

การทดลองหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มแท่งกลมตามวิธีดั้งเดิม

บัญชา คังตระกูล¹ และ สายชล ลิธิพงศ์^{2*}

¹สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่

^{2*}สาขาวิชาเทคโนโลยียานยนต์ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่

E-mail: ¹bancha@northcm.ac.th, ^{2*}saichon@northcm.ac.th

บทคัดย่อ

การคำนวณด้านวิศวกรรมที่ต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงเพื่อหาผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงและละเอียดอ่อนจำเป็นต้องหาค่าความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยเสมอ ในบทความนี้ได้นำเสนอผลลัพธ์ของการหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นโดยใช้ลูกตุ้มแท่งกลมเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง การศึกษานี้ทำการทดลอง ณ ตำแหน่งที่ตั้งที่เส้นรุ้ง 18°39'43" N และอยู่ที่ระดับความสูง 300 m MSL โดยใช้ลูกตุ้มแท่งกลมที่มีความยาวอิสระเปลี่ยนแปลงเป็น 60, 120, 180, 240 และ 300 mm จับเวลาในการแกว่งของลูกตุ้มจำนวน 100 วัฏจักร และทดลองซ้ำ 12 ครั้ง ผลลัพธ์ของการทดลอง พบว่า ได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น $9.789 \pm 0.001 \text{ m/s}^2$ โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าจากคำนวณ 9.7847 m/s^2 ประมาณ 0.04%

คำสำคัญ: ความโน้มถ่วงท้องถิ่น การวัดความโน้มถ่วง มาตรฐานความโน้มถ่วง ลูกตุ้มแบบแท่งกลม

* Corresponding author, e-mail: saichon@northcm.ac.th

An experiment to measure local gravity using a cylindrical rod pendulum by the classical method

Bancha Kongtragool¹ and Saichon Sithipong^{2*}

¹Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering and Technology,
North-Chiang University

^{2*}Department of Automotive Technology, Faculty of Engineering and Technology,
North-Chiang University

E-mail: ¹bancha@northcm.ac.th, ^{2*}saichon@northcm.ac.th

Abstract

Engineering calculations that require gravitational values for precise and sensitive results must always consider the local gravitational acceleration. In this paper, the results of determining local gravity using a rod pendulum as a gravimeter are presented. The study was conducted at a location with a latitude of 18°39'43" N and an elevation of 300 meters above mean sea level (MSL). The studying used rod pendulums with varying free lengths of 60, 120, 180, 240, and 300 mm. The time for 100 oscillations of the pendulum was measured and repeated 12 times. The experimental results showed a local gravitational acceleration of $9.789 \pm 0.001 \text{ m/s}^2$. When compared with the calculated local gravity value of 9.7847 m/s^2 , the error was approximately 0.04%.

Keywords: Local gravity, Gravity measurement, Gravimeter, Rod pendulum

* Corresponding author, e-mail: saichon@northcm.ac.th

1. ที่มาและความสำคัญ

งานทางด้านวิศวกรรมที่ต้องการความแม่นยำและมีความละเอียดสูง จำเป็นต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น (Local gravity) มาใช้คำนวณ ซึ่งจะแตกต่างกันไปตามตำแหน่งที่ตั้งตามพิกัดภูมิศาสตร์ และไม่สามารถใช้ค่าความโน้มถ่วงมาตรฐาน $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$ แทนได้ เพราะจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนออกไปจากความเป็นจริง [1] ตัวอย่างของกรณีที่ต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น ได้แก่ การทดลองเกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว (Simple harmonic motion) การสั่นสะเทือนอย่างอิสระไม่มีแรงหน่วง และการศึกษาเกี่ยวกับลูกตุ้ม (Pendulum) เป็นต้น

ค่าความโน้มถ่วงในแต่ละบริเวณจะแตกต่างกันขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น ความสูงเหนือระดับน้ำทะเลปานกลาง ตำแหน่งละติจูด ลักษณะทางธรณีวิทยา เป็นต้น สถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติ ได้วัดค่าแรงโน้มถ่วงโดยใช้เครื่องวัดแบบสมบูรณ์ (Absolute gravimeter) จำนวน 7 จุด ครอบคลุมทุกภาคของประเทศไทย พบว่า บริเวณจังหวัดเชียงใหม่มีค่าแรงโน้มถ่วงประมาณ $9.784\,261\,950 \pm 0.39 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ [2]

ได้มีการนำเสนอวิธีการวัดความโน้มถ่วงท้องถิ่น ที่ผ่านมาการใช้ลูกตุ้มประกอบ (Compound pendulum) แบบแท่งกลม (Rod pendulum) เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง (Gravimeter) สามารถลดข้อจำกัดหลายอย่างของลูกตุ้มอย่างง่าย (Simple pendulum) ดำเนินการทดลองได้อย่างง่ายดาย ด้วยอุปกรณ์ที่ไม่ซับซ้อน และผลลัพธ์การหาค่าแรงโน้มถ่วงมีความน่าเชื่อถือได้ [3] อย่างไรก็ตาม มีงานวิจัยบางเรื่องได้นำเสนอการจับเวลาเพื่อหาวัฏจักร (Oscillation period) ของการแกว่งลูกตุ้มเพียง 10 วัฏจักร และทำซ้ำ 5 ครั้ง ซึ่งเห็นว่าจำนวนวัฏจักรการแกว่งน้อยไม่เพียงพออาจส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนสูง [4] นอกจากนี้การหาค่าความคลาดเคลื่อน (Error) เป็นร้อยละก็เปรียบเทียบกับค่าความโน้มถ่วงมาตรฐาน $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$ ซึ่งเป็นค่าความโน้มถ่วงที่เส้นละติจูด 45° N , ที่ระดับน้ำทะเลปานกลาง [5]

การทดลองได้ปรับปรุงโดยออกแบบให้ลูกตุ้มแบบแท่งมีจุดหมุนเป็นแบบสันคมมีด (Knife edge support) เพื่อลดแรงต้านการแกว่งและสามารถระยะความยาวได้อย่างละเอียด นอกจากนี้ได้เพิ่มจำนวนรอบของการแกว่งของลูกตุ้มในแต่ละครั้งของการทดลอง เพื่อช่วยลดความคลาดเคลื่อนจากการจับเวลา และเพิ่มความเที่ยงตรงของการวัดให้มากยิ่งขึ้น

บทความนี้ต้องการนำเสนอวิธีการทดลองหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น และเปรียบเทียบกับค่าความโน้มถ่วงจากการคำนวณจากพิกัดภูมิศาสตร์ ($g_{\text{cal}} = 9.7847 \text{ m/s}^2$) [6] ณ สถานที่ทดลองจริง และผลลัพธ์ต้องมีค่าคลาดเคลื่อน (Error) ไม่เกิน 0.5 %

2. ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วิธีวัดความโน้มถ่วงมีอยู่หลายวิธีซึ่งส่วนใหญ่มีหลักการอยู่บนพื้นฐานของพลศาสตร์ เช่น ใช้วิธีการตกอย่างอิสระของวัตถุ, ใช้ระนาบเอียง, ใช้ลูกตุ้มอย่างง่าย (Simple pendulum) และใช้ระบบสปริง-มวล โดยหลักการแล้วลูกตุ้มประกอบก็สามารถใช้เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงได้เช่นกัน

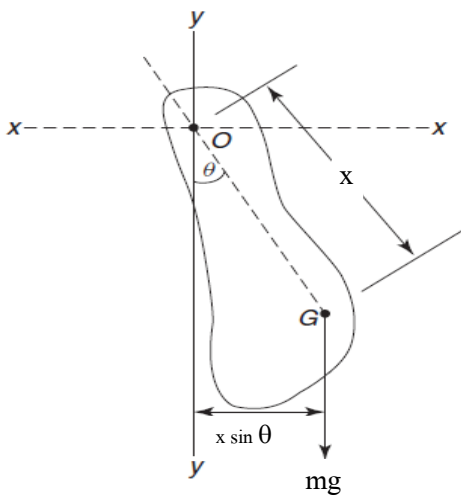
2.1 ลูกตุ้มประกอบ

พิจารณาลูกตุ้มประกอบในรูปแบบทั่วไปที่แสดงในรูปที่ 1 ซึ่งแกว่งบนระนาบ X-Y ที่จุด O จุด G คือตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของลูกตุ้มประกอบ ให้ I_O เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบจุด O ใช้การสมดุลทางพลศาสตร์จะได้:

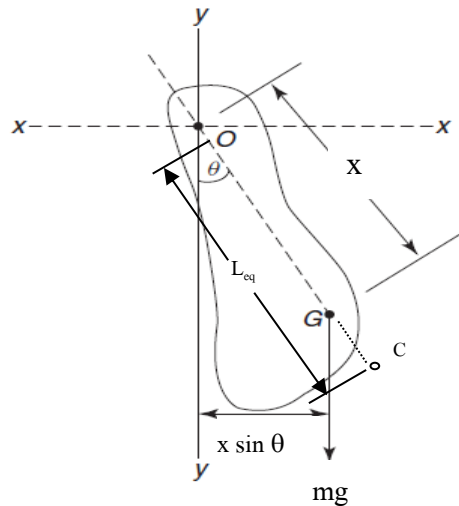
$$\begin{aligned}\Sigma M &= I_O \ddot{\theta} = -mgx \sin \theta \\ I_O \ddot{\theta} + mgx \sin \theta &= 0\end{aligned}$$

สำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมน้อยๆ $\sin \theta \cong \theta$ (มีหน่วยเป็น rad) ดังนั้น:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgx}{I_O} \theta = 0$$



รูปที่ 1 ลูกตุ้มประกอบในรูปแบบทั่วไป



รูปที่ 2 จุดศูนย์กลางการแกว่งของลูกตุ้มประกอบ

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์กับรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว, $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$, จะได้:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{I_O}} \quad (1)$$

และมีคาบของการแกว่งเป็น:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgx}} \quad (2)$$

จากทฤษฎีแกนขนาน จะได้:

$$I_O = I_G + mx^2 = mk_G^2 + mx^2$$

เมื่อ I_G คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบระนาบ X-Y ที่จุด G และ k_G คือ รัศมีไจเรชัน (Radius of gyration) รอบระนาบ X-Y ที่จุด G สมการ (2) จึงกลายเป็น:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{[(k_G^2/x)+x]}{g}} \quad (3)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับลูกตุ้มอย่างง่ายที่ยาว L_{eq} ซึ่งมีคาบ T เท่ากันกับลูกตุ้มประกอบ จะได้:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{[(k_G^2/x)+x]}{g}} \quad (4)$$

โดย L_{eq} เป็นความยาวที่สมมูลกับลูกตุ้มอย่างง่าย และมวลทั้งหมดถือว่ามารวมกันเป็นจุดอยู่ที่จุด C ซึ่งเรียกว่าเป็นจุดศูนย์กลางการแกว่ง (Center of oscillation) รอบจุด O (ดูรูปที่ 2) โดย:

$$oc = L_{eq} = k_G^2/x + x \quad (5)$$

และเมื่อสลับให้จุด C เป็นจุดที่แขวนลูกตุ้มแทนจุด O, จุด O ก็จะกลายเป็นจุดศูนย์กลางการแกว่งรอบจุด C จัดรูปสมการ (5) ใหม่เป็น:

$$x^2 - L_{eq}x + k_G^2 = 0 \quad (6)$$

ซึ่งได้เป็นรูปแบบของสมการกำลังสอง ที่มีรากอยู่สองค่า คือสมการที่ (7) และ (8):

$$x_1 + x_2 = L_{eq} \quad (7)$$

และ $x_1 \cdot x_2 = k_G^2 \quad (8)$

ความสัมพันธ์ระหว่างคาบ T กับระยะห่าง x จากจุด ศูนย์ถ่วงแสดงอยู่ในรูปที่ 3 เมื่อใช้จุด O เป็นจุดแขวนจะมีความยาวสองค่าที่มีคาบเท่ากัน คือ $GO_1 = x_1$ และ $GO_2 = x_2$ และเมื่อสลับจุดแขวนเป็นจุด C ก็จะมีอีกสองความยาวสองค่าที่มีคาบเท่ากัน คือ $GC_1 = x_1$ และ $GC_2 = x_2$

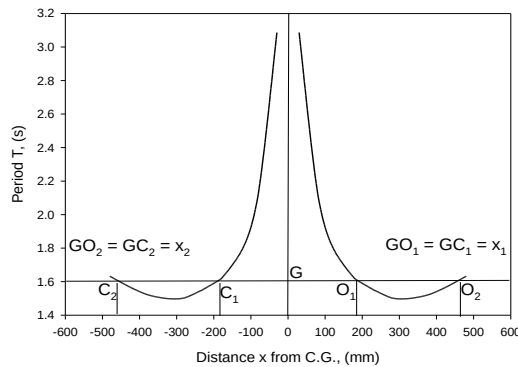
ความสำคัญของการหาค่า T_{min} คือ เป็นตัวแปรที่ช่วยให้กำหนดค่าความยาวอิสระ (Free length), $X_{T_{min}}$ ของแท่งลูกตุ้ม ดังความสัมพันธ์ในรูปที่ 4 ซึ่งเป็นระยะห่างที่จะทำให้มีเกิดคาบการแกว่งน้อยที่สุด ทำให้การทดลองใช้เวลา น้อยกว่าวิธีอื่นๆ สามารถหาได้จาก:

$$\frac{d}{dx}L = \frac{d}{dx}\left(\frac{k_G^2}{x} + x\right) = -\frac{k_G^2}{x^2} + 1 = 0$$

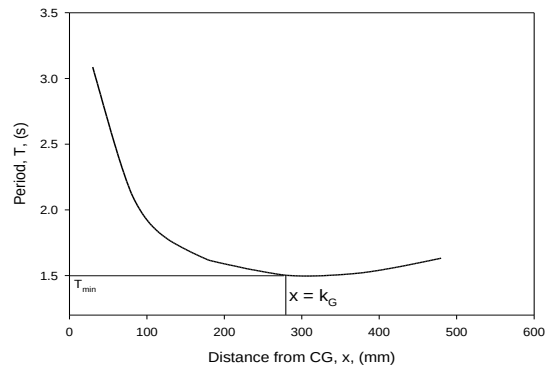
นั่นคือ $x = k_G = x_{T_{min}} \quad (9)$

และ $T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{2k_G}{g}} \quad (10)$

โดย $k_G^2 = I_G/m$ ดังแสดงในรูปที่ 4



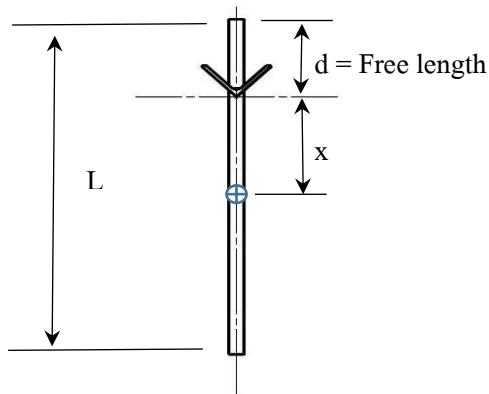
รูปที่ 3 คาบ T กับระยะห่าง x จากจุดศูนย์กลาง



รูปที่ 4 คาบ $T_{\min}$ กับระยะห่าง $x = k_G = x_{T_{\min}}$ จากจุดศูนย์กลาง

2.2 ลูกตุ้มแบบแท่ง

พิจารณาลูกตุ้มประกอบแบบที่ง่ายที่สุดคือลูกตุ้มแบบแท่ง (Rod หรือ stick หรือ bar pendulum) ตามหน้าตัด) ซึ่งแขวนในตำแหน่งที่จุดศูนย์กลางอยู่ห่างจากจุดรองรับเป็นระยะทาง x ใดๆ (ดูรูปที่ 5)



รูปที่ 5 ลูกตุ้มแบบแท่ง

แทนค่า $I_0 = mL^2/12 + mx^2$ ลงในสมการ (2) ได้:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{mL^2}{12} + mx^2}{mgx}} = 2\pi \sqrt{\frac{L^2/12 + x^2}{gx}} \quad (11)$$

จะเห็นได้ว่าในกรณีของลูกตุ้มประกอบ แม้แต่ในรูปแบบที่ง่ายที่สุด คือ เป็นแท่ง ความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลังสองของคาบ (T^2) ไม่ได้เป็นปฏิกิริยากับความยาว L เหมือนกับกรณีของลูกตุ้มอย่างง่าย แต่จะขึ้นอยู่กับระยะห่าง x ระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดรองรับแทน ซึ่งทำให้การนำลูกตุ้มประกอบมาใช้เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงมีความซับซ้อนมากกว่าลูกตุ้มอย่างง่าย ยกกำลังสองสมการ (1) แล้วจัดรูปสมการหาค่า x ได้:

$$x^2 - g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 x + \frac{L^2}{12} = 0 \quad (12)$$

ซึ่งเป็นสมการกำลังสองที่มีรูปแบบมาตรฐานเป็น:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

และจะหารากได้จาก:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ในกรณีนี้ $a = 1$, $b = -g[T/(2\pi)]^2$, $c = L^2/12$, ดังนั้น:

$$x = \frac{g[T/(2\pi)]^2 \pm \sqrt{(g[T/(2\pi)]^2)^2 - 4(L^2/12)}}{2} \quad (13)$$

การแก้สมการ (13) ต้องใช้ค่าของ g , L และ T ซึ่งมีวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการแก้สมการนี้ได้หลายวิธี

บทความนี้จะนำเสนอวิธีดั้งเดิม (Classical method) โดยการทดลองกำหนดค่าความยาวอิสระ (Free length) d แล้วหาค่าของ x จากความยาวของลูกตุ้มแท่งซึ่งมีค่าคงที่ (ดูรูปที่ 5)

การทดลองด้วยวิธีดั้งเดิมใช้ลูกตุ้มแท่ง การทดลองเริ่มต้นด้วยการกำหนดระยะ d จากน้อยไปหามาก โดยเปลี่ยนความยาวเพิ่มขึ้นขั้นละ 60 mm คาบ T ของการแกว่งในแต่ละความยาวของ d จะมีค่าจากมากไปหาน้อยจนถึงจุดที่คาบที่ค่าน้อยที่สุด จากนั้นเมื่อทดลองต่อไปคาบก็จะมีค่าเพิ่มมากขึ้น เมื่อนำระยะ x ที่คำนวณจาก:

$$x = \frac{L}{2} - d \quad (14)$$

มาเขียนเป็นกราฟร่วมกับ T ก็จะได้กราฟเส้นโค้งดังแสดงในรูปที่ 3

ขั้นตอนต่อไปคือการหาค่าของ L_{eq} จากกราฟโดยใช้สมการ (7) และคำนวณหาความโน้มถ่วงท้องถิ่นจากสมการ (4)

วิธีดั้งเดิมที่นำเสนอในบทความนี้จะแสดงการหาผลลัพธ์จากการทดลองด้วยวิธีที่แตกต่างจากทดลองที่นำเสนอโดยผู้อื่น

เริ่มต้นด้วยการกำหนดค่าของระยะ x จากค่าของระยะ d โดยคำนวณจากสมการ (14) เช่นเดียวกันและให้ค่าของระยะ d เริ่มจากน้อยไปสู่มากเป็นขั้น ๆ ในช่วงที่เท่ากัน ระยะ x ก็จะเพิ่มมากขึ้นเป็นขั้น ๆ ในช่วงที่เท่ากันเช่นเดียวกันจนถึงค่าสุดท้ายก่อนที่ระยะ $x = x_{T_{min}}$ ก็จะหยุดการทดลอง

ซึ่งเมื่อนำคาบ T ที่ได้จากการกำหนดระยะ d แต่ละค่าไปเขียนเส้นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ T จะได้เป็นเส้นกราฟเช่นเดียวกับรูปที่ 4 ช่วงตั้งแต่ปลายด้านขวามือสุดจนถึงจุดต่ำสุด โดยระยะ x เหล่านี้คือค่าของ x_2 ในรูปที่ 3 นั่นเอง ดังนั้นเมื่อใช้ความสัมพันธ์ตามสมการ (7) จะได้ระยะ x_1 (ในรูปที่ 3) เป็น:

$$x_1 = k_G^2/x_2 \quad (15)$$

และเมื่อแทนค่าลงในสมการ (8) ร่วมกับสมการ (9) จะได้

$$L_{eq} = x_{T_{min}}^2/x_2 + x_2 \quad (16)$$

ซึ่งเป็นระยะที่จะทำให้มีค่าน้อยที่สุดจะหาได้จาก:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{L^2}{12} + x^2}{gx} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{L^2 + 12x^2}{12gx} \right] = 0$$

จะได้:

$$x_{T_{min}} = L/\sqrt{12} \quad (17)$$

ดังนั้นสมการ (16) จึงกลายเป็น

$$L_{eq} = (\frac{L^2}{12})/x_2 + x_2 \quad (18)$$

โดยค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นจะหาได้จากสมการ (4) คือ:

$$g = 4\pi^2 \frac{L_{eq}}{T^2}$$

และเมื่อนำค่าของ T^2 กับ $4\pi^2 L_{eq}$ ไปเขียนเป็นกราฟก็จะได้เป็นกราฟเส้นตรงที่มี g เป็นความชันของเส้นกราฟ

วิธีหาผลลัพธ์ที่ดัดแปลงขึ้นมาใช้ในการทดลองนี้จะช่วยลดความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการหาค่าของ L_{eq} จากกราฟของวิธีดั้งเดิม และสามารถทำการคำนวณได้มากกว่าที่ต้องการได้ ซึ่งเมื่อใช้เป็นค่าเฉลี่ยก็จะได้ผลลัพธ์ที่ควรจะมีค่าถูกต้องมากกว่าวิธีดั้งเดิม ง่ายกว่าวิธีดั้งเดิมโดยไม่ต้องเขียนกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะ x กับคาบ T (รูปที่ 3) ใช้เวลาน้อยกว่าเพราะว่าไม่มีความจำเป็นที่จะต้องทดลองในช่วงเลยจุดที่ $x = x_{T_{min}}$ ไปแล้ว

เนื่องจากต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎีเพื่อการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลอง ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎีจะคำนวณหาได้สมการ International Gravity Formula 1967 ที่ยอมรับมานานและให้ผลลัพธ์แม่นยำ [6], [7]:

$$g(\phi, h) = 9.780\,318\,4 (1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 \phi - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\phi) - 3.086 \times 10^{-6} h \quad (19)$$

เมื่อ ϕ คือ องศาเส้นรุ้งทางภูมิศาสตร์ และ h คือ ระดับความสูงเหนือน้ำทะเลปานกลาง, มีหน่วยเป็น m MSL

สถานที่ทำการทดลอง ณ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่ อ.หางดง จ.เชียงใหม่ มีพิกัดอยู่ที่เส้นรุ้ง $18^\circ 39' 43''$ N และมีระดับความสูงเหนือระดับน้ำทะเล 300 m เมื่อแทนค่า ϕ และ h ของสถานที่ทดลองลงในสมการ (19) จะได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น ณ สถานที่ทดลองเป็น [6]:

$$\begin{aligned} g(18.66^\circ, 300 \text{ m}) &= 9.784\,681\,227 \text{ m/s}^2 \\ &\cong 9.7847 \text{ m/s}^2 = g_{Cal} \end{aligned}$$

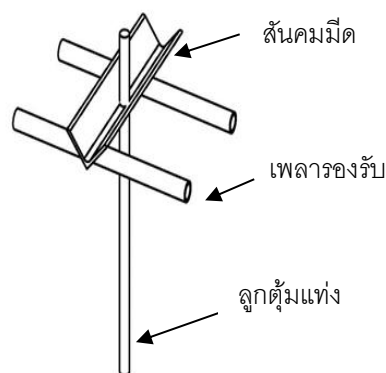
3. วิธีดำเนินการวิจัย

มาตรฐานความโน้มถ่วงที่ใช้ในการทดลองนี้คือลูกตุ้มแบบแท่งสร้างจากเหล็กแท่งเกลียวขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 mm ยาว 1500 mm จำนวน 1 ท่อน โดยมีสันคมมีดเป็นจตุรกรรป ซึ่งสามารถตั้งให้ไถ้ระยะ x จากจุดศูนย์กลางและระยะห่าง d จากปลายของลูกตุ้มแท่งตามที่ต้องการ การวัดความยาวใช้บรรทัดโลหะที่มีเศษมาตรา (Least count) 1 mm ร่วมกับเวอร์เนียคาลิเปอร์ที่มีความละเอียดสูงสุด 0.02 mm

สันคมมีดที่สร้างจากเหล็กฉากขนาด 25.4×25.4 mm หนา 1.5 mm มีความยาว 80 mm มีแป้นเกลียวเชื่อมติดกับสันเหล็กฉาก สันเหล็กฉากถูกเจาะทะลุเพื่อให้เมื่อสวมกับแท่งเกลียวแล้ว ปลายแท่งเกลียวจะสามารถสอดผ่านเหล็กฉากขึ้นไปได้ (ดูรูปที่ 6) ระยะ d วัดจากปลายบนของลูกตุ้มแท่งถึงสันเหล็กฉาก



รูปที่ 6 ลูกตุ้มแบบแท่งและจุดหมุนสันคมมีด



รูปที่ 7 โครงสร้างชุดทดลองลูกตุ้มแบบแท่ง

สันคมมีดวางพาดบนเพลาเหล็กกลมจำนวน 2 ท่อน ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 มิลลิเมตร และยึดติดกับโครงชุดทดลอง โดยสันคมมีดทำจากเหล็กฉากที่มีสันตรง เมื่อพิจารณาจุดสัมผัสระหว่างสันของเหล็กฉากกับแท่งเหล็กกลมซึ่งทำหน้าที่เป็นเพลารองรับ พบว่าจุดหมุนของลูกตุ้มมีขนาดเล็กมาก ทำให้แรงเสียดทานขณะหมุนหมุนเกิดขึ้นน้อยตามไปด้วย

กำหนดค่าแอมพลิจูด (Amplitude) เริ่มต้นของการแกว่งให้มีค่าน้อยไม่เกิน 5° วิธีการวัดมุมทำโดยวัดความยาวของแท่งลูกตุ้มในแนวตั้งแทนค่าเป็น y จะสามารถหาค่าแอมพลิจูด x ได้จาก $x = y(\tan 5^\circ)$ ทำเครื่องหมายเป็นจุดเริ่มปล่อยลูกตุ้มแกว่ง และตำแหน่งนี้ทำให้การแกว่งเป็น Small oscillation เพื่อลดการสั่น การหน่วง หรือแรงต้านอื่น ๆ [8]

กำหนดวัฏจักรการแกว่งจำนวน 100 วัฏจักรต่อการทดลอง และทำการทดลองจับเวลาทั้งหมด 12 ครั้ง โดยการนับจำนวนรอบใช้เซนเซอร์ช่วยนับจำนวนแบบอินฟราเรด และใช้นาฬิกาจับเวลา

การทดลองโดยใช้ลูกตุ้มแบบแท่งกลมที่รองรับตรงจุดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะ x เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงมีขั้นตอนการทดลองดังนี้:

1. นำลูกตุ้มแท่งที่ยาว 1500 mm มาใส่สันคมมีดให้สันคมมีดอยู่ห่างจากปลายเท่ากับจะได้ความยาวอิสระ $d = 60$ mm จะได้ระยะ $x = 690$ mm (บันทึกเป็น x_2 ในตารางที่ 1)
2. นำลูกตุ้มไปวางบนเพลลาที่ติดอยู่กับโครงเครื่องทดลองจับลูกตุ้มให้เบนออกจากตำแหน่งสมดุลสถิตเป็นมุมไม่เกิน 5° จากนั้นจึงปล่อยลูกตุ้มให้แกว่งได้อย่างอิสระ
3. จับเวลาที่ผ่านไปของการแกว่งที่ครบวัฏจักรอย่างสมบูรณ์ของลูกตุ้ม 100 วัฏจักร แล้วจดบันทึกเวลาเพื่อคำนวณหาคาบ (T) ของการแกว่งในขั้นต่อไปโดยทำซ้ำ ในข้อนี้ 12 ครั้ง (12 ซ้ำ)
4. ทำการทดลองซ้ำโดยเพิ่มระยะ d ครั้งละ 60 mm แล้วทำการลองตามขั้นตอนจนเสร็จการทดลองเมื่อระยะ d ครั้งสุดท้ายเป็น 300 mm
5. ผลการทดลองหาเวลาการแกว่งของลูกตุ้มแบบแท่งที่มีขนาดความยาวอิสระต่างกัน 5 ความยาว ได้ข้อมูลดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ข้อมูลจากการทดลองลูกตุ้มแบบแท่ง

ครั้งที่	เวลาในการแกว่งครบ 100 วัฏจักร (s) ที่ความยาวต่างๆ				
	$d = 60$ mm	120 mm	180 mm	240 mm	300 mm
	$x_2 = 690$ mm	630 mm	570 mm	510 mm	450 mm
1	196.94	193.39	190.48	188.22	187.00
2	196.95	193.45	190.42	187.94	186.97
3	196.88	193.39	190.49	188.26	186.90
4	196.95	193.45	190.45	187.97	186.91
5	196.92	193.38	190.41	188.30	186.94
6	196.89	193.44	190.34	188.22	186.91
7	196.97	193.39	190.38	188.25	186.94
8	196.89	193.45	190.42	187.99	186.91
9	196.98	193.39	190.39	187.98	186.91
10	196.95	193.45	190.45	187.97	186.92
11	196.98	193.38	190.43	188.24	187.14
12	196.99	193.34	190.44	188.32	186.99
เฉลี่ย	196.94	193.41	190.43	188.14	186.95

4. ผลและวิจารณ์

เมื่อได้ผลการทดลองจากความสัมพันธ์ของความยาวของแท่งลูกตุ้มขนาดความยาว 1500 mm และปรับระยะห่างจากปลายแท่งลูกตุ้มถึงศูนย์กลางเพิ่มขึ้นครั้งละ 60 mm กับเวลาในการแกว่งลูกตุ้มจำนวน 100 รอบ สามารถนำไปคำนวณหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นของลูกตุ้มตามความยาวต่าง ๆ ได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 2

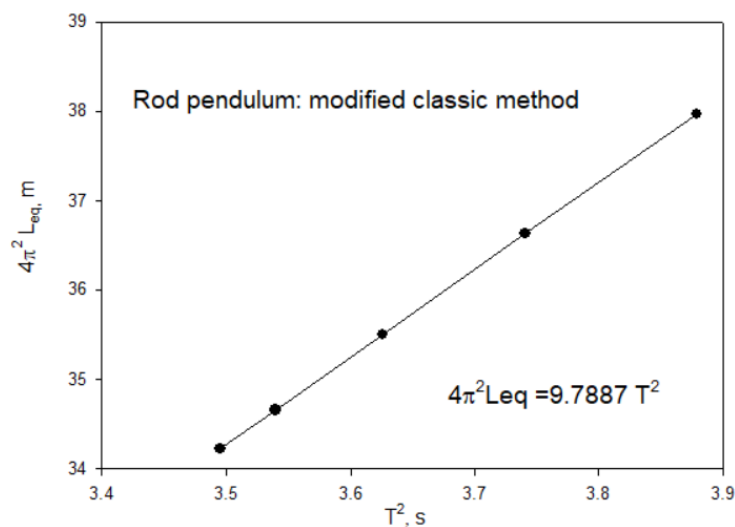
ตารางที่ 2 ผลลัพธ์จากการทดลอง

d (cm)	L_{eq} (mm)	$4\pi^2 L_{eq}$ (m)	T^2 (s ²)	$4\pi^2 L_{eq}/T^2$ (m/s ²)
60	961.74	37.9679	3.8786	9.789 161
120	927.62	36.6209	3.7407	9.789 917
180	898.95	35.4890	3.6262	9.786 921
240	877.65	34.6481	3.5396	9.788 701
300	866.67	34.2146	3.4952	9.789 159
เฉลี่ย				9.788 675

คำนวณหา L_{eq} จากสมการ (18) นำผลลัพธ์ใส่ไว้ในคอลัมน์แรกของตารางที่ 2 จากนั้นคำนวณหา $4\pi^2 L_{eq}$ ใส่ไว้ในคอลัมน์ที่สาม

หารเวลาเฉลี่ยของการแกว่งทั้ง 12 ชั่วโมงด้วยจำนวนรอบ (100 รอบ) แล้วยกกำลังสอง จะได้ T^2 (มีหน่วยเป็น s²) อยู่ในคอลัมน์ที่สี่

คำนวณหา $4\pi^2 L_{eq}/T^2$ ในคอลัมน์ที่ห้าโดยหารคอลัมน์ที่สามด้วยคอลัมน์ที่สี่ หาค่าเฉลี่ยของคอลัมน์ที่ห้า ได้ $9.788\ 675 \cong 9.7887\ \text{m/s}^2 = g_{Av}$



รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่าง $4\pi^2 L_{eq}$ กับ T^2

นำค่าของ $4\pi^2 L_{eq}$ กับ T^2 ในตารางที่ 2 มาเขียนเป็นกราฟได้เป็นรูปที่ 8 ได้ความชันของเส้นกราฟเป็น $4\pi^2 \Delta L_{eq} / \Delta T^2 \cong 9.7887 \text{ m/s}^2 = g_{Gr}$ โดยมีค่าต่างจากค่าของ g_{Av} เพียง 0.001% ดังนั้นค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่ได้จากค่าเฉลี่ยในตารางที่ 3 กับค่าความชันในรูปที่ 9 จึงมีค่าเท่ากันโดยประมาณเป็น:

$$g_{Gr} = g_{Av} \cong 9.789 \text{ m/s}^2 = g_{Exp}$$

โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าคำนวณ, $g_{Cal} = 9.7847 \text{ m/s}^2$, เป็น:

$$\%Error = ABS \left[\left(\frac{9.789}{9.7847} \right) - 1 \right] \times 100 = 0.0439$$

หรือประมาณ 0.04%

ในการทดลองนี้ความคลาดเคลื่อนที่สำคัญมีสาเหตุได้จากการวัดความยาวของลูกตุ้มแท่ง การตั้งระยะ d และการจับเวลาในการหาคาบของการแกว่ง

ลูกตุ้มแท่งที่ใช้ในการทดลองนี้เป็นแท่งเกลียวที่มีความยาวเต็มเส้นจากผู้ผลิต คือยาว 1500 mm ในการวัดความยาวและการตั้งระยะ d ได้วัดโดยใช้ไม้บรรทัดโลหะร่วมกับเวอร์เนียคาลิเปอร์

ส่วนความคลาดเคลื่อนในการจับเวลา สิ่งที่สำคัญก็คือเวลาปฏิกิริยา (Reaction time) ซึ่งเกิดขึ้นสองครั้งในตอนเริ่มต้นการจับเวลาและตอนหยุดการจับเวลา ในการทดลองนี้ใช้จำนวนรอบในการจับเวลาแต่ละซ้ำ 100 วัฏจักร จึงควรจะมีค่าความคลาดเคลื่อนของเวลาน้อย และได้ทำถึง 12 ซ้ำ จึงควรเป็นการดึงข้อมูลเข้าสู่ค่ากลางที่ละเอียดเพียงพอ

เมื่อพิจารณาผลลัพธ์ของค่าความโน้มถ่วง $= 9.789 \text{ m/s}^2$ ที่ได้จากการทดลองลูกตุ้มแบบแท่งกลมด้วยวิธีนี้จะเห็นได้ว่าค่าความโน้มถ่วงที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อน (ดูจาก%Error) เป็น 0.04% ซึ่งน้อยกว่า 0.5% แสดงว่าได้บรรลุเป้าประสงค์ที่ตั้งไว้

เมื่อพิจารณาถึงความไม่แน่นอน (Uncertainty) ของผลลัพธ์ในตารางที่ 2 จะได้ความไม่แน่นอนสัมบูรณ์ (Absolute uncertainty) มีค่าเป็น:

$$(9.789 \text{ 917} - 9.786 \text{ 921})/2 \text{ m/s}^2 = \pm 0.001 \text{ m/s}^2$$

ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากลูกตุ้มแท่งกลมตามวิธีดั้งเดิมมีค่าเท่ากับ $g_{Exp} = 9.789 \pm 0.001 \text{ m/s}^2$

5. สรุป

ผลลัพธ์การทดลองหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นนี้ใช้ลูกตุ้มแท่งกลมความยาว 1500 mm เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง โดยเปลี่ยนแปลงความยาวระหว่างจุดศูนย์ถ่วง (x_2) กับความยาวจุดรองรับ (d) ครั้งละ 60 mm แต่ละชั้นใช้มุมแกว่งเริ่มต้นไม่เกิน 5° จับเวลาการแกว่ง 100 วัฏจักร และแต่ละความยาวของ x_2 จับเวลา 12 ครั้ง

ผลลัพธ์จากการศึกษานี้ แสดงให้เห็นว่าการทดลองด้วยลูกตุ้มแท่งกลมได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นเป็น $= 9.789 \text{ m/s}^2$ เมื่อพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของผลลัพธ์ ก็จะได้ค่าความโน้มถ่วงเป็น $9.789 \pm 0.001 \text{ m/s}^2$ ค่าความคลาดเคลื่อน

เมื่อเปรียบเทียบกับค่าคำนวณมีค่าประมาณ 0.04% ซึ่งอยู่ภายในเกณฑ์ที่กำหนดไว้ไม่เกิน 0.5% สามารถบรรลุเป้าหมายตามที่ตั้งไว้

จากผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่ได้มีค่าเท่ากับ $9.789 \pm 0.001 \text{ m/s}^2$ ซึ่งสอดคล้องกับค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นของจังหวัดเชียงใหม่ ที่วัดโดยสถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติ $9.784\,261\,950 \pm 0.39 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ [2] และการคำนวณโดยใช้พิกัดทางภูมิศาสตร์ 9.7847 m/s^2 [6] แสดงให้เห็นถึงความแม่นยำและความน่าเชื่อถือของวิธีการทดลองที่ใช้ในครั้งนี้

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] สายชล สิริพิพงศ์, ฌณาคม ศรีคช, และ บัญชา คังตระกูล. (2564). การคำนวณหาค่าความเร่งจากความโน้มถ่วงท้องถิ่น. *การประชุมวิชาการระดับชาติพะเยาวิจัย ครั้งที่ 13*. (2593-2604). มหาวิทยาลัยพะเยา.
- [2] ทศนีย์ ไพรัตน์รัมย์ และ ฐนันท์ วรเดช. (2023). *การวัดความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกในประเทศไทยและความสำคัญ*. สถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติ กระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สืบค้นจาก <https://www.nimt.or.th/main/?p=21307>
- [3] Yuningsih N., Sardjito N, S., and Dewi Y. C., (2020). Determination of earth's gravitational acceleration and moment of inertia of rigid body using physical pendulum experiments. *Materials Science and Engineering*, 830(2), Article 022001. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/830/2/022001>
- [4] Suwanpayak N., Sutthiyan S., Kulsirirat K., Srisongkram P., Teeka C., Buranasiri P., (2018). A comparison of gravitational acceleration measurement methods for undergraduate experiment. *Journal of Physics: Conference Series*, 1144, 012001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1144/1/012001>
- [5] Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1987). *Engineering mechanics dynamics*. (Vol. 2. 2nd ed). John Wiley and Sons.
- [6] บัญชา คังตระกูล และ สายชล สิริพิพงศ์. (2566). การสืบค้นหาสูตรการคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น. *วารสารวิชาการโรงเรียนนายเรือด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี*, 6(1), 161-173.
- [7] Encyclopedia. (2022). *Normal Gravity Formula*. Search at <https://encyclopedia.pub/entry/33797>
- [8] Beer, F. P., & Johnston, E. R. (1988). *Vector Mechanics for Engineers: Dynamics*. (4th ed). McGraw- Hill.