

พลังงานของผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟ K_2 และกราฟ G ที่มีเซลฟ์ลูป

เกณิกา ชินพันธ์¹ และ ชัญญา ทิศกลาง^{2*}

^{1,2} สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี

E-mail: ¹63040259101@udru.ac.th, ^{2*}chunya.ti@udru.ac.th

บทคัดย่อ

ให้ G_σ เป็นกราฟที่ได้จากกราฟ G ที่มีอันดับ n โดยการเพิ่มเซลฟ์ลูปบนจุดที่เลือกจำนวน σ จุด พลังงานของกราฟ G_σ เขียนแทนด้วย $E(G_\sigma)$ กำหนดโดย

$$E(G_\sigma) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i(G_\sigma) - \frac{\sigma}{n} \right|$$

โดยที่ $\lambda_i(G_\sigma)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ G_σ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

ในงานวิจัยนี้เราได้ศึกษาพลังงานของผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟบริบูรณ์ K_2 และกราฟเชิงเดียวจำกัดไม่ระบุทิศทาง G ที่มีเซลฟ์ลูป ซึ่งเขียนแทนด้วย $K_2 \times G^l$ และได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$E(K_2 \times G^l) = \sum_{i=1}^n \left(\left| \lambda_i(G) + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \lambda_i(G) - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \right)$$

โดยที่ $\lambda_i(G)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ G เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

นอกจากนี้ เรายังได้ศึกษาพลังงานของผลคูณโคโรนาของกราฟ G และ K_1 ที่มีเซลฟ์ลูปอีกด้วย

คำสำคัญ: ผลคูณคาร์ทีเซียน พลังงานของกราฟ พลังงานของกราฟที่มีเซลฟ์ลูป ผลคูณโคโรนา

* Corresponding author, e-mail: chunya.ti@udru.ac.th

Energy of Cartesian Product of Graphs K_2 and G with self-loops

Kanika Chinphan¹ and Chunya Tisklang^{2*}

^{1,2}Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Udon Thani Rajabhat University

E-mail: ¹63040259101@udru.ac.th, ^{2*}chunya.ti@udru.ac.th

Abstract

Let G_σ be the graph obtained from the simple graph G of order n , by attaching self-loops to σ vertices. The energy of the graph G_σ denoted by $E(G_\sigma)$ is defined by

$$E(G_\sigma) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i(G_\sigma) - \frac{\sigma}{n} \right|$$

where $\lambda_i(G_\sigma)$ are the eigenvalues of G_σ for $i = 1, 2, \dots, n$.

In this paper, we study the energy of the Cartesian product of the complete graph K_2 and the undirected finite simple graph G with self-loops denoted by $K_2 \times G^l$ and we have

$$E(K_2 \times G^l) = \sum_{i=1}^n \left(\left| \lambda_i(G) + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \lambda_i(G) - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \right)$$

where $\lambda_i(G)$ are the eigenvalues of G for $i = 1, 2, \dots, n$.

Moreover, we obtained the energy of the corona product of the graph G and the complete graph K_1 with self-loops.

Keywords: Cartesian product, Energy of graphs, Energy of graphs with self-loops, Corona product

* Corresponding author, e-mail: chunya.ti@udru.ac.th

1. บทนำ

ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะกราฟจำกัดที่ไม่ระบุทิศทาง สำหรับคำศัพท์และสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีกราฟเราอ้างอิงตาม Balakrishnan และ Ranganathan [1] สำหรับเนื้อหาทางพีชคณิตเราอ้างอิงตาม Lang [2]

ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียวอันดับ n ประกอบด้วยจุด $v_1, v_2, \dots, v_n$ เมทริกซ์ประชิดของกราฟ G เขียนแทนด้วย $A(G)$ เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ ที่ซึ่ง $A(G) = [a_{ij}]$ โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; v_i \text{ ประชิดกับ } v_j \\ 0 & ; \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G (Characteristic polynomial of the adjacency matrix of a graph G) เขียนแทนด้วย $\phi(G : x)$ รากของพหุนามลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ เรียกว่า **ค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ G** (eigenvalues of the graph G) เซตของค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ G และภาวะซ้ำจะเรียกว่า **สเปกตรัมของกราฟ G** (spectrum of the graph) เขียนแทนด้วย $\text{spec}(G)$ โดย

$$\text{spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

เมื่อ m_i คือ ภาวะซ้ำ (multiplicity) ของ λ_i สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

ในปี 1978 Gutman [3] ได้นิยาม **พลังงานของกราฟ G** (energy of a graph G) เป็นผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ G และเขียนแทนด้วย $E(G)$ ดังนั้น

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

ในปี 2019 Prapha และ Vadivukkarasi [4] ได้พิจารณาผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟ K_2 และ กราฟ G และได้พลังงานของกราฟดังนี้

$$E(K_2 \times G) = \sum_{i=1}^n (|\lambda_i(G) + 1| + |\lambda_i(G) - 1|)$$

โดยที่ $\lambda_i(G)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ G เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

ในปี 2022 Gutman และคณะ [5] ได้แนะนำแนวคิดเกี่ยวกับพลังงานของกราฟที่มีเซลฟ์ลูป ให้ G_σ เป็นกราฟที่ได้จากกราฟ G โดยการเพิ่มเซลฟ์ลูปบนจุดที่เลือกจำนวน σ จุด เมทริกซ์ประชิดของกราฟ G_σ เขียนแทนด้วย $A(G_\sigma)$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรขนาด $n \times n$ ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A(G_\sigma)$ เขียนแทนด้วย $\lambda_1(G_\sigma), \lambda_2(G_\sigma), \dots, \lambda_n(G_\sigma)$ พลังงานของกราฟ G_σ เขียนแทนด้วย $E(G_\sigma)$ และ

$$E(G_\sigma) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i(G_\sigma) - \frac{\sigma}{n} \right|$$

โดยที่ $\lambda_i(G_\sigma)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ G_σ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

บทนิยาม 1.1 [6] ให้ F เป็นฟิลด์และ $p : F \rightarrow F$ เป็นพหุนามที่มีดีกรี $m \geq 1$ เรากล่าวว่า $\lambda \in F$ เป็นราก (root) ของ p ก็ต่อเมื่อ $p(\lambda) = 0$

บทนิยาม 1.2 [6] ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ ให้ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เราเรียก $p(A)$ ว่า พหุนามของเมทริกซ์ A ที่มีดีกรี m (matrix polynomial in A of degree m) ก็ต่อเมื่อ

$$p(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m$$

เมื่อ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ $a_0, a_1, \dots, a_m$ เป็นสเกลาร์ และ $a_m \neq 0$

ทฤษฎีบท 1.1 [6] ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และ $p(A)$ เป็นพหุนามของเมทริกซ์ A ถ้า λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A แล้ว $p(\lambda)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $p(A)$

ทฤษฎีบท 1.2 [7] (Schur formula) ให้

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1)$$

โดยที่ A, D เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ A มีตัวผกผัน จะได้ว่า

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) \quad (2)$$

หมายเหตุ 1.3 จาก (1) ถ้า $AC = CA$ แล้ว A, B, C, D เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดเท่ากัน และ

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB)$$

บทนิยาม 1.4 ให้ G และ H เป็นกราฟเชิงเดียว ผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟ G และ H เขียนแทนด้วย $G \times H$ กำหนดโดย $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ และจุด (g, h) และ (g', h') ในกราฟ $G \times H$ จะประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ

1. $g = g'$ และ h ประชิด h' หรือ
2. $h = h'$ และ g ประชิด g' อย่างใดอย่างหนึ่ง

บทนิยาม 1.5 ให้ G และ H เป็นกราฟเชิงเดียวที่มี ผลคูณโคโรนาของกราฟ G และ H เขียนแทนด้วย $G \circ H$ คือกราฟที่มี $n + mn$ จุด ซึ่งสร้างจากกราฟ G และ n ก๊อปปี้ของ H โดยการเชื่อมจุดที่ i ของ G กับทุกจุดในก๊อปปี้ที่ i ของ H เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

2. ผลลัพธ์หลัก

ในงานวิจัยนี้ได้แนะนำกราฟผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟบริบูรณ์ K_2 และกราฟ G ที่มีเซลฟ์ลูป และผลคูณโคโรนาของกราฟ G และ K_1 ที่มีเซลฟ์ลูป ดังนียมต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียว ผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟ K_2 และกราฟ G ที่มีเซลฟ์ลูปเขียนแทนด้วย $K_2 \times G^l$ คือกราฟที่ได้จากกราฟ $K_2 \times G$ โดยการเพิ่มเซลฟ์ลูปบนก๊อบปี่ที่สองของกราฟ G ทุกจุด

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ G เป็นกราฟอันดับ n จะได้ว่าพลังงานของกราฟ $K_2 \times G^l$ มีค่าดังนี้

$$E(K_2 \times G^l) = \sum_{i=1}^n \left(\left| \lambda_i(G) + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \lambda_i(G) - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \right)$$

โดยที่ $\lambda_i(G)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ G เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

พิสูจน์ ให้ $v_1, v_2, \dots, v_n$ เป็นจุดของกราฟ G ดังนั้น เมทริกซ์ประชิดของกราฟ G จะกำหนดโดย

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ให้ h_1, h_2 เป็นจุดของกราฟ K_2 กำหนดให้ $u_{ij} = (h_i, v_j)$ โดยที่ $i \in \{1, 2\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ดังนั้น $V(K_2 \times G^l) = \{u_{ij} : i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ และจะได้เมทริกซ์ประชิดของกราฟ $K_2 \times G^l$ ดังนี้

$$A(K_2 \times G^l) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ \vdots \\ u_{1n} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

นั่นคือ

$$A(K_2 \times G^l) = \begin{bmatrix} A(G) & I_n \\ I_n & A(G) + I_n \end{bmatrix}$$

พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A(K_2 \times G^l)$ กำหนดโดย

$$\phi(K_2 \times G^l: x) = \begin{vmatrix} xI_n - A(G) & I_n \\ I_n & xI_n - (A(G) + I_n) \end{vmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 1.2 จะได้

$$\phi(K_2 \times G^l: x) = \prod_{i=1}^n ((xI_n - A(G))(xI_n - (A(G) + I_n)) - I_n^2)$$

จากทฤษฎีบท 1.1. จะได้ว่า

$$\phi(K_2 \times G^l: x) = \prod_{i=1}^n [(x - \lambda_i)(x - (\lambda_i + 1)) - 1^2]$$

โดยที่ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ G

ดังนั้น ค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ $K_2 \times G^l$ คือ

$$x = \lambda_i + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_i + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

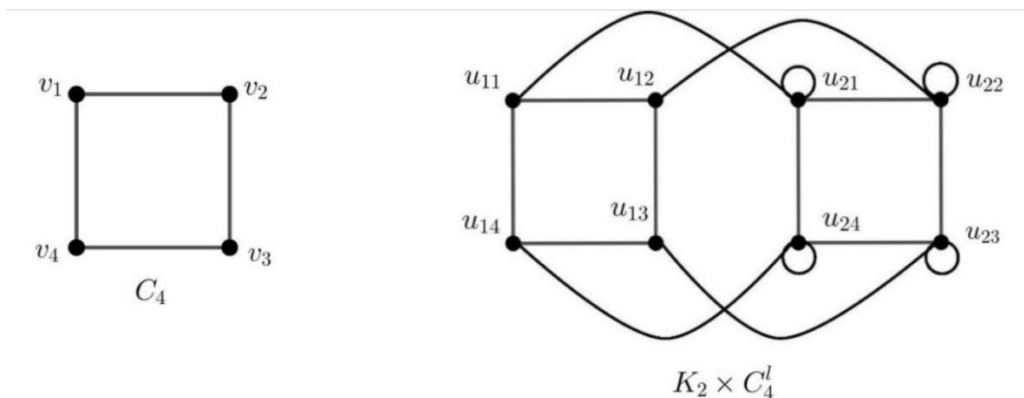
เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น พลังงานของกราฟ $K_2 \times G^l$ คือ

$$\begin{aligned} E(K_2 \times G^l) &= \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{n}{2n} \right| + \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - \frac{n}{2n} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left| \lambda_i + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \lambda_i - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \right) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณากราฟ C_4 และ $K_2 \times C_4^l$ ดังรูปด้านล่าง เราทราบว่า $E(C_4) = 4$ และ

$$\text{spec}(C_4) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



รูปที่ 1 กราฟ C_4 และ $K_2 \times C_4^l$

จะได้เมทริกซ์ประชิดของ $K_2 \times C_4^l$ ดังนี้

$$A(K_2 \times C_4^l) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ดังนั้น

$$\text{spec}(K_2 \times C_4^l) = \left(\begin{array}{cc} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{array}, \begin{array}{cc} \frac{5+\sqrt{5}}{2} & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{array}, \begin{array}{cc} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 & 2 \end{array} \right)$$

จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(K_2 \times C_4^l) &= \sum_{i=1}^4 \left(\left| \lambda_i(C_4) + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \lambda_i(C_4) - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \right) \\ &= \left| -2 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| -2 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| 2 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| 2 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \\ &\quad + 2 \left| 0 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + 2 \left| 0 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \\ &= 8 + 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

ซึ่งจะมีค่าเท่ากับผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ $K_2 \times C_4^l$ ที่ได้จากการคำนวณโดยปกติ ■

บทนิยาม 2.2 ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียว ผลคูณโคโรนาของกราฟ G และกราฟบริบูรณ์ K_1 ที่มีเซลฟ์ลูป

เขียนแทนด้วย $G \circ K_1^l$ คือกราฟที่ได้จากกราฟ $G \circ K_1$ โดยการเพิ่มเซลฟ์ลูปบนจุดที่มีดีกรี 1 ทุกจุด

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ G เป็นกราฟอันดับ n จะได้ว่าพลังงานของกราฟ $G \circ K_1^l$ มีค่าดังนี้

$$E(G \circ K_1^l) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\left| \lambda_i(G) + \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5} \right| + \left| \lambda_i(G) - \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5} \right| \right)$$

โดยที่ $\lambda_i(G)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ G เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

พิสูจน์ เราพบว่า ถ้า $A(G)$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G แล้ว เมทริกซ์ประชิดของกราฟ $G \circ K_1^l$ คือ

$$A(G \circ K_1^l) = \begin{bmatrix} A(G) & I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$$

พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A(G \circ K_1^l)$ กำหนดโดย

$$\phi(G \circ K_1^l; x) = \begin{vmatrix} xI_n - A(G) & I_n \\ I_n & xI_n - I_n \end{vmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 1.2 จะได้

$$\phi(G \circ K_1^l; x) = \prod_{i=1}^n ((xI_n - A(G))(xI_n - I_n) - I_n^2)$$

จากทฤษฎีบท 1.1. จะได้ว่า

$$\phi(G \circ K_1^l; x) = \prod_{i=1}^n [(x - \lambda_i)(x - 1) - 1^2]$$

โดยที่ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ G

ดังนั้น ค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ $G \circ K_1^l$ คือ

$$x = \frac{1}{2} \left(\lambda_i + 1 + \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\lambda_i + 1 - \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5} \right)$$

เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น พลังงานของกราฟ $G \circ K_1^l$ คือ

$$\begin{aligned} E(G \circ K_1^l) &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{2} (\lambda_i + 1 + \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5}) - \frac{n}{2n} \right| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{2} (\lambda_i + 1 - \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5}) - \frac{n}{2n} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5}| + |\lambda_i - \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5}|) \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาพลังงานของกราฟ $C_4 \circ K_1^l$ เราสามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่า

$$\text{spec}(C_4 \circ K_1^l) = \left(\begin{array}{cc} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{array}, \begin{array}{cc} \frac{-1+\sqrt{13}}{2} & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ 1 & 1 \end{array}, \begin{array}{cc} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 & 2 \end{array} \right)$$

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(C_4 \circ K_1^l) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (|\lambda_i(C_4) + \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5}| + |\lambda_i(C_4) - \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5}|) \\ &= \frac{1}{2} (|-2 + \sqrt{13}| + |-2 - \sqrt{13}| + |2 + \sqrt{5}| + |2 - \sqrt{5}| + 2|\sqrt{5}| + 2|-5|) \\ &= 3\sqrt{5} + \sqrt{13} \end{aligned}$$

ซึ่งจะมีค่าเท่ากับพลังงานที่ได้จากการคำนวณ $\sum_{i=1}^4 \left| \lambda_i - \frac{1}{2} \right|$ เมื่อ λ_i คือ ค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ $C_4 \circ K_1^l$ ■

3. สรุปอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้ ได้ศึกษาเกี่ยวกับพลังงานของผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟ K_2 และกราฟ G ที่มีเซลฟ์ลูบ และพลังงานของผลคูณโคโรนาของกราฟ G และ K_1 ที่มีเซลฟ์ลูบ ผลลัพธ์ที่ได้มีดังนี้

$$E(K_2 \times G^l) = \sum_{i=1}^n \left(\left| \lambda_i(G) + \frac{\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \lambda_i(G) - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \right)$$

และ

$$E(G \circ K_1^l) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\left| \lambda_i(G) + \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5} \right| + \left| \lambda_i(G) - \sqrt{\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 5} \right| \right)$$

โดยที่ $\lambda_i(G)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ G เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

4. เอกสารอ้างอิง

- [1] Balakrishnan, R., & Ranganathan, K. (2012). *A textbook of graph theory*. Springer Science & Business Media.
- [2] Lang, S. (2012). *Algebra* (Vol. 211). Springer Science & Business Media.
- [3] Gutman, I. (1978). The energy of a graph.
- [4] Prabha, R. & Vadivukkarasi, P. R. (2019). Energy of Cartesian product of Graphs. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*, Vol.7 Special Issue, 5.
- [5] Gutman, I., Redžepović, I., Furtula, B., & Sahal, A. (2022). *Energy of graphs with self-loops*. searched at <http://dx.doi.org/10.46793/match.87-3.645G>
- [6] Taboga, M., (2021). *"Matrix polynomial"*. Lectures on matrix algebra. searched at <https://www.statlect.com/matrix-algebra/matrix-polynomial>
- [7] Taboga, M. (2021). *"Determinant of a block matrix"*. Lectures on matrix algebra. searched at <https://www.statlect.com/matrix-algebra/determinant-of-block-matrix>.