

การวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีติดตั้งใน น้ำทะเลลึกโดยใช้ทฤษฎีการเสีรूपด้วยแรงเฉือนอันดับสูง

พิชญ์ นันทไชยศรี¹ หทัยกาญจน์ หนันตุลย์² คมกร ไชยเดชาร³ และ วีรพันธุ์ เจียมมีปริชา^{4*}

^{1,2,3,4*}สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน

E-mail: ¹pit.na@rmuti.ac.th, ²hathaikan.na@rmuti.ac.th,

³komkorn@rmuti.ac.th, ^{4*}weeraphan.ji@rmuti.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอผลตอบสนองทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีติดตั้งในน้ำทะเลลึก การคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางจะอาศัยหลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และใช้ทฤษฎีการเสีรूपด้วยแรงเฉือนอันดับสูงในการนิยามค่าการเสีรूपของโครงสร้างเปลือกบาง การสร้างฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางจะสามารถเขียนได้โดยใช้หลักการของงานเสมือน การคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณค่าการเสีรूपทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบไอโซพารามेटริกจำนวน 9 จุดต่อ ผลของแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกที่กระทำต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีภายใต้การเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของความสูงต่อความยาวรัศมีที่ฐานรองรับของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีและเงื่อนไขของฐานรองรับได้นำเสนอในบทความนี้ จากผลการศึกษาพบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสีรूपจะขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนความสูงต่อความยาวรัศมีที่ฐานรองรับของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรี โดยที่โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมจะมีค่าการเสีรूपตามแนวเส้นตั้งฉากน้อยกว่ากรณีของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบเตี้ยและแบบสูงที่บริเวณจุดยอดและฐานรองรับ ตามลำดับ

คำสำคัญ: ผลตอบสนองทางสถิติศาสตร์ โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรี เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ ทฤษฎีการเสีรूपด้วยแรงเฉือนอันดับสูง วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

* Corresponding author, e-mail: weeraphan.ji@rmuti.ac.th

Static Analysis of Deep Water Hemi-Ellipsoidal Shells by Higher-Order Shear Deformation Theory

Pit Nantachaisri¹, Hathaikan Nandun², Komkorn Chaidachatorn³, Weeraphan Jiammeepreecha^{4*}

^{1,2,3,4*}Department Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology,
Rajamangala University of Technology Isan

E-mail: ¹pit.na@rmuti.ac.th, ²hathaikan.na@rmuti.ac.th,
³komkorn@rmuti.ac.th, ^{4*}weeraphan.ji@rmuti.ac.th

Abstract

This paper presents the static response of deep water hemi-ellipsoidal shells. The shell geometry is determined using differential geometry, while the displacement field is derived based on higher-order shear deformation theory. The energy functional of the shell system can be formulated via the principle of virtual work. The numerical results of the static deformed configuration of the hemi-ellipsoidal shells are obtained by the finite element method employing nine-node quadrilateral isoparametric elements. Specifically, this study examines the effects of external hydrostatic pressure on hemi-ellipsoidal shells under various height-to-base radius ratios and support conditions. The results indicate that the displacement response depends on the height-to-base radius ratios of the hemi-ellipsoidal shells. The normal displacement of the hemi-spherical shells is lower than the hemi-oblate and prolate shells at the apex and support, respectively.

Keywords: Static response, Deep water hemi-ellipsoidal shells, Differential geometry, Higher-order shear deformation theory, Finite element method

* Corresponding author, e-mail: weeraphan.ji@rmu.ac.th

Submission date: 02 02 2025 / Revised date: 14 03 2025 / Accepted date: 25 03 2025

1. ที่มาและความสำคัญ

ในปัจจุบันการใช้งานโครงสร้างเปลือกบาง (Shell Structures) ทางวิศวกรรมโยธาและเครื่องกลไม่ได้ถูกจำกัดเพียงโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม (Spherical Shells) ทั่วไป ที่มีค่าความยาวรัศมีเท่ากันตลอดหน้าตัดของโครงสร้าง แต่การเลือกใช้งานโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงอื่น ๆ ที่มีความซับซ้อนเริ่มเป็นที่นิยมมากขึ้นในงานวิศวกรรมหลากหลายแขนง เช่น วิศวกรรมการบิน วิศวกรรมเรือ และวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเล เป็นต้น [1-6] โดยเฉพาะอย่างยิ่งโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรี (Ellipsoidal Shells) ซึ่งเป็นโครงสร้างที่ถูกพัฒนาขึ้นจากโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีค่าความยาวรัศมีเท่ากันตลอดหน้าตัดของโครงสร้าง แต่โครงสร้างดังกล่าวจะมีลักษณะที่แตกต่างกันคือจะมีความยาวรัศมีหน้าตัดของโครงสร้างไม่เท่ากันตลอดหน้าตัด ดังนั้นโครงสร้างดังกล่าวจึงมีคุณลักษณะพิเศษทำให้การวิเคราะห์ปัญหามีความซับซ้อนสูงขึ้น [7]

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีจะสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่มหลัก คือ การวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ พลศาสตร์ และเสถียรภาพของโครงสร้างเปลือกบาง โดยเริ่มต้นจากงานวิจัยของ Zingoni [8] ได้นำเสนอสมการสำหรับการวิเคราะห์ความเค้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีบรรจุของเหลว จากนั้น Ross and Etheridge [9] ได้ทำการทดสอบการสั่นและเสถียรภาพของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรี ต่อมาในปี 2001 Ross และคณะ [10] ได้ทำการทดสอบเสถียรภาพของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบเตี้ย (Oblate Shells) ภายใต้แรงดันน้ำจากภายนอก นอกจากนี้ Ross และคณะ [11] ยังได้ทำการทดสอบการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบสูง (Prolate Shells) ภายใต้แรงดันน้ำจากภายนอก Smith and Blachut [12] ได้ทำการวิเคราะห์และทดสอบเสถียรภาพของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบสูงภายใต้แรงดันสมมาตรจากภายนอก Tangbanjongkij และคณะ [13] ได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาการเสียรูปขนาดใหญ่ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีรับแรงดันสมมาตรภายในโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน (Membrane Theory) Barathan and Rajamohan [14] ได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาเสถียรภาพแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Buckling Analysis) และทดสอบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีรับแรงดันจากภายนอก Chanto และคณะ [15] ได้นำเสนอผลของโมเมนต์ดัดแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่มีต่อพฤติกรรมกลการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรี Chanto และคณะ [16] และ Kerdsuk และคณะ [17] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมกลการโก่งเดาะของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีภายใต้หน้าหนักบรรทุกแบบสมมาตรและแรงดันน้ำ ตามลำดับ

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้นจะพบว่า การวิเคราะห์ปัญหาทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีภายใต้แรงดันน้ำสถิตจะมีการศึกษาน้อยมาก ยกเว้นงานวิจัยของ Tangbanjongkij และคณะ [18] ได้นำเสนอสมการสำหรับการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีรับแรงดันน้ำสถิตโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนเพียงอย่างเดียวในการวิเคราะห์ปัญหา อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติพบว่าถ้าโครงสร้างมีขนาดความหนาเพิ่มขึ้นจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องพิจารณาผลของความแข็งแกร่งเนื่องจากโมเมนต์ดัด (Bending Rigidity) และการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือน (Shear Deformation) เพื่อให้ผลการคำนวณมีความถูกต้องแม่นยำสูงขึ้น และเกิดความเหมาะสมกับการใช้งานโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีในงานวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเลดังกล่าว

2. วัตถุประสงค์

สำหรับวัตถุประสงค์ของบทความนี้ คือ การนำเสนอผลการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีติดตั้งในน้ำทะเลลึกโดยใช้ทฤษฎีการเสียดรูปด้วยแรงเฉือนอันดับสูง (Higher-Order Shear Deformation Theory) [19-20] การกำหนดรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีจะอาศัยทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) [21-22] ใช้หลักการของงานเสมือน (Principle of Virtual Work) [23] ในการสร้างสมการพลังงานของระบบโครงสร้าง จากนั้นใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) [24-25] ในการหาค่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาค่าการเสียดรูปของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีติดตั้งในน้ำทะเลลึก

3. ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์

3.1 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

โครงสร้างเปลือกบางจะมีสมบัติยืดหยุ่นแบบเป็นเชิงเส้น (Linearly Elastic Material) โดยที่ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีจะมีค่าคงที่ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงภายหลังรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก (External Hydrostatic Pressure) ค่าการเสียดรูปและแรงภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักของโครงสร้างจะไม่นำมาพิจารณาเนื่องจากมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก และเงื่อนไขของฐานรองรับจะสมมติให้เป็นแบบยึดแน่น (Clamped Support) อย่างสมบูรณ์แบบที่บริเวณพื้นทะเล

3.2 แบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรี

กำหนดให้รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีสามารถนิยามได้โดยอ้างอิงตามระบบพิกัดเส้นโค้งมุมฉาก (θ, ϕ, z) โดยที่ (θ, ϕ) คือ พารามิเตอร์ของพื้นผิวอ้างอิงตามแนวเส้นพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนและลองจิจูดตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 1 ดังนั้น เราสามารถนิยามเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนา ($z = 0$) ได้ดังสมการที่ (1)

$$\mathbf{r} = a \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + b \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (1)$$

เมื่อ a และ b คือ ความยาวรัศมีที่ฐานรองรับและความสูงของโครงสร้างเปลือกบางตามลำดับ โดยที่ $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vectors) อ้างอิงตามแนวพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate) ดังนั้น การจำแนกประเภทของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีจะสามารถทำได้โดยกำหนดให้ $b/a < 1$ และ $b/a > 1$ จะเรียกโครงสร้างดังกล่าวว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบเตี้ยและแบบสูงตามลำดับ สำหรับกรณี $b/a = 1$ จะเรียกว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม จากทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) [21-22] จะสามารถคำนวณหาองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ (Metric Tensor Components) ของพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนา ได้ดังสมการที่ (2)

$$A(\theta, \phi) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right)^{1/2} = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (2ก)$$

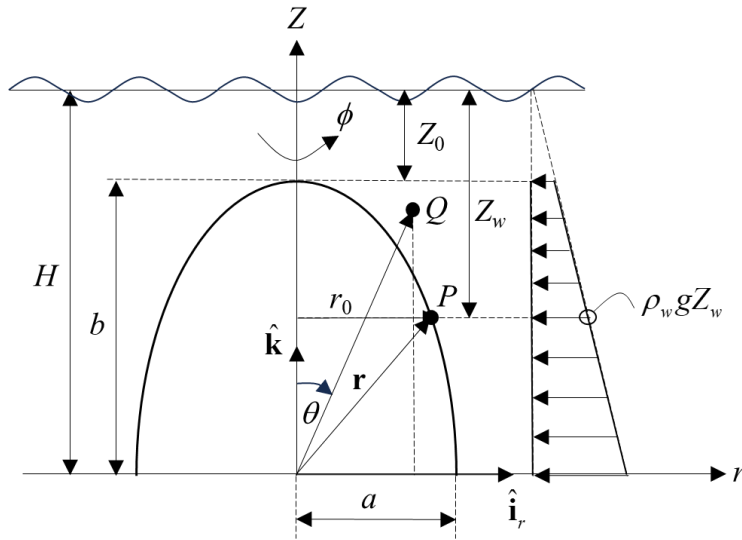
$$B(\theta, \phi) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right)^{1/2} = a \sin \theta \quad (2ข)$$

สำหรับการคำนวณหาค่าเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีที่ตำแหน่งอื่น ๆ (θ, ϕ, z) จะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (3)

$$\mathbf{R}(\theta, \phi, z) = \mathbf{r}(\theta, \phi) + z\hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) \quad (3)$$

โดยที่ $-h/2 \leq z \leq h/2$ และ $\hat{\mathbf{n}}$ คือ เวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (4)

$$\hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{A} (b \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + b \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + a \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \quad (4)$$



รูปที่ 1 โครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีติดตั้งในน้ำทะเลลึก

จากสมการที่ (1) และ (4) จะสามารถนิยามค่าองค์ประกอบเมตริกซ์ความโค้ง (Metric Curvature Components) ของพื้นผิวอ้างอิง ได้ดังสมการที่ (5)

$$L(\theta, \phi) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\frac{ab}{A} \quad (5ก)$$

$$N(\theta, \phi) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \phi^2} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\frac{ab \sin^2 \theta}{A} \quad (5ข)$$

จากสมการที่ (2) และ (5) จะสามารถคำนวณหาค่ารัศมีความโค้งหลัก (Principal Radii of Curvature) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีได้ดังสมการที่ (6)

$$R_\theta(\theta, \phi) = A^2 / L \quad (6ก)$$

$$R_\phi(\theta, \phi) = B^2 / N \quad (6ข)$$

3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูป

ค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางจะพิจารณาผลของแรงเฉือนโดยใช้ทฤษฎีการเสียรูปด้วยแรงเฉือนอันดับสูง [19-20] ซึ่งจะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (7)

$$u(\theta, \phi, z) = u_0(\theta, \phi) + zu_1(\theta, \phi) + z^2u_2(\theta, \phi) + z^3u_3(\theta, \phi) \quad (7ก)$$

$$v(\theta, \phi, z) = v_0(\theta, \phi) + zv_1(\theta, \phi) + z^2v_2(\theta, \phi) + z^3v_3(\theta, \phi) \quad (7ข)$$

$$w(\theta, \phi, z) = w_0(\theta, \phi) \quad (7ค)$$

เมื่อ (u_0, v_0, w_0) คือ ค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนา $(z=0)$ ตามแนวเส้นเมอร์ริเดียน เส้นรอบวง และเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนตามลำดับ สำหรับค่าพารามิเตอร์ (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , และ (u_3, v_3) คือค่าการหมุนเนื่องมาจากผลของแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ ดังนั้นสมการที่ (7) จะสามารถเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (8)

$$\{\lambda\} = [H]\{\lambda_0\} \quad (8)$$

เมื่อ $\{\lambda\}^T = [u \ v \ w]$ และ $\{\lambda_0\}^T = [u_0 \ v_0 \ w_0 \ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]$ คือ เวกเตอร์ของค่าการเสียรูปในระบบพิกัดรวมและพิกัดเฉพาะที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนา $(z=0)$ ตามลำดับ สำหรับ $[H]$ จะมีค่าดังสมการที่ (9)

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 & z^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ดังนั้นเราจะสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูป [26-27] ได้ดังสมการที่ (10)

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{A(1+z/R_\theta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{B} \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{Aw}{R_\theta} \right) \quad (10ก)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{B(1+z/R_\phi)} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{A} \frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{Bw}{R_\phi} \right) \quad (10ข)$$

$$\varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{A(1+z/R_\theta)} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{B(1+z/R_\phi)} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{A} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \quad (10ค)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{A(1+z/R_\theta)} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + A(1+z/R_\theta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{A(1+z/R_\theta)} \right) \quad (10ข)$$

$$\varepsilon_{\phi z} = \frac{1}{B(1+z/R_\phi)} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + B(1+z/R_\phi) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{B(1+z/R_\phi)} \right) \quad (10ง)$$

แทนค่าสมการที่ (7) ลงในสมการที่ (10) และจัดรูปใหม่จะสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (11)

$$\{\varepsilon\} = [\bar{H}]\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{\phi\phi}^0 \\ \varepsilon_{\theta\phi}^0 \\ \varepsilon_{\theta z}^0 \\ \varepsilon_{\phi z}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_{\theta\theta}^1 \\ K_{\phi\phi}^1 \\ K_{\theta\phi}^1 \\ K_{\theta z}^1 \\ K_{\phi z}^1 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} K_{\theta\theta}^2 \\ K_{\phi\phi}^2 \\ K_{\theta\phi}^2 \\ K_{\theta z}^2 \\ K_{\phi z}^2 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} K_{\theta\theta}^3 \\ K_{\phi\phi}^3 \\ K_{\theta\phi}^3 \\ K_{\theta z}^3 \\ K_{\phi z}^3 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{เมื่อ } \{\bar{\varepsilon}\} = [\varepsilon_{\theta\theta}^0 \ \varepsilon_{\phi\phi}^0 \ \varepsilon_{\theta\phi}^0 \ \varepsilon_{\theta z}^0 \ \varepsilon_{\phi z}^0 \ K_{\theta\theta}^1 \ K_{\phi\phi}^1 \ K_{\theta\phi}^1 \ K_{\theta z}^1 \ K_{\phi z}^1 \ K_{\theta\theta}^2 \ K_{\phi\phi}^2 \ K_{\theta\phi}^2 \ K_{\theta z}^2 \ K_{\phi z}^2 \ K_{\theta\theta}^3 \ K_{\phi\phi}^3 \ K_{\theta\phi}^3 \ K_{\theta z}^3 \ K_{\phi z}^3]^T$$

$$\text{และ } [\bar{H}] = [[I]_{5 \times 5} \ z [I]_{5 \times 5} \ z^2 [I]_{5 \times 5} \ z^3 [I]_{5 \times 5}] \text{ โดยที่ } [I]_{5 \times 5} \text{ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)}$$

ขนาด 5x5

3.4 ฟังก์ชันพลังงาน

สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain Relations) [23] จะสามารถนิยามได้จากสมการที่ (12)

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (12)$$

เมื่อ $\{\sigma\} = [\sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{\phi\phi} \ \sigma_{\theta\phi} \ \sigma_{\theta z} \ \sigma_{\phi z}]^T$ และ $[C]$ คือ เมทริกซ์คุณสมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบาง โดยที่สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (13)

$$[C] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \quad (13)$$

เมื่อ $Q_{11} = Q_{22} = E / (1 - \mu^2)$, $Q_{12} = Q_{21} = \mu E / (1 - \mu^2)$, และ $2Q_{44} = 2Q_{55} = 2Q_{66} = E / (1 - \mu)$ โดยที่ E คือ มอดุลัสยืดหยุ่น (Young's Modulus) และ μ คือ อัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's Ratio) ดังนั้นจะสามารถคำนวณค่าพลังงานความเครียด (U) ได้จากสมการที่ (14)

$$U = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \{\bar{\epsilon}\}^T [D] \{\bar{\epsilon}\} AB d\phi d\theta \quad (14)$$

เมื่อ $[D]$ คือ เมตริกซ์สมมาตร ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (15)

$$[D] = \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{H}]^T [C] [\bar{H}] \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\phi}\right) dz \quad (15)$$

4. วิธีดำเนินการวิจัย

การหาค่าตอบเชิงตัวเลขของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกจะสามารถทำได้โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [24-25] ทำการแบ่งชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางเป็นชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนและเส้นรอบวงโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบไอโซพารามेटริก (Quadrilateral Isoparametric Elements) จำนวน 9 จุดต่อในการประมาณค่าการเสียรูป ดังสมการที่ (16)

$$\{\lambda_0\} = \sum_{i=1}^9 N_i \{\lambda_{0i}\} \quad (16)$$

เมื่อ $\{\lambda_{0i}\}^T = [u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_{0i} \quad u_{1i} \quad v_{1i} \quad u_{2i} \quad v_{2i} \quad u_{3i} \quad v_{3i}]$ และ N_i คือฟังก์ชันรูปร่างสำหรับจุดต่อ i ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (17)

$$N_1 = 0.25(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \quad (17ก)$$

$$N_2 = 0.25(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \quad (17ข)$$

$$N_3 = 0.25(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \quad (17ค)$$

$$N_4 = 0.25(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \quad (17ง)$$

$$N_5 = 0.50(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \quad (17จ)$$

$$N_6 = 0.50(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (17จ)$$

$$N_7 = 0.50(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \quad (17ฉ)$$

$$N_8 = 0.50(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (17ซ)$$

$$N_9 = 1.00(1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (17ซ)$$

เมื่อ ξ และ η คือระยะพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) [25] ดังแสดงในรูปที่ 2 กำหนดให้

$\{\bar{\lambda}_0\}^T = [\lambda_{01} \ \lambda_{02} \ \lambda_{03} \ \lambda_{04} \ \lambda_{05} \ \lambda_{06} \ \lambda_{07} \ \lambda_{08} \ \lambda_{09}]$ ดังนั้นสมการที่ (16) จะสามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ (18)

$$\{\lambda_0\} = [N]\{\bar{\lambda}_0\} \quad (18)$$

เมื่อ $[N] = [N_1[I]_{9 \times 9} \ N_2[I]_{9 \times 9} \ \dots \ N_9[I]_{9 \times 9}]$ โดยที่ $[I]_{9 \times 9}$ คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)

ขนาด 9×9

4.1 เมตริกซ์ความแข็งแกร่งของชิ้นส่วน

การคำนวณหาค่าเวกเตอร์ความเครียดที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนา ($z=0$) โดยใช้สมการที่ (11) จะได้ดังสมการที่ (19)

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [B]\{\lambda_{0i}\} = [B_1][B_2] \dots [B_9]\{\lambda_{0i}\} \quad (19)$$

เมื่อ $[B]$ คือ เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูป ซึ่งจะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (20)

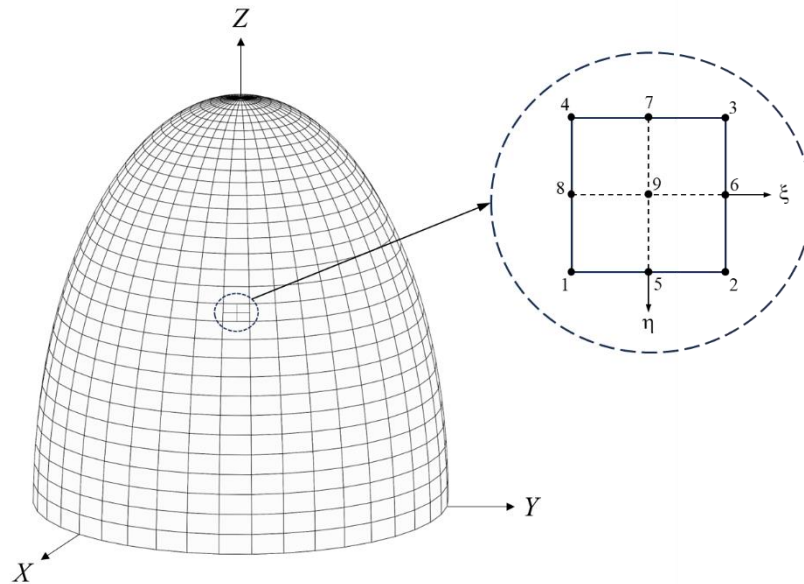
$$[B] = \sum_{i=1}^9 \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] & [B_{13}] & [B_{14}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] & [B_{23}] & [B_{24}] \\ [B_{31}] & [B_{32}] & [B_{33}] & [B_{34}] \\ [B_{41}] & [B_{42}] & [B_{43}] & [B_{44}] \end{bmatrix} \quad (20)$$

โดยที่ค่าเมตริกซ์ย่อยในสมการที่ (20) จะมีค่าดังสมการที่ (21)

$$[B_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \right) & \frac{N_i}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \phi} \right) & \frac{N_i}{R_\theta} \\ \frac{N_i}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{B} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \phi} \right) & \frac{N_i}{R_\phi} \\ \frac{1}{B} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \phi} \right) - \frac{N_i}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \phi} \right) & \frac{1}{A} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \right) - \frac{N_i}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} \right) & 0 \\ -\frac{N_i}{R_\theta} & 0 & \frac{1}{A} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \right) \\ 0 & -\frac{N_i}{R_\phi} & \frac{1}{B} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \phi} \right) \end{bmatrix} \quad (21\text{ก})$$

$$[B_{22}] = [B_{33}] = [B_{44}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \right) & \frac{N_i}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \phi} \right) \\ \frac{N_i}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) & \frac{1}{B} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{B} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \phi} \right) - \frac{N_i}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \phi} \right) & \frac{1}{A} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \right) - \frac{N_i}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \\ -\frac{N_i}{R_\theta} & 0 \\ 0 & -\frac{N_i}{R_\phi} \end{bmatrix} \quad (21\text{ข})$$

$$[B_{12}] = \frac{1}{2}[B_{23}] = \frac{1}{3}[B_{34}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (21\text{ค})$$



รูปที่ 2 ชิ้นส่วนและพิกัดทั่วไปของเอลิเมนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบไอโซพาราเมตริก

สำหรับเมตริกซ์ย่อย $[B_{21}]$, $[B_{31}]$, และ $[B_{41}]$ จะเป็นเมตริกซ์ศูนย์ขนาด 5×3 ในขณะที่เมตริกซ์ย่อย $[B_{13}]$, $[B_{14}]$, $[B_{24}]$, $[B_{32}]$, $[B_{42}]$, และ $[B_{43}]$ จะเป็นเมตริกซ์ศูนย์ขนาด 5×2 จากนั้นทำการเขียนสมการของพลังงาน

ความเครียดของชิ้นส่วนย่อยโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีได้โดยแทนสมการที่ (16) และ (19) ลงในสมการที่ (14) จะได้ดังสมการที่ (22)

$$U^e = \frac{1}{2} \{\delta_{0i}\}^T [K]^e \{\delta_{0i}\} \quad (22)$$

เมื่อ $[K]^e$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งของชิ้นส่วนย่อย ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (22)

$$[K]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| ABd\xi d\eta \quad (23)$$

เมื่อ $|J|$ คือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์จาโคเบียน [28]

4.2 สมการควบคุม

จากหลักการของงานเสมือน (Principle of Virtual Work) [23] จะสามารถเขียนสมการควบคุม (Governing Equation) ของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกได้ดังสมการที่ (24)

$$\delta\pi = \delta U - \delta\Omega = 0 \quad (24)$$

เมื่อ δ คือ สัญลักษณ์การแปรผัน (Variational Symbol) π คือ ผลรวมงานเสมือน (Total Virtual Work) และ $\delta\Omega$ คือ ค่างานเสมือนเนื่องจากแรงดันน้ำสถิต ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (25)

$$\delta\Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \delta\{\lambda_0\}^T \{p_w\} ABd\phi d\theta \quad (25)$$

เมื่อ p_w คือ ค่าแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น (Linearly Hydrostatic Pressure) ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (26)

$$p_w = \rho_w g Z_w \quad (26)$$

เมื่อ ρ_w คือ ความหนาแน่นจำเพาะของน้ำทะเล g คือ ค่าแรงโน้มถ่วงของโลก และ Z_w คือ ระยะทางในแนวตั้ง ณ ตำแหน่งที่พิจารณา ดังแสดงในรูปที่ 1 ดังนั้นเราจะสามารถเขียนสมการสมดุล (Equilibrium Equation) สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกดังสมการที่ (27)

$$[K]\{\lambda\} = \{\Omega\} \quad (27)$$

เมื่อ $[K]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรี และ $\{\Omega\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อโครงสร้าง ซึ่งสามารถนิยามได้จากผลรวมของชิ้นส่วนย่อยดังสมการที่ (28)

$$\{\Omega\}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\psi]^T \{p_w\} |J| ABd\xi d\eta \quad (28)$$

เมื่อ $[\psi]$ คือ เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างที่พิจารณาเฉพาะเทอมของค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนเท่านั้น

4.3 เงื่อนไขขอบเขต

สำหรับเงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับ ($\theta = 90^\circ$) จะพิจารณาเป็นแบบยึดหมุน (Hinged support) และแบบยึดแน่น (Clamped support) จะมีค่าดังสมการที่ (29)

$$\text{แบบยึดหมุน: } u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad (29ก)$$

$$\text{แบบยึดแน่น: } u_0 = v_0 = w_0 = u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = 0 \quad (29ข)$$

ดังนั้นสมการที่ (27) เป็นระบบสมการของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก ต้องทำการกำหนดเงื่อนไขของฐานรองรับจากสมการที่ (29) จึงจะสามารถคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [24-25]

5. ผลการวิเคราะห์

สำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีติดตั้งในน้ำทะเลลึก โดยใช้ทฤษฎีการเสียรูปด้วยแรงเฉือนอันดับสูง เนื่องจากผลเฉลยแบบแม่นยำยังไม่ครอบคลุมปัญหาของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรี ดังนั้นในการทดสอบการลู่เข้าและตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ จึงมีความจำเป็น โดยเริ่มต้นจากโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีค่าความยาวรัศมี 5 เมตร รับแรงดันภายในขนาด 0.5 เมกะปาสคาล โดยที่ความหนาและคุณสมบัติทางกลของโครงสร้างแสดงในตารางที่ 1 จากผลการศึกษาพบว่าเมื่อแบบจำลองมีจำนวนชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนตั้งแต่ 12 ชิ้นส่วน และจำนวนชิ้นส่วนตามแนวพิกัดเส้นรอบวงตั้งแต่ 16 ชิ้นส่วนขึ้นไป จะมีความแม่นยำของคำตอบสูงมากเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองที่มีจำนวนชิ้นส่วนสูงกว่า ดังแสดงในตารางที่ 2 ดังนั้นในบทความนี้เลือกใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีจำนวนชิ้นส่วนตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนและเส้นรอบวงเท่ากับ 16 และ 20 ชิ้นส่วน ตามลำดับ จากนั้นทำการเปรียบเทียบกับสูตรของ Roark [29] ที่มีค่าการเสียรูปที่ปลายด้านบน (w_d) เท่ากับ 0.428921569 มิลลิเมตร ในขณะที่ผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองมีค่าเท่ากับ 0.428917993 มิลลิเมตร ซึ่งมีความแตกต่างกันน้อยมาก

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

รายการ	ปริมาณ
ความยาวรัศมีที่ฐานรองรับ (a)	5 เมตร
ความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง (h)	0.05 เมตร
ความสูงของระดับน้ำทะเล (H)	40 เมตร
ความหนาแน่นของน้ำทะเล (ρ_w)	1025 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร
มอดุลัสยืดหยุ่น (E)	204×10^3 เมกะปาสคาล
อัตราส่วนปัวส์ซอง (μ)	0.3

ตารางที่ 2 การทดสอบการลู่เข้าของระยะการเสีรูปที่ปลายด้านบนของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงกลมรับแรงดันภายในสม่ำเสมอโดยใช้ทฤษฎีการเสีรูปด้วยแรงเฉือนอันดับสูง

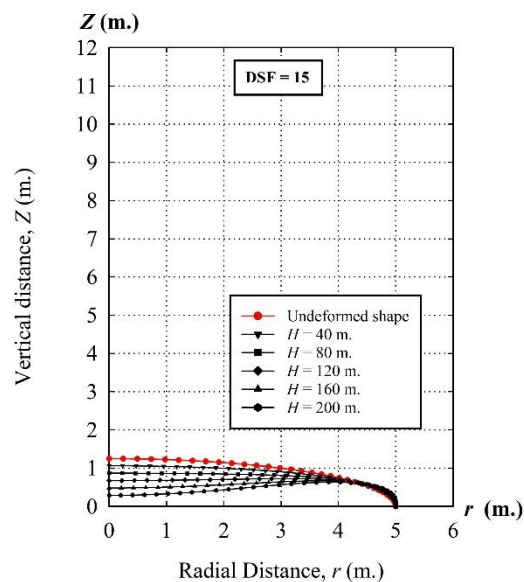
จำนวนชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัด เส้นเมอร์ริเดียน	จำนวนชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัด เส้นรอบวง	W_a (มิลลิเมตร)
8	12	0.428918018
12	16	0.428917991
16	20	0.428917993
20	24	0.428917994
24	28	0.428917994

5.1 ผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรี

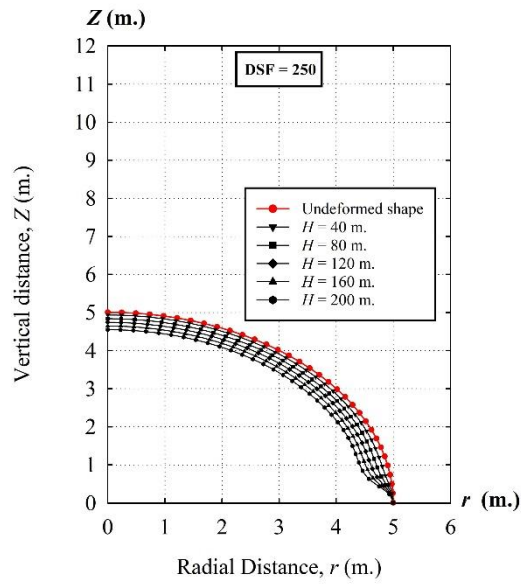
การศึกษาผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น โดยเริ่มทำการเปลี่ยนแปลงตั้งแต่ 40 ถึง 200 เมตร ในขณะที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 เป็นค่าคงที่ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง พบว่า เมื่อระดับความลึกของน้ำทะเลมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าการเสีรูปของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 3 เนื่องจากค่าการเสีรูปมีค่าน้อยมาก ดังนั้น ในการแสดงผลจึงจำเป็นต้องทำการคูณแฟคเตอร์ปรับค่าการเสีรูป (Displacement Scaling Factor, DSF) เพื่อทำการขยายค่าการเสีรูปให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น จากผลการศึกษาพบว่า โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบเตี้ย ($b/a < 1$) จะมีค่าการเสีรูปสูงมากเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่เป็นโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม ($b/a = 1$) และโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบสูง ($b/a > 1$) จากนั้นเมื่อทำการพิจารณาค่าการเสีรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมจะค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดแนวพิกัดเมอร์ริเดียน ดังแสดงในรูปที่ 3(ข) และเมื่อพิจารณาค่าการเสีรูปของโครงสร้าง

เปลือกบางรูปทรงรีแบบสูงจะพบว่ามีค่าการเสียรูปสูงมากในช่วงบริเวณฐานรองรับและจะเกิดค่าการเสียรูปน้อยมากในช่วงบริเวณจุดยอด ดังแสดงในรูปที่ 3(ค)

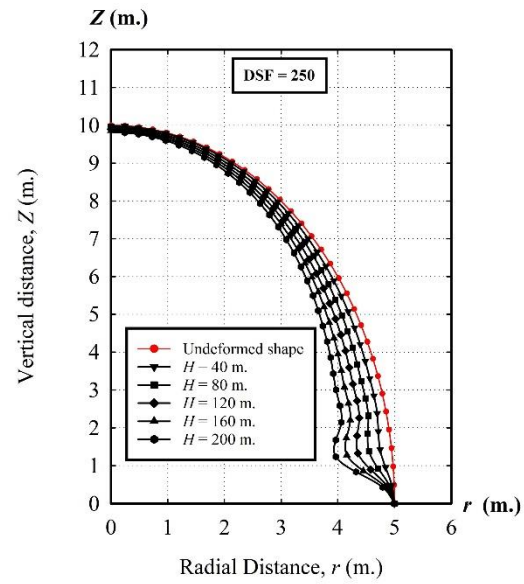
รูปที่ 4(ก) แสดงผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสกับความยาวส่วนโค้งเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีแบบเตี้ย พบว่า ค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสสูงสุดจะอยู่บริเวณกึ่งกลางความยาวส่วนโค้งเมอร์ริเดียน สำหรับโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงกลมจะเกิดค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสสูงสุดในช่วงบริเวณฐานรองรับ ดังแสดงในรูปที่ 4(ข) ในขณะที่โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบสูงจะเกิดค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสสูงสุดในช่วงกึ่งกลางความยาวส่วนโค้งเมอร์ริเดียนและจะมีค่าสูงในช่วงบริเวณฐานรองรับอีกด้วย ซึ่งจะแตกต่างจากกรณีของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีแบบเตี้ย ดังแสดงในรูปที่ 4(ค) รูปที่ 5(ก) แสดงผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีแบบเตี้ย พบว่า ค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากสูงสุดจะอยู่จุดยอดของโครงสร้างจะสอดคล้องกับรูปร่างของโครงสร้างดังแสดงในรูปที่ 3(ก) สำหรับโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงกลมจะเกิดค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนสูงสุดในช่วงบริเวณจุดยอดของโครงสร้างโดยมีค่าสม่ำเสมอตลอดช่วงแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงบริเวณฐานรองรับ ดังแสดงในรูปที่ 5(ข) ในขณะที่โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบสูงจะเกิดค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนสูงสุดในช่วงบริเวณฐานรองรับ และจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงบริเวณจุดยอด ดังแสดงในรูปที่ 5(ค)



(ก) $b/a = 0.25$

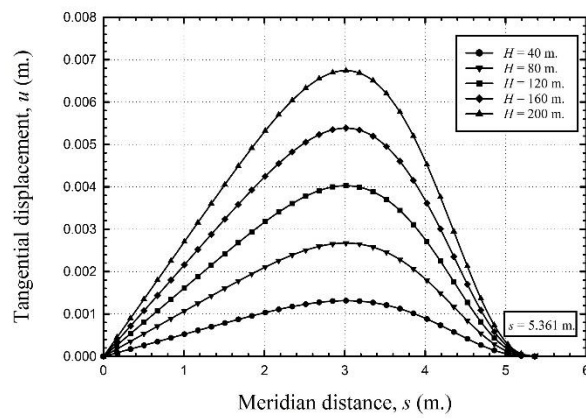


(ข) $b/a = 1.00$

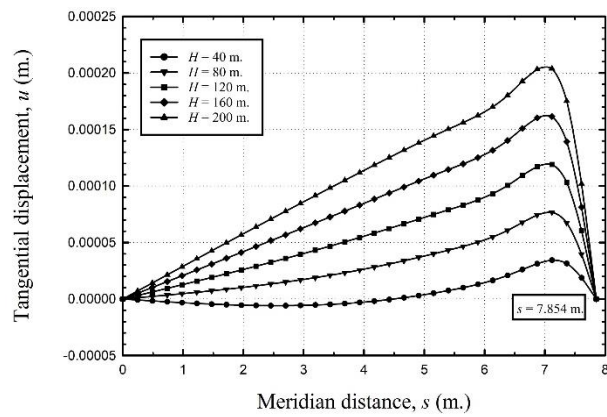


(ค) $b/a = 2.00$

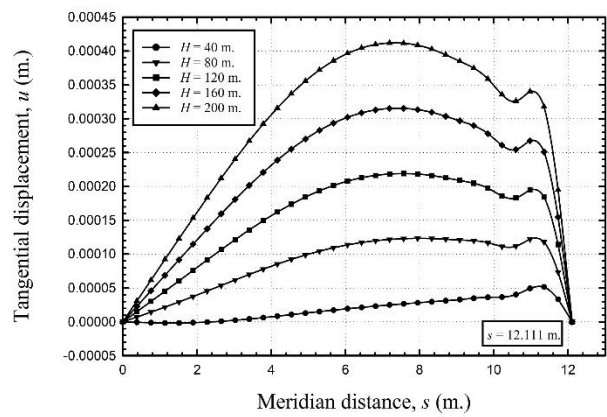
รูปที่ 3 ผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลที่มีต่อรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรี
ที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น



(ก) $b/a = 0.25$

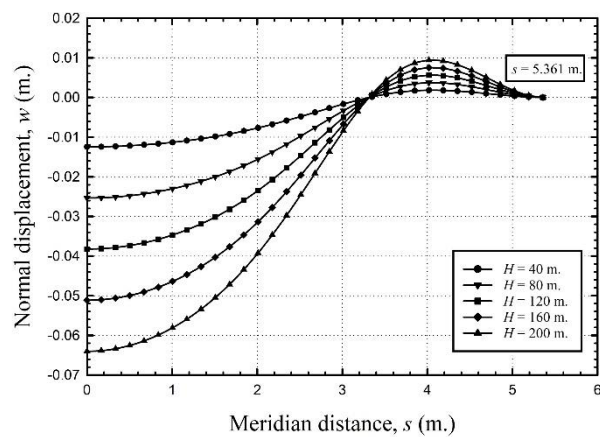


(ข) $b/a = 1.00$

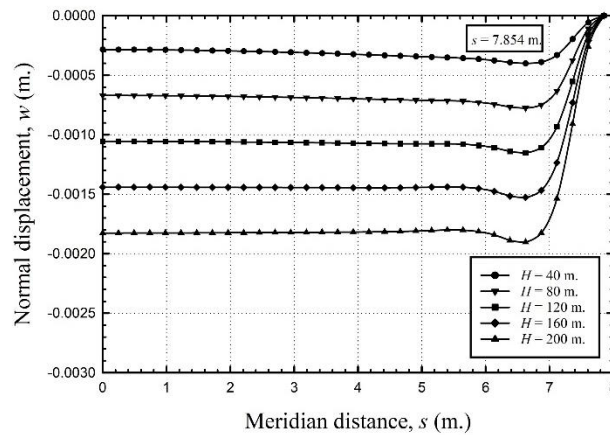
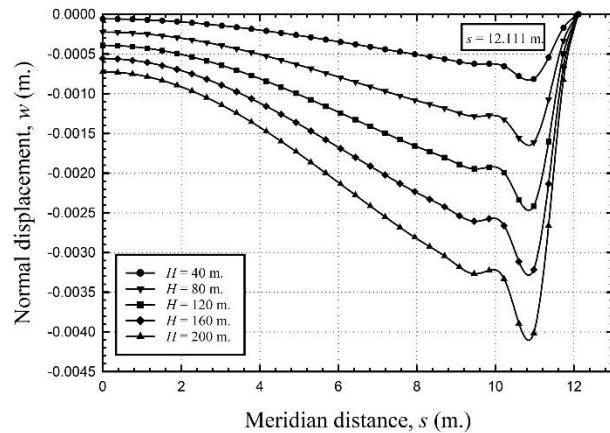


(ค) $b/a = 2.00$

รูปที่ 4 ผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสของโครงสร้างเปลือกบาง
แบบรูปทรงรีที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น



(ก) $b/a = 0.25$

(ข) $b/a = 1.00$ (ค) $b/a = 2.00$

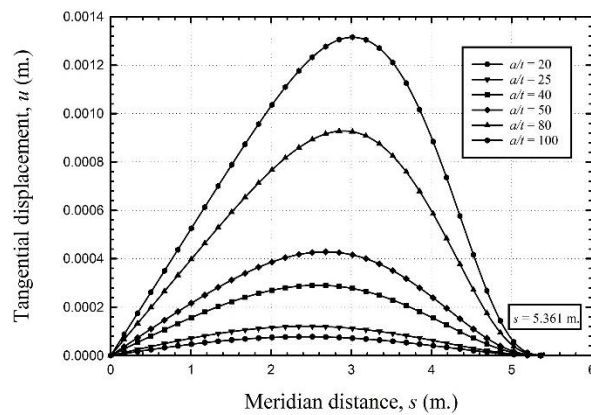
รูปที่ 5 ผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบาง
แบบรูปทรงรีที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

5.2 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีที่ฐานรองรับต่อความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง
แบบรูปทรงรี

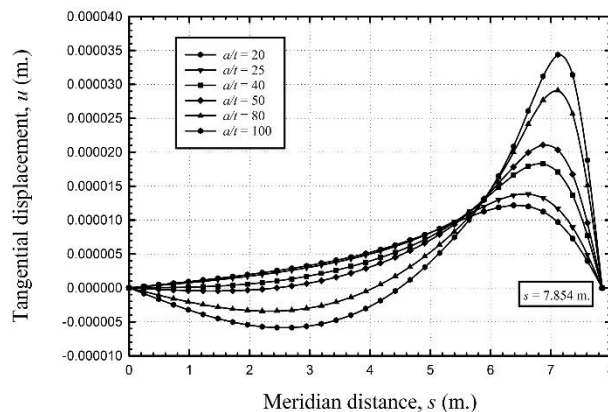
การศึกษาผลของอัตราส่วนการแปรเปลี่ยนความยาวรัศมีที่ฐานรองรับต่อความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง
แบบรูปทรงรีที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่นโดยเริ่มทำการทำการเปลี่ยนแปลงตั้งแต่ 20 ถึง 100 โดยที่ค่าความยาวรัศมี
ที่ฐานรองรับและค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 เป็นค่าคงที่ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง พบว่า เมื่อความยาวรัศมี
ที่ฐานรองรับต่อความหนามีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย
เนื่องจากความแข็งแรงของโครงสร้างมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 6 นอกจากนี้ยังพบว่าความสัมพันธ์ระหว่าง
ค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสกับความยาวส่วนโค้งเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีจะมีลักษณะ
แตกต่างกันออกไปตามรูปทรงของโครงสร้างเปลือกบาง รูปที่ 6(ก) แสดงค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสของโครงสร้าง
เปลือกบางแบบรูปทรงรีแบบเตี้ย ซึ่งจะพบว่ามีความสูงสุดในช่วงบริเวณกึ่งกลางความยาวส่วนโค้งเมอร์ริเดียน ในขณะที่

โครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงกลมและโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบสูงจะเกิดค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสสูงสุดในช่วงบริเวณฐานรองรับ ดังแสดงในรูปที่ 6(ข) และ 6(ค) ตามลำดับ

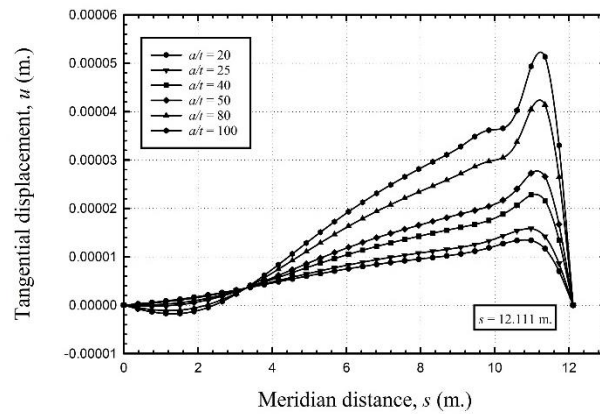
รูปที่ 7(ก) แสดงผลของการแปรเปลี่ยนความยาวรัศมีที่ฐานรองรับต่อความหนาที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีแบบเตี้ย พบว่า ค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากสูงสุดจะอยู่จุดยอดของโครงสร้าง สำหรับโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงกลมจะเกิดค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนสูงสุดในช่วงบริเวณจุดยอดของโครงสร้างโดยมีค่าสม่ำเสมอตลอดช่วงแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงบริเวณฐานรองรับ ดังแสดงในรูปที่ 7(ข) ในขณะที่โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบสูงจะเกิดค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนสูงสุดในช่วงบริเวณฐานรองรับ และจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงบริเวณจุดยอด ดังแสดงในรูปที่ 7(ค)



(ก) $b/a = 0.25$

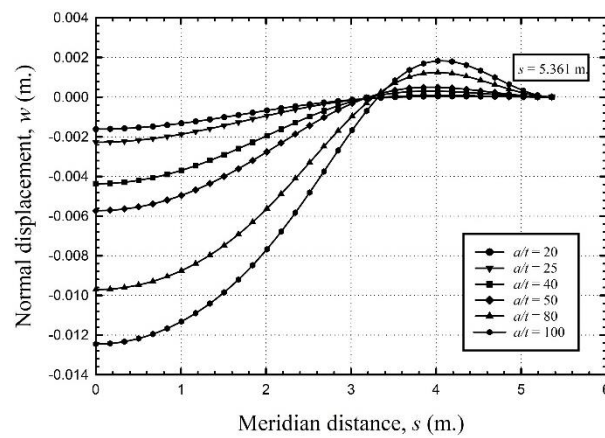


(ข) $b/a = 1.00$

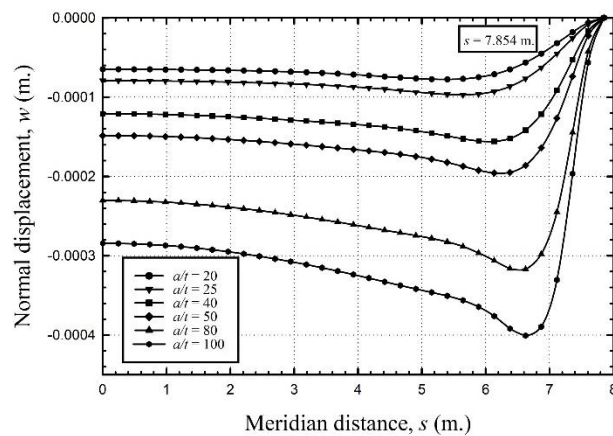


(ค) $b/a = 2.00$

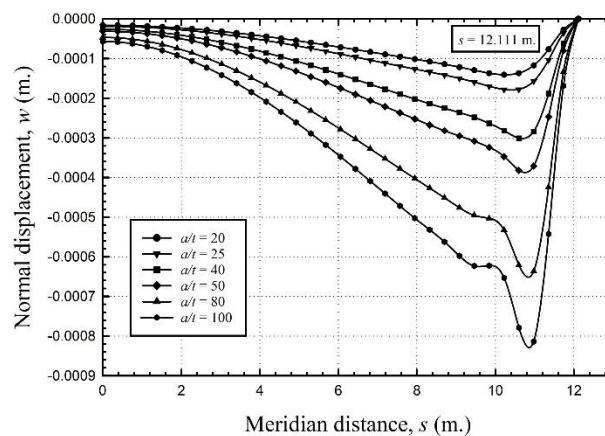
รูปที่ 6 ผลของการแปรเปลี่ยนความยาวรัศมีที่ฐานรองรับต่อความหนาที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสของ
โครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น



(ก) $b/a = 0.25$



(ข) $b/a = 1.00$

(ค) $b/a = 2.00$

รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนความยาวรัศมีที่ฐานรองรับต่อความหนาที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากของ
โครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

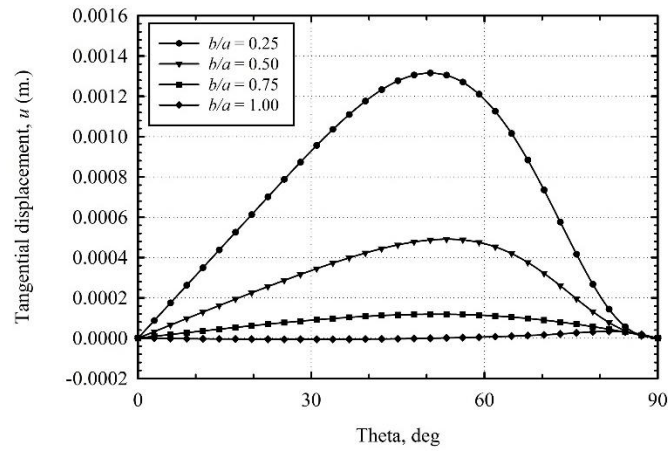
5.3 ผลของการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรี

สำหรับค่าพารามิเตอร์สุดท้ายที่จะทำการศึกษาก็จะเป็นผลของการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรี ดังแสดงในสมการที่ (29) ภายใต้เงื่อนไขค่าพารามิเตอร์ดังแสดงในตารางที่ 1 จะพบว่าแนวโน้มความแตกต่างสำหรับค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสและเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีแบบเตี้ยจะมีค่าน้อยมาก อย่างไรก็ตามโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่นจะให้ค่าการเสียรูปน้อยกว่าฐานรองรับแบบยึดหลวม ดังแสดงในรูปที่ 8 และ 9 ตามลำดับ ในขณะที่ผลของการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับจะส่งผลให้เกิดความแตกต่างสำหรับค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีแบบสูง ดังแสดงในรูปที่ 10 แต่จะส่งผลให้เกิดความแตกต่างสำหรับค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีแบบสูงน้อยมาก ดังแสดงในรูปที่ 11 สอดคล้องกับผลในตารางที่ 3 ซึ่งจะแสดงค่าการเสียรูปในทอมไร้มิติที่ปลายด้านบน (w_d/h) ของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีภายใต้การเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับ พบว่าค่าการเสียรูปที่ปลายด้านบนจะมีค่าลดลงเมื่ออัตราส่วนของความสูงต่อความยาวรัศมีที่ฐานรองรับของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงรีมีค่าเพิ่มสูงขึ้น

ตารางที่ 3 ค่าการเสียรูปในทอมไร้มิติที่ปลายด้านบน (w_d/h) ของโครงสร้างเปลือกบางแบบรูปทรงรีภายใต้การเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับ

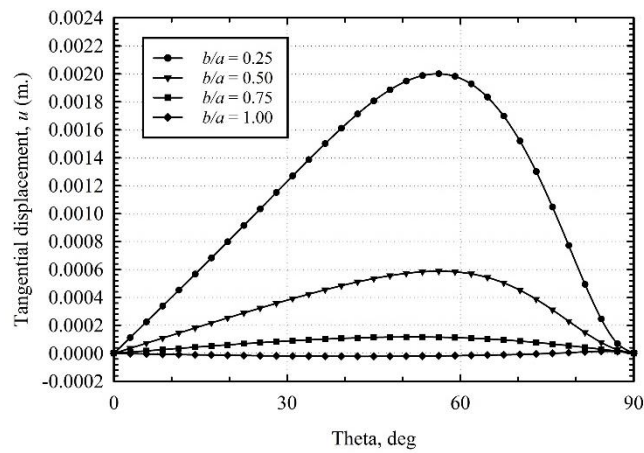
b/a	ฐานรองรับแบบยึดแน่น	ฐานรองรับแบบยึดหลวม
0.25	-0.249239	-0.290366
0.50	-0.052361	-0.055606
0.75	-0.016059	-0.016022
1.00	-0.005688	-0.005183

b/a	ฐานรองรับแบบยึดแน่น	ฐานรองรับแบบยึดหมุน
1.25	-0.002236	-0.001625
1.50	-0.001136	-0.000479
1.75	-0.000949	-0.000255
2.00	-0.001133	-0.000404



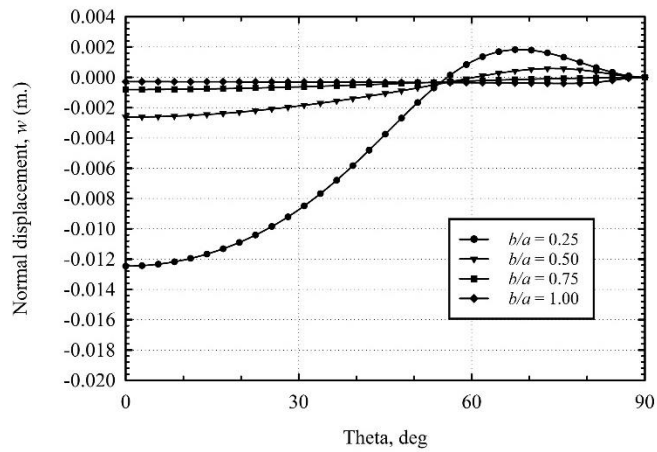
(ก) ฐานรองรับแบบยึดแน่น

(ข)

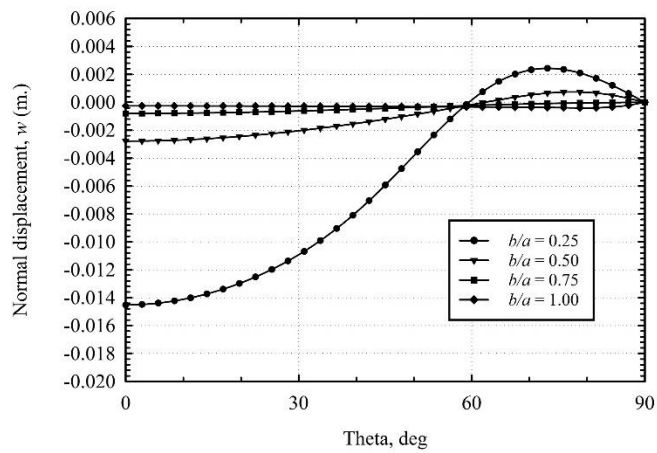


(ข) ฐานรองรับแบบยึดหมุน

รูปที่ 8 ผลของการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสของโครงสร้างเปลือกบาง
แบบรูปทรงรีแบบเตี้ย

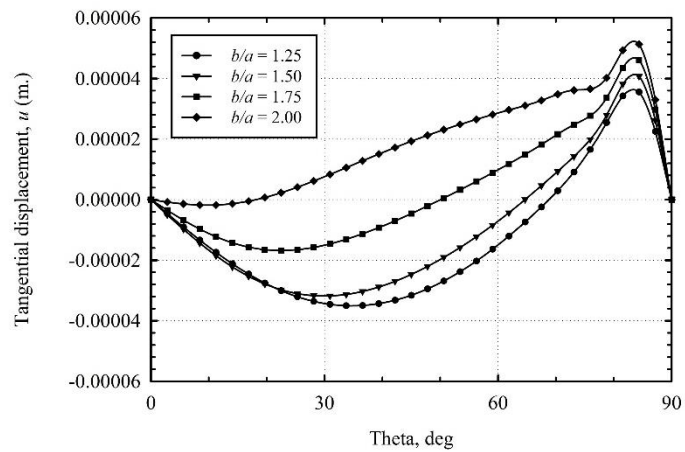


(ก) ฐานรองรับแบบยึดแน่น

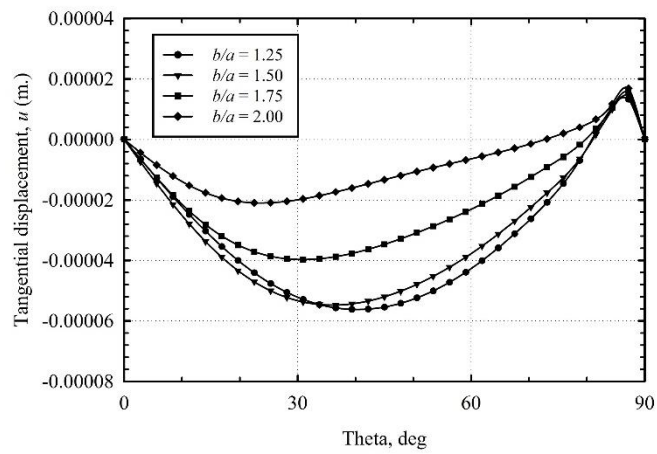


(ข) ฐานรองรับแบบยึดหมุน

รูปที่ 9 ผลของการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบาง
แบบรูปทรงรีแบบเตี้ย

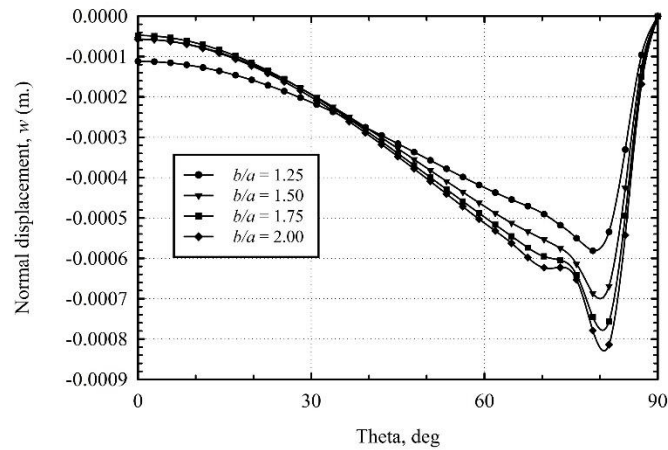


(ก) ฐานรองรับแบบยึดแน่น

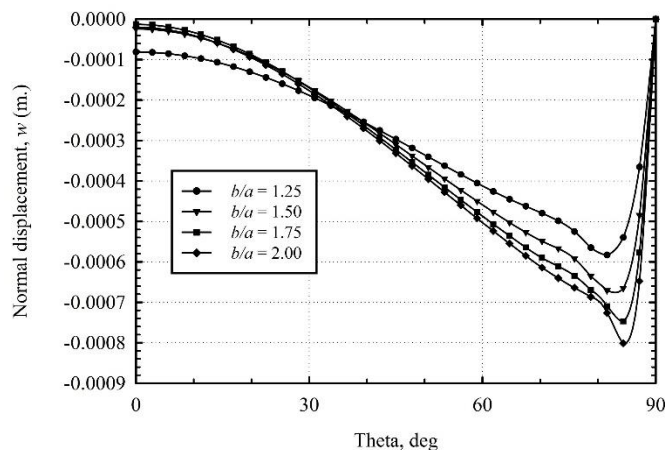


(ข) ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น

รูปที่ 10 ผลของการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสของโครงสร้างเปลือกบาง
แบบรูปทรงรีแบบสูง



(ก) ฐานรองรับแบบยึดแน่น



(ข) ฐานรองรับแบบยึดหมุน

รูปที่ 11 ผลของการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้าง
เลือกบางแบบรูปทรงรีแบบเตี้ยสูง

6. สรุปผลการศึกษา

งานวิจัยนี้นำเสนอผลการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเลือกบางรูปทรงรีรับแรงดันน้ำสถิตโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และหลักการงานเสมือนในการสร้างฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเลือกบางความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูปจะสามารถคำนวณได้จากค่าการเสียรูปของโครงสร้างเลือกบางที่พิจารณาผลของแรงเฉือนโดยใช้ทฤษฎีการเสียรูปด้วยแรงเฉือนอันดับสูง การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบไอโซพารามетริกจำนวน 9 จุดต่อ ผลการศึกษาสามารถสรุปได้ดังนี้

1. ค่าการเสียรูปของโครงสร้างเลือกบางรูปทรงรีจะมีค่าสูงขึ้นเมื่อความสูงของระดับน้ำทะเลและอัตราส่วนความยาวรัศมีที่ฐานรองรับต่อความหนาของโครงสร้างมีค่าสูงขึ้น เนื่องจากแรงดันภายนอกและความแข็งแกร่งของโครงสร้างมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลง ตามลำดับ โดยที่ค่าการเสียรูปของโครงสร้างจะเกิดขึ้นเนื่องจากผลของค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากเป็นหลัก

2. ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปจะขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนความสูงต่อความยาวรัศมีที่ฐานรองรับของโครงสร้างเลือกบางรูปทรงรี โดยที่โครงสร้างเลือกบางรูปทรงกลมจะมีค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากน้อยกว่ากรณีของโครงสร้างเลือกบางรูปทรงรีแบบเตี้ยและแบบสูงที่บริเวณจุดยอดและฐานรองรับ ตามลำดับ

3. การเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับจะส่งผลต่อแนวโน้มความแตกต่างสำหรับค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสและการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสน้อยมาก อย่างไรก็ตามโครงสร้างเลือกบางรูปทรงรีที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่นจะให้ค่าการเสียรูปน้อยกว่าฐานรองรับแบบยึดหมุน

7. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณทุนสนับสนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน ที่ได้สนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] Zingoni, A. (2015). Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics. *Thin-Walled Structures*, 87, 102-114.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.10.016>
- [2] Zingoni, A. (2017). *Shell structures in civil and mechanical engineering: theory and analysis*. ICE Publishing, The Institution of Civil Engineers.
- [3] Xie, K., Chen, M., Zhang, L., Li, W., & Dong, W. (2019). A unified semi-analytic method for vibro-acoustic analysis of submerged shells of revolution. *Ocean Engineering*, 189, 106345.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106345>
- [4] Huang, H., Zou, M.S., & Jiang, L.W. (2021). Analysis of characteristic of acoustic radiation from axisymmetric pressure-resistant egg-shaped shells in the ocean environment. *Applied Ocean Research*, 116, 102890. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102890>
- [5] Malekzadeh Fard, K. & Baghestani, A.M. (2017). Free vibration analysis of deep doubly curved open shells using the Ritz method. *Aerospace Science and Technology*, 69, 136-148.
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.06.021>
- [6] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., Tiyaangthong, S., & Jamnam, S. (2023). Nonlinear static analysis of egg-shaped toroidal shells under internal pressure. *Rattanakosin journal of science and technology (RJST)*, 5(3), 14-36. (in Thai).
- [7] Krivoshapko, S.N. (2007). Research on general and axisymmetric ellipsoidal shells used as domes, pressure vessels, and tanks. *Applied Mechanics Reviews*, 60(6), 336-355.
<https://doi.org/10.1115/1.2806278>
- [8] Zingoni, A. (1995). Stress analysis of a storage vessel in the form of a complete triaxial ellipsoid: hydrostatic effects. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 62(3) 269-279.
[https://doi.org/10.1016/0308-0161\(94\)00020-J](https://doi.org/10.1016/0308-0161(94)00020-J)

- [9] Ross, C.T.F., & Etheridge, J. (2000). The buckling and vibration of tube-stiffened axisymmetric shells under external hydrostatic pressure. *Ocean Engineering*, 27(12), 1373-1390.
[https://doi.org/10.1016/S0029-8018\(99\)00047-5](https://doi.org/10.1016/S0029-8018(99)00047-5)
- [10] Ross, C.T.F., Youster, P., & Sadler, R. (2001). The buckling of plastic oblate hemi-ellipsoidal dome shells under external hydrostatic pressure. *Ocean Engineering*, 28(7), 789-803.
[https://doi.org/10.1016/S0029-8018\(00\)00035-4](https://doi.org/10.1016/S0029-8018(00)00035-4)
- [11] Ross, C.T.F., Köster, P., Little, A.P.F., & Tewkesbury, G. (2007). Vibration of a thin-walled prolate dome under external water pressure. *Ocean Engineering*, 34(3), 560-575.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2006.01.013>
- [12] Smith, P., & Blachut, J. (2008). Buckling of externally pressurized prolate ellipsoidal domes. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 130(1), 011210.
<http://dx.doi.org/10.1115/1.2834457>
- [13] Tangbanjongkij, C., Chucheepsakul, S., & Jiammeepreecha, W. (2019). Large displacement analysis of ellipsoidal pressure vessel heads using the fundamental of differential geometry. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 172, 337-347.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2019.04.001>
- [14] Barathan, V., & Rajamohan, V. (2022). Nonlinear buckling analysis of a semi-elliptical dome: numerical and experimental investigations. *Thin-Walled Structures*, 171, 108708.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108708>
- [15] Chanto, K., Pulngern, T., Tangbanjongkij, C., Jiammeepreecha, W., & Chucheepsakul, S. (2023). Effect of bending rigidity and nonlinear strains on free vibration of hemi-ellipsoidal shells. *Journal of Vibration and Acoustics*, 145(5), 051004.
<https://doi.org/10.1115/1.4063114>
- [16] Chanto, K., Pulngern, T., Tangbanjongkij, C., Jiammeepreecha, W., & Chucheepsakul, S. (2024). Analytical solution and buckling of hemi-ellipsoidal shell structures of revolution under uniformly distributed load. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 24(3), 2450026.
<https://doi.org/10.1142/S0219455424500263>

- [17] Kerdsuk, P., Pulngern, T., Tangbanjongkij, C., Chucheeepsakul, S., & Jiammeepreecha, W. (2024). Elastic buckling of oblate hemi-ellipsoidal shells subjected to hydrostatic pressure. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 24(3), 2450028.
<https://doi.org/10.1142/S0219455424500287>
- [18] Tangbanjongkij, C., Chucheeepsakul, S., & Jiammeepreecha, W. (2020). Analytical and numerical analyses for a variety of submerged hemi-ellipsoidal shells. *Journal of Engineering Mechanics*, 146(7), 04020066. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001795](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001795)
- [19] Kar, V.R., Mahapatra, T.R., & Panda, S.K. (2015). Effect of different temperature load on thermal postbuckling behaviour of functionally graded shallow curved shell panels. *Composite Structures*, 160, 1236-1247. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.125>
- [20] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., Phungpaingam, B., Klaycham, K., & Chucheeepsakul, S. (2025). Effective nonlocal finite element formulation for free vibration analysis of S-FGM doubly curved nanoshells based on linear strain–displacement relations using TSDT. *Computers and Mathematics with Applications*, 179, 77-102.
<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.11.021>
- [21] Langhaar, H.L. (1964). *Foundations of practical shell analysis*. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [22] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., Phungpaingam, B., Klaycham, K., & Chucheeepsakul, S. (2024). Free vibration analysis of FGM spherical and elliptical shells under nonlinear thermal environments. *Thin-Walled Structures*, 196, 111497.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111497>
- [23] Langhaar, H.L. (1962). *Energy methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [24] Kar, V.R., & Panda, S.K. (2015). Thermoelastic analysis of functionally graded doubly curved shell panels using nonlinear finite element method. *Composite Structures*, 129, 202-212.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.006>
- [25] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., & Witt, R.J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons.
- [26] Qatu, M.S. (2004). *Vibration of laminated shells and plates*. Academic Press Inc.

- [27] Reddy, J.N. (2004). *Mechanics of laminated composite: plates and shells—theory and analysis*. CRC Press.
- [28] Nath Thakur, S., & Ray, C. (2021). Static and free vibration analyses of moderately thick hyperbolic paraboloidal cross ply laminated composite shell structure. *Structures*, 32, 876-888.
<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.03.066>
- [29] Young, W.C., & Budynas RG. (2002), *Roark's formulas for stress and strain*. McGraw-Hill.