ชันการสูญเสียพรีค็อกชันนารี (PR) ฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปี (EN) และฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปีทั่วไป (GE) โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ผลการศึกษาพบว่าส่วนใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำที่สุด ในขณะที่วิธีเบส์ที่กำหนดฟังก์ชันการสูญเสียเอนโทรปี (EN) ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำที่สุด เมื่อพารามิเตอร์มีค่าเท่ากับ 0.5 ถึง 1 และเมื่อกำหนดฟังก์ชันการสูญเสียพรีค็อกชันนารี (PR) พบว่าพารามิเตอร์มีค่าเท่ากับ 3 และ 5 ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำที่สุด

## 7. เอกสารอ้างอิง

- [1] ฉัตรวดี กิจแก้ว และ อัชฌา อระวีพร. (2562). การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ในการแจกแจงแกมมา. วารสารมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ (สาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี). 11( 21), 38-51.

- [2] ธิดา พันแดงพันธ์ และ หยาดพิรุณ ศุภรากรสกุล. (2565, มีนาคม). การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซอง. รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ประจำปี 2565 (หน้า 8-23).
- [3] ภูวษา แซ่อู่ย, ธิดาพร ศุภภากร และ ประสิทธิ์ พยัคฆพงษ์. (2559). การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดด้วยวิธีเบย์เซียน วิธีกำลังสองน้อยที่สุด และวิธีบูตสเตรปแบบใช้พารามิเตอร์สำหรับตัวแบบถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย. วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 24(3), 363-369.
- [4] รุ่งตะวัน วัฒนธ และ ชินนะพงษ์ บำรุงทรัพย์. (2553). การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง. วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 18(3), 49-59.
- [5] Hasan, M. R., & Baisid, A. R. (2016). Bayesian Estimation under Different Loss Functions Using Gamma Prior for the Case of Exponential Distribution. *Journal of Scientific Research*, 9(1), 67-78. <https://doi.org/10.3329/jsr.v1i1.29308>
- [6] Chen, Z., & Liu, W. (2019, August). Bayesian Statistical Analysis of Lifetime Performance Index of Exponential Product Under Precautionary Loss Function. In *Proceedings of IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (pp. 42021). <https://doi.org/10.1088/1757-899x/563/4/042021>
- [7] Singh, S. K., Singh, U., & Kumar, D. (2011). Estimation of Parameters and Reliability Function of Exponential Distribution: Bayesian approach Under General Entropy Loss Function. *Pakistan Journal of Statistics Operation Research*. 7(2), 199-216. <https://doi.org/10.18187/pjsor.v7i2.239>
- [8] Supharakonsakun, Y. (2021). Bayesian Approaches for Poisson Distribution Parameter Estimation. *Emerging Science Journal*. 5(5), 755-774. <https://doi.org/10.28991/esj-2021-01310>
- [9] Naji, L. F., & Rasheed, H. A. (2019). Estimate the Two Parameters of Gamma Distribution Under Entropy Loss Function. *Iraqi Journal of Science*. 60(1), 127-134. <https://doi.org/10.24996/ijs.2019.60.1.14>