

# การปรับปรุงความแม่นยำสำหรับการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกโดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ กรณีศึกษาการแกว่งลูกตุ้ม

## Improved Accuracy in Calculating Acceleration due to Earth's Gravity using Taylor Series Expansion: A case study in Pendulum Oscillations

กนกอร คำผุย<sup>1</sup> และ จารุณี เข้มพิลลา<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>สาขาวิทยาศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

<sup>2</sup>สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

\*E-mail: jarunee.kh@rmu.ac.th

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกของการแกว่งลูกตุ้มที่มุมแกว่ง 4 ระดับคือ 10 20 30 และ 50 องศา และความยาวเชือก 5 ขนาด คือ 0.2 0.4 0.6 0.8 และ 1.0 เมตร วัดคาบการแกว่งด้วยโฟโตเกตเซนเซอร์และคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเปรียบเทียบระหว่างการใช้สมการอย่างง่ายและสมการประมาณค่าแบบละเอียดย ผลการศึกษาพบว่า คาบการแกว่งขึ้นกับความยาวเชือกและมีค่าใกล้เคียงกันที่มุมแกว่งเป็น 10 20 และ 30 องศา แต่เมื่อมุมแกว่งกว้างขึ้นเป็น 50 องศา สังเกตพบว่าคาบการแกว่งมีค่าสูงขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่า การแกว่งของลูกตุ้มด้วยเชือกยาว 0.2 เมตร ส่งผลให้การคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีความคลาดเคลื่อนสูงที่สุด การใช้สมการอย่างง่ายหรือสมการประมาณค่าแบบละเอียดยในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกส่งผลต่อค่าความคลาดเคลื่อนไม่แตกต่างกันมากนักที่มุมแกว่งแคบ ๆ ไม่เกิน 10 องศา แต่เมื่อมุมแกว่งกว้างขึ้นเป็น 20 30 และ 50 องศา การคำนวณโดยใช้สมการประมาณค่าแบบละเอียดยมีความแม่นยำและค่าความคลาดเคลื่อนลดลงเป็นอย่างมากเมื่อเทียบกับการใช้สมการอย่างง่าย

**คำสำคัญ:** ซิมเปิลฮาร์โมนิก ลูกตุ้มอย่างง่าย ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ความแม่นยำ

\* Corresponding author, e-mail: jarunee.kh@rmu.ac.th

### Abstract

This study examined the simple harmonic motion of a pendulum oscillating at five different string lengths (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, and 1.0 meters) at four different angles ( $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ , and  $50^\circ$ ). A photogate sensor was used to measure the period. A high-accuracy formula and a simple formula were then used to compute the gravitational acceleration. The results showed that the period relates to the length of the string and was comparable at oscillation angles of  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ , and  $30^\circ$ . However, raising the angle to  $50^\circ$  extended the time. It was also found that using a 0.2-meter-long thread caused the most error in gravitational acceleration estimations. Using either a simple or a high-accuracy formula to calculate gravitational acceleration results in minimal changes in error levels for angles smaller than  $10^\circ$ . However, when the angle was extended to  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ , and  $50^\circ$ , calculations utilizing a high-accuracy formula were shown to be far more precise and error-free than those using a simple formula.

**Keywords:** Simple harmonic, Simple pendulum, Earth's Gravity, Accuracy

### 1. ที่มาและความสำคัญ

การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก (Simple Harmonic motion, SH) เป็นการเคลื่อนที่แบบกลับไปกลับมาซ้ำทางเดิมและผ่านตำแหน่งสมดุล โดยคาบของการเคลื่อนที่มีค่าคงตัวและไม่พิจารณาปัจจัย แรงเสียดทาน เช่น การแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่าย (simple pendulum) ประกอบด้วยวัตถุทรงกลมขนาดเล็กผูกติดกับเส้นเชือกที่เบาและไม่มีการยืดหด เมื่อดึงวัตถุขึ้นทำมุมแคบ ๆ กับแนวตั้งน้อยกว่า  $5$  องศา แล้วปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่ลงมาอย่างอิสระเนื่องจากมีองค์ประกอบของแรงจากน้ำหนักวัตถุกระทำต่อวัตถุในแนวเส้นสัมผัส วัตถุจะเคลื่อนที่ในลักษณะแกว่งกลับไปมาซ้ำทางเดิมผ่านตำแหน่งสมดุล ซึ่งตัวอย่างการเคลื่อนที่ของวัตถุเช่นเดียวกันกับกรณีของลูกตุ้มอย่างง่าย ได้แก่ การสั่นของสายเครื่องดนตรี การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา การแกว่งชิงช้า เป็นต้น

เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกของวัตถุมีลักษณะที่คล้ายกันและสามารถอธิบายด้วยสมการการเคลื่อนที่แบบเดียวกัน ดังนั้นการศึกษาในระดับอุดมศึกษาหรือต่ำกว่า จึงเริ่มเรียนรู้จากตัวอย่างการเคลื่อนที่ที่ง่ายที่สุดแต่เป็นพื้นฐานในการศึกษาการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกที่ซับซ้อนอื่น ๆ นั่นคือเริ่มศึกษาจากตัวอย่างการแกว่งของลูกตุ้มเพียงมวลเดียวซึ่งคาบในการแกว่งสัมพันธ์กับความยาวของเชือกที่วัดจากจุดแขวนไปจนถึงศูนย์กลางมวลของวัตถุโดยไม่ขึ้นกับขนาดของมวลที่แขวน ซึ่งการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายในระดับการศึกษานี้ได้ปรากฏเนื้อหาการเรียนรู้ไว้ในรายวิชาด้านวิทยาศาสตร์ เช่น ปฏิบัติการฟิสิกส์ ซึ่งนอกจากเป็นกรณีศึกษาในการเรียนรู้การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกแล้วยังนำการทดลองนี้มาประยุกต์ใช้เพื่อวัดคาบการแกว่งของวัตถุและคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกจากผลการทดลองดังกล่าวได้ โดยทดลอง

จับเวลาคาบการแกว่งของลูกตุ้มที่สัมพันธ์กับความยาวของเชือกค่านั้น ๆ แล้วสร้างกราฟความสัมพันธ์ของคาบการแกว่งยกกำลังสองกับความยาวเชือก ซึ่งความชันของกราฟจะนำไปใช้ในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก แต่ข้อกำหนดที่สำคัญของการทดลองแกว่งลูกตุ้มอย่างง่ายคือ มุมแกว่งจะต้องเป็นมุมแคบ ๆ ในหน่วยเรเดียน ทั้งนี้เพื่อให้สามารถใช้สมการอย่างง่ายในการคำนวณคาบการแกว่งได้ ดังเช่นการศึกษาของ Bull [1] ซึ่งได้ทดลองแกว่งมวลทองเหลืองด้วยมุมแกว่ง 5 องศา คำนวณคาบการแกว่งด้วยสมการอย่างง่ายและสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างคาบการแกว่งยกกำลังสองและความยาวเชือกพบว่าค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงเท่ากับ  $9.83 \pm 0.01$  เมตรต่อวินาที<sup>2</sup> คิดเป็นค่าความคลาดเคลื่อนประมาณร้อยละ 0.1 หรือจากการศึกษาของ Vorahan และ Sangwaranatee [2] ที่ทดลองแกว่งลูกตุ้มนาฬิกาและใช้สมการอย่างง่ายในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกพบว่ามีค่าเท่ากับ 9.823 เมตรต่อวินาที<sup>2</sup> คิดเป็นค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละ 0.408 นอกจากนี้ Suwanpayak และคณะ [3] ได้ศึกษาผลของขนาดมวลที่ใช้แกว่ง โดยใช้ลูกสนุกเกอร์แทนมวลขนาดใหญ่และใช้ลูกเหล็กกลมแทนมวลขนาดเล็กและทดลองแกว่งด้วยมุม 10 องศา แล้วคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงด้วยวิธีสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างคาบการแกว่งยกกำลังสองและความยาวเชือกพบว่า การใช้ลูกสนุกเกอร์และลูกเหล็กกลมส่งผลต่อค่าความเร่งเป็น 9.55 และ 9.64 เมตรต่อวินาที<sup>2</sup> โดยมีความคลาดเคลื่อนร้อยละ 2.96 และ 1.73 ตามลำดับ นอกจากนี้ Wattanajung และ Boonphud [4] ได้ออกแบบและพัฒนาชุดอุปกรณ์วัดคาบเวลาและความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลกด้วยชุดทดลองการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายที่วัดคาบการแกว่งด้วยรังสีอินฟราเรดและ NodeMCU ESP8266 ผลการศึกษาพบว่า ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลกมีความคลาดเคลื่อนร้อยละ 1.46 เมื่อเทียบกับค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลกมาตรฐาน ณ กรุงเทพมหานคร และ Jitkasroem และคณะ [5] ได้ออกแบบสร้างชุดทดลองเรื่องลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายต้นทุนต่ำผ่านระบบ Wi-Fi ซึ่งค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลกที่ได้จากชุดทดลองที่สร้างขึ้นนี้มีค่าเท่ากับ 9.87 เมตรต่อวินาที<sup>2</sup> นอกจากนี้ Gui [6] ศึกษาผลของแรงต้านอากาศที่ส่งผลต่อการแกว่งของลูกตุ้ม พบว่า ลูกตุ้มจะได้รับแรงต้านอากาศลดลงเมื่อเชือกมีความยาวมากกว่า 0.25 เมตร ถึงแม้จะแกว่งลูกตุ้มด้วยมุมแคบ ๆ

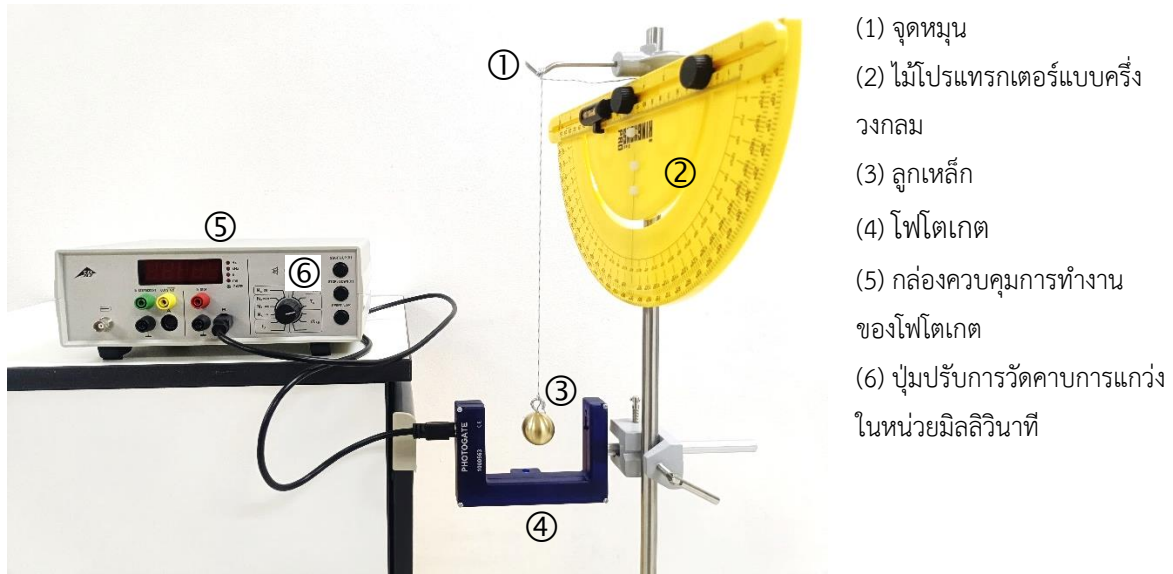
จากการสืบค้นข้างต้นพบว่า การคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกล้วนใช้สมการอย่างง่ายและทำการทดลองแกว่งที่มุมแคบ ๆ ไม่เกิน 10 องศา จึงจะส่งผลให้การคำนวณมีความแม่นยำ ซึ่งการใช้สมการอย่างง่ายในการคำนวณสามารถทำได้ง่ายและเหมาะสมกับการศึกษาในระดับอุดมศึกษาหรือต่ำกว่า แต่ในปัจจุบันมีอุปกรณ์หรือเครื่องมือที่ช่วยในการคำนวณมากมาย เช่น คอมพิวเตอร์ เครื่องคิดเลข สมาร์ทโฟน หรือเว็บไซต์ที่ใช้เพื่อการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนได้แบบใช้งานออนไลน์ ที่สามารถเข้าถึงได้ง่าย จึงเป็นส่วนช่วยให้ผู้เรียนสามารถที่จะเพิ่มขอบเขตการศึกษาการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาได้โดยไม่จำเป็นต้องจำกัดค่ามุมแกว่งไม่เกิน 10 องศา ดังที่ปรากฏในแบบเรียนในปัจจุบัน และสามารถเรียนรู้การคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกด้วยสมการที่หลากหลายได้มากขึ้นถึงแม้สมการเหล่านั้นจะมีพจน์การคำนวณที่ซับซ้อน ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงนำเสนอการทดลองแกว่งลูกตุ้มนาฬิกาซึ่งวัดคาบการแกว่งด้วยโฟโตเกตเซนเซอร์ (photogate sensor) ที่มีความแม่นยำและเที่ยงตรง ด้วยมุมแกว่งที่ครอบคลุมทั้งมุมแคบและมุมกว้างจำนวน

4 ระดับ คือ 10 20 30 และ 50 องศา ที่ความยาวเชือก 5 ขนาด โดยเริ่มต้นที่ 0.2 เมตร เพื่อแสดงผลของความเสียดทานเมื่อแกว่งด้วยเชือกสั้น และเพิ่มความยาวเชือกให้มากกว่า 0.25 เมตรเพื่อลดความแรงต้านอากาศได้แก่ 0.4 0.6 0.8 และ 1.0 เมตร แล้วทำการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก โดยได้ศึกษาเพิ่มเติมในประเด็นของการเปรียบเทียบค่าความเร่งเมื่อแกว่งด้วยมุมแคบและกว้าง อีกทั้งได้นำสมการประมาณค่าแบบละเอียดมาใช้ในการคำนวณเพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของผลการคำนวณเพื่อเป็นการพิสูจน์สมการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่แม่นยำในกรณีศึกษาการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกของวัตถุทรงกลมที่แกว่งด้วยมุมกว้างมากกว่า 10 องศา ซึ่งในงานวิจัยที่ได้สืบค้นพบเฉพาะการใช้สมการอย่างง่ายและแกว่งด้วยมุมแคบ ๆ เท่านั้น

## 2. วิธีการดำเนินงานวิจัย

### 2.1 การวัดคาบการแกว่งของลูกตุ้มด้วยโฟโตเกตเซนเซอร์

ติดตั้งไมโครเมตรแบบครึ่งวงกลมไว้ด้านบนสุดของขาตั้งดังรูปที่ 1 ผูกลูกเหล็กเข้ากับปลายด้านหนึ่งของเชือกและผูกปลายอีกด้านหนึ่งของเชือกเข้ากับด้านบนของขาตั้งซึ่งเป็นจุดหมุน วัดความยาวแขนของลูกตุ้มโดยวัดจากจุดหมุนถึงตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของลูกตุ้มให้ได้ขนาด 0.2 เมตร ปรับตำแหน่งของเซนเซอร์ของโฟโตเกตให้อยู่ในระดับเดียวกันกับลูกตุ้ม ปรับความละเอียดของฟังก์ชันแสดงผลคาบเวลาการเคลื่อนที่ที่กล่องควบคุมเพื่อให้รองรับหน่วย มิลลิวินาที ดึงลูกเหล็กให้เอียงทำมุมไม่เกิน 10 องศา กับแนวตั้ง แล้วปล่อยให้ลูกเหล็กเคลื่อนที่ผ่านเซนเซอร์แสงของโฟโตเกต อ่านค่าและบันทึกคาบการเคลื่อนที่ ทำการทดลองซ้ำ 10 ครั้ง แล้วปรับความยาวเชือกให้มีค่าเป็น 0.4 0.6 0.8 และ 1.0 เมตร ตามลำดับ ทำซ้ำกระบวนการทดลองเช่นเดิม โดยเปลี่ยนมุมแกว่งของลูกตุ้มเป็น 20 30 และ 50 องศา ตามลำดับ การเลือกค่ามุมแกว่งในงานวิจัยนี้พิจารณาจากมุมแกว่งที่เหมาะสมคือมีค่าน้อยกว่า 15 องศา ดังนั้นจึงเลือกมุม 10 องศา เป็นมุมเริ่มต้นในการทดลอง โดยค่ามุมนี้ส่งผลให้ค่ามุม  $\theta$  และค่า  $\sin \theta$  มีค่าแตกต่างกันเพียงร้อยละ 0.51 และเพื่อให้เห็นแนวโน้มผลของค่ามุมแกว่งที่เพิ่มขึ้นจึงเลือกอีก 2 ค่า คือมุม 20 และ 30 องศา ซึ่งมีร้อยละความแตกต่างของค่ามุม  $\theta$  และ  $\sin \theta$  ร้อยละ 2.02 และ 4.51 ตามลำดับ อีกทั้งเพื่อศึกษาถึงผลที่ชัดเจนของมุมแกว่งที่กว้างมากจึงเลือกศึกษามุมแกว่งอีก 1 ค่าคือ 50 องศา ซึ่งมีร้อยละความแตกต่างของค่ามุม  $\theta$  และ  $\sin \theta$  ร้อยละ 12.22



รูปที่ 1 ชุดทดลองวัดค่าการแกว่งของลูกตุ้ม

## 2.2 วิธีการคำนวณและวิเคราะห์ผลการทดลอง

### 2.2.1 การใช้สมการเพื่อคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

เมื่อพิจารณาแรง  $mg$  จากน้ำหนักของลูกตุ้ม ดังรูปที่ 2 สามารถแยกองค์ประกอบย่อยของแรงได้เป็นแรง  $mg \cos \theta$  อยู่ในแนวเดียวกับเส้นเชือก และแรง  $mg \sin \theta$  อยู่ในแนวเส้นสัมผัสของการเคลื่อนที่ ซึ่งแรง  $mg \sin \theta$  เป็นแรงดึงกลับที่กระทำต่อลูกตุ้ม จะได้สมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มอย่างง่ายจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ดังสมการที่ (1)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (1)$$

รูปที่ 2 การแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่าย

เนื่องจากพจน์  $\sin \theta$  ในสมการ (1) เป็นพจน์ที่มีความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับเวลา ดังนั้นจึงต้องทำการประมาณค่าเพื่อให้สามารถหาคำตอบของสมการได้ นั่นคือ ต้องประมาณค่า  $\sin \theta$  ให้มีค่าเท่ากับ  $\theta$  เพื่อให้การกระจัดตามส่วนโค้งของการแกว่งมีความเป็นเชิงเส้นมากที่สุด ซึ่งจะเป็นจริงได้เมื่อมุม  $\theta$  มีค่าน้อย ๆ

ในหน่วยเรเดียน ดังนั้นคาบการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายจึงสามารถคำนวณได้จากสมการ (2) ซึ่งความยาวเชือก ( $L$ ) เป็นตัวแปรต้นและคาบการแกว่ง ( $T$ ) เป็นตัวแปรตาม

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

หากต้องการที่จะประมาณค่า  $\sin \theta$  เมื่อมุม  $\theta$  มีค่ามากกว่า 5 องศา สามารถทำได้โดยเพิ่มจำนวนพจน์ของการกระจายอนุกรมเทเลอร์จะทำให้การประมาณค่ามีความแม่นยำมากขึ้น ดังสมการ (3) ซึ่งในการศึกษาจะใช้เพียง 3 พจน์แรกของการกระจายอนุกรมเทเลอร์ในการคำนวณ [7]

$$T \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{16} \theta^2 + \frac{11}{3072} \theta^4 + \frac{173}{737280} \theta^6 + \dots \right] \quad (3)$$

### 2.2.2 การใช้ความชันของกราฟเพื่อคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ (2) จะได้ดังสมการ (4)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L \quad (4)$$

จากสมการ (4) เมื่อทำการทดลองวัดคาบการแกว่งที่ความยาวเชือกค่าต่างๆ แล้วนำมาสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง คาบการแกว่งยกกำลังสองและความยาวเชือก จะได้ความสัมพันธ์เชิงเส้นดังรูปทั่วไปของสมการเส้นตรงคือ  $y = mx + c$  ซึ่งความชันจากกราฟ ( $m$ ) มีความสัมพันธ์กับพจน์ของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกในสมการ (4) เป็นดังสมการ (5) แล้วทำการปรับรูปสมการ (5) จะได้สมการอย่างง่ายที่ใช้เพื่อคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกดังแสดงในสมการ (6)

$$\text{slope} = \frac{4\pi^2}{g} \quad (5)$$

$$g = \frac{4\pi^2}{\text{slope}} \quad (6)$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก จากสมการประมาณค่าแบบละเอียดยึดด้วยแทนค่ามุมแกว่งในหน่วยเรเดียน ดังสมการ (7)

$$g \approx \frac{4\pi^2}{\text{slope}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{16} \theta^2 + \frac{11}{3072} \theta^4 + \frac{173}{737280} \theta^6 \right]^2 \quad (7)$$

### 2.2.3 การคำนวณความคลาดเคลื่อน

คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ณ จังหวัดอุดรธานี เนื่องจากเป็นสถานีตรวจวัดที่ใกล้กับสถานที่ทำการทดลองมากที่สุดโดยมีค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเป็น 9.78 เมตรต่อวินาที<sup>2</sup> ซึ่งตรวจวัดโดยสถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติ [8]

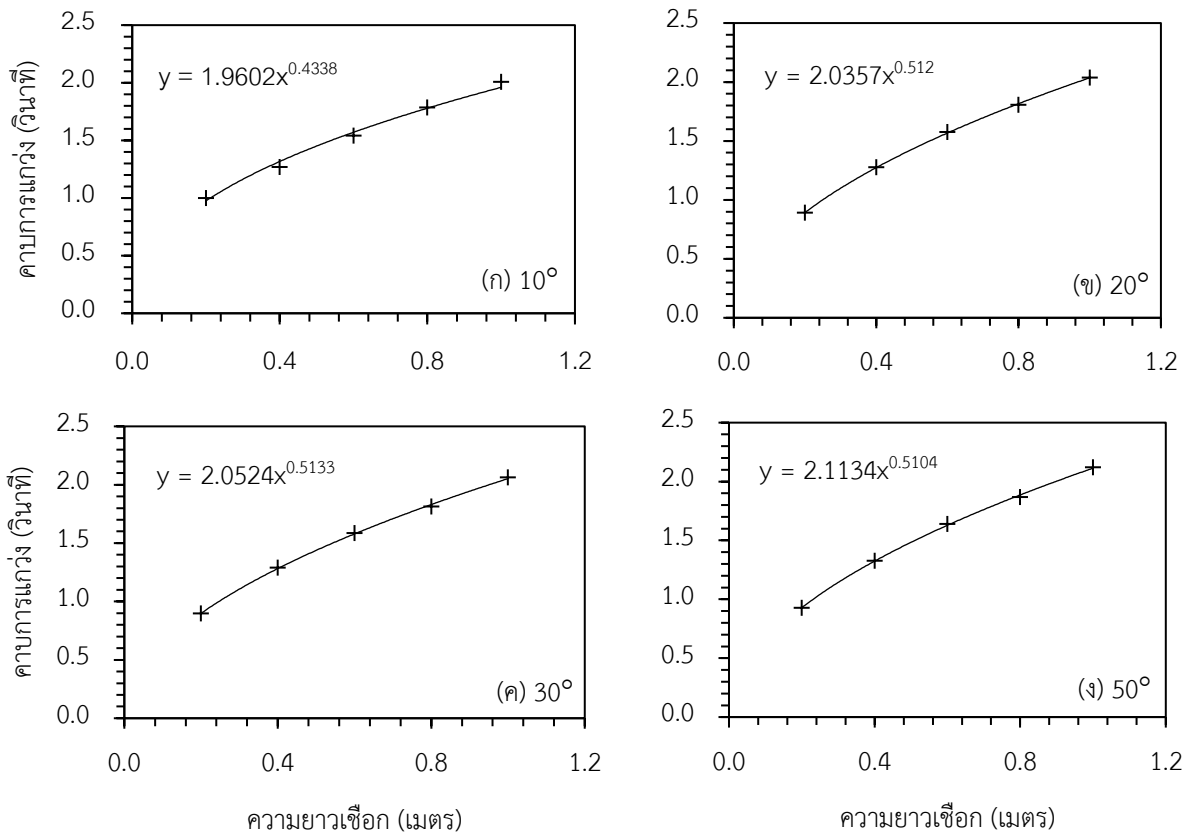
### 3. ผลการทดสอบและการอภิปรายผล

#### 3.1 ผลการวัดคาบการแกว่งของลูกตุ้ม

ผลการวัดคาบการแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่ายด้วยโฟโตเกตเซนเซอร์ โดยทดลองแกว่งลูกตุ้มซึ่งผูกติดกับเชือกที่มีความยาว 0.2 0.4 0.6 0.8 และ 1.0 เมตร เคลื่อนที่ด้วยมุมแกว่ง 10 20 30 และ 50 องศา แสดงดังตารางที่ 1 พบว่า คาบการแกว่งของลูกตุ้มมีค่าขึ้นอยู่กับความยาวเชือกนั้นคือ คาบการแกว่งมีความยาวนานมากขึ้นตามความยาวเชือกที่ยาวมากขึ้น อีกทั้งมีความสัมพันธ์แบบพาราโบลาดังรูปที่ 3 ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบคาบการแกว่งที่มุมต่าง ๆ พบว่า ที่มุมแกว่ง 10 20 และ 30 องศา คาบการแกว่งมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกที่ว่า คาบการแกว่งขึ้นอยู่กับความยาวเชือกและความเร่งเนื่องจากโน้มถ่วง แต่เนื่องจากความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเป็นค่าคงตัว ณ ตำแหน่งใด ๆ ดังนั้นความยาวเชือกจึงเป็นตัวแปรต้นเพียงตัวแปรเดียวที่ส่งผลให้คาบการแกว่งมีค่าใกล้เคียงกันแม้มุมการแกว่งกว้างขึ้น แต่เมื่อมุมแกว่งมีค่าสูงขึ้นเป็น 50 องศา สังเกตพบว่าคาบการแกว่งของลูกตุ้มมีค่าสูงขึ้นชัดเจนเนื่องจากแรงคืนตัวของลูกตุ้มจะแปรผันแบบเชิงเส้นกับการกระจัดเชิงมุมเมื่อแกว่งด้วยมุมแคบ ๆ เท่านั้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาของ Sardjito [9]

ตารางที่ 1 คาบการแกว่งของลูกตุ้มที่ความยาวเชือกและมุมแกว่งต่าง ๆ

| ความยาวเชือก<br>(เมตร) | คาบการแกว่งของลูกตุ้ม (วินาที) |             |             |             |
|------------------------|--------------------------------|-------------|-------------|-------------|
|                        | 10 องศา                        | 20 องศา     | 30 องศา     | 50 องศา     |
| 0.2                    | 1.001±0.002                    | 0.891±0.000 | 0.896±0.002 | 0.928±0.002 |
| 0.4                    | 1.270±0.001                    | 1.277±0.005 | 1.289±0.001 | 1.326±0.002 |
| 0.6                    | 1.542±0.001                    | 1.574±0.000 | 1.584±0.002 | 1.639±0.001 |
| 0.8                    | 1.787±0.003                    | 1.807±0.003 | 1.812±0.002 | 1.868±0.007 |
| 1.0                    | 2.009±0.001                    | 2.036±0.007 | 2.061±0.002 | 2.120±0.006 |



**รูปที่ 3** ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างคาบการแกว่งของลูกตุ้มกับความยาวเชือก

### 3.2 ผลการใช้สมการเพื่อคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

เพื่อศึกษาสมการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่เหมาะสมและแม่นยำจึงวิเคราะห์เปรียบเทียบการคำนวณด้วยสมการอย่างง่ายและสมการประมาณค่าแบบละเอียด โดยทดลองแกว่งลูกตุ้มซึ่งผูกติดกับเชือกที่มีความยาว 0.2 0.4 0.6 0.8 และ 1.0 เมตร เคลื่อนที่ด้วยมุมแกว่ง 10 20 30 และ 50 องศา ดังแสดงในตารางที่ 2 พบว่าที่มุมแกว่ง 10 องศา และแกว่งด้วยเชือกยาว 0.2 เมตร ส่งผลต่อคาบการแกว่งซึ่งเมื่อนำไปคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกด้วยสมการ ทั้งสมการอย่างง่ายและสมการประมาณค่าแบบละเอียดแล้วพบว่ามีความคลาดเคลื่อนสูงประมาณร้อยละ 19 ทั้ง 2 กรณี แต่เมื่อพิจารณาการแกว่งที่มีความยาวเชือก 0.4 ถึง 1.0 มีค่าความคลาดเคลื่อนลดลงน้อยกว่าร้อยละ 3 จึงสรุปได้ว่า การศึกษาการแกว่งของวัตถุที่มุมแคบ ๆ ควรใช้เชือกที่มีขนาดความยาวมากกว่า 0.2 เมตร จึงจะช่วยลดค่าความคลาดเคลื่อนของการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งความยาวเชือกมิได้ส่งผลโดยตรงต่อความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกแต่ส่งผลต่อคาบการแกว่ง นั่นคือ การใช้เชือกสั้นจะทำให้คาบการแกว่งและโมเมนต์ความเฉื่อยมีค่าน้อย แรงเสียดทานที่จุดหมุนจะมีอิทธิพลต่อการแกว่งสูง [6] ส่งผลให้การทดลองซ้ำแต่ละครั้งจึงเกิดความไม่เที่ยงตรงของการทดลองได้ง่ายซึ่งส่งผลต่อเนื่องถึงความคลาดเคลื่อนที่มากขึ้นในการคำนวณค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

เมื่อพิจารณาเฉพาะกรณีที่แกว่งลูกตุ้มด้วยมุม 10 องศา ที่ความยาวเชือกสูงขึ้นไปเป็น 0.4 0.6 0.8 และ 1.0 เมตร พบว่า การใช้สมการอย่างง่ายในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกส่งผลต่อค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่าการคำนวณด้วยสมการประมาณแบบละเอียดเพียงเล็กน้อย เช่น ที่ความยาวเชือก 0.4 เมตร ค่าความคลาดเคลื่อนเมื่อใช้สมการอย่างง่ายในการคำนวณมีค่าร้อยละ 0.10 ขณะที่เมื่อใช้สมการประมาณแบบละเอียดมีค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละ 0.48 หรือที่ความยาวเชือก 0.6 เมตร ค่าความคลาดเคลื่อนเมื่อใช้สมการอย่างง่ายในการคำนวณมีค่าร้อยละ 1.82 และเมื่อใช้สมการประมาณแบบละเอียดมีค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละ 2.21 บ่งชี้ได้ว่า ที่มุมแกว่งแคบ ๆ ประมาณไม่เกิน 10 องศา การใช้สมการอย่างง่ายหรือสมการประมาณแบบละเอียดสามารถใช้คำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้โดยส่งผลต่อค่าความคลาดเคลื่อนไม่แตกต่างกันมากนัก

เมื่อสังเกตผลการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกด้วยสมการอย่างง่ายที่มุมแกว่ง 10 20 30 และ 50 องศา และที่ความยาวเชือก 0.2 0.4 0.6 0.8 และ 1.0 เมตร พบว่า ความคลาดเคลื่อนในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีค่ามากขึ้นตามการเพิ่มขึ้นของค่ามุมแกว่ง เช่น ที่มุมแกว่ง 10 องศา ความคลาดเคลื่อนของทุกความยาวเชือกมีค่าในช่วงร้อยละ 0.05 ถึง 1.82 ขณะที่เมื่อมุมแกว่งกว้างขึ้นเป็น 20 30 และ 50 องศา ความคลาดเคลื่อนของทุกความยาวเชือกมีค่าสูงขึ้นโดยมีค่าในช่วงร้อยละ 1.09 ถึง 2.66 ร้อยละ 0.47 ถึง 5.03 และร้อยละ 6.33 ถึง 10.19 ตามลำดับ นั่นคือการใช้สมการอย่างง่ายคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่มุมการแกว่งมากกว่า 10 องศา ส่งผลให้ความคลาดเคลื่อนในการคำนวณมีค่าสูงเนื่องด้วยที่มาของสมการอย่างง่ายจะคำนวณได้แม่นยำเมื่อมุมแกว่งเป็นมุมแคบเนื่องจากสมการอย่างง่ายเกิดจากการที่ต้องประมาณค่า  $\sin \theta$  ให้มีค่าเป็น  $\theta$  ซึ่งจะเป็นจริงเมื่อมุมแกว่งเป็นมุมแคบไม่เกิน 10 องศา

และเมื่อพิจารณาร้อยละความคลาดเคลื่อนในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่มุมการแกว่งมากขึ้นเป็น 20 30 และ 50 องศา จะพบความแตกต่างของร้อยละความคลาดเคลื่อนในการคำนวณระหว่างการใช้สมการทั้งสองรูปแบบที่ความยาวเชือกค่าต่างๆ ได้อย่างชัดเจน เช่น ที่มุมแกว่งเป็น 20 องศา ความคลาดเคลื่อนในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกโดยใช้สมการอย่างง่ายที่ความยาวเชือก 0.4 ถึง 1.0 เมตร มีค่าในช่วงร้อยละ 1.10 ถึง 2.66 ขณะที่เมื่อใช้สมการประมาณแบบละเอียดพบว่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงอยู่ในช่วงร้อยละ 0.42 ถึง 1.16 หรือที่มุมแกว่งเป็น 50 องศา ความคลาดเคลื่อนในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกด้วยสมการอย่างง่ายที่ความยาวเชือก 0.4 ถึง 1.0 เมตร มีค่าในช่วงร้อยละ 7.47 ถึง 10.19 ขณะที่เมื่อใช้สมการประมาณแบบละเอียดในการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกพบว่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงอยู่ในช่วงร้อยละ 0.75 ถึง 1.95 นั่นคือการใช้สมการประมาณค่าแบบละเอียดส่งผลให้คำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้แม่นยำมากขึ้น เมื่อมุมการแกว่งมากกว่า 10 องศา ซึ่งค่ามุมแกว่งมิได้ส่งผลโดยตรงต่อความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเนื่องจากพื้นผิวโลกมีค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเฉลี่ยคงที่แต่มุมการแกว่งเป็นตัวแปรที่ส่งผลต่อการประมาณการกระจายอนุกรมเทเลอร์ในพจน์ของค่า  $\sin \theta$  ในสมการ (3)

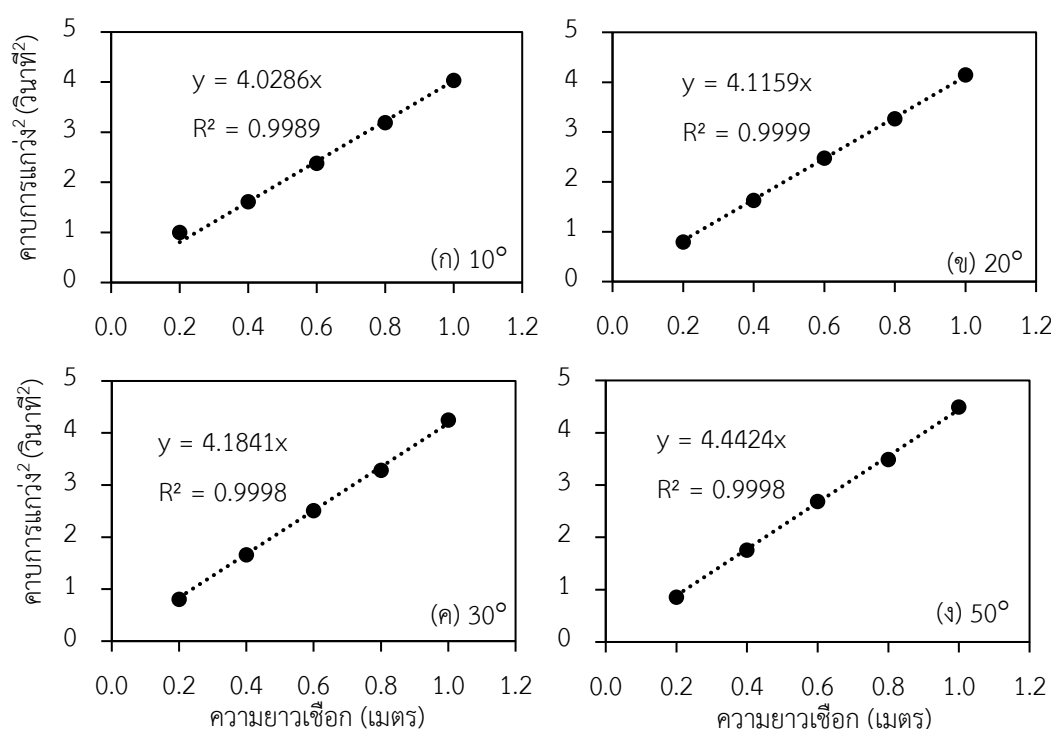
**ตารางที่ 2** ผลการคำนวณเปรียบเทียบความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกโดยใช้สมการอย่างง่ายและสมการประมาณค่าแบบละเอียด

| มุม<br>กว้าง<br>(องศา) | ความยาวเชือก<br>(เมตร) | สมการอย่างง่าย                          |                           | สมการประมาณค่าแบบละเอียด                |                           |
|------------------------|------------------------|-----------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------|---------------------------|
|                        |                        | ความเร่ง<br>(เมตร/วินาที <sup>2</sup> ) | ร้อยละความ<br>คลาดเคลื่อน | ความเร่ง<br>(เมตร/วินาที <sup>2</sup> ) | ร้อยละความ<br>คลาดเคลื่อน |
| 10°                    | 0.2                    | 7.89                                    | 19.40                     | 7.92                                    | 19.09                     |
|                        | 0.4                    | 9.80                                    | 0.10                      | 9.83                                    | 0.48                      |
|                        | 0.6                    | 9.97                                    | 1.82                      | 10.00                                   | 2.21                      |
|                        | 0.8                    | 9.66                                    | 1.27                      | 9.70                                    | 0.90                      |
|                        | 1.0                    | 9.78                                    | 0.05                      | 9.82                                    | 0.33                      |
| 20°                    | 0.2                    | 9.94                                    | 1.61                      | 10.09                                   | 3.17                      |
|                        | 0.4                    | 9.68                                    | 1.09                      | 9.83                                    | 0.43                      |
|                        | 0.6                    | 9.56                                    | 2.28                      | 9.71                                    | 0.78                      |
|                        | 0.8                    | 9.68                                    | 1.10                      | 9.83                                    | 0.42                      |
|                        | 1.0                    | 9.52                                    | 2.66                      | 9.67                                    | 1.16                      |
| 30°                    | 0.2                    | 9.83                                    | 0.47                      | 10.18                                   | 4.00                      |
|                        | 0.4                    | 9.51                                    | 2.83                      | 9.84                                    | 0.58                      |
|                        | 0.6                    | 9.44                                    | 3.49                      | 9.77                                    | 0.10                      |
|                        | 0.8                    | 9.62                                    | 1.64                      | 9.96                                    | 1.81                      |
|                        | 1.0                    | 9.29                                    | 5.03                      | 9.62                                    | 1.69                      |
| 50°                    | 0.2                    | 9.16                                    | 6.33                      | 10.10                                   | 3.20                      |
|                        | 0.4                    | 8.98                                    | 8.23                      | 9.89                                    | 1.11                      |
|                        | 0.6                    | 8.81                                    | 9.92                      | 9.71                                    | 0.75                      |
|                        | 0.8                    | 9.05                                    | 7.47                      | 9.97                                    | 1.95                      |
|                        | 1.0                    | 8.79                                    | 10.19                     | 9.68                                    | 1.05                      |

### 3.3 ผลการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกจากความชันของกราฟ

การคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกด้วยการสร้างกราฟ เริ่มต้นจากการวัดคาบการแกว่งของลูกตุ้มซึ่งผูกติดกับเชือกที่มีความยาว 0.2 0.4 0.6 0.8 และ 1.0 เมตร และเคลื่อนที่ด้วยมุมกว้าง 10 20 30 และ 50 องศา แล้วสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างคาบการแกว่งยกกำลังสองและความยาวเชือก ดังรูปที่ 4 พบว่าค่า R-Squared ( $R^2$ ) มีค่าในช่วง 0.9989 ถึง 0.9999 นั้นหมายถึง สมการเส้นตรงสามารถอธิบายหรือทำนายคาบการแกว่งได้แม่นยำร้อยละ 99.89 ถึง 99.99 เมื่อนำค่าความชันของกราฟเชิงเส้นไปคำนวณ

ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้ผลการคำนวณความเร่งและความคลาดเคลื่อนเมื่อเปรียบเทียบกับค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ณ จังหวัดอุดรธานี ซึ่งตรวจวัดโดยสถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติ (9.78 เมตรต่อวินาที<sup>2</sup>) แสดงดังตารางที่ 3 ซึ่งสังเกตพบความชันของเส้นแนวโน้มในกราฟมีค่าสูงขึ้นตามค่ามุมแกว่ง จากสมการ (6) และ (7) พบว่าพจน์ของความชันเป็นตัวส่วนในสมการ ดังนั้นจึงส่งผลโดยตรงต่อการคำนวณที่ทำให้ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีค่าลดลง จึงคลาดเคลื่อนจากค่ามาตรฐานมากขึ้น ดังเช่นเมื่อมุมแกว่งมีค่ามากขึ้นจาก 10 องศา เป็น 50 องศา สอดคล้องกับค่าความคลาดเคลื่อนที่มีค่าร้อยละ 0.16 ที่มุมแกว่ง 10 องศา และเพิ่มขึ้นเป็นร้อยละ 9.17 ที่มุมแกว่ง 50 องศา ดังนั้นจึงบ่งชี้ได้ว่าการคำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกจากความชันของกราฟโดยใช้สมการอย่างง่าย จะมีความแม่นยำและความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าร้อยละ 1 เมื่อคาบการแกว่งมีค่าไม่เกิน 10 องศา แต่เมื่อมุมแกว่งเป็น 20 30 และ 50 องศา พบว่าการคำนวณโดยใช้สมการประมาณแบบละเอียดจะมีความแม่นยำและความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าการใช้สมการอย่างง่าย ซึ่งได้ข้อสรุปที่สอดคล้องกันกับการคำนวณโดยตรงจากสมการ



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างคาบการแกว่งยกกำลังสองกับความยาวเชือก

ตารางที่ 3 ผลการคำนวณเปรียบเทียบความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเมื่อใช้ค่าความชันจากกราฟ

| มุม<br>แกว่ง<br>(องศา) | ความชัน | $R^2$  | สมการอย่างง่าย                          |                           | สมการประมาณค่าแบบละเอียด                |                           |
|------------------------|---------|--------|-----------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------|---------------------------|
|                        |         |        | ความเร่ง<br>(เมตร/วินาที <sup>2</sup> ) | ร้อยละความ<br>คลาดเคลื่อน | ความเร่ง<br>(เมตร/วินาที <sup>2</sup> ) | ร้อยละความ<br>คลาดเคลื่อน |
| 10°                    | 4.0286  | 0.9989 | 9.80                                    | 0.16                      | 9.84                                    | 0.54                      |
| 20°                    | 4.1159  | 0.9999 | 9.59                                    | 1.97                      | 9.67                                    | 1.12                      |

| มุม<br>กว้าง | ความชัน<br>(องศา) | $R^2$  | สมการอย่างง่าย                          |                           | สมการประมาณค่าแบบละเอียด                |                           |
|--------------|-------------------|--------|-----------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------|---------------------------|
|              |                   |        | ความเร่ง<br>(เมตร/วินาที <sup>2</sup> ) | ร้อยละความ<br>คลาดเคลื่อน | ความเร่ง<br>(เมตร/วินาที <sup>2</sup> ) | ร้อยละความ<br>คลาดเคลื่อน |
| 30°          | 4.1841            | 0.9998 | 9.43                                    | 3.56                      | 9.58                                    | 2.08                      |
| 50°          | 4.4424            | 0.9998 | 8.89                                    | 9.17                      | 9.79                                    | 0.08                      |

#### 4. สรุปผลการศึกษา

การใช้สมการอย่างง่ายหรือสมการประมาณค่าแบบละเอียดสามารถใช้คำนวณความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้โดยมีความแม่นยำไม่แตกต่างกันมากนักเมื่อขนาดของมุมกว้างเป็นมุมแคบ ๆ ไม่เกิน 10 องศา แต่เมื่อมุมกว้างกว้างขึ้นเป็น 20 30 และ 50 องศา พบว่าการใช้สมการประมาณแบบละเอียดส่งผลให้การคำนวณค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีความแม่นยำสูงขึ้นอย่างเห็นได้ชัดจึงส่งผลให้ความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงเป็นอย่างมากเมื่อเทียบกับการใช้สมการอย่างง่าย การวิจัยในอนาคตควรศึกษาเปรียบเทียบผลของขนาดของเชือกหรือขนาดและรูปร่างของมวลที่ใช้ในการแกว่งซึ่งเป็นตัวแปรที่ส่งผลต่อการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก

#### 5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบพระคุณ สาขาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และศูนย์วิทยาศาสตร์มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ที่สนับสนุนห้องปฏิบัติการในการดำเนินงานวิจัยในครั้งนี้

#### 6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Bull, D. (2012). Measurement of the acceleration due to gravity with a simple pendulum. Salford Journal of Physics, 1.
- [2] Vorahan, N., Wongdee, S., & Sangwaranatee, N. (2016). A study acceleration due to gravity from experiment set on simple pendulum by PIC microcontroller. Proceeding of the 7<sup>th</sup> Academic meeting national and International Conference: Speed up research towards world class university (pp. 2766-2775). Bangkok: Suan Sunandha Rajabhat University. (in Thai)
- [3] Suwanpayak, N., Sutthiyan, S., Kulsirirat, K., Srisongkram, P., Teeka, C., & Buranasiri, P. (2018). A comparison of gravitational acceleration measurement methods for undergraduate experiment. Journal of Physics: Conference Series, 1144, 012001.
- [4] Wattanajung, P. & Boonphud, V. (2022). Design and development of time period and gravitational acceleration measurement equipment for simple pendulum oscillation apparatus. Royal Thai naval academy journal of science and technology, 5(1), 93-104.

- [5] Jitkasroem, A., Panklang, T., Supadanaison, R., & Khambun, A. (2023). The development of a simple and low-cost pendulum clock experimental set via wi-fi system. *Vocational Education Innovation and Research Journal*, 7(2), 23-30. (in Thai)
- [6] Gui, J. (2023). The Relationship between air resistance and the vibrating period of simple pendulum. *Proceeding of the 2nd International Conference on Computing Innovation and Applied Physics (CONF-CIAP 2023)* (pp. 282-287). Institute of Physics Publishing. Curran Associates, Inc.
- [7] Beléndez, A., Rodes, J. J., Beléndez, T., & Hernández, A. (2009). Approximation for a large-angle simple pendulum period. *Eustrungan Journal of Physics*, 30(2), 25.
- [8] Piruenrom, T. & Woradech, N. (2018). The measurement of gravity in Thailand and its importance. <https://www.nimt.or.th/main/?p=21307>.
- [9] Sardjito, N. Y. (2020). The period of physical pendulum motion with large angular displacement. *Advances in Engineering Research*, 198, 197-201.