

การหาลักษณะเฉพาะของออโตมอร์ฟิซึมกรุป และสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมโมนอยด์บนกราฟทรีที่มีไดเมเตอร์น้อยกว่า 4

ธนพล ยาพรหม¹ อรวี ครุฑหุ่น² และ นิรุตต์ พิพรรธจินดา^{3*}

^{1,2,3} โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

E-mail: ¹infbruary00123@gmail.com, ²oraweekruthoon@gmail.com, ^{3*}nirut.p@gmail.com

บทคัดย่อ

สำหรับกราฟ G ออโตมอร์ฟิซึมและสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟ G จะหมายถึงฟังก์ชันของจุดบนกราฟ G กับการมีสมบัติคงสภาพการมีเส้นเชื่อมแบบเข้ม ซึ่งทำให้เซตของฟังก์ชันดังกล่าวกับการดำเนินการคอมโพสิทมีสมบัติเช่นเดียวกันกับกรุป และโมนอยด์ ตามลำดับ ในงานวิจัยนี้ จะเป็นการหาลักษณะเฉพาะของฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึมและสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีที่มีไดเมเตอร์น้อยกว่า 4

คำสำคัญ: ออโตมอร์ฟิซึม สตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึม ทรีที่มีไดเมเตอร์น้อยกว่า 4

* Corresponding author, e-mail: nirutt.p@gmail.com

A Characterization of Automorphism Group and Strong Endomorphism Monoid on Trees with Diameter Less than 4

Thanaphon Yaprone¹, Orawee Kruthoon², Nirutt Pipattanajinda^{3*}

^{1,2,3}Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Kamphaeng Phet Rajabhat University

E-mail: ¹infebruary00123@gmail.com, ²orawee.kruthoon@gmail.com, ^{3*}nirutt.p@gmail.com

Abstract

For a graph G , automorphisms and strong endomorphisms on graph G refer to functions of vertex set on graph G with preserving strong connectivity, the property allows the set of these functions, along with the composition operation, to exhibit group and monoid, respectively. This research aims to identify the characteristics of automorphism and strong endomorphism functions on tree graphs with diameters less than 4.

Keywords: Automorphism, strong endomorphism, trees with diameter less than 4

* Corresponding author, e-mail: nirutt.p@gmail.com

1. บทนำ

สำหรับการศึกษาด้านพีชคณิตบนกราฟ จะเป็นการศึกษาที่เกี่ยวกับโครงสร้างทางพีชคณิตของกราฟด้วยสมาชิกที่เป็นฟังก์ชันบนเซตของจุดของกราฟกับการดำเนินการคอมโพสิท โดยฟังก์ชันที่ใช้ในการศึกษาจะประกอบด้วยฟังก์ชันหลายแบบ เช่น ฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึม เอ็นโดมอร์ฟิซึม และสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึม ด้วยหลักความรู้พื้นฐานว่าสำหรับกราฟใด ๆ เซตของออโตมอร์มอร์ฟิซึมบนกราฟจะมีสมบัติเป็นกรุป และเซตของ (สตรอง) เอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟจะมีสมบัติเป็นโมนอยด์ ตามลำดับ ทฤษฎีบทที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกรุปใด ๆ ในสาขาพีชคณิตนามธรรมกับทฤษฎีกราฟ ได้แก่ ผลงานของ Frucht ที่ได้แสดงไว้ในปี ค.ศ. 1938 และ ค.ศ. 1949 [1 – 2] ซึ่งได้แสดงทุกกรุปจำกัดจะไอโซมอร์ฟิกกับกรุปออโตมอร์ฟิซึมของบางกราฟจำกัด และผลงานของ Hedrllin และ Pultr ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมนอยด์กับทฤษฎีกราฟซึ่งได้แสดงไว้ในปี ค.ศ. 1964 - 1965 [3 – 5] เป็นการแสดงว่าแต่ละโมนอยด์จะมีกราฟที่มีเซตของเอ็นโดมอร์ฟิซึมไอโซมอร์ฟิกกับโมนอยด์นั้นเสมอ ซึ่งหากโมนอยด์นั้น ๆ เป็นโมนอยด์จำกัดกราฟดังกล่าวจะเป็นกราฟจำกัดด้วยเช่นกัน สำหรับฟังก์ชันสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟได้ถูกนิยามขึ้นโดย Culik ในปี ค.ศ. 1958 [6] ซึ่งมีสมบัติเป็นโมนอยด์กับการดำเนินการคอมโพสิท นอกจากนี้ ในปี ค.ศ. 1983 Knauer และ Nieporte [7] และ ในปี ค.ศ. 1993 Li [8] ได้แสดงว่าสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟจำกัดจะเป็นโมนอยด์ปรกติ และในปี ค.ศ. 2019 Pipattanajinda และคณะ [9] ยังได้มีการศึกษาการเป็นเซตอันดับบางส่วนแบบธรรมชาติของฟังก์ชันสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟใด ๆ

สำหรับกราฟทรีเป็นกราฟที่สามารถนำมาปรับใช้เป็น แผนผังในองค์กร แผนผังแสดงความสัมพันธ์ในเครือข่าย ซึ่งได้มีการถูกนำมาใช้เป็นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1847 เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า จากงานของ Kirchhoff จนเกิดเป็นทฤษฎีบทการเป็นเมทริกซ์-ทรี การนำมาประยุกต์ใช้กับการหาทรีแผ่ทั่วที่น้อยที่สุดบนกราฟทรีเพื่อค้นหาเส้นทางรวมที่สั้นที่สุดบนกราฟเชื่อมโยงและเป็นกราฟที่มีน้ำหนัก และในปี ค.ศ. 1857 Cayley ได้นำมาใช้ทางด้านเคมี เกี่ยวกับการนับจำนวนของคาร์บอนและไฮโดรเจนที่สามารถเกิดได้เป็นพันธะต่าง ๆ ซึ่งผู้อ่านสามารถศึกษาองค์ความรู้เกี่ยวกับกราฟทรีและการประยุกต์ได้จากเอกสารอ้างอิง [10] นอกจากนี้ยังมีการประยุกต์กราฟทรีกับสาขาพีชคณิตเชิงเส้นด้วยการแสดงวิธีการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของ กราฟทรีและกราฟคอมพลิเมนต์ของทรีจากเอกสารอ้างอิง [11 – 15] สำหรับการศึกษาฟังก์ชัน (สตรอง) เอ็นโดมอร์ฟิซึมและออโตมอร์ฟิซึมของกราฟทรีในรูปแบบต่าง ๆ ได้แก่ ปี ค.ศ. 1990 Knauer [16] ได้ศึกษาเอ็นโดมอร์ฟิซึมโทปของกราฟทรี ซึ่งเป็นการพิจารณาความสัมพันธ์ของจำนวนฟังก์ชันประเภทต่าง ๆ บนกราฟทรี สำหรับความรู้ด้านทฤษฎีกราฟและผลการศึกษาที่เกี่ยวกับการศึกษาฟังก์ชัน (สตรอง) เอ็นโดมอร์ฟิซึมและออโตมอร์ฟิซึมบนกราฟอื่น ๆ ที่ไม่ได้กล่าวไว้ในบทความฉบับนี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาได้เพิ่มเติมจากเอกสารอ้างอิง [17 – 21] เป็นต้น

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง คณะผู้จัดทำจึงมีความสนใจที่จะศึกษาลักษณะเฉพาะของฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึมและสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟทรี โดยจะพิจารณากราฟทรีที่มีดีกรีเมเตอร์น้อยกว่า 4 เพื่อแสดงว่าออโตมอร์ฟิซึมกรุป และสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมโมนอยด์บนกราฟทรีมีโครงสร้างทางพีชคณิตแบบเดียวกับกรุปและโมนอยด์

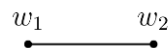
ชนิดใด และใช้เป็นแนวทางในการศึกษาลักษณะเฉพาะของฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึมและสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีที่มีไดเมเตอร์ที่มากยิ่งขึ้นต่อไป

2. ความรู้พื้นฐาน

สำหรับการหาลักษณะเฉพาะของออโตมอร์ฟิซึม และสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีที่มีไดเมเตอร์น้อยกว่า 4 จำเป็นต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ กราฟทรี ฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึม และสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟ รวมไปถึงความรู้ด้านพีชคณิตนามธรรมในเรื่องของกลุ่มและโมนอยด์ สำหรับกราฟที่จะใช้ในการศึกษาในบทความนี้ จะเป็นกราฟที่มีจำนวนจุดเป็นจำนวนจำกัด (กราฟจำกัด) โดยจะเรียก G ว่าเป็นกราฟเมื่อ $G = (V, E)$ โดยที่ V จะเรียกว่าเซตของจุดซึ่งเป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียก $v \in V$ ว่าจุดของกราฟ G และ E จะเรียกว่าเซตของเส้นซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยสับเซตที่มีสองสมาชิกใน V กล่าวคือ $e \in E$ เมื่อ $e = (u, v)$ สำหรับบางสมาชิก $u, v \in V$ เรียกสมาชิก $e \in E$ ว่าเส้นของกราฟ G เพื่อความสะดวกจะเขียน $\{u, v\} = uv$ และเรียกว่าจุด u และ v ประชิดกัน กำหนดเซต $N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ ดีกรีของจุด v คือจำนวนของจุด $u \in V$ ทั้งหมดที่ประชิดกับจุด v เขียนแทนด้วย $\deg(v)$ นั่นคือ $\deg(v) = |N(v)|$ ถ้า $\deg(v) = 1$ แล้วจะเรียก v ว่าเป็นจุดปลายของกราฟ G ถ้า $u, v \in V$ แล้วจะเรียกว่าจุด u และ v เชื่อมโยงกัน ถ้ามีจุด $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด ที่ทำให้ลำดับ $u, u_1, u_2, \dots, u_k, v$ เป็นลำดับของจุดที่ประชิดกัน (เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ) จำนวนเส้นของลำดับที่สั้นที่สุดที่ทำให้ u และ v เชื่อมโยงกันจะเรียกว่าระยะทางของจุด u และ v เขียนแทนด้วย $d(u, v)$ ไดเมเตอร์ของกราฟ G จะใช้สัญลักษณ์ $\text{diam}(G)$ หมายถึงค่าที่มากที่สุดของระยะทางของสองจุดใด ๆ ในกราฟ G นั่นคือ $\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V \text{ กราฟ } G \text{ จะเรียกว่ากราฟเชื่อมโยง ถ้าทุกสองจุดใด ๆ ในกราฟ } G \text{ ประชิดกัน ถ้า } v \in V \text{ และ } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ แล้วจะเรียกว่า } G \text{ บรรจุไซเคิล } v, u_1, u_2, \dots, u_k, v \text{ ถ้า } v, u_1, u_2, \dots, u_k, v \text{ เป็นลำดับของจุดที่ประชิดกันทั้งหมดที่ซึ่ง } u_i \neq u_j \text{ ทุก ๆ } i \neq j \text{ กราฟ } G \text{ จะเรียกว่าทรี ถ้า } G \text{ เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่บรรจุไซเคิล}$

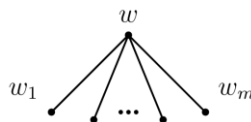
สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n จะกำหนดสัญลักษณ์ของกราฟทรีที่มีไดเมเตอร์น้อยกว่า 4 ดังนี้

1. T_1 หมายถึง กราฟทรีที่มีไดเมเตอร์ 1 ซึ่งมีลักษณะทั่วไป ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แผนภาพของกราฟ T_1

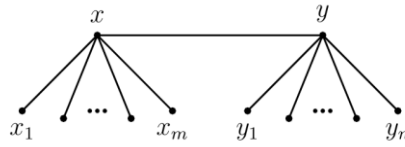
2. $T_{2:m}$ หมายถึง กราฟทรีที่มีไดเมเตอร์ 2 ซึ่งมีลักษณะทั่วไป ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แผนภาพของกราฟ $T_{2:m}$

ในรูปที่ 2.2 จะเรียกว่า $T_{2:m}$ เป็นกราฟทรีที่มีจุด w เป็นจุดศูนย์กลาง

3. $T_{3:m,n}$ หมายถึง กราฟทรีที่มีไดเมเตอร์ 3 ซึ่งมีลักษณะทั่วไป ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แผนภาพของกราฟ $T_{3:m,n}$

ในรูปที่ 2.3 จะเรียกว่า $T_{3:m,n}$ เป็นกราฟทรีที่มีจุด x และ y เป็นจุดศูนย์กลาง

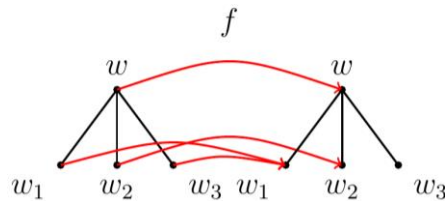
สำหรับกราฟ G จะเรียกฟังก์ชัน $f: V \rightarrow V$ ว่าเป็น **สตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึม** ถ้าสำหรับทุก ๆ $u, v \in V$

$$uv \in E \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E \quad (2.1)$$

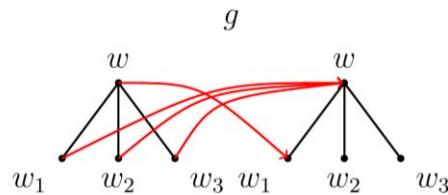
และจะเรียกฟังก์ชันสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึม $f: V \rightarrow V$ ว่าเป็น**ออโตมอร์ฟิซึม** ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1 — 1 และทั่วถึง ใช้สัญลักษณ์ $SEnd(G)$ และ $Aut(G)$ แทนเซตของฟังก์ชันสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมและออโตมอร์ฟิซึมบนกราฟ G ตามลำดับ

หมายเหตุ 2.1 เรียกฟังก์ชัน f ที่สอดคล้องกับ (2.1) ว่าการมีสมบัติการคงสภาพของการมีเส้นเชื่อมแบบเข้ม

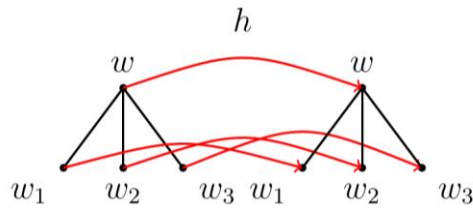
ตัวอย่างของการส่งของฟังก์ชัน f, g และ h บนกราฟ $T_{2:3}$ ที่ทำให้ $f, g, h \in SEnd(T_{2:3})$ และ $h \in Aut(T_{2:3})$ แสดงไว้ดังรูปที่ 4 – 6



รูปที่ 4 แผนภาพการส่งของฟังก์ชัน f



รูปที่ 5 แผนภาพการส่งของฟังก์ชัน g

รูปที่ 6 แผนภาพการส่งของฟังก์ชัน h

ลำดับถัดไป จะกล่าวถึงเนื้อหาทางพีชคณิตนามธรรม ได้แก่ กรุป กรุปการเรียงสับเปลี่ยน โมนอยด์ โมนอยด์ การแปลง ผลคูณตรง รวมถึงฟังก์ชันไอโซมอร์ฟิซึมบนกรุปและโมนอยด์ ซึ่งมีดังนี้

สำหรับกรุปจะหมายถึงเซต $G \neq \emptyset$ กับการดำเนินการทวิภาค $*$ เขียนแทนด้วยคู่อันดับ $(G, *)$ ที่มีสมบัติ 3 ข้อ ได้แก่ (1) สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (2) สมบัติการมีเอกลักษณ์ และ (3) สมบัติการมีตัวผกผัน ในกรณีที่ $(G, *)$ มีสมบัติเฉพาะข้อที่ 1 จะเรียก $(G, *)$ ว่ากึ่งกรุป และในกรณีที่ $(G, *)$ มีสมบัติข้อที่ 1 และข้อที่ 2 จะเรียก $(G, *)$ ว่าโมนอยด์ ให้ $(G_1, \circ)$ และ $(G_2, \cdot)$ เป็นกรุป (หรือโมนอยด์) กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G_1 \times G_2$ ดังนี้ $(a, b) * (c, d) = (a \circ c, b \cdot d)$ จะได้ว่า $(G_1 \times G_2, *)$ เป็นกรุป (หรือโมนอยด์ตามลำดับ)

ให้ $X \neq \emptyset$ และเป็นเซตจำกัด กำหนดให้ $S_X = (\alpha \mid \alpha : X \rightarrow X \text{ เป็นฟังก์ชัน } 1-1 \text{ แบบทั่วถึง})$ แล้ว S_X เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการคอมโพสิท เรียกว่ากรุปการเรียงสับเปลี่ยนและสมาชิก α ใน S_X จะเรียกว่า วิธีสับเปลี่ยนของ X นอกจากนี้ กำหนดให้ $T_X = (\beta \mid \beta : X \rightarrow X \text{ เป็นฟังก์ชัน})$ แล้ว T_X เป็นโมนอยด์ภายใต้การดำเนินการคอมโพสิท เรียกว่า โมนอยด์การแปลง สำหรับกรณี $X = \{1, 2, \dots, n\}$ เขียนแทน S_X และ T_X ด้วย S_n และ T_n ตามลำดับ โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ $|S_n| = n!$ และ $|T_n| = n^n$

ให้ $(G_1, *)$ และ $(G_2, \circ)$ เป็นกรุป (หรือเป็นโมนอยด์ทั้งคู่) และ $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และทั่วถึง แล้วจะเรียก φ ว่าเป็นไอโซมอร์ฟิซึม ถ้า φ มีสมบัติการคงภาพของการดำเนินการ นั่นคือ สำหรับแต่ละ $a, b \in G_1$ จะได้ว่า $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ ถ้ามี $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ ที่เป็นไอโซมอร์ฟิซึม จะเรียกว่า G_1 ไอโซมอร์ฟิกกับ G_2 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $G_1 \cong G_2$

บทตั้งต่อไปนี้ เป็นบทตั้งที่จำเป็นต้องนำไปใช้ในการหาลักษณะเฉพาะของฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึมและสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีที่มีดีกรีน้อยกว่า 4 ซึ่งมีดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2.1 [16] ให้ G เป็นกราฟ แล้ว $S\text{End}(G) = \text{Aut}(G)$ ก็ต่อเมื่อ $N(u) \neq N(v)$ สำหรับทุก ๆ $u \neq v \in V$

บทตั้ง 2.2 [7] ให้ G เป็นกราฟ และ $u, v \in V$ แล้วจะมีสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึม $f \in S\text{End}(G)$ สำหรับ $f(u) = f(v)$ ก็ต่อเมื่อ $N(u) = N(v)$

3. ออโตมอร์ฟิซึมบนกราฟทรี

สำหรับหัวข้อนี้ จะแสดงการหาลักษณะเฉพาะของออโตมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์น้อยกว่า 4 ซึ่งมีวัตถุประสงค์ในการแสดงว่าออโตมอร์ฟิซึมของกราฟทรีมีโครงสร้างทางพีชคณิตแบบเดียวกันกับกรุปการเรียงสับเปลี่ยน โดยอันดับแรกจะแสดงสมบัติบางประการของออโตมอร์ฟิซึมกับการส่งจุดปลายบนกราฟทั่วไป ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับกราฟ G ใด ๆ กำหนดให้ $f \in \text{Aut}(G)$ โดยที่ $f(u) = v$ แล้ว u จะเป็นจุดปลายก็ต่อเมื่อ v เป็นจุดปลายด้วย

พิสูจน์ ให้ $u, v \in V(G)$ โดยที่ u เป็นจุดปลาย จะได้ว่ามีเพียง $u_1 \in V$ เพียงจุดเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $uu_1 \in E$ สมมติให้ $\deg(v) > 1$ ดังนั้นจะมี $v_1 \neq v_2 \in V$ อย่างน้อย 2 จุด ที่ซึ่ง $vv_1, vv_2 \in E$

เนื่องจาก $f(u) = v$ และ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และทั่วถึง ดังนั้น $f(u_1) = v_1$ หรือ $f(u_1) = v_2$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้า $f(u_1) = v_1$ จะได้ว่ามี $u_1 \neq w \in V$ ที่ซึ่ง $f(w) = v_2$

นั่นคือ จะมี $uw \notin E$ ที่ทำให้ $f(u)f(w) = vv_2 \in E$ เกิดข้อขัดแย้งกับการมีสมบัติการคงสภาพของการมีเส้นเชื่อมแบบซึ่ม ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(u_1) = v_2$ จะทำให้เกิดข้อขัดแย้งเช่นเดียวกัน ดังนั้น v จะต้องเป็นจุดปลายสำหรับการพิสูจน์บทกลับ จะสามารถพิสูจน์โดยการขัดแย้งได้ในทำนองเดียวกัน $\square$

สำหรับออโตมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีโดเมเตอร์ 1 จะมีสมบัติเช่นเดียวกับ S_2 ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 สำหรับกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์ 1 ใด ๆ จะได้ว่า $\text{Aut}(T_1) \cong S_2$ เมื่อ S_2 คือกรุปการเรียงสับเปลี่ยนของเซตที่มีสมาชิกจำนวน 2

พิสูจน์ เนื่องจากกราฟ T_1 เป็นกราฟที่ประกอบด้วย $V = \{w_1, w_2\}$ และ $E = \{w_1w_2\}$

ดังนั้น $|\text{Aut}(T_1)| = 2$ โดยที่ $\text{Aut}(T_1) = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix} \right\}$

ให้ $\varphi : \text{Aut}(T_1) \rightarrow S_2$ ฟังก์ชัน $1-1$ และทั่วถึง โดยที่ $\varphi(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ และ $\varphi(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

จะได้ว่า φ มีสมบัติคงสภาพของการดำเนินการ นั่นคือ φ จะเป็นไอโซมอร์ฟิซึม $\square$

จากทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $\text{Aut}(T_1) \cong S_2$ ซึ่งจาก S_2 เป็นกรุปที่มีสมาชิกจำนวน 2 ดังนั้น $|\text{Aut}(T_1)| = |S_2| = 2$ ซึ่งสามารถสรุปได้ตามบทแทรก 3.3 ดังต่อไปนี้

บทแทรก 3.3 สำหรับกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์ 1 ใด ๆ จะได้ว่า $|\text{Aut}(T_1)| = 2$

สำหรับออโตมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีโดเมเตอร์ 2 จะมีสมบัติเช่นเดียวกับกรุปการเรียงสับเปลี่ยน ซึ่งการแสดงบทพิสูจน์จะใช้บทตั้งที่เกี่ยวกับการส่งของฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึมซึ่งแสดงได้ดังนี้

บทตั้ง 3.4 ถ้า $f \in \text{Aut}(T_{2:m})$ แล้ว $f(w) = w$ และ $f(w_i) = w_j$ สำหรับบาง $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$

พิสูจน์ ให้ $f \in \text{Aut}(T_{2:m})$ จาก w_i เป็นจุดปลายของ $T_{2:m}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $f(w_i) = w_j$ สำหรับบาง $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $f(w) = w$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ $m \in \mathbb{Z}^+$ และ $T_{2:m}$ เป็นกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์ 2 แล้วจะได้ว่า $\text{Aut}(T_{2:m}) \cong S_m$ เมื่อ S_m เป็นกรุปการเรียงสับเปลี่ยนของเซตที่มีสมาชิกจำนวน m

พิสูจน์ ให้ $\varphi \in \text{Aut}(T_{2:m}) \times S_m$

โดยที่ $\varphi(f) = \alpha \in S_m$ ที่ซึ่ง $\alpha(i) = j$ ถ้า $f \in \text{Aut}(T_{2:m})$ โดยที่ $f(w_i) = w_j$

จะแสดงว่า φ เป็นฟังก์ชัน 1 — 1 จาก $\text{Aut}(T_{2:m})$ ทัวถึง S_m ดังนี้

(1) จะแสดงว่า φ เป็นฟังก์ชัน ให้ $f, g \in \text{Aut}(T_{2:m})$ โดยที่ $f = g$

นั่นคือ ถ้า $f = \begin{pmatrix} w & w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ w & f(w_1) & f(w_2) & \dots & f(w_m) \end{pmatrix}$ และ $g = \begin{pmatrix} w & w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ w & g(w_1) & g(w_2) & \dots & g(w_m) \end{pmatrix}$

แล้วจะได้ $f(w_i) = g(w_i)$ เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

สมมติ $\varphi(f) = \alpha$ และ $\varphi(g) = \beta$

จะได้ $\alpha(i) = j$ และ $\beta(i) = k$ เมื่อ $f(w_i) = w_j$ และ $g(w_i) = w_k$ ตามลำดับ

จาก $f(w_i) = g(w_i)$ จะได้ $w_j = w_k$ นั่นคือ $j = k$ ดังนั้น $\varphi(f) = \alpha = \beta = \varphi(g)$

เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชัน

(2) จะแสดงว่า φ เป็นฟังก์ชัน 1 — 1 ให้ $f, g \in \text{Aut}(T_{2:m})$ โดยที่ $f \neq g$ (จะแสดงว่า $\varphi(f) \neq \varphi(g)$)

สมมติให้ $\varphi(f) = \alpha$ และ $\varphi(g) = \beta$ เนื่องจาก $f \neq g$ จะได้ว่ามีบาง $w_i \in V$ ที่ซึ่ง $f(w_i) \neq g(w_i)$ นั่น

คือ $\alpha(i) \neq \beta(i)$ ดังนั้น $\alpha \neq \beta$ เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชัน 1 — 1

(3) จะแสดงว่า φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $\alpha \in S_m$ จะแสดงว่ามี $f \in \text{Aut}(T_{2:m})$ ที่ซึ่ง $\varphi(f) = \alpha$

พิจารณา $f: V \rightarrow V$ โดยที่ $f(w) = w$ และ $f(w_i) = w_{\alpha(i)}$ จะได้ว่า $f \in \text{Aut}(T_{2:m})$ โดยที่ $\varphi(f) = \alpha$ เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จากข้อ 1 - 3 จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน 1 — 1 จาก $\text{Aut}(T_{2:m})$ ทัวถึง S_m

อันดับต่อไป จะแสดงว่า φ มีสมบัติคงสภาพการดำเนินการ

กำหนดให้ $f, g \in \text{Aut}(T_{2:m})$ โดยที่ $\varphi(f) = \alpha$ และ $\varphi(g) = \beta$

นั่นคือ สำหรับ $w_i \in V$ ถ้า $f(w_i) = w_j$ และ $g(w_i) = w_k$ แล้ว $\alpha(i) = j$ และ $\beta(i) = k$ ตามลำดับ

ถ้า $f \circ g = h$ แล้ว $\alpha \circ \beta = \gamma$ เมื่อ $h(w_i) = w_j$ แล้ว $\gamma(i) = j$ ด้วย

โดยการนิยามฟังก์ชัน φ จะได้ว่า $\varphi(h) = \gamma$

นั่นคือ $\varphi(f \circ g) = \varphi(h) = \gamma = \alpha \circ \beta = \varphi(f) \circ \varphi(g)$

เพราะฉะนั้น $\text{Aut}(T_{2:m}) \cong S_m$ □

จากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า $\text{Aut}(T_{2:m}) \cong S_m$ ซึ่งจาก S_m เป็นกรุปที่มีสมาชิกจำนวน $m!$ นั่นคือจำนวนฟังก์ชัน $|\text{Aut}(T_{2:m})| = |S_m| = m!$ ซึ่งสามารถสรุปได้ตามบทแทรก 3.6 ดังต่อไปนี้

บทแทรก 3.6 ให้ $m \in \mathbb{Z}^+$ และ $T_{2:m}$ เป็นกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์ 2 แล้วจะได้ว่า $|\text{Aut}(T_{2:m})| = m!$

สำหรับกราฟ $T_{3:m,n}$ จะเป็นกราฟทรีที่มีจุด x และ y เป็นจุดศูนย์กลางและ x_i, y_j เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ เป็นจุดปลายทั้งหมดใน $T_{3:m,n}$ ถ้า $f \in (T_{3:m,n})$ จากทฤษฎีบท 3.1 จะทำให้ $f(x) = x, f(y) = y$ หรือ $f(x) = y, f(y) = x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง ในกรณีที่ $m \neq n$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน 1 — 1 จะทำได้

ว่ามี $f(x) = x$ และ $f(y) = y$ เพียงกรณีเดียว ดังนั้นในการพิจารณาลักษณะเฉพาะของ $Aut(T_{3:m,n})$ จึงจะพิจารณาเป็นสองกรณี ได้แก่ (i) $m \neq n$ และ (ii) $m = n$ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ และ $T_{3:m,n}$ เป็นกราฟทรีที่มีดีกรีเมเตอร์ 3 ถ้า $m \neq n$ แล้ว $Aut(T_{3:m,n}) \cong S_m \times S_n$ เมื่อ S_m และ S_n เป็นกรุปการเรียงสับเปลี่ยนของเซตที่มีสมาชิกจำนวน m และ n ตามลำดับ

พิสูจน์ ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วว่าสำหรับกรณีที่ $m \neq n$ ถ้า $f \in Aut(T_{3:m,n})$ แล้วจะทำให้ได้ว่ามี $f(x) = x$ และ $f(y) = y$ เพียงกรณีเดียว ซึ่งทำให้ $f(x_i) = x_j$ และ $f(y_k) = y_l$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$

ดังนั้นจึงสามารถพิสูจน์โดยทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.5 โดยการกำหนดความสัมพันธ์ $\varphi : Aut(T_{3:m,n}) \rightarrow S_m \times S_n$ โดยที่ $\varphi(f) = (\alpha, \beta)$ เมื่อ $(\alpha, \beta) \in S_m \times S_n$ ที่ซึ่ง $\alpha(i) = j$ และ $\beta(k) = l$ ถ้า $f \in Aut(T_{3:m,n})$ ที่ซึ่ง $f(x_i) = x_j$ และ $f(y_k) = y_l$

จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน 1 — 1 จาก $Aut(T_{3:m,n})$ ทัวถึง $S_m \times S_n$

ต่อไปจะแสดงว่า φ มีสมบัติคงสภาพการดำเนินการ

กำหนดให้ $f, g \in Aut(T_{3:m,n})$ โดยที่ $\varphi(f) = (\alpha_1, \beta_1)$ และ $\varphi(g) = (\alpha_2, \beta_2)$

นั่นคือ ถ้า $f(x_{i_1}) = x_{j_1}, f(y_{k_1}) = y_{l_1}$ และ $g(x_{i_2}) = x_{j_2}, g(y_{k_2}) = y_{l_2}$ แล้ว $(\alpha_1(i_1), \beta_1(k_1)) = (j_1, l_1)$ และ $(\alpha_2(i_2), \beta_2(k_2)) = (j_2, l_2)$ ตามลำดับ

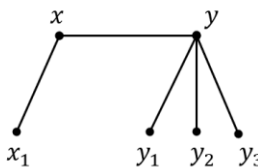
ถ้า $f \circ g = h$ แล้ว $(\alpha_1, \beta_1) \circ (\alpha_2, \beta_2) = (\gamma_1, \gamma_2)$ เมื่อ $h(x_i) = x_j, h(y_k) = y_l$ แล้ว $\gamma_1(i) = j, \gamma_2(k) = l$ ด้วย

โดยการนิยามฟังก์ชัน φ จะได้ว่า $\varphi(h) = (\gamma_1, \gamma_2)$

นั่นคือ $\varphi(f \circ g) = \varphi(h) = (\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha_1, \beta_1) \circ (\alpha_2, \beta_2) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$

เพราะฉะนั้น $Aut(T_{3:m,n}) \cong S_m \times S_n$ เมื่อ $m \neq n$ □

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึมของกราฟ $T_{3:1,3}$ ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 แผนภาพของกราฟ $T_{3:1,3}$

ถ้า $f \in Aut(T_{3:1,3})$ จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $f(x) = x, f(y) = y$ และ $f(x_1) = x_1, f(y_i) \in \{y_1, y_2, y_3\}$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, 3\}$

ดังนั้น $Aut(T_{3:1,2})$ จะมีจำนวน 6 สมาชิก ได้แก่

$$Aut(T_{3:1,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x & y & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x & y & y_1 & y_3 & y_2 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} x_1 & x & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x & y & y_2 & y_1 & y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x & y & y_2 & y_3 & y_1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} x_1 & x & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x & y & y_3 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x & y & y_3 & y_2 & y_1 \end{pmatrix} \right\}$$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า $Aut(T_{3:1,3}) \cong S_1 \times S_3$ เมื่อ $S_1 \times S_3 =$

$$\{((1), (1,2,3)), ((1), (1,3,2)), ((1), (2,1,3)), ((1), (2,3,1)), ((1), (3,1,2)), ((1), (3,2,1))\}$$

ด้วยฟังก์ชัน $\varphi : Aut(T_{3:1,3}) \rightarrow S_1 \times S_3$ ซึ่งนิยามโดย

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 & x & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x & y & y_i & y_j & y_k \end{pmatrix} = ((1), (i, j, k))$$

สำหรับกรณีที่ $m = n$ จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $T_{3:n,n}$ เป็นกราฟทรีที่มีดีกรี 3 แล้วจะได้ว่า $Aut(T_{3:n,n}) \cong S_2 \times S_n \times S_n$ เมื่อ S_n เป็นกรุปการเรียงสับเปลี่ยนของเซตที่มีสมาชิกจำนวน n

พิสูจน์ สำหรับกราฟทรี $T_{3:n,n}$ ถ้า $f \in Aut(T_{3:n,n})$ แล้วจะได้ $f(x) = x$ หรือ $f(x) = y$ เพียงอย่างเดียวหนึ่ง

$$\text{ให้ } S_2 = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

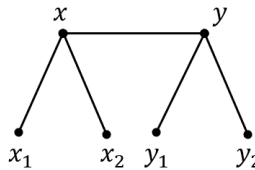
กำหนดความสัมพันธ์ $\varphi : Aut(T_{3:n,n}) \rightarrow S_2 \times S_n \times S_n$ โดยที่

$$\varphi(f) = \begin{cases} (\sigma_1, \alpha, \beta) \text{ โดยที่ } \alpha(i) = j, \beta(k) = l \text{ ถ้า } f(x) = x, f(x_i) = x_j, f(y_k) = y_l \\ (\sigma_2, \alpha, \beta) \text{ โดยที่ } \alpha(i) = j, \beta(k) = l \text{ ถ้า } f(x) = y, f(x_i) = y_j, f(y_k) = x_l \end{cases}$$

ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน 1 — 1 จาก $Aut(T_{3:n,n})$ ไปยัง $S_2 \times S_n \times S_n$ และมีสมบัติคงสภาพการดำเนินการ

เพราะฉะนั้น $Aut(T_{3:n,n}) \cong S_2 \times S_n \times S_n$ □

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึมของกราฟ $T_{3:2,2}$ ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 แผนภาพของกราฟ $T_{3:2,2}$

ถ้า $f \in Aut(T_{3:2,2})$ จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $f(x) = x, f(y) = y$ และ $f(x_i) \in \{x_1, x_2\}, f(y_j) \in \{y_1, y_2\}$ หรือ $f(x) = y, f(y) = x$ และ $f(x_i) \in \{y_1, y_2\}, f(y_j) \in \{x_1, x_2\}$ สำหรับแต่ละ $i, j \in \{1, 2\}$

ดังนั้น $Aut(T_{3:2,2})$ จะมีจำนวน 8 สมาชิก ได้แก่

$$Aut(T_{3:2,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ x_2 & x_1 & x & y & y_2 & y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 & x & y & y_1 & y_2 \\ x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 & x & y & y_2 & y_1 \end{pmatrix} \right\} \\ \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y & x & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y & x & x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y & x & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y & x & x_2 & x \end{pmatrix} \right\}$$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 3.8 จะได้ว่า $Aut(T_{3:2,2}) \cong S_2 \times S_n \times S_n$ เมื่อ $S_2 \times S_n \times S_n =$

$$\left\{ ((1,2), (1,2), (1,2)), ((1,2), (2,1), (1,2)), ((1,2), (1,2), (2,1)), ((1,2), (2,1), (2,1)), \right. \\ \left. ((2,1), (1,2), (1,2)), ((2,1), (2,1), (1,2)), ((2,1), (1,2), (2,1)), ((2,1), (2,1), (2,1)) \right\}$$

ด้วยฟังก์ชัน $\varphi : Aut(T_{3:2,2}) \rightarrow S_2 \times S_n \times S_n$ ซึ่งนิยามโดย

$$\varphi \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ x_i & x_j & x & y & y_k & y_l \end{pmatrix} = ((1,2), (i,j), (k,l))$$

$$\text{และ } \varphi \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x & y & y_1 & y_2 \\ y_i & y_j & y & x & x_k & x_l \end{pmatrix} = ((2,1), (i,j), (k,l))$$

ให้ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ $T_{3:m,n}$ เป็นกราฟทรีที่มีดีกรี 3 และ S_m, S_n เป็นกรุปการเรียงสับเปลี่ยนของเซตที่มีสมาชิกจำนวน m และ n ตามลำดับ จากทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า $Aut(T_{3:m,n}) \cong S_m \times S_n$ เมื่อ $m \neq n$ และจากทฤษฎีบท 3.8 จะได้ว่า $Aut(T_{3:n,n}) \cong S_2 \times S_n \times S_n$ ซึ่งจาก S_m และ S_n เป็นกรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสมาชิกจำนวน $m!$ และ $n!$ ตามลำดับ นั่นคือจำนวนฟังก์ชัน $|Aut(T_{3:m,n})| = |S_m \times S_n| = |S_m| \times |S_n| = m! \times n!$ และ $|Aut(T_{3:n,n})| = |S_2 \times S_n \times S_n| = |S_2| \times |S_n| \times |S_n| = 2 \times n! \times n! = 2(n!)^2$ ซึ่งสามารถสรุปได้ตามบทแทรก 3.9 ดังต่อไปนี้

บทแทรก 3.9 ให้ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า $m \neq n$ แล้ว

$$1. |Aut(T_{3:m,n})| = m! \times n!$$

$$2. |Aut(T_{3:n,n})| = 2(n!)^2$$

4. สตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟทรี

สำหรับหัวข้อนี้จะแสดงการหาลักษณะเฉพาะของสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีที่มีดีกรีน้อยกว่า 4 โดยจะใช้ทฤษฎีบทจากออโตมอร์ฟิซึมหัวข้อที่ผ่านมาเป็นแนวทางในการศึกษา

ทฤษฎีบท 4.1 สำหรับกราฟทรีที่มีดีกรี 1 ใด ๆ จะได้ว่า $SEnd(T_1) \cong S_2$

พิสูจน์ สำหรับกราฟ T_1 ซึ่งมี $w_1, w_2 \in V$ และ $w_1 w_2 \in E$ จะได้ว่า $N(w_1) = w_2$ และ $N(w_2) = w_1$ นั่นคือ $N(w_1) \neq N(w_2)$ ดังนั้นจากบทตั้ง 2.1 และทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $SEnd(T_1) = Aut(T_1)$

เพราะฉะนั้น $SEnd(T_1) \cong S_2$ □

จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $SEnd(T_1) \cong S_2$ ซึ่งจาก S_2 เป็นกรุปที่มีสมาชิกจำนวน 2 นั่นคือจำนวนฟังก์ชัน $|SEnd(T_1)| = |S_2| = 2$ จะได้จำนวนฟังก์ชันของ $SEnd(T_1)$ ดังบทแทรก 4.2 ต่อไปนี้

บทแทรก 4.2 สำหรับกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์ 1 ใด ๆ จะได้ว่า $|SEnd(T_1)| = 2$

สำหรับกราฟ $T_{2:m}$ จะเป็นสตาร์กราฟ ที่มีจุด w เป็นจุดศูนย์กลางและมีจุดปลายเป็นจุด w_m เมื่อ $2 \leq m \in \mathbb{N}$ การพิจารณาโครงสร้างเอ็นโดมอร์ฟิซึมบนกราฟทรีโดเมเตอร์ 2 จะแตกต่างจากออโตมอร์ฟิซึมเนื่องจาก $f \in Aut(T_{2:m})$ จะมีเพียงกรณีเดียวที่ $f(w) = w$ และ $f(w_i) = w_j$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ซึ่งฟังก์ชันใน $SEnd(T_{2:m})$ ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน 1 — 1 และทั่วถึง จึงทำให้เกิดกรณีของการส่งที่แตกต่างกันได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.3 สำหรับกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์ 2 ใด ๆ จะได้ว่า $SEnd(T_{2:m}) \cong \mathcal{T}_m \cup \mathcal{T}$ เมื่อ $\mathcal{T}_m$ เป็นโมนอยด์การแปลงของเซตที่มีสมาชิกจำนวน m และ $\mathcal{T}$ เป็นเซตที่มี $|\mathcal{T}| = m$

พิสูจน์ เนื่องจากแต่ละ $w_i, w_j \in V$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ มี $N(w_i) = w = N(w_j)$

ดังนั้นโดยบทตั้ง 2.2 จะได้ว่ามี $f \in SEnd(T_{2:m})$ ที่ซึ่ง $f(w_i) = f(w_j)$

จะได้ว่ามี $f \in SEnd(T_2)$ ที่เป็นไปได้ 2 กรณี ได้แก่

(1) $f(w_i) = w, f(w) = w_j$ และ (2) $f(w) = w, f(w_i) = w_j$ เมื่อ $i, j = 1, 2, \dots, m$

ให้ $\varphi : SEnd(T_{2:m}) \rightarrow \mathcal{T}_m \cup \mathcal{T}$ โดยที่

$$\varphi(f) = \begin{cases} \alpha & \text{โดยที่ } \alpha \in \mathcal{T}_m \text{ ที่ซึ่ง } \alpha(i) = j \\ & \text{ถ้า } f(w) = w \text{ และ } f(w_i) = w_j \text{ สำหรับ } i, j = \{1, 2, \dots, m\} \\ \beta & \text{โดยที่ } \beta \in \mathcal{T} \text{ ถ้า } f(w) = w_i \text{ สำหรับ } i = \{1, 2, \dots, m\} \end{cases}$$

จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน 1 — 1 จาก $SEnd(T_{2:m})$ ทั่วถึง $\mathcal{T}_m \cup \mathcal{T}$

ต่อไป จะแสดงว่า φ มีสมบัติคงสภาพการดำเนินการ

กรณีที่ 1 $\varphi(f) = \alpha_1$ และ $\varphi(g) = \alpha_2$ โดยที่ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{T}_m, \alpha_1(i) = j, \alpha_2(k) = l$

เมื่อ $f(w) = w, f(w_i) = w_j$ และ $g(w) = w, g(w_k) = w_l$

ถ้า $f \circ g = h$ จะได้ว่า $\varphi(h) = \alpha_3$ โดยที่ $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_3, \alpha_3(r) = s$ สำหรับ $h(w) = w, h(w_r) = w_s$

กรณีที่ 2 $\varphi(f) = \beta_1$ และ $\varphi(g) = \beta_2$ โดยที่ $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{T}$

เมื่อ $f(w) = w_i, f(w_i) = w$ และ $g(w) = w_k, g(w_l) = w$

ถ้า $f \circ g = h$ จะได้ว่า $h(w_i) = f \circ g(w_i) = g(f(w_i)) = g(w) = w_k$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

และ $\varphi(h) = \alpha$ โดยที่ $\beta_1 \circ \beta_2 = \alpha \in \mathcal{T}_m$ เมื่อ $f \circ g(w) = g(f(w)) = g(w_i) = w = h(w)$ และ $f \circ g(w_i) = g(f(w_i)) = g(w) = w_k = h(w_i)$

จะได้ $\varphi(f \circ g) = \varphi(h) = \alpha = \beta_1 \circ \beta_2 = \varphi(f) \circ \varphi(g)$

กรณีที่ 3 $\varphi(f) = \alpha$ และ $\varphi(g) = \beta$ โดยที่ $\alpha \in \mathcal{T}_m, \beta \in \mathcal{T}, \alpha(i) = j$

เมื่อ $f(w) = w, f(w_i) = w_j$ และ $g(w) = w_k, g(w_l) = w$

ถ้า $f \circ g = h$ จะได้ว่า $\varphi(h) = \beta_2$ โดยที่ $\alpha \circ \beta = \beta_2 \in \mathcal{T}$ เมื่อ $f \circ g(w) = g(f(w)) = g(w) = w_k = h(w)$ และ $f \circ g(w_i) = g(f(w_i)) = g(w_j) = w = h(w_i)$

จะได้ $\varphi(f \circ g) = \varphi(h) = \beta_2 = \alpha \circ \beta = \varphi(f) \circ \varphi(g)$

กรณีที่ 4 $\varphi(f) = \beta$ และ $\varphi(g) = \alpha$ โดยที่ $\alpha \in T_m, \beta \in T, \alpha(i) = j$

เมื่อ $f(w) = w_k, f(w_l) = w$ และ $g(w) = w, g(w_i) = w_j$

ถ้า $f \circ g = h$ จะได้ $\varphi(h) = \beta_2$ โดยที่ $\beta \circ \alpha = \beta_2 \in T$ เพราะว่าแต่ละ w_k จะมี w_r ที่ทำให้ $g(w_k) = w_r$ จะได้ $h(w) = f \circ g(w) = g(f(w)) = g(w_k) = w_r$ จะได้ $f \circ g(w) = g(f(w)) = g(w_k) = w_r = h(w)$ และ $f \circ g(w_i) = g(f(w_i)) = g(w) = w = h(w_i)$

จะได้ $\varphi(f \circ g) = \varphi(h) = \beta_2 = \beta \circ \alpha = \varphi(f) \circ \varphi(g)$

เพราะฉะนั้น $SEnd(T_{2:m}) \cong T_m \cup T$ □

จากทฤษฎีบท 4.3 จะได้ว่า $SEnd(T_{2:m}) \cong T_m \cup T$ เมื่อ T_m เป็นโมนอยด์การแปลงของเซตที่มีสมาชิกจำนวน m และ T เป็นเซตที่มี $|T| = m$ ซึ่งจาก $|T_m| = m^m$ จะได้จำนวนฟังก์ชันของ $SEnd(T_{2:m})$ คือ $|T_m| + |T| = m^m + m$ ซึ่งสรุปเป็นบทแทรกได้ดังนี้

บทแทรก 4.4 สำหรับกราฟทรีที่มีดีกรี 2 ใด ๆ จะได้ว่า $|SEnd(T_{2:m})| = m^m + m$

สำหรับกราฟ $T_{3:m,n}$ เป็นกราฟทรีที่มีจุด x และ y เป็นจุดศูนย์กลางและ m, n เป็นจำนวนของจุดปลายทั้งหมด ใน $T_{3:m,n}$ ในหัวข้อที่ผ่านมา เราทราบว่าฟังก์ชันออโตมอร์ฟิซึมของ $T_{3:m,n}$ ที่ซึ่ง $f(x) = y$ และ $f(y) = x$ ถ้า $m = n$ เท่านั้น ซึ่งต่างจากฟังก์ชันสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมของ $T_{3:m,n}$ จะมี $f \in SEnd(T_{3:m,n})$ ที่ซึ่ง $f(x) = y$ และ $f(y) = x$ ได้ทั้งในกรณีที่ $m = n$ และ $m \neq n$ และจะพบว่า $SEnd(T_{3:m,n})$ จะไม่สอดคล้องกับโมนอยด์การแปลง T_x ดังนั้นจะแสดงเพียงการหาจำนวนสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมโมนอยด์ของกราฟ $T_{3:m,n}$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.5 สำหรับกราฟทรีที่มีดีกรี 3 ใด ๆ จะได้ว่า

$$|SEnd(T_{3:m,n})| = (m^m \times n^n) + (m^n \times n^m)$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $f \in SEnd(T_{3:m,n})$ จะสามารถพิจารณาได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

(1) ถ้า $f(x) = x, f(y) = y$ แล้ว $f(x_i) = x_j, f(y_k) = y_l$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$

โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ว่า แต่ละ x_i จะสามารถเลือกส่งไปยัง x_j ได้ทั้งหมด m วิธี

จะได้ว่า แต่ละ y_k จะสามารถเลือกส่งไปยัง y_l ได้ทั้งหมด n วิธี

ดังนั้นโดยใช้หลักการคูณจะได้ว่ามี $f \in SEnd(T_{3:m,n})$ ที่ซึ่ง $f(x) = x, f(y) = y$ ทั้งหมด $m^m \times n^n$ วิธี

(2) ถ้า $f(x) = y, f(y) = x$ แล้ว $f(x_i) = y_l, f(y_k) = x_j$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$

โดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้ว่า แต่ละ x_i จะสามารถเลือกส่งไปยัง y_l ได้ทั้งหมด n วิธี

จะได้ว่า แต่ละ y_k จะสามารถเลือกส่งไปยัง x_j ได้ทั้งหมด m วิธี

ดังนั้นโดยใช้หลักการคูณจะได้ว่ามี $f \in SEnd(T_{3:m,n})$ ที่ซึ่ง $f(x) = y, f(y) = x$ ทั้งหมด $m^n \times n^m$ วิธี

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า จำนวนฟังก์ชันทั้งหมดของ $SEnd(T_{3;m,n})$ จะเป็นผลรวมของ $m^m \times n^n$ และ $m^n \times n^m$
 เพราะฉะนั้น $|SEnd(T_{3;m,n})| = (m^m \times n^n) + (m^n \times n^m)$ □

5. สรุปผลงานวิจัย

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นไปที่การศึกษาออโตมอร์ฟิซึมกรุปและสตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมโมนอยด์บนกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์น้อยกว่า 4 ซึ่งผลการศึกษาพบว่าออโตมอร์ฟิซึมกรุปบนกราฟทรีเหล่านี้จะมีสมบัติเป็นผลคูณตรงของกลุ่มการเรียงสับเปลี่ยน ในทางกลับกัน สตรองเอ็นโดมอร์ฟิซึมโมนอยด์บนกราฟทรีเหล่านี้จะมีสมบัติเป็นผลคูณตรงของโมนอยด์การแปลง ซึ่งผลลัพธ์เหล่านี้มีประโยชน์ต่อความเข้าใจโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์น้อยกว่า 4 และสามารถนำไปประยุกต์บนกราฟกราฟทรีที่มีโดเมเตอร์มากกว่าหรือเท่ากับ 4 เป็นต้นไปได้

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Frucht, R. (1938). Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe. *Compos Mathematica* 6. 239-250.
- [2] Frucht, R. (1949). Graphs of degree three with a given abstract group. *Canadian J Mathematics*. 1. 265-278.
- [3] Hedrlin, Z., & Pultr, A. (1964). Relations (graphs) with given finitely generated semigroups. *Monatsh Math.* 68. 213-217.
- [4] Hedrlin, Z., & Pultr, A. (1964). Relations (graphs) with given infinite semigroups. *Monatsh Math.* 68. 421-425.
- [5] Hedrlin, Z., & Pultr, A. (1965). Symmetric relations (undirected graphs) with given semigroups. *Monatsh Math.* 69. 318-322.
- [6] Culik, K. (1958). Zur theorie der graphen. *Casopis Pest. Mat.* 83. 133-155.
- [7] Knauer, U., & Nieporte, M. (1989). *Endomorphisms of graphs I*. The monoid of strong endomorphisms. *Arch. Math.* 52. 607-614.
- [8] Li, W. (1993). *Green's relations on the strong endomorphism monoid of a graph*. *Semigroup Forum*. 47. 209-214.
- [9] Pipattanajinda, N., Kim, Y., & Arworn, S. (2019). Naturally ordered strong endomorphisms on graphs. *Graphs and Combinatorics*. 35. 1619-1632.
- [10] นิตย ธีรรมย์. (2545). *ทฤษฎีกราฟ*. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

- [11] Gervacio, S. V., & Rara, H. M. (1989). Non-singular trees. *Very Often Graphs*, Vol. 2 (Ateneo de Manila University, March 1989).
- [12] Gervacio, S. V. (1996). Trees with diameter less than 5 and non-singular complement. *Discrete Math.* 151. 91–97.
- [13] Pipattanajinda, N. (2014). Graph with non-singularity. *Far East J. Math. Sciences.* 95. 1–17.
- [14] Pipattanajinda, N., & Kim, Y. (2015). The non-singularity of looped-trees and complement of trees with diameter 5. *The Australasian J. of Combinatorics.* 63. 297-313.
- [15] Pipattanajinda, N., & Kim, Y. (2015). Trees with diameter 5 and non-singular complement. *Advances and Applications in Discrete Mathematics.* 16. 111-124.
- [16] Knauer, U. (1990). Endomorphism types of trees. *Words, Languages and Combinatorics*. Kyoto, Japan. 28 – 31 Aug. 1990. 273-287.
- [17] Harary, F. (1969). *Graph theory*. Addison-Wesley. Reading. MA.
- [18] Li, W. (2003). Graphs with regular monoids. *Discrete Math.* 265. 105–118.
- [19] Pipattanajinda, N., Knauer, U., Gyurov, B., & Panma, S. (2014). The endomorphisms monoids of graphs of order n with a minimum degree $n-3$. *Algebra Discrete Math.* 18(2), 274–294.
- [20] Pipattanajinda, N., Knauer, U., Gyurov, B., & Panma, S. (2016). The endomorphism monoids of $(n-3)$ -regular graphs of order n . *Algebra Discrete Math.* 22(2), 284–300.
- [21] Pipattanajinda, N. (2014). The endotype of $(n-3)$ -regular graphs of order n . *Southeast Asian Bull. Math.* 38, 535–541.