

<http://journal.rmutp.ac.th/>

การวิเคราะห์การสันสะท้อนแบบอิสระและแบบแรงกระทำด้วยสมุทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบโดเมนย่อยตามด้านสำหรับปัญหา 2 มิติ

กำธรเกียรติ มุสิกเกต บุญชัย ผึ้งไผ่งาม และ สุธี ปิยะพิพัฒน์*

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
39 หมู่ 1 ถนนรังสิต-นครนายก ตำบลคลองหก อำเภอคลองหลวง ปทุมธานี 12110

รับบทความ 7 พฤศจิกายน 2564 แก้ไขบทความ 22 พฤษภาคม 2565 ตอรับบทความ 28 มิถุนายน 2565

บทคัดย่อ

การวิเคราะห์การสันสะท้อนแบบอิสระและแบบมีแรงกระทำด้วยสมุทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งโดเมนย่อยตามด้านได้ถูกนำเสนอในครั้งนี้ โดเมนของปัญหาได้ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดเล็กรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ เอลิเมนต์เหล่านั้น จะถูกแบ่งย่อยอีกครั้งให้กลายเป็นเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมตามด้านของเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมที่เรียกว่าโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอ ปัญหาตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์คือคานเซลลูลาร์ยื่นปลายซึ่งมีฐานรองรับด้านซ้ายเป็นแบบยึดแน่นในขณะที่ฐานรองรับปลายอิสระอีกด้านถูกแรงเฉือนในแนวตั้งกระทำสำหรับการวิเคราะห์การสันสะท้อนแบบมีแรงกระทำ การวิเคราะห์การสันสะท้อนแบบแรงกระทำชั่วขณะด้วยการแปรผันเชิงเส้นตามเวลารูปสามเหลี่ยมได้ถูกวิเคราะห์ด้วยเช่นกัน ผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำซึ่งได้มาจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้โครงตาข่ายความละเอียดสูงจะถูกใช้เป็นค่าสำหรับเปรียบเทียบแทนเนื่องจากการไม่มีผลเฉลยแม่นยำของคานตัวอย่างดังกล่าว ความถี่ธรรมชาติหกลำดับแรกรวมทั้งรูปร่างโหมดที่สอดคล้องของมันได้ถูกทำการตรวจสอบและพบว่ามีความสอดคล้องกับค่าอ้างอิงเป็นอย่างดี การตอบสนองในแนวตั้งตามเวลา ณ จุดบนคานตัวอย่างที่ได้เลือกไว้ในกรณีของการวิเคราะห์แบบชั่วขณะที่ได้ ยังคงแสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องกับค่าที่ใช้ในการอ้างอิงได้เป็นอย่างดี

คำสำคัญ : การสันสะท้อนแบบอิสระและแบบแรงกระทำ; สมุทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบโดเมนตามด้าน; เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม; ความถี่ธรรมชาติ; รูปร่างโหมด

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทร: +668 7380 8222, ไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์: suthee.p@en.rmutt.ac.th

<http://journal.rmutp.ac.th/>

Free and Forced Vibration Analysis by n-Sided Polygonal Edge-based Strain Smoothed Finite Element for 2D Problem

Kamtornkiat Musiket Boonchai Phungpaingam and Suthee Piyaphipat*

Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Thunyaburi

39 Moo. 1, Rangsit-Nakhonnayok Rd., Klong Hok, Klong Luang, Pathumthani 12110

Received 7 November 2021; Revised 22 May 2022; Accepted 28 June 2022

Abstract

Free and forced vibration analyses performed by polygonal edge-based strain smoothed finite element method is presented. Problem domain is discretized into small n-sided arbitrary polygonal elements. Those elements will be further subdivided into small triangular shape according to polygonal shape edges called smoothing domains. Benchmark problem is a castellated cantilever beam. Fixed support boundary condition is imposed to left edge while downward shear traction is applied on another free ended for forced vibration analysis. Transient vibration analysis also performed using triangular linear time variation. A close-to-exact solutions obtained from finite element employed very fine mesh due to unavailable exact solutions of the example problem will be used for comparison purpose. The first six natural frequencies along with their corresponding mode shapes are investigated and found in good agreement with references. The vertical response in time of selected node for transient analysis also showed in good agreement with reference.

Keywords: Free and Forced Vibration; Edge-based Strain Smoothed Finite Element; Polygonal Element; Natural Frequency; Mode Shape

* Corresponding Author. Tel.: +668 7380 8222, E-mail Address: suthee.p@en.rmutt.ac.th

1. บทนำ

วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมากมายได้ถูกเสนอมาตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบันเพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่นับวันจะมีความซับซ้อนมากขึ้น เริ่มจาก วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite Difference Method, FDM) วิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method, FVM) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method, FEM) วิธีเอลิเมนต์ขอบ (Boundary Element Method, BEM) วิธีสเปกตรัลเอลิเมนต์ (Spectral Element Method, SEM) วิธีเมสสเลส (Meshless Methods) วิธีเอลิเมนต์เสมือน (Virtual Element Method, VEM) และวิธีสเกลบาวดารีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM) เป็นต้น ในบรรดาวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเหล่านี้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [1-3] ถือว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการคิดค้นพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลขใหม่ๆ รวมทั้งวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดต่อเนื่องสม่ำเสมอ (Smoothed Finite Element Method, SFEM) ด้วยเช่นกัน สิ่งสำคัญประการหนึ่งที่เหมาะสมของวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเหล่านี้ คือการเปลี่ยนรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับต่าง ๆ สำหรับปัญหาที่กำลังสนใจ ซึ่งอยู่ในรูปที่เรียกว่า Strong Form ให้กลายเป็นรูปอย่างง่ายซึ่งสามารถทำกรานิทิกเรตได้ ที่เรียกว่า Weak Form หรือ Integral Form นั่นเอง ถึงแม้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในโปรแกรมการวิเคราะห์และออกแบบที่มีอยู่มากมายในปัจจุบัน ก็ยังคงมีข้อด้อยที่จำเป็นต้องได้รับการปรับปรุงในหลาย ๆ ด้าน เช่น เรื่องของปัญหาสตีฟเนสที่มีค่ามากเกินไปกว่าพฤติกรรมจริงของโครงสร้าง (Over Stiff) ปัญหาเกี่ยวกับความแม่นยำเที่ยงตรงของค่าความเค้นสำหรับการเลือกใช้ประเภทของเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับปัญหาที่สนใจ (Stress Accuracy) รวมไปถึงปัญหาการบิดเบี้ยวของโครงตาข่าย (Mesh Distortion) เมื่ออยู่ภายใต้สภาวะของการเสียรูปอย่างมาก (Large Deformation) เป็นต้น

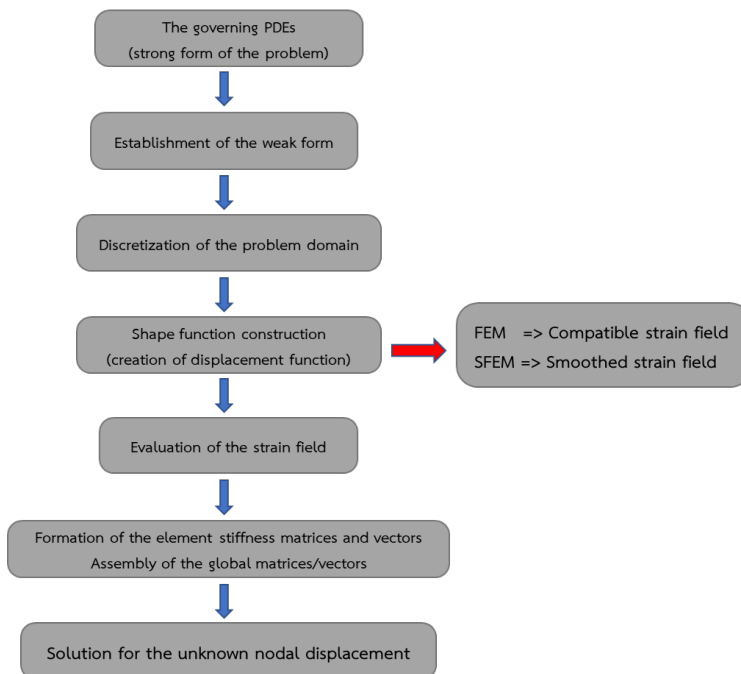
การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ (Smoothed Finite Element Methods, SFEM) ได้ถูกพัฒนาครั้งแรกโดย G.R. Liu และคณะ เพื่อแก้ปัญหาทั้งในส่วนของ Statics และ Dynamics [4] หัวใจสำคัญของการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอที่แตกต่างจากไฟไนต์เอลิเมนต์คือการสร้างสนามความเครียดต่อเนื่องสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field) โดยตรงจากการเปลี่ยนตำแหน่งที่สมมติไว้แล้ว โดยอาศัย Smoothed Galerkin Weak Form ในกรณีที่สนามความเครียดในขณะที่ใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้สนามความเครียดที่เรียกว่าสนามความเครียดที่เข้ากันได้โดยตรง (Compatible Strain Field) โดยที่ยังคงมีคุณสมบัติของความเสถียรและการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงเหมือนกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับขั้นตอนอื่น ๆ ของการวิเคราะห์นั้น ยังคงเป็นขั้นตอนเดียวกันกับที่ใช้ในไฟไนต์เอลิเมนต์นั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 1

สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิตินี้ สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ ยังสามารถแบ่งได้ตามลักษณะของการสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในโดเมนหลักออกเป็น 3 แบบกล่าวคือ หากการสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอเกิดขึ้นภายในเอลิเมนต์หลัก เรียกว่า Cell-based SFEM (CS-FEM) หากทำการสร้างโดเมนย่อยตามโหนดของเอลิเมนต์หลัก เรียกว่า Node-based SFEM (NS-FEM) และเรียกว่า Edge-based SFEM (ES-FEM) เมื่อทำการสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอตามเส้นขอบหรือด้านของเอลิเมนต์หลัก รูปแบบการสร้างโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอดังกล่าว แสดงได้ดังรูปที่ 2

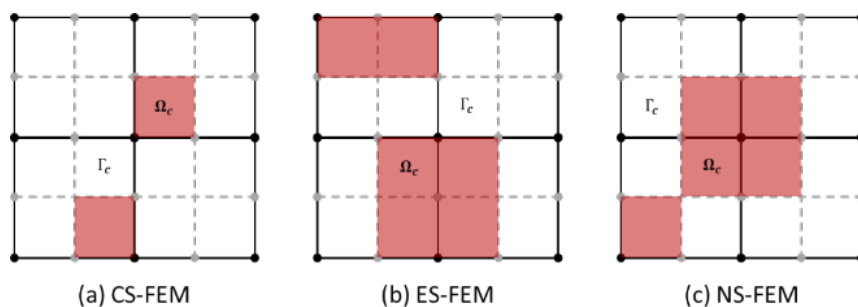
สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ หลายรูปแบบเพื่อแสดงถึงความแม่นยำของมัน Lui et al. [6] ได้แสดงให้เห็นว่าการแบ่งเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (Bilinear Quadrilateral Element, Q4) ออกเป็นเอลิเมนต์ต่อเนื่องสม่ำเสมอ ๆ สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงและมีเสถียรภาพที่สูงกว่าไฟ

ไนท์เอลิเมนต์ Dai et al. [7] ใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (n-Sided Polygonal Element) สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของการสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free Vibration) และแบบมีแรงกระทำชั่วขณะ (Transient Vibration) ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) และรูปร่างโหมดที่สอดคล้อง (Mode Shape) ของการวิเคราะห์หาค่าใกล้เคียงค่าที่ใช้ในการอ้างอิง นอกจากนี้ยังพบว่า ไม่ปรากฏว่ามี Spurious Zero Energy Modes ที่จะทำให้โหมดรูปร่างของโครงสร้างที่เกิดขึ้นไม่ตรงกับความเป็นจริง Jiang et al. [8] ทำการ

วิเคราะห์ปัญหาพลศาสตร์ของไหลสำหรับของแข็งที่บีบอัดไม่ได้ ปัญหาของการชนกัน (Impact Problem) [9] โดยใช้เมทริกซ์มวลแบบรวมผล (Lumped Mass Matrix) ผลลัพธ์ที่ได้ มีความเที่ยงตรงสูงกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ หรือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวกลศาสตร์ (Biomechanics) [10] ปัญหาของการถ่ายเทมวลและความร้อนด้วยสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบสร้างเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องตามโหนดของเอลิเมนต์หลัก (NSFEM) [11] เป็นต้น



รูปที่ 1 ความแตกต่างของการสร้างสนามความเครียดทั้งสองแบบ [5]



รูปที่ 2 การสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (a) CS-FEM, (b) ES-FEM และ (c) NS-FEM [5]

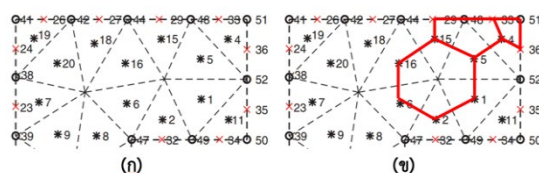
งานวิจัยครั้งนี้ ทำการศึกษาผลจากการใช้เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนด้านใด ๆ (n -Sided Polygonal Element) แทนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (Triangular Element, T3) หรือเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมเชิงเส้นคู่ (Bilinear Quadrilateral Element, Q4) ซึ่งนิยมใช้กันในสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์หรือไฟไนท์เอลิเมนต์ทั่วไป โดยทำการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างคานเชลลูลาร์ยื่นปลาย (Castellated Cantilever Beam) ที่มีรูเจาะภายในเป็นรูปวงกลมทั้งแบบสถิตยศาสตร์และพลศาสตร์ (Static and Dynamics Analyses) เพื่อหาค่าการเคลื่อนที่ของปลายคาน ณ จุดที่กำหนด หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดของมันสำหรับวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free Vibration Analysis) รวมทั้งการตอบสนองตามเวลาของจุดที่สนใจบนคานสำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบมีแรงกระทำชั่วขณะ (Transient Vibration Analysis) เนื่องจากไม่สามารถหาค่าผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) ของคานตัวอย่างได้โดยตรง คานตัวอย่างดังกล่าว จึงถูกวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมจำนวนมากเพื่อให้มั่นใจว่าคำตอบที่ได้เป็นค่าที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Close-to-Exact Solution) และจะถูกใช้สำหรับเปรียบเทียบกับค่าจากการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ต่อไป

การจัดลำดับรูปแบบของบทความเริ่มด้วยการกล่าวถึงพื้นฐานของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ในส่วนที่ 2 ซึ่งประกอบไปด้วย การแบ่งโดเมนของปัญหาด้วยเอลิเมนต์หลักหลายเหลี่ยม การแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอตามจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม การสร้างสมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ เมทริกซ์มวลแบบรวมผล (Lumped Mass Matrix) และเทคนิคของการอินทิเกรตเชิงตัวเลขตามเวลา (Numerical Time Integration Technique) ตามลำดับ ส่วนที่ 3 กล่าวถึงรายละเอียดของปัญหาตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ รวมทั้งผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ ในส่วนที่ 4 จะเป็นบทสรุปของการศึกษาในครั้งนี้

2. สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบโดเมนย่อยรอบด้านของเอลิเมนต์หลัก

2.1 การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ

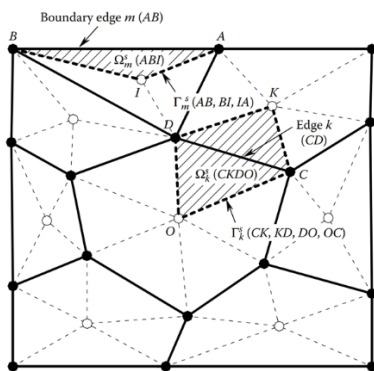
ขั้นตอนแรกของการวิเคราะห์ด้วยวิธีเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ มีความคล้ายคลึงกันคือ เป็นขั้นตอนการแบ่งโดเมนของปัญหาที่กำลังศึกษา ให้ประกอบไปด้วยเอลิเมนต์เล็ก ๆ (Finite Element) จำนวนหลาย ๆ เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ (Two-dimensional Plane Stress Problems) นั้น เอลิเมนต์ที่ใช้กันทั่วไปคือเอลิเมนต์เชิงเส้นคู่แบบทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral Element) ซึ่งได้รับความนิยมในการใช้งานมากกว่าเอลิเมนต์เชิงเส้นรูปสามเหลี่ยม (Triangular Element) เนื่องจากให้ผลลัพธ์ของการวิเคราะห์ที่มีความแม่นยำสูงกว่า สำหรับการศึกษาในครั้งนี้ โดเมนของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์หลักเล็ก ๆ รูปหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนด้านใด ๆ (n -Sided Polygonal Element) การสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนี้ สามารถทำได้หลายวิธี วิธีที่ใช้สำหรับการศึกษาในครั้งนี้ เริ่มจากการสร้างเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมด้วยโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ทั่วไป เช่น ABAQUS, ANSYS, SOLIDWORKS หรือโปรแกรมเฉพาะสำหรับการสร้างโครงตาข่ายเช่น DistMesh [12] เป็นต้น แล้วจึงทำการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเหล่านั้นเข้าด้วยกัน เมื่อทำการลบเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเกาออกให้หมด ก็จะได้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมในที่สุด ขั้นตอนการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังกล่าว ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3



รูปที่ 3 การสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม

2.2 การสร้างโดเมนย่อยรอบด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม

เมื่อโดเมนของปัญหาที่สนใจได้ถูกแบ่งออกเป็นโดเมนย่อยด้วยการสร้างรูปหลายเหลี่ยมตามที่ได้อธิบายไว้ในส่วนที่ผ่านมาแล้ว เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้น จะถูกแบ่งออกเป็นโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอ (Smoothing Domain or Cell) รอบด้านแต่ละด้านของเอลิเมนต์หลัก (Edge-based Smoothing Domain) ต่อไป การแบ่งโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอรอบด้านของเอลิเมนต์หลักนี้ สามารถทำได้โดยการลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างโหนดที่ปลายทั้งสองด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่กำลังสนใจ ไปยังจุดกึ่งกลางของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนั้น ๆ จะได้เอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอรูปสามเหลี่ยมจำนวนเท่ากับด้านของเอลิเมนต์หลักนั่นเอง เนื่องจากด้านแต่ละด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมแต่ละเอลิเมนต์ เป็นส่วนหนึ่งของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมสองเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกัน (Adjacent Element) ดังนั้น ด้านหนึ่งด้าน จะมีโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอรูปสามเหลี่ยมที่เกี่ยวข้องจำนวน 2 โดเมนย่อยนั่นเอง ซึ่งจะถูกใช้ในการคำนวณหาค่าความเค้นหรือความเครียดที่เกิดขึ้นภายในเอลิเมนต์ได้ต่อไป สำหรับด้านที่เป็นขอบเขตโดเมนของปัญหาที่สนใจ (Boundary edges) นั้น จะมีโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอรูปสามเหลี่ยมที่เกี่ยวข้องเพียง 1 โดเมนเท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 เอลิเมนต์ย่อยรอบด้านเอลิเมนต์หลัก [4]

2.3 สมการสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์

ในส่วนนี้ จะกล่าวถึงพื้นฐานที่สำคัญของการสร้างสมการสติเฟนสของสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์ กล่าวโดยทั่วไปแล้ว ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างไฟไนท์เอลิเมนต์และสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์อยู่ที่การสร้างสนามความเครียด (Strain Field) ส่วนขั้นตอนอื่น ๆ ที่นอกเหนือจากนี้ไป ได้แก่ ขั้นตอนการรวมกันในระดับเอลิเมนต์ (Element Level) เพื่อให้ได้เมทริกซ์หรือเวกเตอร์ในระดับโครงสร้าง (Global Level) การกำหนดเงื่อนไขขอบ (Boundary Conditions) และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโหนด (Nodal Displacements) นั้น ไม่มีความแตกต่างกันระหว่างสองวิธีดังกล่าว เพราะฉะนั้น ผู้เขียนจึงจะขอก้าวเฉพาะขั้นตอนของการสร้างสนามความเครียดสำหรับวิธีสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์เพียงอย่างเดียว

เพื่อให้เกิดความสอดคล้องและง่ายต่อการทำความเข้าใจสำหรับผู้คนที่คุ้นเคยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์มาก่อน ค่าตัวแปรเมทริกซ์หรือเวกเตอร์ต่าง ๆ ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะใช้สัญลักษณ์เช่นเดียวกันกับที่ใช้ในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ โดยมีความแตกต่างคือ เครื่องหมายบาร์ที่อยู่ด้านบนของตัวแปรต่าง ๆ เหล่านั้น ใช้เพื่อแสดงว่า เป็นการกล่าวถึงตัวแปรเหล่านั้นในวิธีสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นเอง

การสร้างสนามความเครียดต่อเนื่องสม่ำเสมอ นั้น สามารถทำได้หลายวิธี วิธีที่ง่ายและสะดวกที่สุดเรียกว่า Strain/gradient Smoothing Technique สำหรับในวิธีสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น มีสมมุติฐานที่ว่า สนามความเครียด (Strain Field) ณ ตำแหน่งใด ๆ ภายในโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอ นั้น ได้มาจากการกระจายสนามความเครียดแบบสอดคล้องกัน (Compatible Strain Field) ที่ใช้ในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ให้เกิดความสม่ำเสมอไปทั่วทั้งโดเมนย่อยนั้น ๆ และยังถูกสมมุติอีกว่าสนามความเครียดนี้มีค่าเท่ากันภายในโดเมนย่อย ๆ ที่ถูกสร้างขึ้นเหล่านั้น

สนามความเครียดสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field) ที่กล่าวมานี้ สามารถเขียนในรูปสมการได้ว่า

$$\bar{\varepsilon}(x_i) = \int_{\Omega} \varepsilon(x) w(x_i - x) d\Omega \quad (1)$$

โดยที่ $w(x_i - x)$ คือฟังก์ชันน้ำหนักของตำแหน่งที่กำลังสนใจภายในโดเมนย่อย โดยที่ฟังก์ชันน้ำหนักนี้ จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ [4] เพื่อความสะดวกสำหรับการนำไปใช้ ฟังก์ชันน้ำหนักนี้ จะถูกกำหนดให้อยู่ในรูปของ Heaviside Step Function ซึ่งเขียนเป็นสมการได้คือ

$$w(x_i - x) = \begin{cases} \frac{1}{A_i^s}, & x \in \Omega_i^s \\ 0, & x \notin \Omega_i^s \end{cases} \quad (2)$$

เมื่อ A_i^s คือพื้นที่ของโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอ ในกรณีที่ความเครียดแบบสอดคล้องกันไม่สามารถหาได้อย่างง่ายซึ่งจัดว่าเป็นกรณีทั่วไปของปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมนั้นแล้ว จะเปลี่ยนจากการใช้สนามความเครียดแบบสอดคล้องกันมาเป็นสนามการเคลื่อนที่ (Displacement field) ซึ่งหาได้ง่ายกว่าแทน แล้วจึงอาศัยการอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts) หรืออาจใช้ Green-Gauss Theory จะช่วยแก้ปัญหาดังกล่าวได้เป็นอย่างดี เพราะฉะนั้น สนามความเครียดต่อเนื่องสม่ำเสมอดังกล่าว สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งได้คือ

$$\bar{\varepsilon}(x_i) = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma} L_n(x) \bar{u}(x) d\Gamma \quad (3)$$

เมื่อ $L_n(x)$ คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยที่มีทิศพุ่งออกจากด้านของเอลิเมนต์ Γ เขียนได้เป็น

$$L_n(x) = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & -n_x \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

เมื่อทำการแทนค่าประมาณของการเคลื่อนที่ ณ ปลายจุดต่อของเอลิเมนต์ในวิธีสมุทไฟไนต์เอลิเมนต์ $\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^n N_i \bar{u}_i(x)$ ลงในสมการที่ 3 แล้วทำการจัดรูปสมการเสียใหม่จะได้ว่า

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^N [\bar{B}_1(x) \bar{B}_2(x) \dots \bar{B}_N(x)] \bar{d} \quad (5)$$

โดย $\bar{B}$ คือเมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งแบบสม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก (Global Smoothed Strain-displacement Matrix, B Matrix) สามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$\bar{B}_I(x) = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma} L_n(x) N_I(x) d\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{b}_x & 0 \\ 0 & \bar{b}_y \\ \bar{b}_y & \bar{b}_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

เมื่อ

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma} n_i(x) N_I(x) d\Gamma \quad (7)$$

$i = x, y, I = 1, \dots, N_n$

สมการที่ 7 เป็นสมการอินทิเกรตชั้นใน 1 มิติตามขอบเขตของเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนสม่ำเสมอ นั่นเอง เช่นเดียวกันกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถใช้กฎการอินทิเกรตของเกาส์ (Gauss Quadrature Rules) เข้ามาช่วยได้ หากฟังก์ชันรูปร่างการประมาณภายใน (Shape Functions) ที่ใช้บนแต่ละด้านของเอลิเมนต์นั้นมีการแปรผันแบบเชิงเส้นแล้ว ตำแหน่งของเกาส์เพียงแค่นั้นจุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางด้านนั้น ก็เพียงพอที่จะให้ค่าการประมาณของฟังก์ชันมีความแม่นยำ ดังนั้น เครื่องหมายอินทิเกรตในสมการที่ 7 สามารถเปลี่ยนมาเขียนให้อยู่ในรูปเครื่องหมายผลรวมได้เป็น

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k^s} \sum_{j=1}^{n_r} n_{ij}(x) N_I(x_j^G) L_j, i = x, y \quad (8)$$

เมื่อ n_j^r คือจำนวนด้านของโดเมนย่อยต่อเนื่องที่อยู่ภายในโดเมนสม่ำเสมอ x_j^G คือตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss Point) ณ กึ่งกลางของด้านนั้น ๆ n_{ij} คือเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยที่มีทิศออกจากด้านของโดเมนย่อยและ L_j คือความยาวด้านของโดเมนย่อยนั้น ๆ ตามลำดับ มีข้อพึงสังเกตที่สำคัญข้อหนึ่งนั่นคือ ในวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่ง (Strain-Displacement Matrix) ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่สำคัญสำหรับการคำนวณหาสติฟเนสเมทริกซ์ต่อไปนั้น ไม่ต้องอาศัยการคำนวณเพื่อหาอนุพันธ์ของมันแต่อย่างใด ส่งผลให้ไม่ต้องหาจาโคเบียนเมทริกซ์ (Jacobian Matrix, J) รวมทั้งเมทริกซ์อินเวอร์สของมัน ทำให้ภาพรวมของการคำนวณสามารถทำงานได้เร็วกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ปัญหาที่ต้องใช้ฟังก์ชันรูปร่างในลำดับสูง ๆ เช่น 8-nodes หรือ 9-nodes Quadrilateral Element เป็นต้น

2.4 เมทริกซ์มวลแบบรวมผล (Lumped Mass Matrix)

การหาค่าเมทริกซ์มวลสำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่นิยมมีด้วยกัน 2 วิธี สำหรับวิธีแรก เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างการประมาณภายใน (Shape Functions) ของเอลิเมนต์ เรียกวิธีนี้ว่า Consistent Mass Matrix วิธีที่สอง ใช้หลักการแบ่งผลรวมมวลของเอลิเมนต์ไปยังโหนดต่าง ๆ เท่า ๆ กัน เรียกว่า Lumped Mass Matrix การศึกษาครั้งนี้ จะใช้วิธีแรกสำหรับการหาค่าของเมทริกซ์มวลแบบสอดคล้อง สำหรับเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอรูปสามเหลี่ยมที่อยู่ติดกับด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม นั้น เมทริกซ์ดังกล่าวสามารถแสดงได้เป็น

$$[m] = \frac{\rho A t}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

2.5 การอินทิเกรตเชิงตัวเลขตามเวลา (Numerical Integration in Time)

สมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาด้านพลศาสตร์สามารถเขียนเป็นสมการคือ

$$\bar{K} \bar{d} + \bar{C} \dot{\bar{d}} + \bar{M} \ddot{\bar{d}} = \bar{F} \quad (10)$$

เมื่อ $\bar{M}$, $\bar{C}$ คือ เมทริกซ์มวล (Mass Matrix) และเมทริกซ์การต้านทานแรงสั่นสะเทือน (Damping Matrix) ตามลำดับ เครื่องหมายจุดด้านบนตัวแปรหมายถึงลำดับของอนุพันธ์เทียบกับเวลา การอินทิเกรตตามเวลาที่นิยมใช้กันมากที่สุดสำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขในโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ทั่วไปอันเนื่องมาจากความสะดวกในการใช้งานรวมถึงประสิทธิภาพที่ดีของมัน ได้แก่ วิธีนิวมาร์ค (Newmark Method) [13]

ถ้าสมมุติให้เวลา ณ ปัจจุบันของการวิเคราะห์เท่ากับ t_0 และทราบค่าตัวแปรทั้งหมด ณ เวลาปัจจุบันนี้แล้ว หากต้องการหาค่าตัวแปรทั้งหมดเหล่านั้น ณ เวลาของการวิเคราะห์ถัดไป ในที่นี้กำหนดให้เป็นตัวแปร $t_1 = t_0 + \theta \Delta t$ โดย $0.5 \leq \theta \leq 1.0$ สามารถเขียนสมการที่ 10 เสียใหม่ได้เป็น

$$[\bar{M} + \beta(\Delta t)^2 K](\bar{d}_{i+1}) = \beta(\Delta t)^2 (F_{i+1}) + \bar{M}(\bar{d}_i) + (\Delta t) \bar{M} \dot{\bar{d}}_i + (\Delta t)^2 \bar{M} (0.5 - \beta) (\ddot{\bar{d}}_i) \quad (11)$$

$$(\dot{\bar{d}}_{i+1}) = (\dot{\bar{d}}_i) + (\Delta t) [(1 - \gamma) \ddot{\bar{d}}_i + \gamma \ddot{\bar{d}}_{i+1}] \quad (12)$$

$$(\bar{d}_{i+1}) = (\bar{d}_i) + (\Delta t) \dot{\bar{d}}_i + (\Delta t)^2 [(0.5 - \beta) \ddot{\bar{d}}_i + \beta \ddot{\bar{d}}_{i+1}] \quad (13)$$

โดย β และ γ คือค่าคงที่ โดยทั่วไปนิยมกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.25 และ 0.5 ตามลำดับเพื่อให้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีเสถียรภาพ [14]

สำหรับการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบอิสระในครั้งนี้ สมมุติให้ไม่คิดแรงต้านทานของการสั่นสะเทือนเพื่อความสะดวกในการคำนวณ ดังนั้น สมการที่ 10 จึงลดรูปลงและสามารถเขียนได้ดังสมการที่ 14

$$\bar{K} \bar{d} + \bar{M} \ddot{\bar{d}} = \bar{F} \quad (14)$$

เมื่อกำหนดให้ค่าเวกเตอร์ของแรงด้านขวาในสมการที่ 14 มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่งผลให้สมการดังกล่าวเปลี่ยนรูปเป็นสมการอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ (Homogeneous Differential Equation) ลำดับสอง ซึ่งสามารถหาผลเฉลยทั่วไปได้อย่างง่าย หากนำผลเฉลยทั่วไปนี้แทนค่ากลับลงไปในสมการอนุพันธ์ลำดับสองดังกล่าว จะทำให้สมการเปลี่ยนรูปไปเป็น

$$[\bar{K} - \omega^2 \bar{M}] \bar{d} = 0 \quad (15)$$

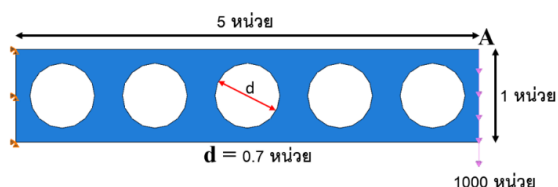
ที่รู้จักกันโดยทั่วไปว่าเป็นรูปสมการ Eigenvalue Problems นั่นเอง เมื่อทราบค่าของ ω ก็สามารถคำนวณค่าของความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่สอดคล้องได้ตามลำดับต่อไป

3. ปัญหาตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์

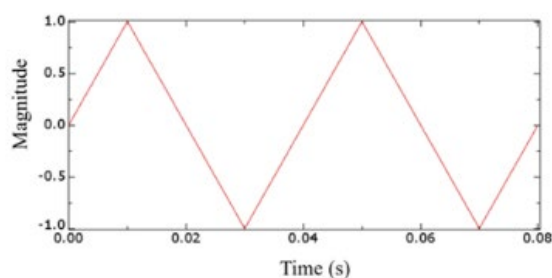
ปัญหาตัวอย่างสำหรับการศึกษาในครั้งนี้ ใช้คานเชลลูลาร์ยื่นปลาย (Castellated Cantilever beam) ซึ่งมีรูเจาะวงกลมจำนวน 5 รูเจาะ ตามความยาวของคาน ขอบด้านซ้ายของคาน กำหนดให้มีสภาพเป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น ส่วนปลายอิสระที่อยู่ด้านตรงข้ามกันนั้น กำหนดให้รับแรงเฉือนในแนวตั้ง (Vertical Traction) ซึ่งแปรผันตามฟังก์ชันของเวลาดังแสดงในรูปที่ 5 (b) ซึ่งใช้สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบมีแรงกระทำขนาด 1,000 หน่วย เพื่อความสะดวกในการคำนวณ ขนาดต่าง ๆ ของคานรวมทั้งรูเจาะและแรงเฉือนที่กระทำ ถูกกำหนดให้ไม่มีหน่วย ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (Elastic Modulus) และอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio) ถูกกำหนดให้มีค่าเป็น $3E+07$ และ 0.28 ตามลำดับ คานเชลลูลาร์ยื่นปลายสำหรับการวิเคราะห์ดังกล่าว ได้แสดงไว้ในรูปที่ 5 (a)

เนื่องจากไม่สามารถหาค่าผลเฉลยทางทฤษฎีของคานตัวอย่างนี้ได้ จึงจำเป็นต้องใช้ค่าที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Close-to-Exact Solution) แทน ค่าดังกล่าวนี้ สามารถหาได้ด้วยการใช้โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ ABAQUS ที่ใช้ความละเอียดของโครงตาข่ายแบบ

ทรงสี่หน้า (Q4) ซึ่งให้ค่าของผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงกว่าเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม (Triangular element) สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบของของแข็ง [13] จำนวนมากพอและจะใช้เป็นค่าอ้างอิงตลอดการศึกษาในครั้งนี้ รูปที่ 6 แสดงถึงคานตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ที่ใช้โครงตาข่ายแบบทรงสี่หน้า สำหรับใช้ในการอ้างอิง (a) และโครงตาข่ายรูปหลายเหลี่ยมซึ่งได้มาจากการใช้โปรแกรมที่เขียนขึ้นมาเอง (In-house software) สำหรับการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (b) ตามลำดับ

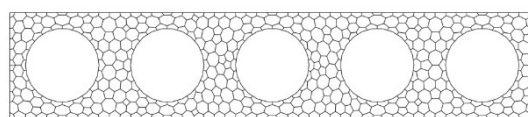


(a)

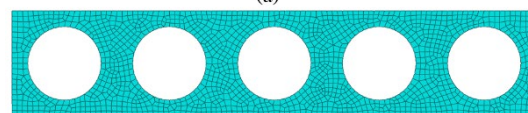


(b)

รูปที่ 5 ปัญหาตัวอย่าง (a) คานเชลลูลาร์ยื่นปลาย และ (b) การแปรผันของเวลา



(a)



(b)

รูปที่ 6 โครงตาข่าย (a) รูปหลายเหลี่ยม (b) รูปทรงสี่หน้า

3.1 ผลการวิเคราะห์ทางสถิตยศาสตร์ (Static Analysis)

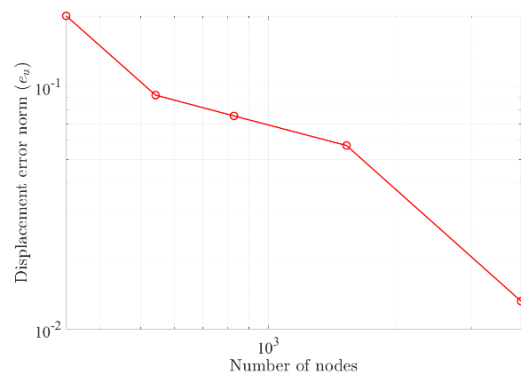
ขั้นตอนแรกเป็นการวิเคราะห์ทางสถิตยศาสตร์ของคานตัวอย่างเพื่อเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของปลายคานที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์กับความละเอียดโครงตาข่ายต่าง ๆ ค่าดังกล่าวได้แสดงไว้ในตารางที่ 1 รวมทั้งถึงค่าที่ใช้ในการอ้างอิงในแถวสุดท้าย ค่ามาตรฐานความแตกต่างของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement Error Norm) ระหว่างการวิเคราะห์และค่าอ้างอิง ได้แสดงไว้ในคอลัมภ์สุดท้ายของตาราง พบว่า ค่าดังกล่าว มีค่าลดลงตามจำนวนของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่เพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีอื่น ๆ ค่าผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำของการโก่งตัวของปลายคาน ณ จุด A มีค่าเท่ากับ -0.002725 หน่วยในขณะที่ค่าจากการวิเคราะห์มีค่าเท่ากับ -0.002690 ที่จำนวนเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมเท่ากับ 3,927 หรือเทียบเท่ากับ 8,628 โหนด ค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อนของการเปลี่ยนตำแหน่งจากโครงตาข่ายหยาบ (Coarse Mesh) ถึงโครงตาข่ายละเอียด (Fine Mesh) มีค่าอยู่ระหว่าง 19.5 ถึง 1.30 เปอร์เซ็นต์ของความละเอียดสูงสุด

การลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำของการเปลี่ยนตำแหน่งครั้งนี้ สามารถแสดงให้เห็นในรูปแบบ Log-Log สเกล โดยมีจำนวนของโหนดเป็นแกนในแนวนอนและมาตรฐานความคลาดเคลื่อน

ของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งเป็นแกนในแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 7 จากกราฟพบว่า ค่าเฉลี่ยของมาตรฐานความคลาดเคลื่อนในแนวดิ่งสำหรับการวิเคราะห์คานตัวอย่างในครั้งนี้ มีค่าเท่ากับ 0.5

ตารางที่ 1 การโก่งตัว ณ จุด A และค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อน

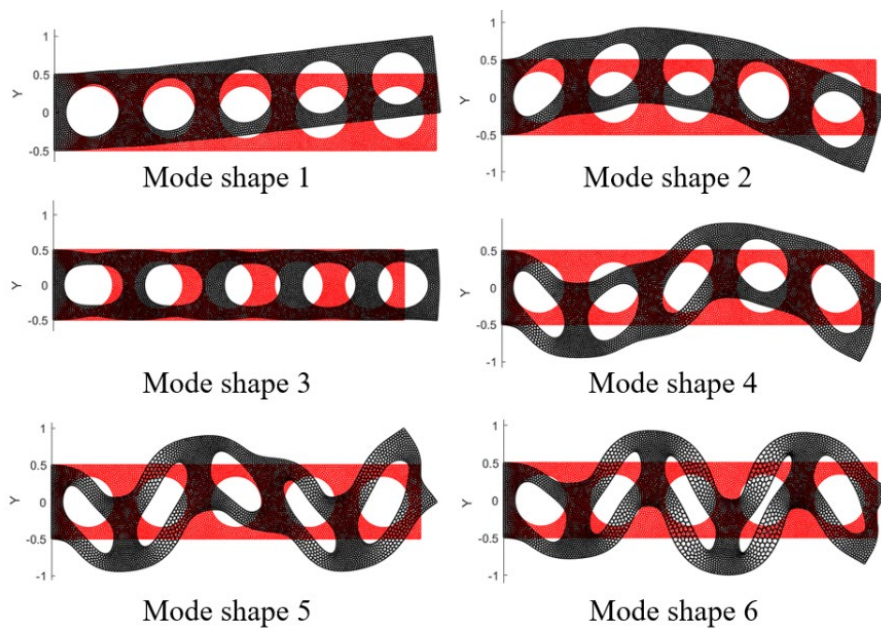
Polygon	Nodes	Deflection	Error norm
334	866	-0.002192	0.19542
542	1347	-0.002474	0.09211
829	1991	-0.002519	0.07562
1525	3518	-0.002569	0.05710
3927	8628	-0.002690	0.01303
Ref	9628	-0.002725	-



รูปที่ 7 การลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำของคานตัวอย่าง

ตารางที่ 2 ความถี่ธรรมชาติ 6 ลำดับแรกที่โครงตาข่ายขนาดต่าง ๆ

เอลิเมนต์	ความถี่ธรรมชาติ (รอบต่อวินาที)					
	Mode					
	1	2	3	4	5	6
334	163.1	632.4	942.2	1282.1	1821.5	2203.4
542	154.9	612.1	935.8	1245.0	1770.4	2142.1
829	154.0	608.5	934.1	1238.2	1760.2	2131.4
1525	152.6	605.4	932.7	1233.0	1751.9	2120.7
3927	150.4	602.3	931.8	1227.4	1744.5	2111.8
Ref	149.3	597.8	931.1	1221.3	1732.8	2095.8



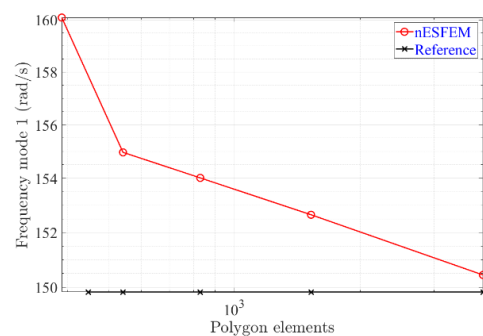
รูปที่ 8 รูปร่างโหมดหกลำดับแรกจากการวิเคราะห์พลศาสตร์

3.2 ผลวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free Vibration Analysis)

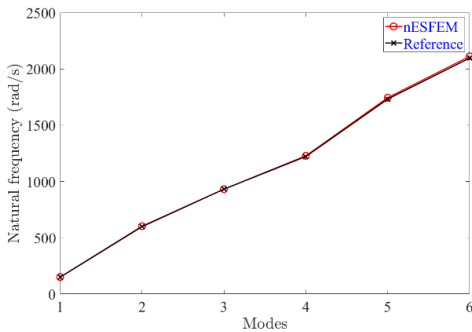
ขั้นตอนนี้เป็นกระบวนการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคานตัวอย่างแบบอิสระเพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่สอดคล้องกับความถี่ธรรมชาตินั้น ๆ ค่าความถี่ธรรมชาติหกลำดับแรกที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ระดับความละเอียดของโครงตาข่ายขนาดต่าง ๆ ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 รวมทั้งค่าที่ใช้ในการอ้างอิง ค่ามาตรฐานความแตกต่าง (Error norm) ระหว่างการวิเคราะห์และค่าอ้างอิง ได้ถูกแสดงไว้ในแถวสุดท้ายของตาราง

จากตารางที่ 2 พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติลำดับแรกซึ่งมีความสำคัญมากกว่าลำดับอื่น ๆ นั้น มีการลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงเมื่อโครงตาข่ายมีความละเอียดมากขึ้นตามลำดับ โดยพบว่า ที่จำนวนเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมเท่ากับ 3,927 ค่าดังกล่าวเท่ากับ 150.4 rad/s. เมื่อเทียบกับ 149.3 rad/s. ค่าความคลาด

เคลื่อนมีค่าเพียง 0.73 เปอร์เซ็นต์ การลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงของความถี่ธรรมชาติลำดับแรกได้แสดงไว้ในรูปที่ 9 ในขณะที่รูปที่ 10 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติทั้งหกลำดับซึ่งได้จากการวิเคราะห์กับค่าจากผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง จากรูปพบว่า ค่าที่ได้ทั้งสอง มีความสอดคล้องกันและไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ความถี่ธรรมชาติลำดับแรก ๆ



รูปที่ 9 การลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติลำดับแรก



รูปที่ 10 ความถี่ธรรมชาติทั้งหมดเทียบกับค่าอ้างอิง

รูปร่างโหมดทั้งหมดลำดับแรกที่มีความละเอียดโครงตาข่ายมากที่สุดซึ่งได้จากการวิเคราะห์ เมื่อเทียบกับคานก่อนการเสียรูป ได้แสดงไว้ในรูปที่ 8 และพบว่ารูปร่างโหมดทั้งหมด เป็นรูปร่างที่สอดคล้องกับรูปร่างทางกายภาพของคานและสามารถเกิดขึ้นได้จริงทั้งสิ้น ไม่มีปรากฏการณ์ที่เรียกว่า Spurious zero energy modes แต่อย่างใด

3.3 ผลวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบมีแรงกระทำเป็นฟังก์ชันตามเวลา (Transient Vibration Analysis)

ในส่วนนี้ เป็นการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบแรงกระทำเพื่อหาค่าการตอบสนองที่เปลี่ยนไปตามเวลาของ จุด A ตามรูปที่ 5 (a) ในที่นี้จะหมายถึงการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของจุด A นั่นเอง ฟังก์ชันเวลาของแรงเฉือนในแนวดิ่งที่กระทำกับปลายคานด้านอิสระนั้น กระทำเป็นเส้นตรงมีค่าเท่ากับศูนย์ ณ เวลาเริ่มต้น มีค่าเท่ากับหนึ่ง ณ เวลา $t = 0.01$ มีค่าเป็น -1 ณ เวลา $t = 0.03$ และกลับมาเท่ากับศูนย์อีกครั้งที่เวลา 0.04 วินาที ดังแสดงในรูปที่ 5 (b) โดยฟังก์ชันของเวลานี้ จะถูกนำไปใช้จำนวน 2 รอบ รวมระยะเวลาทั้งหมดของการวิเคราะห์ $t = 0.08$ วินาที

ผลการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบแรงกระทำช่วงของจุด A (รูปที่ 5 (a)) สำหรับความละเอียดโครงตาข่ายจำนวน 4 ชุดด้วยกัน ได้แก่ 334, 542, 829,

1,525 เอลิเมนต์หลายเหลี่ยมหรือ 866, 1,347, 1,991 และ 3,518 โหนดตามลำดับ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 11 จากรูปพบว่า ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ที่มีความละเอียดต่ำ (รูปที่ 11 (a)) มีความแตกต่างกับค่าอ้างอิงอย่างชัดเจนและความแตกต่างนี้ จะลดลงตามจำนวนความละเอียดของโครงตาข่ายที่เพิ่มขึ้น จนกระทั่งมีความสอดคล้องกับผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงโดยไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ที่ความละเอียดของโครงตาข่ายขนาดสูงสุดสำหรับการศึกษาในครั้งนี้ (รูปที่ 11 (d))

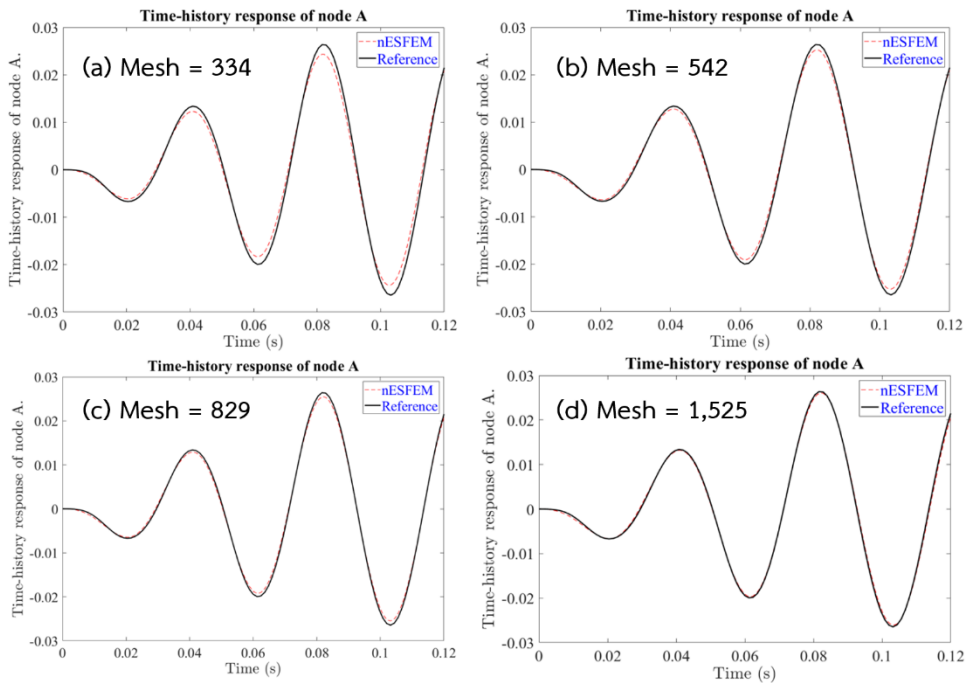
4. สรุปผลการศึกษา

การวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบแรงกระทำสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติของคานเซลล์ูลาร์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งโดเมนย่อยตามจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมได้ถูกนำเสนอในครั้งนี้ ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ ABAQUS ที่มีโครงตาข่ายขนาดเล็กจำนวนมากพอถูกใช้เป็นค่าอ้างอิงแทนผลเฉลยแม่นยำตรงที่ไม่สามารถหาได้จากการวิเคราะห์โดยตรง การโก่งตัวของจุด A เมื่อทำการวิเคราะห์แบบสถิติศาสตร์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ที่โครงตาข่ายละเอียดสุดมีความแตกต่างกับค่าจากผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงเพียง 1.3 เปอร์เซ็นต์

สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระความถี่ธรรมชาติลำดับแรกและรูปร่างโหมดมีค่าสอดคล้องกับค่าอ้างอิงโดยมีความแตกต่างของค่าความถี่ธรรมชาติลำดับแรกที่มีความละเอียดโครงตาข่ายมากที่สุดเพียง 0.73 เปอร์เซ็นต์ ความแตกต่างที่เกิดขึ้นเมื่อโหมดรูปร่างมีค่าสูงขึ้นนั้น พบว่าไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ รูปร่างโหมดที่สอดคล้องกับความถี่ธรรมชาติที่ได้ทั้งหมด สอดคล้องกับสภาพของคานที่สามารถเกิดขึ้นได้จริง ในส่วนของการวิเคราะห์

แบบแรงกระทำนั้น การเคลื่อนที่ในแนวตั้ง ณ จุด A ที่ได้จากสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ในครั้งนี้ มีความสอดคล้องกับค่าที่ใช้ในการอ้างอิงเป็นอย่างดี ความแตกต่างของค่าดังกล่าวเมื่อเทียบกับตามความละเอียดของโครงตาข่ายนั้นพบว่ามีความน้อยและสามารถละเลยได้ ผลของการวิเคราะห์ทั้งหมดนี้ ทำให้สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบรูป

หลายเหลี่ยมที่มีการแบ่งโดเมนย่อยออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมตามจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนี้ เป็นอีกทางเลือกหนึ่งสำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขซึ่งให้ค่าความแม่นยำของผลลัพธ์สูงและควรทำการศึกษาเปรียบเทียบถึงประสิทธิภาพของวิธีนี้กับวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขอื่น ๆ ต่อไป



รูปที่ 11 การเปลี่ยนตำแหน่ง ณ จุด A (a) โครงตาข่ายขนาด 334 (b) โครงตาข่ายขนาด 542 (c) โครงตาข่ายขนาด 829 และ (d) โครงตาข่ายขนาด 1,525

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้เขียนขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรีสำหรับการสนับสนุนเวลาและแหล่งข้อมูลต่าง ๆ สำหรับการทําวิจัยในครั้งนี้

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] K.J. Bathe, *Finite Element Procedures*, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [2] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 6th ed. MA: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [3] T.J. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, New York: Dover Publication, 2000.
- [4] G.R. Liu, N.T. Trung, *Smoothed Finite Element Methods*, Boca Raton USA: CRC Press, 2010.

- [5] W. Junchum, K. Musiket, B. Phungpaingam and S. Pongsivasathit, "Two-Dimensional plane stress analysis by smoothed finite element method using 4 smoothing cells created by an arbitrary quadrilateral element," *Engineering Journal of Research and Development* vol. 32 no. 3, pp. 33-51, July-Sept. 2021.
- [6] G.R. Liu, K.Y. Dai, T.T. Nguyen, "A smoothed Finite Element Method for Mechanics Problems," *Computational Mechanics*, vol. 39, no. 6, pp. 859-877, May. 2007.
- [7] K Dai, G.R. Liu and T.T. Nguyen, "An n-sided Polygonal Smoothed Finite Element Method (nSFEM) for Solid Mechanics," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, no. 11-12, pp. 847-860, Aug. 2007.
- [8] C. Jiang, X. Han, G. R. Liu, Z.-Q. Zhang, G. Yang, and G.-J. Gao, "Smoothed finite element methods (S-FEMs) with polynomial pressure projection (P3) for incompressible solids," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 84, pp. 253-269, Nov. 2017.
- [9] V. Kumar and R. Metha, "Impact simulations using smoothed finite element method," *International Journal of Computational Methods*, vol. 10, no. 04, pp. 1350012, Aug. 2013.
- [10] C. Jiang, Z.-Q. Zhang, X. Han, and G. R. Liu, "Selective smoothed finite element methods for extremely large deformation of anisotropic incompressible bio-tissues," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 99, no. 8, pp. 586-610, Aug. 2014.
- [11] X. Y. Cui, Z. C. Li, H. Feng, and S. Z. Feng, "Steady and transient heat transfer analysis using a stable node-based smoothed finite element method," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 110, pp. 12-25, Dec. 2016.
- [12] P.O. Persson and G. Strang, "A simple mesh generator in MATLAB," *SIAM review*, vol. 46, no. 2, pp. 329-345, 2004.
- [13] D.L. Logan, *A first course in the finite element method*, 6th ed. Boston USA: PWS Engineering, 2017.
- [14] E.L. Wilson, K.J. Bathe and F.E. Peterson, "Finite element analysis of linear and nonlinear heat transfer." *Nuclear engineering and design*, vol. 29, no. 1, pp. 110-24, Nov. 1974.