

การวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิต

คมกร ไชยเดชาร¹ วีรพันธุ์ เจียมมีปริชา^{2*} และ หทัยกาญจน์ หนันตุลย์³

^{1,2*,3} สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

E-mail: ¹komkorn@rmuti.ac.th, ^{2*}weeraphan.ji@rmuti.ac.th, ³hathaikan.na@rmuti.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิต การกำหนดรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนตามแนวพิกัดเส้นเมริเดียนจะอาศัยเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ การสร้างฟังก์ชันพลังงานจะใช้หลักการงานเสมือนโดยพิจารณาค่าการเสียรูปของโครงสร้าง การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถทำได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำโดยตรง จากผลการศึกษาพบว่า ค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนมีค่าการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัสและแนวตั้งฉากที่บริเวณของฐานรองรับจะมีค่าลดลง ในขณะที่ค่าแรงเมมเบรนและโมเมนต์ดัดตามแนวพิกัดเส้นเมริเดียนและเส้นรอบวงมีค่าใกล้เคียงกันเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีความหนาที่มีค่าคงที่ ผลการศึกษาดังกล่าวแสดงให้เห็นถึงความคุ้มค่าของการออกแบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิต นอกจากนี้ยังพบว่าแรงเมมเบรนตามแนวพิกัดเส้นรอบวงจะมีค่าสูงสุดในช่วง $0 \leq \theta \leq 70^\circ$ จากนั้นจะลดลงอย่างรวดเร็ว ในขณะที่ค่าโมเมนต์ดัดตามแนวพิกัดเส้นเมริเดียนและเส้นรอบวงจะมีค่าสูงสุดในช่วง $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ และมีค่าสูงสุดที่ตำแหน่งฐานรองรับ

คำสำคัญ: การวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม ความหนาแปรเปลี่ยน แรงดันน้ำสถิต วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

* Corresponding author, e-mail: weeraphan.ji@rmuti.ac.th

Nonlinear Static Analysis of Spherical Shells with Variable Thickness under Hydrostatic Pressure

Komkorn Chaidachatorn¹, Weeraphan Jiammeepreecha^{2*}, and Hathaikan Nandun³

^{1,2*,3}Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology,

Rajamangala University of Technology Isan

E-mail: ¹komkorn@rmuti.ac.th, ^{2*}weeraphan.ji@rmuti.ac.th, ³hathaikan.na@rmuti.ac.th

Abstract

This paper presents a nonlinear static analysis of spherical shells with variable thickness under hydrostatic pressure. The shell geometry with variable thickness along the meridian coordinate can be defined using differential geometry. The energy functional is formulated in terms of shell displacements based on the principle of virtual work. Nonlinear numerical results can be obtained by finite element method and direct iterative procedure. The results indicate that the spherical shells with variable thickness exhibit reduced tangential and normal displacements near the support condition when compared to those with constant thickness. However, the membrane forces and bending moments along the meridian and circumferential coordinates show only minor differences. Consequently, the present results are applicable to the design of spherical shells with variable thickness. Moreover, the maximum circumferential membrane force is occurred in the range of $0 \leq \theta \leq 70^\circ$, and then decreases rapidly. The maximum meridian and circumferential bending moments are occurred in the range of $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, and the maximum bending moments is occurred at the support.

Keywords: Static analysis, Spherical shells, Variable thickness, Hydrostatic pressure, Finite element method

* Corresponding author, e-mail: weeraphan.ji@rmuti.ac.th

1. ที่มาและความสำคัญ

โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม (Spherical Shells) เป็นโครงสร้างที่มีประสิทธิภาพสูงสามารถต้านทานแรงดันจากภายในและภายนอกขนาดใหญ่ได้ จึงนิยมนำมาใช้ในงานวิศวกรรมโยธาและเครื่องกล เป็นต้น [1-2] งานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตจะมุ่งเน้นไปที่การวิเคราะห์การสั่นและเสถียรภาพของโครงสร้างเปลือกบาง ดังแสดงในงานวิจัยของ Artioli and Viola [3] ได้เสนอวิธี Generalized Differential Quadrature (G.D.Q.) สำหรับวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม จากนั้น Jiammeepreecha and Chucheeepsakul [4] และ Jiammeepreecha และคณะ [5] เสนอการใช้ทฤษฎีเมมเบรน (Membrane Theory) ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมสำหรับบรรจุของเหลวโดยใช้ชิ้นส่วนหนึ่งมิติและสองมิติ ตามลำดับ นอกจากนี้ Al-Gahtani และคณะ [6] ได้ทดสอบโครงสร้างเปลือกบางรับแรงดันรูปทรงกลม (Spherical Vessels) ภายใต้แรงดันเฉพาะที่ Evkin and Lykhachova [7] และ Wang และคณะ [8] เสนอวิธีการหาค่าการโก่งเดาะสำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันภายนอกแบบสม่ำเสมอที่รวมผลของความไม่สมบูรณ์ทางเรขาคณิต (Geometrical Imperfections) Zhang และคณะ [9] ทดสอบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมภายใต้แรงดันน้ำสถิตจากภายนอกแบบจุด

สำหรับงานวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเล (Offshore Engineering) ในปัจจุบันได้มีการใช้งานโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมสำหรับโครงสร้างชายฝั่งและนอกชายฝั่งทะเล [10-11] โดยงานวิจัยในอดีตจะนิยมใช้ทฤษฎีเมมเบรน (Membrane Theory) ในการวิเคราะห์ปัญหาทางสถิตศาสตร์ (Static Analysis) ซึ่งทฤษฎีดังกล่าวจะเรียกว่าทฤษฎีไร้มoment (Momentless Theory) ดังแสดงในงานวิจัยของ Phadke and Cheung [12] ซึ่งได้ศึกษาผลของการเสียรูปแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Response) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงกระทำจากคลื่นในทิศทางแรงโน้มถ่วง (Gravity Waves) จากนั้น Wang และคณะ [13] ได้คำนวณหาขนาดความหนาที่เหมาะสมสำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิตเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด Jiammeepreecha และคณะ [14-15] ทำการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาคงที่รับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้นแสดงให้เห็นว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมเป็นโครงสร้างที่มีประสิทธิภาพสูงถูกใช้ในงานวิศวกรรมหลายสาขา รวมถึงโครงสร้างทางทะเล (Ocean Structures) และที่ผ่านมาพบว่าการใช้ทฤษฎีเมมเบรนในการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรับแรงดันน้ำสถิต (Hydrostatic Pressure) เพียงอย่างเดียวจะลดความซับซ้อนของการวิเคราะห์ปัญหา แต่ไม่ครอบคลุมแรงดัดที่เกิดขึ้น เนื่องจากมีข้อจำกัดสำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่มีความซับซ้อนสูง (Complex Shells) ดังแสดงในงานวิจัยของ Zingoni [16-17] และ Zingoni และคณะ [18] ดังนั้นจึงจำเป็นต้องพัฒนา แบบจำลองใหม่ที่รองรับผลของความแข็งแกร่งเนื่องจากโมเมนต์ดัด (Bending Rigidity) และความหนาแปรเปลี่ยน (Variable Thickness) สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาเชิงลึกเพื่อให้ผลการคำนวณมีความถูกต้องแม่นยำสูงขึ้น ดังแสดงในงานวิจัยของ Jiammeepreecha และคณะ [19-22] ซึ่งจะเป็นกรณีที่โครงสร้างเปลือกบางมีความหนาคงที่ตลอดแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน แต่ในทางปฏิบัติพบว่าค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในโครงสร้างเปลือกบาง

เนื่องจากโมเมนต์ดัดจะมีค่าสูงสุดที่บริเวณฐานรองรับจากนั้นจะลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ที่ตำแหน่งจุดยอด (Apex) ดังแสดงในงานวิจัยของ Sekhon and Bhatia [23] โดยได้นำเสนอสมการเพื่อหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นกับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาคงที่รับแรงดันภายในสม่ำเสมอ ดังนั้นงานวิจัยนี้จะกำหนดให้โครงสร้างเปลือกบางมีความหนาแปรเปลี่ยนตามแนวพิกัดเส้นเมริเดียน เพื่อให้เกิดความเหมาะสมกับการใช้งาน โครงสร้างเปลือกบางในงานวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเลดังกล่าว

2. วัตถุประสงค์

สำหรับวัตถุประสงค์ของบทความนี้ คือการนำเสนอผลการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิตโดยใช้ทฤษฎีเชลล์ (Shell Theory) ที่มีการพิจารณาผลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด การกำหนดรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนตามแนวพิกัดเส้นเมริเดียนจะอาศัยทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) [24-26] ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูปจะสามารถนิยามได้โดยใช้ความเครียดลากรองจ์ (Lagrangian Strains) [27] และสร้างฟังก์ชันพลังงาน (Energy Functional) ของระบบโครงสร้างโดยอาศัยหลักการของงานเสมือน (Principle of Virtual Work) [28] ในทอมของค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบาง การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถทำได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) [29-30] ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำโดยตรง (Direct Iterative Procedure) [31] เพื่อหาค่าการเสียรูปขนาดใหญ่และแรงภายในที่เกิดขึ้นสำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม

3. ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์

3.1 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

โครงสร้างเปลือกบางจะมีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเป็นเชิงเส้นสามารถนิยามค่าพลังงานความเครียด (Strain Energy) ได้ในรูปแบบของความเครียดลากรองจ์ [27] โดยที่ความหนาของโครงสร้างจะนิยามเป็นฟังก์ชัน โดยมีการแปรเปลี่ยนตามแนวพิกัดเส้นเมริเดียนเท่านั้น และมีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงภายหลังรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก ค่าการเสียรูปและแรงภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักของโครงสร้างจะไม่นำมาพิจารณาเนื่องจากมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก และเงื่อนไขของฐานรองรับจะสมมติให้เป็นแบบยึดแน่น (Clamped Support) อย่างสมบูรณ์แบบที่บริเวณพื้นทะเล

3.2 รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน

กำหนดให้รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมมีความยาวรัศมี a ดังแสดงในรูปที่ 1 สามารถนิยามได้โดยเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง (Position Vector) ของพื้นผิวอ้างอิงที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนา (Middle Reference Surface) ของโครงสร้างเปลือกบาง ดังสมการที่ (1)

$$\mathbf{R} = a \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + a \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (1)$$

เมื่อ (θ, ϕ) คือ พารามิเตอร์ของพื้นผิว (Surface Parameters) อ้างอิงตามแนวเส้นพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน และลองจิจูด ตามลำดับ ในที่นี้กำหนดให้ $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vectors) อ้างอิงตามแนวพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate) โดยที่ฟังก์ชันความหนาของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมจะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามแนวเส้นเมอร์ริเดียน ดังสมการที่ (2)

$$h(\theta) = h_a + \theta \left(\frac{h_b - h_a}{\beta} \right) \quad (2)$$

เมื่อ β คือ ค่ามุมที่รองรับส่วนโค้ง และ (h_a, h_b) คือ ความหนาที่ตำแหน่งจุดยอดและที่ฐานรองรับแบบยึดแน่นตามลำดับ จากทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) [24-26] จะสามารถคำนวณหาค่าองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ (Metric Tensor Components) ของพื้นผิวอ้างอิง ได้ดังสมการที่ (3)

$$E = \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{R}_\theta = a^2 \quad (3ก)$$

$$G = \mathbf{R}_\phi \cdot \mathbf{R}_\phi = a^2 \sin^2 \theta \quad (3ข)$$

ในที่นี้ตัวห้อย (θ, ϕ) แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม เมื่อโครงสร้างเปลือกบางรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกจะสามารถนิยามหาเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของพื้นผิวภายหลังการเสียรูปที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนา (Middle Deformed Surface) ของโครงสร้างเปลือกบาง ดังสมการที่ (4)

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \left(\frac{\mathbf{R}_\theta}{\sqrt{E}} \right) u + \left(\frac{\mathbf{R}_\phi}{\sqrt{G}} \right) v + \left(\frac{\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\phi}{|\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\phi|} \right) w \quad (4)$$

เมื่อ u และ w คือ ค่าการเสียรูปอ้างอิงตามแนวเส้นสัมผัสกับเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ ในขณะที่ค่าการเสียรูปอ้างอิงตามแนวเส้นสัมผัสกับเส้นลองจิจูด v จะไม่นำมาพิจารณาเนื่องจากเป็นปัญหาแบบสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Problem) ดังนั้น $v = 0$ ถ้ากำหนดให้ $A = \sqrt{E}$ และ $B = \sqrt{G}$ ดังนั้น ค่าองค์ประกอบเมตริกซ์ความโค้ง (Metric Curvature Components) ของพื้นผิวอ้างอิงจะสามารถคำนวณหาได้ดังสมการที่ (5)

$$L = \mathbf{R}_{\theta\theta} \cdot \frac{\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\phi}{|\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\phi|} = -a \quad (5ก)$$

$$N = \mathbf{R}_{\phi\phi} \cdot \frac{\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\phi}{|\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\phi|} = -a \sin^2 \theta \quad (5ข)$$

จากความสัมพันธ์ของความเครียดกับระยะการเสียรูปตามนิยามความเครียดเป็นแบบลากรองจ์ (Lagrangian Strains) [27] จะสามารถนิยามได้โดยกำหนดให้ $\{\mathbf{g}\}^T = [u \ w \ u_\theta \ w_\theta \ u_{\theta\theta} \ w_{\theta\theta}]$ ดังสมการที่ (6)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^L + \boldsymbol{\varepsilon}_i^N = \{\mathbf{L}_i\}^T \{\mathbf{g}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{g}\}^T [\mathbf{H}_i] \{\mathbf{g}\} \quad (6)$$

เมื่อ $\{\mathbf{L}_i\}$ และ $[\mathbf{H}_i]$ คือ เวกเตอร์และเมตริกซ์ความเครียด ตามลำดับ ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (7) และ (8)

$$\{\mathbf{L}_1\}^T = \frac{1}{a} [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (7ก)$$

$$\{\mathbf{L}_2\}^T = \frac{1}{a} [\cot \theta \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (7ข)$$

$$[\mathbf{H}_1] = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8ก)$$

$$[\mathbf{H}_2] = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} \cot^2 \theta & \cot \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cot \theta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8ข)$$

สำหรับค่าการเปลี่ยนแปลงค่าความโค้งของพื้นผิวที่กึ่งกลางความหนาของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม เนื่องจากผลของการดัด [20] จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (9)

$$\boldsymbol{\kappa}_i = \{\mathbf{S}_i\}^T \{\mathbf{g}\} \quad (9)$$

เมื่อ $\{\mathbf{S}_i\}$ คือ เวกเตอร์ค่าความโค้งหลัก ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (10)

$$\{\mathbf{S}_1\}^T = \frac{1}{a^2} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] \quad (10ก)$$

$$\{\mathbf{S}_2\}^T = \frac{1}{a^2} [0 \ 0 \ 0 \ \cot \theta \ 0 \ 0] \quad (10ข)$$

$$U_m = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\{\mathbf{g}\}^T \left(\frac{1}{2}[\mathbf{k}_m] + \frac{1}{6}[\mathbf{n}_{1m}] + \frac{1}{12}[\mathbf{n}_{2m}] \right) \{\mathbf{g}\} \right] d\theta \quad (13)$$

เมื่อ $[\mathbf{k}_m]$, $[\mathbf{n}_{1m}]$, และ $[\mathbf{n}_{2m}]$ คือ เมตริกซ์สมมาตร ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (14)

$$[\mathbf{k}_m] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C'_{ij} (\{\mathbf{L}_i\} \{\mathbf{L}_j\}^T) \quad (14ก)$$

$$[\mathbf{n}_{1m}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C'_{ij} \left[(\{\mathbf{L}_i\} \{\mathbf{g}\}^T) [\mathbf{H}_j] + (\{\mathbf{g}\}^T \{\mathbf{L}_i\}) [\mathbf{H}_j] + [\mathbf{H}_i] (\{\mathbf{g}\} \{\mathbf{L}_j\}^T) \right] \quad (14ข)$$

$$[\mathbf{n}_{2m}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C'_{ij} \left[[\mathbf{H}_i] (\{\mathbf{g}\} \{\mathbf{g}\}^T) [\mathbf{H}_j] + \frac{1}{2} (\{\mathbf{g}\}^T [\mathbf{H}_j] \{\mathbf{g}\}) [\mathbf{H}_i] \right] \quad (14ค)$$

จากสมการที่ (13) จะสามารถเขียนสมการแปรผันของพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนได้ดังสมการที่ (15)

$$\delta U_m = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\delta \{\mathbf{g}\}^T \left([\mathbf{k}_m] + \frac{1}{2}[\mathbf{n}_{1m}] + \frac{1}{3}[\mathbf{n}_{2m}] \right) \{\mathbf{g}\} \right] d\theta \quad (15)$$

สำหรับค่าพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนจะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (16)

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} \{\mathbf{\kappa}\}^T [\mathbf{D}'] \{\mathbf{\kappa}\} AB d\phi d\theta \quad (16)$$

เมื่อ $[\mathbf{D}']$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแรงแ้งเนื่องจากการดัด (Bending Rigidity) ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (17)

$$[\mathbf{D}'] = \frac{E'h^3(\theta)}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

แทนค่าสมการที่ (9) ลงในสมการที่ (16) จะสามารถเขียนสมการพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัดได้ดังสมการที่ (18)

$$U_b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\{\mathbf{g}\}^T [\mathbf{k}_b] \{\mathbf{g}\} \right] d\theta \quad (18)$$

เมื่อ $[\mathbf{k}_b]$ คือเมตริกซ์สมมาตร ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (19)

$$[\mathbf{k}_b] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 D'_{ij} (\{\mathbf{S}_i\} \{\mathbf{S}_j\}^T) \quad (19)$$

จากสมการที่ (18) จะสามารถเขียนสมการแปรผันของพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของแรงดัดได้ดังสมการที่ (20)

$$\delta U_b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\delta \{\mathbf{g}\}^T [\mathbf{k}_b] \{\mathbf{g}\}] d\theta \quad (20)$$

สำหรับค่าแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น (Linearly Hydrostatic Pressure) ดังแสดงในรูปที่ 1 จะสามารถคำนวณหาค่าแรงดันน้ำสถิตที่กระทำตังฉากกับพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม ได้ดังสมการที่ (21)

$$p_w = \rho_w g' Z_w \quad (21)$$

เมื่อ ρ_w คือ ความหนาแน่นจำเพาะของน้ำทะเล g' คือ ค่าแรงโน้มถ่วงของโลก และ Z_w คือ ระยะทางในแนวตั้ง ณ ตำแหน่งที่พิจารณา ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (22)

$$Z_w = H + a(\cos \beta - \cos \theta) \quad (22)$$

เมื่อ H คือ ระดับความลึกของน้ำทะเลวัดจากตำแหน่งฐานรองรับ ดังนั้นจะสามารถคำนวณหาค่างานเสมือนเนื่องจากแรงดันที่กระทำต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนได้ดังสมการที่ (23)

$$\delta \Omega = \rho_w g' \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\delta \mathbf{w}\} Z_w A B d\theta \quad (23)$$

จากหลักการของงานเสมือน (Principle of Virtual Work) [28] จะสามารถเขียนผลรวมงานเสมือนของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกได้ดังสมการที่ (24)

$$\delta \pi = \delta U_m + \delta U_b + \delta \Omega \quad (24)$$

แทนค่าสมการที่ (15), (20) และ (23) ลงในสมการที่ (24) จะได้ดังสมการที่ (25)

$$\delta \pi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{\mathbf{g}\}^T \left([\mathbf{k}_m] + [\mathbf{k}_b] + \frac{1}{2} [\mathbf{n}_{1m}] + \frac{1}{3} [\mathbf{n}_{2m}] \right) \{\mathbf{g}\} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_w \{\delta \mathbf{w}\} A B d\theta \quad (25)$$

4. วิธีดำเนินการวิจัย

การหาผลเฉลยแบบแม่นยำตรงของผลรวมงานเสมือนของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก ดังแสดงในสมการที่ (25) ไม่สามารถทำได้เนื่องจากประกอบไปด้วยเทอมไร้มิติค่อนข้างสูง ดังนั้นการหาคำตอบเชิงตัวเลขจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [29-30] ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำโดยตรง [31] โดยทำการแบ่งชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางเป็นชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนโดยใช้เอลิเมนต์คานที่มีค่าประมาณการเสียรูปด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับที่ห้าในการประมาณค่าการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัสและแนวเส้นตั้งฉาก ดังสมการที่ (26)

$$\{\mathbf{g}\} = [\boldsymbol{\Psi}] \{\mathbf{d}\} \quad (26)$$

เมื่อ $\{\mathbf{g}\}$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ, $\{\mathbf{d}\}$ คือ เวกเตอร์ของดิกิริอัสระที่จุดต่อ และ $\{\boldsymbol{\psi}\}$ คือ เมตริกซ์ ฟังก์ชันรูปร่างฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับที่ห้า ซึ่งมีค่าดังสมการที่ (27)

$$\{\mathbf{g}\}^T = [u(\varphi) \quad w(\varphi) \quad u_\theta(\varphi) \quad w_\theta(\varphi) \quad u_{\theta\theta}(\varphi) \quad w_{\theta\theta}(\varphi)] \quad (27ก)$$

$$\{\mathbf{d}\}^T = \begin{bmatrix} u(0) & w(0) & u_\theta(0) & w_\theta(0) & u_{\theta\theta}(0) & w_{\theta\theta}(0) & \dots \\ \dots & \dots & u(\alpha) & w(\alpha) & u_\theta(\alpha) & w_\theta(\alpha) & u_{\theta\theta}(\alpha) & w_{\theta\theta}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (27ข)$$

$$[\boldsymbol{\psi}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_6 \\ N_{1,\varphi} & 0 & N_{2,\varphi} & 0 & N_{3,\varphi} & \dots & 0 \\ 0 & N_{1,\varphi} & 0 & N_{2,\varphi} & 0 & \dots & N_{6,\varphi} \\ N_{1,\varphi\varphi} & 0 & N_{2,\varphi\varphi} & 0 & N_{3,\varphi\varphi} & \dots & 0 \\ 0 & N_{1,\varphi\varphi} & 0 & N_{2,\varphi\varphi} & 0 & \dots & N_{6,\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (27ค)$$

เมื่อ $N_i (i=1,2,\dots,6)$ คือ ค่าฟังก์ชันรูปร่างในเทอมของโพลิโนเมียลอันดับที่ห้า [29-30] แทนค่าสมการที่ (26) ลงในสมการที่ (25) จะได้สมการที่ (28)

$$\delta\pi = \{\delta\mathbf{d}\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\boldsymbol{\psi}]^T \left([\mathbf{k}_m] + [\mathbf{k}_b] + \frac{1}{2}[\mathbf{n}_{1m}] + \frac{1}{3}[\mathbf{n}_{2m}] \right) [\boldsymbol{\psi}] d\theta \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{f}\} \quad (28)$$

เมื่อ $\{\mathbf{f}\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก จะมีค่าดังสมการที่ (29)

$$\{\mathbf{f}\} = 2\pi \{\delta\mathbf{w}\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_w \{\boldsymbol{\psi}\} AB d\theta \quad (29)$$

เนื่องจากดิกิริอัสระเฉพาะที่ $\{\mathbf{d}\}$ มีทิศทางเหมือนกับดิกิริอัสระรวม $\{\mathbf{D}\}$ ดังนั้นสมการที่ (28) จะอยู่ในสภาวะ สมดุลได้โดยกำหนดให้ผลรวมงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิตมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังสมการที่ (30)

$$\left[[\mathbf{K}_m] + [\mathbf{K}_b] + \frac{1}{2}[\mathbf{N}_{1m}] + \frac{1}{3}[\mathbf{N}_{2m}] \right] \{\mathbf{Q}\} + \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (30)$$

เนื่องจากเป็นปัญหาแบบสมมาตร (Axisymmetric Problem) ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งบนสุดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมจะมีค่าดังสมการที่ (31)

$$u = w_\theta = 0 \quad (31)$$

สำหรับเงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับจะพิจารณาเป็นแบบยึดแน่นอย่างสมบูรณ์ (Clamped Support) จะมีค่า ดังสมการที่ (32)

$$u = w = w_\theta = 0 \quad (32)$$

ดังนั้นสมการที่ (30) เป็นระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Equation System) ต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเนื่องจากความสมมาตรตามแนวแกนจากสมการที่ (31) พร้อมทั้งเงื่อนไขของฐานรองรับแบบยึดแน่นจากสมการที่ (32) จึงจะสามารถคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้ด้วยวิธีการวนการทำซ้ำโดยตรง (Direct Iterative Procedure) [31]

5. ผลการวิเคราะห์

ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิตสามารถหาคำตอบได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [29-30] ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำโดยตรง [31] เริ่มต้นจากการทดสอบค่าการคำนวณเพื่อหาจำนวนขั้นส่วนย่อยที่มีความเหมาะสมโดยใช้ค่าพารามิเตอร์คุณสมบัติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนดังแสดงในตารางที่ 1 พบว่าเมื่อจำนวนขั้นส่วนย่อยมีค่าสูงขึ้นจะส่งผลทำให้การลู่เข้าของคำตอบสำหรับค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอด ($\theta = 0^\circ$) แรงเมมเบรนและโมเมนต์ดัดที่ตำแหน่งฐานรองรับ ($\theta = 90^\circ$) ดีขึ้น ดังนั้นงานวิจัยชิ้นนี้จึงได้กำหนดให้ใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนมีจำนวนขั้นส่วนย่อยเท่ากับ 24 ขั้นส่วนซึ่งจะมีค่าความแตกต่างน้อยกว่าร้อยละ 0.10 เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ใช้จำนวนขั้นส่วนย่อยเท่ากับ 28 ขั้นส่วนดังแสดงในตารางที่ 2

เนื่องจากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตสำหรับการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนยังไม่ได้มีการศึกษา ดังนั้นการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิจัยนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ การตรวจสอบความถูกต้องของค่าการเสียรูปและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้น โดยเริ่มต้นจากการเปรียบเทียบค่าการเสียรูปกับสูตรของ Roark [32] สำหรับกรณีของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบเต็มใบที่มีความหนาคงที่รับแรงดันภายในสม่ำเสมอขนาด 1 เมกะปาสคาล โดยในกรณีนี้จะใช้ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางเท่ากับความหนาเฉลี่ยของโครงสร้างและคุณสมบัติทางกลของโครงสร้าง ดังแสดงในตารางที่ 1 สำหรับการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งบนสุดของโครงสร้างเปลือกบางจะใช้ตามสมการที่ (31) ในขณะที่เงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับจะกำหนดให้เป็น $u = w_\theta = 0$ ดังนั้นจะพบว่าคำตอบที่ได้มีความละเอียดแม่นยำถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 6 นั่นคือมีค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอด ($\theta = 0^\circ$) และระนาบอิกเควเตอร์ ($\theta = 90^\circ$) มีค่าเท่ากับ 0.0021875 เมตร

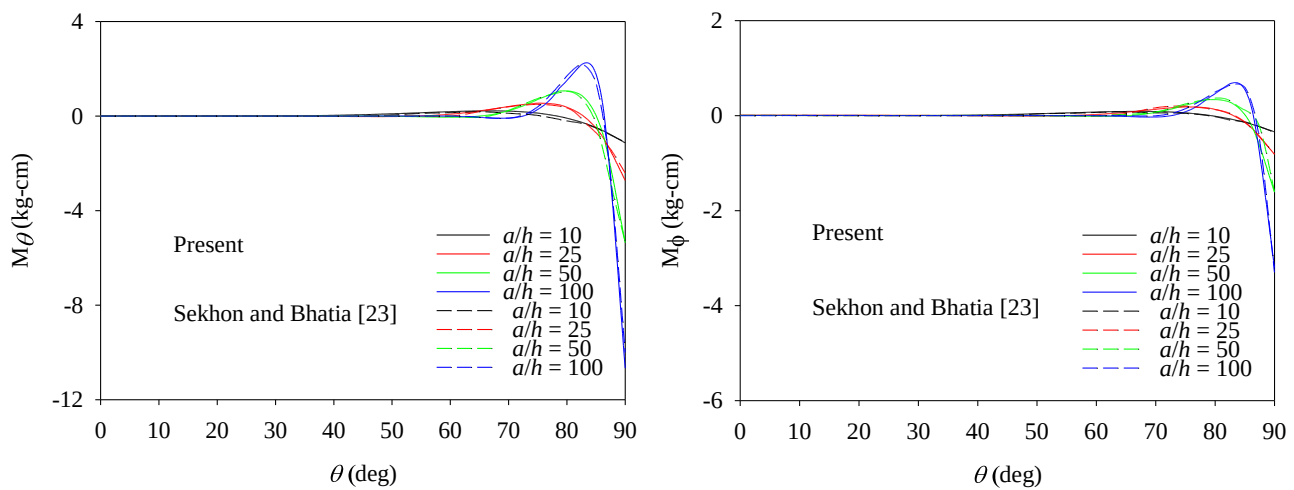
จากนั้นทำการตรวจสอบค่าโมเมนต์ดัดตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนและเส้นรอบวงของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่นรับแรงสม่ำเสมอภายในสม่ำเสมอขนาด 1 กิโลกรัมต่อตารางเซนติเมตร โดยที่โครงสร้างมีความหนาคงที่ 0.01 เมตร ค่ามอดุลัสยืดหยุ่น 2×10^6 กิโลกรัมต่อตารางเซนติเมตร และอัตราส่วนปัวส์ซอง 0.30 ดังแสดงในงานวิจัยของ Sekhon and Bhatia [23] พบว่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมเมนต์ดัดตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนและพิกัดเส้นรอบวงของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมเทียบกับระยะพิกัด θ จะมีค่าใกล้เคียงกันดังแสดงในรูปที่ 2

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

รายการ	ปริมาณ
ความยาวรัศมี (a)	5 เมตร
ความหนาของโครงสร้างที่จุดยอด (h_a)	0.01 เมตร
ความหนาของโครงสร้างที่ฐานรองรับ (h_b)	0.03 เมตร
ความหนาเฉลี่ยของโครงสร้างเปลือกบาง (h)	0.02 เมตร
ความสูงของระดับน้ำทะเล (H)	50 เมตร
ความหนาแน่นของน้ำทะเล (ρ_w)	1025 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร
มุมที่รองรับส่วนโค้ง (β)	90 องศา
มอดุลัสยืดหยุ่น (E')	200×10^3 เมกะปาสคาล
อัตราส่วนปัวส์ซอง (μ)	0.3

ตารางที่ 2 การทดสอบการลู่เข้าของระยะการเสีรูปที่ปลายด้านบน แรงเมมเบรนและโมเมนต์ดัดที่บริเวณฐานรองรับของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิต

จำนวนชั้น ส่วนย่อย	w_a (เมตร)	N_θ (นิวตัน/เมตร)	N_ϕ (นิวตัน/เมตร)	M_θ (นิวตัน-เมตร)	M_ϕ (นิวตัน-เมตร)
4	-0.001854	-1388449.05	-416534.71	5812.46	1743.74
8	-0.001881	-1202076.64	-360622.99	8734.61	2620.38
12	-0.001883	-1174711.14	-352413.34	8961.19	2688.36
16	-0.001883	-1171339.93	-351401.98	8956.96	2687.09
20	-0.001882	-1170984.26	-351295.28	8942.45	2682.74
24	-0.001882	-1171009.75	-351302.93	8933.22	2679.97
28	-0.001882	-1171060.46	-351318.14	8927.90	2678.37



(ก) โมเมนต์ดัดตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน

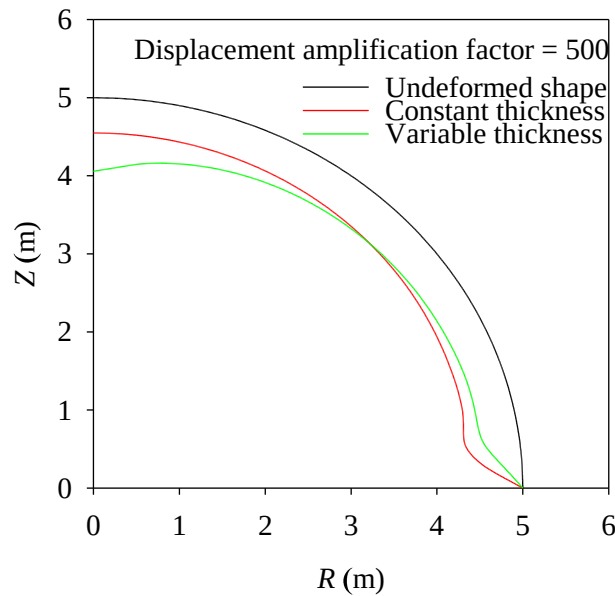
(ข) โมเมนต์ดัดตามแนวพิกัดเส้นรอบวง

รูปที่ 2 การเปรียบเทียบโมเมนต์ดัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงสม่ำเสมอภายใน

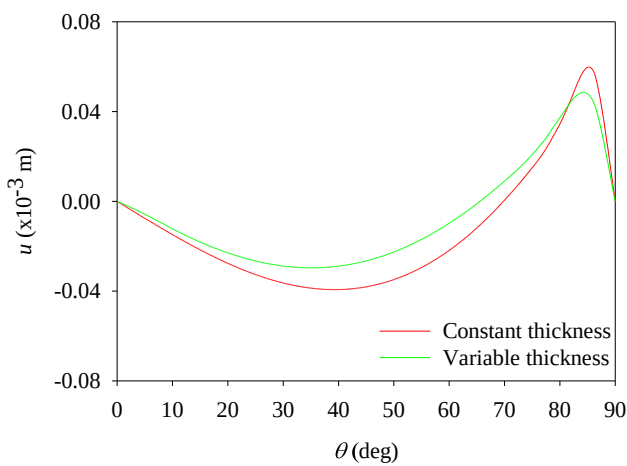
5.1 พฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิต

การศึกษาพฤติกรรมทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนและความหนาคงที่รับแรงดันน้ำสถิตโดยใช้ค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ 1 ซึ่งเป็นวัตถุประสงค์หลักของบทความนี้ โดยที่ค่าแรงดันน้ำสถิตจากภายนอกจะมีค่าแปรเปลี่ยนตามความลึกของระดับน้ำ ดังสมการที่ (21) และ (22) ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงกำหนดให้ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมมีค่าไม่คงที่และแปรเปลี่ยนตลอดแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนโดยที่ความหนาของโครงสร้างที่จุดยอด (h_u) จะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะกระทั่งถึงตำแหน่งของฐานรองรับ จะมีค่าความหนาสูงสุด (h_b) ดังนั้นค่าแรงดันน้ำสถิตจะสอดคล้องกับฟังก์ชันความหนาของโครงสร้าง ดังแสดงในสมการที่ (2) โดยการศึกษาในครั้งนี้จะแตกต่างจากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตที่เป็นการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาคงที่สม่ำเสมอตลอดแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนรับแรงดันสม่ำเสมอจากภายนอก

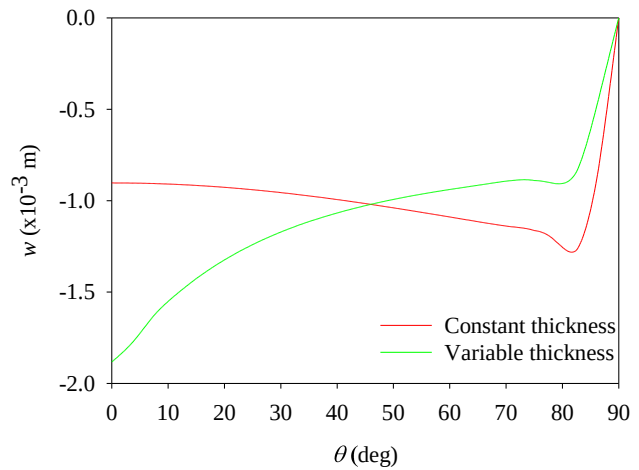
จากผลการศึกษาพบว่า ค่าการเสียรูปในช่วงประมาณ $0 \leq \theta \leq 50^\circ$ จะมีค่าสูงมากกว่ากรณีของโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาคงที่ จากนั้นค่าการเสียรูปจะมีค่าน้อยกว่า ดังแสดงในรูปที่ 3 สอดคล้องกับผลของค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ดังแสดงในรูปที่ 4(ข) ซึ่งพบว่าค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนจะมีค่าลดลงตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน จนกระทั่งมีค่าน้อยกว่ากรณีโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาคงที่ ในช่วงประมาณ $50 \leq \theta \leq 90^\circ$ ดังนั้นรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางดังแสดงในรูปที่ 3 จะมีค่าขึ้นอยู่กับผลของค่าการเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนเป็นหลัก ในขณะที่ค่าการเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสกับเส้นเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางรูปที่มีความหนาแปรเปลี่ยนจะมีค่าน้อยกว่ากรณีโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาคงที่ตลอดแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน ดังแสดงในรูปที่ 4(ก)



รูปที่ 3 การเปรียบเทียบรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิต



(ก) การเสียรูปตามแนวเส้นสัมผัสกับเส้นเมอร์ริเดียน

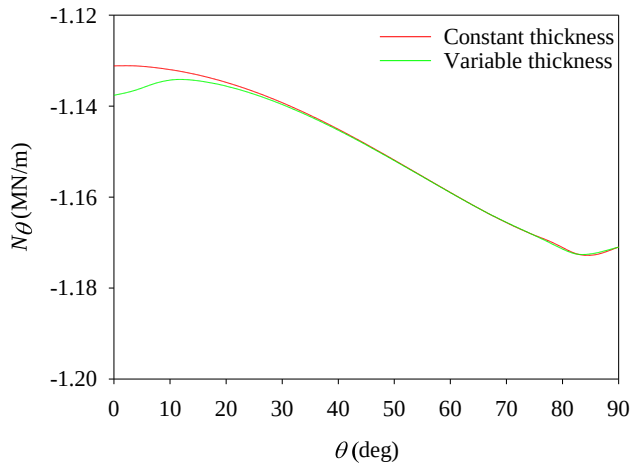


(ข) การเสียรูปตามแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

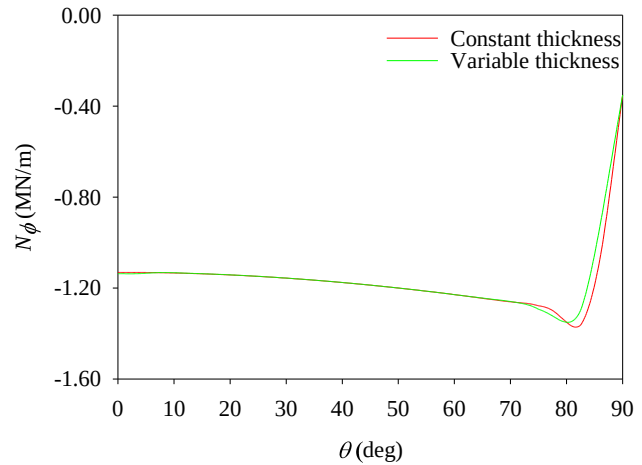
รูปที่ 4 การเปรียบเทียบการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิต

รูปที่ 5(ก) และ 5(ข) แสดงผลของแรงเมมเบรนตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนและเส้นรอบวงเทียบกับระยะพิกัด θ ตามลำดับ ซึ่งจะพบว่าแรงเมมเบรนตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนจะมีค่าแตกต่างกันเล็กน้อยเมื่อเทียบกับกรณีที่ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าคงที่ ณ ตำแหน่งจุดยอดของโครงสร้าง นอกจากนี้ยังพบว่าแรงเมมเบรนตามแนวพิกัดเส้นรอบวงจะมีค่าสูงสุดในช่วงประมาณ $0 \leq \theta \leq 70^\circ$ จากนั้นจะลดลงอย่างรวดเร็ว สำหรับการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ดัดตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนกับเส้นรอบวงจะมีค่าแตกต่างในช่วง $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ซึ่งจะพบว่าค่าโมเมนต์ดัดของโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาแปรเปลี่ยนจะมีค่าสูงกว่ากรณีที่ความหนามีค่าคงที่ ดังแสดงในรูปที่ 6(ก) และ 6(ข) ตามลำดับ

นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Sekhon and Bhatia [23] สำหรับกรณีที่ค่าแรงดันภายในเป็นค่าคงที่สม่ำเสมอตลอดแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน พบว่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมเมนต์ตัดตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนและพิกัดเส้นรอบวงของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมเทียบกับระยะพิกัด θ จะมีค่าใกล้เคียงกัน โดยจะมีค่าแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยที่บริเวณฐานรองรับ ดังแสดงในรูปที่ 2 และ 6 สำหรับกรณีที่เป็แรงดันภายในสม่ำเสมอและแรงดันน้ำสถิตจากภายนอก ตามลำดับ

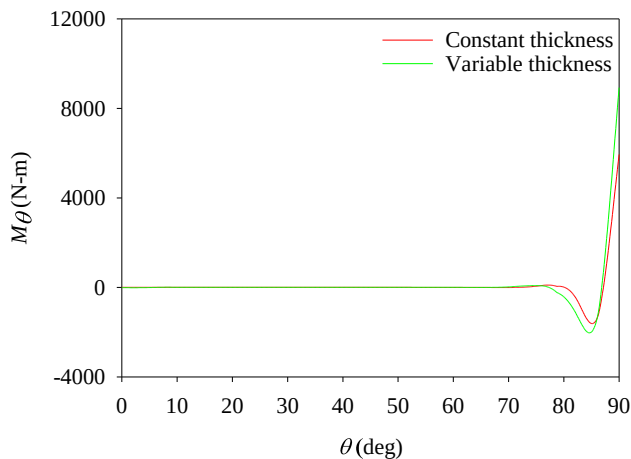


(ก) แรงเมมเบรนตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน

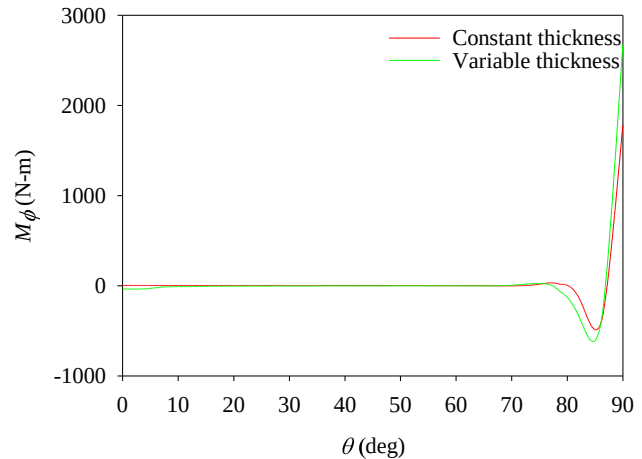


(ข) แรงเมมเบรนตามแนวพิกัดเส้นรอบวง

รูปที่ 5 การเปรียบเทียบแรงเมมเบรนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิต



(ก) โมเมนต์ตัดตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน

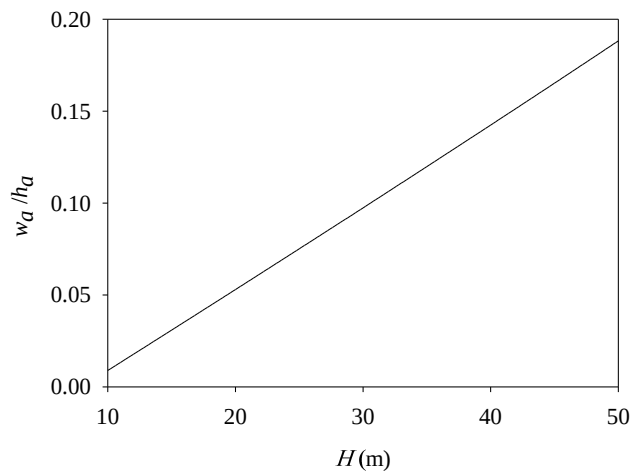


(ข) โมเมนต์ตัดตามแนวพิกัดเส้นรอบวง

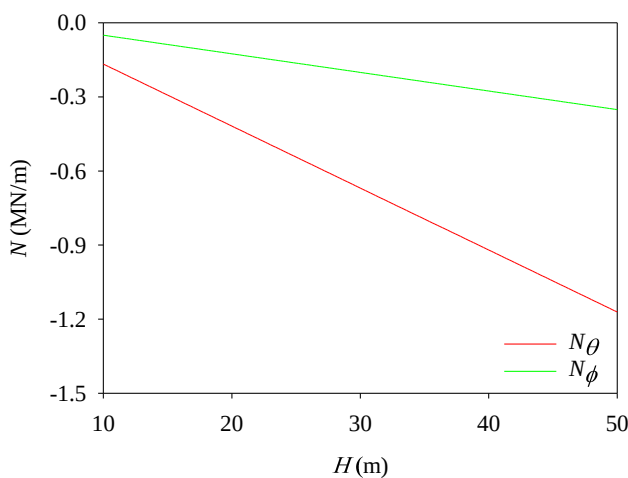
รูปที่ 6 การเปรียบเทียบโมเมนต์ตัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิต

5.2 ผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม

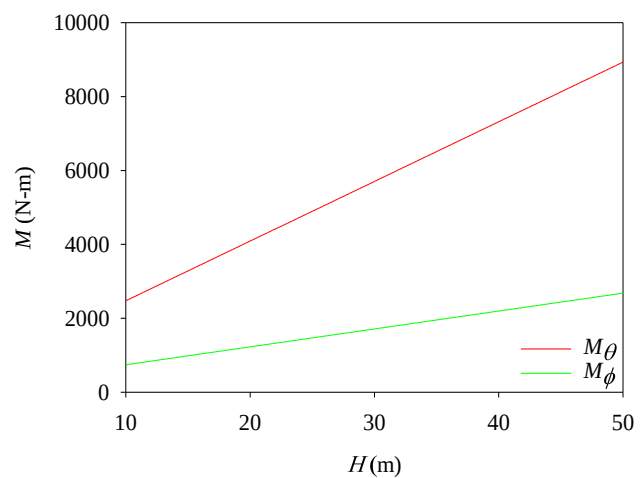
การศึกษาจะเป็นผลของการแปรเปลี่ยนความสูงของระดับน้ำทะเลโดยเริ่มทำการทำการเปลี่ยนแปลงตั้งแต่ 10 ถึง 50 เมตร โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 เป็นค่าคงที่ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง พบว่าค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอดของโครงสร้างเปลือกบางจะแปรผันตรงกับความสูงของระดับน้ำทะเล นั่นคือเมื่อค่าความสูงของระดับน้ำทะเลมีค่าสูงขึ้นจะทำให้ค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอดของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7(ก) สอดคล้องกับงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตสำหรับกรณีของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาคงที่รับแรงดันน้ำสถิตโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนเพียงอย่างเดียวในงานวิจัยของ Jiammeepreecha และคณะ [14-15] นอกจากนี้ยังพบว่าแรงเมมเบรนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งฐานรองรับ จะมีค่าแปรผันตรงกับความสูงของระดับน้ำทะเล เช่นเดียวกันกับค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอดของโครงสร้างเปลือกบาง ดังแสดงในรูปที่ 7(ข) และ 7(ค) ตามลำดับ



(ก) การเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอด



(ข) แรงเมมเบรนที่ฐานรองรับ



(ค) โมเมนต์ดัดที่ฐานรองรับ

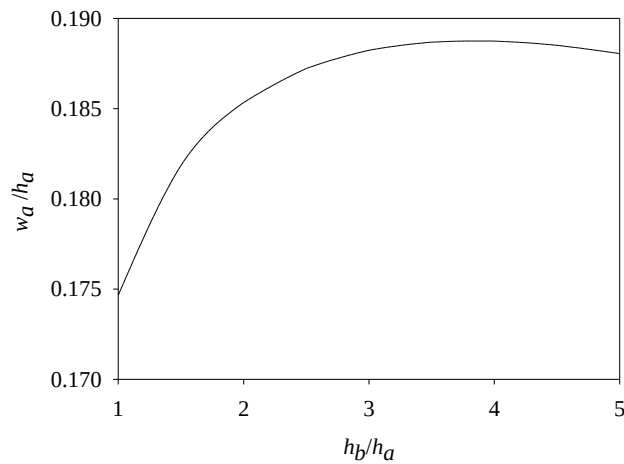
รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนระดับน้ำทะเลที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิต

5.3 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม

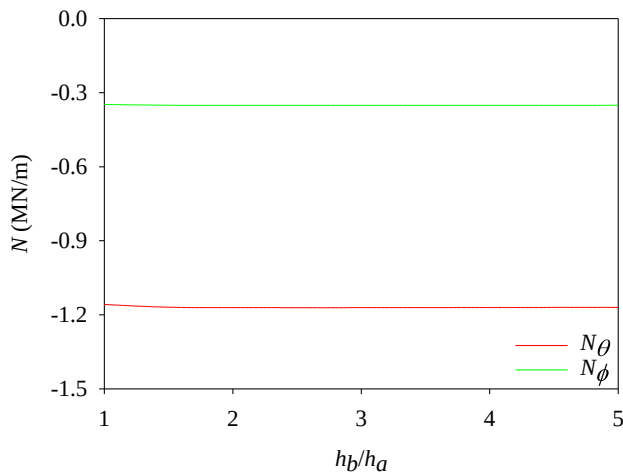
สำหรับผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญในบทความนี้ เนื่องจากการใช้ค่าอัตราส่วนความหนาที่เหมาะสมจะทำให้โครงสร้างมีความคุ้มค่าทางวิศวกรรม ในการศึกษาจะทำการเปลี่ยนแปลงค่าอัตราส่วนความหนาของโครงสร้างที่ฐานรองรับต่อความหนาที่จุดยอด (h_b / h_d) ตั้งแต่ 1 ถึง 5 โดยที่ค่าความหนาที่จุดยอด (h_d) และค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 เป็นค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง พบว่าค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอดของโครงสร้างเปลือกบางจะมีค่าสูงขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วงแรก จากนั้นจะเริ่มลดลงเล็กน้อยเมื่ออัตราส่วน $h_b / h_d > 4$ ดังแสดงในรูปที่ 8(ก) ดังนั้นการเลือกใช้อัตราส่วน h_b / h_d มากกว่า 4 จึงไม่ส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปที่บริเวณจุดยอดลดลงอย่างมีนัยสำคัญ ในขณะที่การเลือกใช้อัตราส่วน h_b / h_d เท่ากับ 2 จะทำให้ค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอดของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าลดลงประมาณร้อยละ 6 เมื่อเทียบกับกรณีที่ใช้ค่าอัตราส่วน h_b / h_d เท่ากับ 1 ในทางกลับกันเมื่อใช้อัตราส่วน h_b / h_d เท่ากับ 5 จะทำให้ค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอดของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มสูงขึ้นประมาณร้อยละ 0.3 เมื่อเทียบกับกรณีที่ใช้ค่าอัตราส่วน h_b / h_d เท่ากับ 4 ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงแนะนำให้ใช้อัตราส่วน h_b / h_d อยู่ที่ 2 ถึง 3 จึงจะทำให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดสำหรับการพิจารณาค่าการเสียรูป ต่อมาเป็นการศึกษาแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งฐานรองรับ พบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าอัตราส่วนความหนา (h_b / h_d) จะส่งผลต่อค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดจะส่งผลโดยตรงต่อค่าโมเมนต์ดัดที่ฐานรองรับ นั่นคือเมื่ออัตราส่วนความหนา (h_b / h_d) มีค่าสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าโมเมนต์ดัดมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 8(ข) และ 8(ค) ตามลำดับ

5.4 ผลของการแปรเปลี่ยนมุมที่รองรับส่วนโค้งที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม

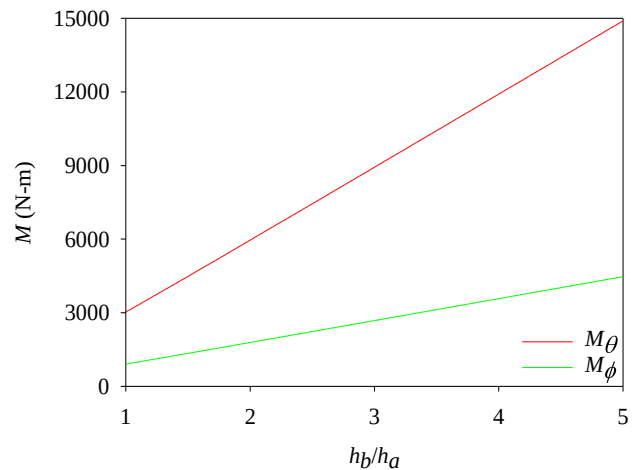
สำหรับค่าพารามิเตอร์สุดท้ายที่จะทำการศึกษาในบทความนี้คือผลของการแปรเปลี่ยนมุมที่รองรับส่วนโค้งที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน (β) ซึ่งมีความสำคัญอย่างมาก เนื่องจากการใช้งานโครงสร้างเปลือกบางสามารถใช้งานได้หลากหลายทางวิศวกรรมหลากหลายแขนง ดังนั้นการใช้งานโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบทรงตัน (Shallow Spherical Shells) ในบางกรณีอาจจะเหมาะกับงานทางวิศวกรรมโยธาและโครงสร้างนอกชายฝั่งทะเล ซึ่งไม่มีความจำเป็นต้องเลือกใช้โครงสร้างที่มีขนาดมุมที่รองรับเท่ากับ 90° โดยทำการแปรเปลี่ยนในช่วง $30^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ และค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 จะเป็นค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง พบว่าค่าการเสียรูปจะมีค่าลดลงเมื่อมุมที่รองรับส่วนโค้ง (β) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น เนื่องจากชิ้นส่วนโครงสร้างเปลือกบางบริเวณฐานรองรับมีค่าแรงดันน้ำสถิตเพิ่มสูงขึ้นเมื่อมุมที่รองรับส่วนโค้ง (β) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ทำให้ค่าการเสียรูปที่บริเวณฐานรองรับมีค่าเพิ่มสูงขึ้น จึงส่งผลทำให้จุดยอดของโครงสร้างยกขึ้น ดังนั้นค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอดจึงมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 9(ก) ในขณะที่แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งฐานรองรับจะมีค่าการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย ดังแสดงในรูปที่ 9(ข) และ 9(ค) ตามลำดับ



(ก) การเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอด



(ข) แรงเมมเบรนที่ฐานรองรับ



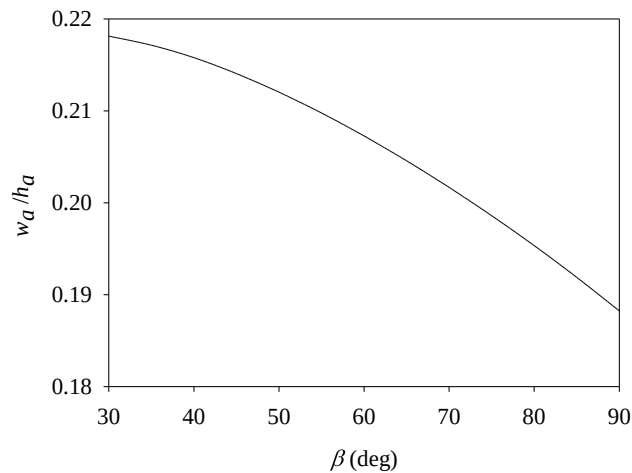
(ค) โมเมนต์ดัดที่ฐานรองรับ

รูปที่ 8 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิต

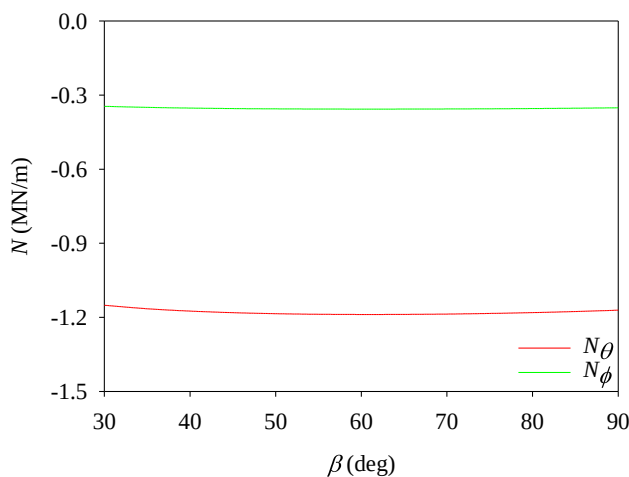
6. สรุปผลการศึกษา

งานวิจัยนี้นำเสนอผลการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนรับแรงดันน้ำสถิตโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และหลักการงานเสมือนในการสร้างฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบาง การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และใช้กระบวนการทำซ้ำโดยตรงในการหาคำตอบแบบไม่เป็นเชิงเส้น ผลการศึกษาสามารถสรุปได้ดังนี้

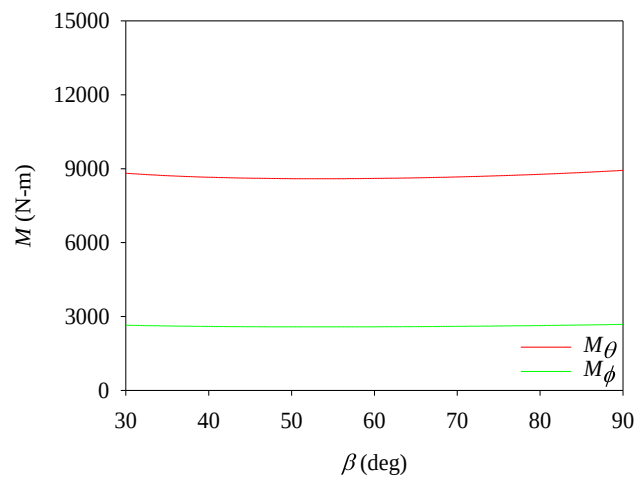
6.1 ค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนจะมีค่าการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัสลดลงตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนเมื่อเปรียบเทียบกับโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาคงที่ ในขณะที่แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นจะมีความแตกต่างกันน้อยมาก



(ก) การเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอด



(ข) แรงเฉือนที่ฐานรองรับ



(ค) โมเมนต์ดัดที่ฐานรองรับ

รูปที่ 9 ผลของการแปรเปลี่ยนมุมที่รองรับส่วนโค้งที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันน้ำสถิต

6.2 แรงเฉือนตามแนวพิกัดเส้นรอบวงจะมีค่าสูงสุดในช่วงประมาณ $0 \leq \theta \leq 70^\circ$ จากนั้นจะลดลงอย่างรวดเร็ว ในขณะที่ค่าโมเมนต์ดัดตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียนและเส้นรอบวงจะมีค่าสูงสุดในช่วงประมาณ $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ และจะมีค่าสูงสุดที่บริเวณใกล้กับตำแหน่งของฐานรองรับ

6.3 การแปรเปลี่ยนระดับน้ำทะเล อัตราส่วนความหนา และมุมที่รองรับส่วนโค้งจะส่งผลกระทบโดยตรงต่อค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดยอดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม

6.4 การแปรเปลี่ยนระดับน้ำทะเลจะส่งผลกระทบต่อแรงเมมเบรนที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งฐานรองรับ ในขณะที่การเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความหนาและมุมที่รองรับส่วนโค้งจะส่งผลกระทบต่อแรงเมมเบรนที่เกิดขึ้นน้อยมาก

6.5 การแปรเปลี่ยนระดับน้ำทะเลและอัตราส่วนความหนาจะส่งผลกระทบต่อโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งฐานรองรับ ในขณะที่การเปลี่ยนแปลงมุมที่รองรับส่วนโค้งจะส่งผลกระทบต่อโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นน้อยมาก

6.6 ผลการศึกษาสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการออกแบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน โดยสอดคล้องกับค่าแรงดันน้ำสถิตที่มีการแปรเปลี่ยนตามความลึกของระดับน้ำ ซึ่งจะแตกต่างจากกรณีที่เป็นแรงดันสม่ำเสมอแบบคงที่ตลอดแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน ทำให้โครงสร้างมีความประหยัดมากขึ้น

7. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับการสนับสนุนจากกองทุนส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม ตามสัญญาเลขที่ FF68/NKR/104

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] Zingoni, A. (2015). Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics. *Thin-Walled Structures*, 87, 102-114.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.10.016>
- [2] Jiammeepreecha, W., Tiyasangthong, S., Chaidachatorn, K., Choeipo, S., Lerdchaipong, K., & Jamnam, S. (2025). Large displacement analysis of internally pressurized multi-segmented spherical shells with lagrange's multiplier technique. *The Journal of KMUTNB*, 35(1), 1-19.
<https://doi.org/10.14416/j.kmutnb.2024.08.010>
- [3] Artioli, E., & Viola, E. (2006). Free Vibration Analysis of Spherical Caps Using A G.D.Q. Numerical Solution. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 128(3), 370-378.
<https://doi.org/10.1115/1.2217970>
- [4] Jiammeepreecha, W., & Chucheepsakul, S. (2017). Nonlinear axisymmetric free vibration analysis of liquid-filled spherical shell with volume constraint. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139(5), 051016. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4036500>
- [5] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., & Chucheepsakul, S. (2022). Large amplitude axisymmetric free vibration of a closed two-dimensional spherical pressure vessel with a constrained volume. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 22(6), 2250077.
<https://doi.org/10.1142/S0219455422500778>

- [6] Al-Gahtani, H., Khathlan, A., Sunar, M., & Naffa'a, M. (2014). Local pressure testing of spherical vessels. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 114-115, 61-68.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2013.12.004>
- [7] Evkin, A.Y., & Lykhachova, O.V. (2019). Design buckling pressure for thin spherical shells: development and validation. *International Journal of Solids and Structures*, 156-157, 61-72.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.06.035>
- [8] Wang, Y., Tang, W., Zhang, J., Zhang, S., & Chen, Y. (2019). Buckling of imperfect spherical caps with fixed boundary under uniform external pressure. *Marine Structures*, 65, 1-11.
<https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2019.01.004>
- [9] Du, X., Zhao, G., Wang, W., Guo, M., Zhang, R., & Yang, J. (2020). Study on dented hemispheres under external hydrostatic pressure. *Marine Structures*, 74, 102819.
<https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2020.102819>
- [10] Liang, C.C., Shiah, S.W., Jen, C.Y., & Chen, H.W. (2004). Optimum design of multiple intersecting spheres deep-submerged pressure hull. *Ocean Engineering*, 31(2), 177-199.
[https://doi.org/10.1016/S0029-8018\(03\)00120-3](https://doi.org/10.1016/S0029-8018(03)00120-3)
- [11] Jiammeepreecha, W., Chucheeepsakul, S., & Huang, T. (2015). Parametric study of an equatorially anchored deepwater fluid-filled periodic symmetric shell with constraint volume. *Journal of Engineering Mechanics*, 141(8), 04015019. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000920](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000920)
- [12] Phadke, A., & Cheung, K. (2003). Nonlinear response of fluid-filled membrane in gravity waves. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(7), 739-750.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:7\(739\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:7(739))
- [13] Wang, C.M., Vo, K.K., & Chai, Y.H. (2006). Membrane analysis and minimum weight design of submerged spherical domes. *Journal of Structural Engineering*, 132(2), 253-259.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2006\)132:2\(253\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:2(253))
- [14] Jiammeepreecha, W., Chucheeepsakul, S., & Huang, T. (2014). Nonlinear static analysis of an axisymmetric shell storage container in spherical polar coordinates with constraint volume. *Engineering Structures*, 68, 111-120. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.02.014>
- [15] Jiammeepreecha, W., Chucheeepsakul, S., & Huang, T. (2014). Nonlinear static analysis of deep water axisymmetric spherical half drop shell. *KMUTT Research and Development Journal*, 37(2), 239-255.
- [16] Zingoni, A. (2001). Stresses and deformations in egg-shaped sludge digestors: membrane effects. *Engineering Structures*, 23(11), 1365-1372. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00055-4](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00055-4)
- [17] Zingoni, A. (2001). Stresses and deformations in egg-shaped sludge digestors: discontinuity effects. *engineering structures*, 23(11), 1373-1382. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00056-6](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00056-6)

- [18] Zingoni, A., Mokhothu, B., & Enoma, N. (2015). A theoretical formulation for the stress analysis of multi-segmented spherical shells for high-volume liquid containment. *Engineering Structures*, 87, 21-31. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.01.002>
- [19] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., & Chucheepsakul, S. (2021). Nonlinear static response of an underwater elastic toroidal storage container. *International Journal of Solids and Structures*, 228, 111134. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111134>
- [20] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., & Chucheepsakul, S. (2023). Large displacement analysis of egg-shaped containment shells using lagrange multipliers. *International Journal of Solids and Structures*, 279, 112390. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112390>
- [21] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., & Chucheepsakul, S. (2023). Nonlinear static analysis of multi-segmented toroidal shells under external pressure. *Thin-Walled Structures*, 189, 110920. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110920>
- [22] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., Klaycham, K., Athisakul, C., & Chucheepsakul, S. (2024). Multi-segmented fifth-order polynomial-shaped shells under hydrostatic pressure. *Thin-Walled Structures*, 203, 112214. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112214>
- [23] Sekhon, G.S., & Bhatia, R.S. (2000). Generation of exact stiffness matrix for a spherical shell element. *Computers and Structures*, 74(3), 335-349. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00316-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00316-2)
- [24] Langhaar, H.L. (1964). *Foundations of practical shell analysis*. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [25] Tangbanjongkij, C., Jiammeepreecha, W., & Chucheepsakul, S. (2019). Large displacement analysis of ellipsoidal pressure vessel heads using the fundamental of differential geometry. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 172, 337-347. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2019.04.001>
- [26] Chaidachatorn, K., Ngohpok, C., Jiammeepreecha, W., Lerdchaipong, K., Chupkhunthod, W., & Jamnam, S. (2025). Large amplitude free vibration of spherical dome structures with variable thickness. *The Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 35(1), 1-15. <https://doi.org/10.14416/j.kmutnb.2024.08.007>
- [27] Mase, G.T., & Mase, G.E. (1999). *Continuum mechanics for engineers*. CRC Press.
- [28] Langhaar, H.L. (1962). *Energy methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [29] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., & Witt, R.J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons.
- [30] Jiammeepreecha, W., Chaidachatorn, K., Tiyasangthong, S., & Jamnam, S. (2023). Nonlinear static analysis of egg-shaped toroidal shells under internal pressure. *Rattanakosin journal of science and technology (RJST)*, 5(3), 14-36. Search at <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/RJST/article/view/250556>

- [31] Reddy, J.N. (2004). *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford University Press.
- [32] Young, W.C., & Budynas R.G. (2002), *Roark's formulas for stress and strain*. McGraw-Hill.