

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่าง FKCS กับ KNC Comparison of the Effectiveness between FKCS and KNC

วิเชียร โชติวัฒนา^{1*}

¹อาจารย์ สำนักวิชาศึกษาทั่วไป วิทยาลัยนครราชสีมา จังหวัดนครราชสีมา 30000

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการแบ่งกลุ่มข้อมูลระหว่างขั้นตอนวิธี Fuzzy Kernel Compactness and Separation (FKCS) กับขั้นตอนวิธี Kernel Noise Clustering (KNC) FKCS และ KNC ถูกพัฒนาโดยอาศัยพื้นฐานมาจากขั้นตอนวิธี Fuzzy Compactness and Separation (FCS) และขั้นตอนวิธี Noise Clustering (NC) ตามลำดับ ชุดข้อมูลที่ใช้ในการทดสอบเป็นชุดข้อมูลวงแหวน ในการทดสอบประสิทธิภาพในการแบ่งกลุ่มข้อมูลระหว่าง FKCS กับ KNC จะใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลิโนเมียล พร้อมกันนั้นได้เพิ่มข้อมูลรบกวน เพื่อทดสอบความคงทนต่อการรบกวนของข้อมูลระหว่างขั้นตอนวิธี Fuzzy Kernel C-Mean (FKCM), FKCS และ KNC จากผลการทดลองให้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจ กล่าวคือ ในการทดลองกับชุดข้อมูลวงแหวน FKCS จะสามารถใช้ในการแบ่งกลุ่มข้อมูลได้สมมูลกับฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลิโนเมียลในส่วนของชุดข้อมูลที่เพิ่มข้อมูลรบกวน KNC จะให้ความคงทนต่อข้อมูลรบกวนได้ดีกว่า FKCM และ FKCS

Abstract

This paper presented the effectiveness of clustering data – the results from when the Fuzzy Kernel Compactness and Separation (FKCS) were proposed to compare with the performance of the Kernel Noise Clustering (KNC). The FKCS and KNC had largely been developed through basic steps of the Fuzzy Compactness and Separation (FCS) and Noise Clustering (NC) respectively. Ring data sets were used to test the effectiveness of clustering data between the FKCS and the KNC. In doing so, the kernel function – the kernel gaussian function and the kernel polynomial function were used as testers. Along those processes, noise data was added in order to test noise-resistant capacity of Fuzzy Kernel C-Mean (FKCM), FKCS and KNC. The results of the tests provided quite knowledgable understanding that when trying out with the ring datasets, the FKCS with kernel gaussian function and kernel polynomial function could perform effectively clustering data. Moreover, the KNC was even more robust and could work out better with noise data than the FKCM or the FKCS could.

คำสำคัญ : ขั้นตอนวิธีการแบ่งกลุ่มข้อมูลแบบฟัซซี่ FCS FKCS NC KNC ระเบียบวิธีเคอร์เนล

Keywords : Fuzzy Clustering Algorithm, FCS, FKCS, NC, KNC, Kernel Method

* ผู้พิมพ์ประสานงานไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ taipower_wichian@hotmail.com โทร. 044-466-049-52

1. บทนำ

ระเบียบวิธีเคอร์เนล (Kernel Method) ได้ให้ระเบียบวิธีที่มีประสิทธิภาพที่สูง รวมทั้งกรอบการทำงานที่ดีในการทำงานกับชนิดต่าง ๆ ของข้อมูล ตัวอย่างเช่น สตริง (String), เวกเตอร์, ข้อความ (Text) เป็นต้น รวมทั้งสามารถค้นหาความสัมพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ อย่างเช่น การจัดอันดับ (Rank) การจัดหมวดหมู่ (Classification) และการแบ่งกลุ่มข้อมูล (Cluster) เป็นต้น (J. Shawe-Taylor et al., 2004) ฟังก์ชันเคอร์เนล (Kernel Function) แสดงถึงการนิยามการแปลงแบบไม่เชิงเส้นที่ส่งข้อมูลจากปริภูมิดั้งเดิม (Original Space) ไปยังปริภูมิที่มีมิติที่สูงกว่า ซึ่งส่งผลให้ประสิทธิภาพในการทำงานดีขึ้นเมื่อทำงานในปริภูมิใหม่ (J.-H. Wang et al., 2006) ฟังก์ชันเคอร์เนลมีอยู่ด้วยกันหลายชนิด แต่ที่นิยมใช้มีอยู่สองชนิด คือ ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียน (Kernel Gaussian Function) และโพลิโนเมียล (Kernel Polynomial Function) จากทฤษฎีบทเมอร์เซอร์ (Mercer Theorem) เป็นที่รู้กันว่าฟังก์ชันที่ได้จากทฤษฎีบทเมอร์เซอร์จะทำการส่งแบบไม่เชิงเส้นจากการใช้เวกเตอร์เดิมไปยังปริภูมิที่สูงกว่าได้ (Z.-D. Wu et al., 2005)

การวิเคราะห์การแบ่งกลุ่มข้อมูล (Cluster Analysis) จะทำการแบ่งข้อมูลไปเป็นกลุ่ม ๆ เพื่อที่จะทำให้เข้าใจข้อมูลได้ดียิ่งขึ้น หรือใช้ในการค้นหาโครงสร้างในกลุ่มข้อมูล ขั้นตอนวิธีในการแบ่งกลุ่มข้อมูลจะแบ่งชุดข้อมูลออกเป็นกลุ่ม ๆ หรือคลาส (Class) โดยที่ข้อมูลที่มีความคล้ายกันจะถูกกำหนดให้ไปอยู่ในกลุ่มเดียวกัน ในทางตรงกันข้ามข้อมูลที่ไม่คล้ายกันหรือแบ่งแยกกันได้จะถูกกำหนดให้อยู่ในกลุ่มที่แตกต่างกัน ในการ

ประยุกต์ใช้งานจริงมีชุดข้อมูลบางประเภทที่เราไม่สามารถแบ่งขอบเขตได้อย่างชัดเจน โดยขั้นตอนวิธีแบบเดิม ๆ อย่างเช่น ขั้นตอนวิธี K-Mean ดังนั้น ขั้นตอนวิธีการแบ่งกลุ่มข้อมูลแบบฟัซซี (Fuzzy Clustering Algorithm) จึงถูกพัฒนาการจัดการ กับชุดข้อมูลประเภทนี้แทน โดยการใช้ระดับความเป็นสมาชิก (Membership Degree) ที่มีค่าอยู่ระหว่าง $[0,1]$ แทนการกำหนดค่าแบบชัดเจน (Crisp Assignment) ของข้อมูลไปยังกลุ่มต่าง ๆ (Z.-D. Wu et al., 2003)

งานวิจัยทางด้านขั้นตอนวิธีการแบ่งกลุ่มข้อมูลแบบฟัซซี ได้ถูกพัฒนามาอย่างยาวนาน ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1973 โดยการนำเสนอของ Bezdek (J.C. Bezdek, 1973) ซึ่งถือว่าเป็นต้นแบบให้กับงานวิจัยทางด้านนี้มาโดยตลอด โดยรู้จักกันดีในชื่อขั้นตอนวิธี Fuzzy C-Mean (FCM) จากพื้นฐานและแนวความคิดของขั้นตอนวิธีนี้ได้ถูกพัฒนาให้มีประสิทธิภาพมาอย่างต่อเนื่อง อันได้แก่ ขั้นตอนวิธี Possibilistic C-Mean (PCM) (R. Krishnapuram et al., 1993) ขั้นตอนวิธี Fuzzy Compactness and Separation (FCS) (K.-L. Wu et al., 2005) และขั้นตอนวิธี Alternative Noise Clustering (ANC) เป็นต้น ขั้นตอนวิธีที่กล่าวมาข้างต้นจะใช้ระยะทางแบบยูคลิดีเนียน (Euclidean Distance) หรือระยะทางแบบออร์เตอร์เนทิฟ (Alternative Distance) ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function) ในโลกของความเป็นจริงระยะทางที่กล่าวมาข้างต้นไม่มีความสลับซับซ้อนเพียงพอในการแก้ปัญหาที่สลับซับซ้อนได้ เมื่อเร็ว ๆ นี้ได้มีหลายบทความวิจัยได้รายงานถึงปัญหานี้ และการแก้ปัญหาเหล่านี้ ซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยระยะทางแบบเคอร์เนล (Kernel Distance) ตัวอย่างเช่น Wu

et al. (Z.-H. Wu et al., 2003) ได้ใช้ใน FCM ซึ่งเรียกว่า ขั้นตอนวิธี Fuzzy Kernel C-Mean (FKCM) Wu and Zhou (X.-H. Wu et al., 2006) ใช้ใน PCM ซึ่งเรียกว่า Possibilitic Kernel C-Mean (PKCM) วิเชียร โชติวัฒนา (W. Choti Wattana, 2009) ได้ใช้ในขั้นตอนวิธี Noise Clustering (NC) ซึ่งเรียกว่า Kernel Noise Clustering (KNC) วิเชียร โชติวัฒนา และ วิวัฒน์ ศรีภูมิ (W. Choti Wattana and W. Sripoom, 2009) ได้ใช้ใน FCS ซึ่งเรียกว่า Fuzzy Kernel Compactness and Separation (FKCS) เป็นต้น ยิ่งกว่านั้น FKCS ได้มีการนำเสนอแนวความคิดใหม่ในการแก้ปัญหาประเภทนี้ โดยการใช้จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass) และยังถือว่าเป็นแกนกลางของขั้นตอนวิธีนี้

ในปี 2009 มีขั้นตอนวิธีการแบ่งกลุ่มข้อมูลแบบฟัซซีที่น่าสนใจอยู่สองขั้นตอนวิธี คือ ขั้นตอนวิธี FKCS และ KNC ขั้นตอนวิธี FKCS มีหัวใจสำคัญอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล ส่วนขั้นตอนวิธี KNC ถูกพัฒนามาจากต้นแบบการรบกวน (Noise prototype) จึงเป็นที่น่าสนใจว่าทั้งสองขั้นตอนวิธีมีประสิทธิภาพต่อการแบ่งกลุ่มข้อมูลอย่างไรบ้าง มีจุดเด่นจุดด้อยแตกต่างกันอย่างไร โดยใช้การทดสอบกับชุดข้อมูลวงแหวน (Ring Dataset) และชุดข้อมูลวงแหวนที่เพิ่มข้อมูลรบกวน ซึ่งในส่วนนี้จะทดสอบเปรียบเทียบกับ FKCM ด้วย

บทความวิชาการนี้จะแบ่งหัวข้อ ดังต่อไปนี้ หัวข้อที่ 1.1 และ 1.2 จะนำเสนอขั้นตอนวิธี FKCS และ KNC ตามลำดับ วิธีการทดลองอยู่ในหัวข้อที่ 2 ผลการทดลองและวิจารณ์ผลนำเสนอในหัวข้อที่ 3 ส่วนสุดท้ายสรุปนำเสนอในหัวข้อที่ 4

1.1 ขั้นตอนวิธี Fuzzy Kernel

Compactness and Separation

ให้ $\mathbf{X}$ เป็นเซตของ N ข้อมูลที่แทนโดยเวกเตอร์ p -มิติ

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{X}_{1i}, \mathbf{X}_{2i}, \dots, \mathbf{X}_{pi}) \in R^p$$

เมื่อ $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N\}$ เซตของ N เวกเตอร์เป็นเมตริกซ์ข้อมูล pxN ขั้นตอนวิธีแบบฟัซซีจะแบ่งข้อมูล $\mathbf{X}_i$ ไปยัง C กลุ่ม โดยการจัดรูปแบบการแบ่งแบบฟัซซีเพื่อความสะดวกการแบ่งกลุ่มแบบฟัซซีจะแทนด้วยเมตริกซ์ $\mathbf{U}$ ซึ่งมีสมาชิกเป็น $u_{ji} \in [0, 1]$ ใช้แทนความเป็นสมาชิกของ $\mathbf{X}_i$ ในกลุ่มที่ j นั่นคือ แถวที่ j ของ $\mathbf{U}$ จะประกอบด้วยค่าความเป็นสมาชิกที่ j ในการแบ่งกลุ่มแบบฟัซซี ขั้นตอนวิธี FCS ถูกแนะนำโดย Wu et al. (K.-L. Wu et al., 2005) มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function) ดังต่อไปนี้

$$J_{FCS} = \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N u_{ji}^m d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j) - \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N \eta_j u_{ji}^m d^2(\mathbf{V}_j, \bar{\mathbf{X}})$$

เมื่อ $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \dots, \mathbf{V}_C), \mathbf{V}_j \in R^p$ เป็น C -tuple ของกลุ่ม, $m \in (1, \infty)$ เป็นดัชนีฟัซซี (Fuzzy Index) ซึ่งเป็นตัวกำหนดความเป็นฟัซซีของกลุ่ม, $d(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j) = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{V}_j\|$ เป็นทุก ๆ เมตริกซ์ผลคูณภายใน (Inner Product Metric) (ระยะทางระหว่าง $\mathbf{X}_i$ กับ $\mathbf{V}_j$) และ $\eta_j \geq 0$ โดยการหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เมื่อเทียบกับ $\mathbf{U}$ และจุดศูนย์กลางของกลุ่ม $\mathbf{V}$ จะได้ u_{ji} และ $\mathbf{V}_j$ ดังต่อไปนี้

$$u_{ji} = \frac{(d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j) - \eta_j d^2(\mathbf{V}_j, \bar{\mathbf{X}}))^{\frac{1}{m-1}}}{\sum_{k=1}^C (d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_k) - \eta_k d^2(\mathbf{V}_k, \bar{\mathbf{X}}))^{\frac{1}{m-1}}}$$

และ

$$\mathbf{V}_j = \frac{\sum_{i=1}^N u_{ji}^m \mathbf{X}_i - \eta_j \bar{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^N u_{ji}^m}{\sum_{i=1}^N u_{ji}^m - \eta_j \sum_{i=1}^N u_{ji}^m}$$

ให้ ϕ เป็นการส่งแบบไม่เชิงเส้นไปยังปริภูมิ F $\phi: R^p \rightarrow R^q, p \ll q$ ปริภูมินำเข้า (input space) X เป็นการส่งไปยังปริภูมิที่มีมิติที่สูงกว่า F

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N) \rightarrow \phi(\mathbf{X}) \\ &= (\phi(\mathbf{X}_1), \phi(\mathbf{X}_2), \dots, \phi(\mathbf{X}_N)) \end{aligned} \quad (1)$$

แล้ว $d(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j) = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{V}_j\|$ จะถูกส่งไปยังปริภูมิ F

$$\|\mathbf{X}_i - \mathbf{V}_j\| \rightarrow \|\phi(\mathbf{X}_i) - \phi(\mathbf{V}_j)\| \quad (2)$$

ถ้า F เป็นปริภูมิที่มีมิติสูงมาก ๆ ซึ่งจะเป็นไปไม่ได้ในการคำนวณ (2) เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงปัญหานี้ เราจะแก้ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีเคอร์เนล

เคอร์เนล $K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ จะคำนวณผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) ในปริภูมิ F ที่มีมิติมาก ๆ

$$K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \langle \phi(\mathbf{X}_i), \phi(\mathbf{X}_j) \rangle \quad (3)$$

ดังนั้น การคำนวณผลคูณเชิงสเกลาร์ในปริภูมินำเข้าจะถูกแปลงไปเป็นการคำนวณเคอร์เนลโดยการส่งแบบไม่เชิงเส้น

$$\langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle \rightarrow \langle \phi(\mathbf{X}_i), \phi(\mathbf{X}_j) \rangle = K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$$

จุดศูนย์กลางมวลของเซต $\phi(S)$ ถูกนิยามโดย

$$\phi_S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\mathbf{X}_i)$$

เช่นเดียวกับทุก ๆ จุดข้อมูล ซึ่งสามารถคำนวณหาระยะทางระหว่าง ϕ_S โดยใช้เพียงเคอร์เนลได้ดังนี้

$$\begin{aligned} d^2(\phi_S, \phi_S) &= \langle \phi_S, \phi_S \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\mathbf{X}_i), \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(\mathbf{X}_j) \right\rangle \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \langle \phi(\mathbf{X}_i), \phi(\mathbf{X}_j) \rangle \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \end{aligned}$$

อาศัยพื้นฐานจากขั้นตอนวิธี FCS และให้ $\bar{\mathbf{X}} = \phi_S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\mathbf{X}_i)$ เมื่อ ϕ_S เป็นจุดศูนย์กลางมวล และ $j = 1, 2, \dots, C$ $i = 1, 2, \dots, N$ ขั้นตอนวิธี FKCS ในปริภูมิที่มีมิติสูงกว่าจะแสดงได้ ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนวิธี FKCS

เริ่มต้น (Initialization)

1. เลือกจำนวนกลุ่ม C, m และ $\varepsilon \in (0, 1)$ เป็นค่าเงื่อนไขในการหยุด
2. เลือกฟังก์ชันเคอร์เนล K และพารามิเตอร์ที่เหมาะสม
3. เริ่มต้นจุดศูนย์กลางในแต่ละกลุ่ม $\mathbf{V}_j^0$
4. คำนวณ u_{ji}^0 :

$$u_{ji}^0 = \frac{d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^0)}{\sum_{k=1}^C d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_k^0)}$$

เมื่อ $d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j)$ เป็นระยะทางยูคลิดีเนียน

5. ตั้งค่า $K(\mathbf{V}_j^0, \mathbf{V}_j^0)$ และ $K(\mathbf{V}_j^0, \phi_S)$ ให้เป็นเมตริกซ์ศูนย์

6. ตั้งค่าจำนวนวนซ้ำ $r = 1$ และจำนวนวนซ้ำ

สูงสุด r_{max}

วนซ้ำ (Repeat)

1. คำนวณ η_j (M.-S. Yang et al., 2008) :

$$\eta_j = \frac{\min_{i \neq i'} (1 - K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \mathbf{V}_j^{r-1}))}{\max_k (1 - K(\mathbf{V}_k^0, \phi_S))}$$

2. คำนวณเมตริกซ์เคอร์เนล

$$K(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}), K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \mathbf{V}_j^{r-1}) \quad \text{และ}$$

$$K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \phi_S) :$$

$$K(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}) = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_k)}{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m}$$

$$K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \mathbf{V}_j^{r-1}) = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m (u_{jl}^{r-1})^m K(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_l)}{\left(\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m \right)^2}$$

$$K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \phi_S) = \frac{1}{N} \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m K(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_l)}{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m}$$

$$\text{เมื่อ } \phi(\mathbf{V}_j^{r-1}) = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m \phi(\mathbf{X}_k)}{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m}$$

3. คำนวณ $d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1})$ และ

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{V}_j^{r-1}, \phi_S) : \\ d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}) \\ = K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i) - 2K(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}) + K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \mathbf{V}_j^{r-1}) \\ d^2(\mathbf{V}_j^{r-1}, \phi_S) \\ = K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \mathbf{V}_j^{r-1}) - 2K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \phi_S) + K(\phi_S, \phi_S) \end{aligned}$$

4. คำนวณค่าความเป็นสมาชิก u_{ji}^r :

$$u_{ji}^r = \frac{(d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}) - \eta_j d^2(\mathbf{V}_j^{r-1}, \phi_S))^{\frac{1}{m-1}}}{\sum_{k=1}^C (d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_k^{r-1}) - \eta_j d^2(\mathbf{V}_k^{r-1}, \phi_S))^{\frac{1}{m-1}}}$$

5. คำนวณจุดศูนย์กลางใหม่ $\mathbf{V}_j^r$:

$$\mathbf{V}_j^r = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^r)^m \mathbf{X}_k - \eta_j \sum_{k=1}^N (u_{jk}^r)^m \phi_S}{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^r)^m - \eta_j \sum_{k=1}^N (u_{jk}^r)^m}$$

6. เพิ่มค่า r

เงื่อนไขในการหยุด

$$\|\mathbf{V}_j^r - \mathbf{V}_j^{r-1}\| < \varepsilon \quad \text{หรือ} \quad r > r_{max}$$

1.2 ขั้นตอนวิธี Kernel Noise Clustering

สัญลักษณ์ในหัวข้อนี้ใช้เช่นเดียวกับหัวข้อที่

1.2 ขั้นตอนวิธี NC ถูกนำเสนอโดย Dave' (R.N. Dave', 1991) มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดังต่อไปนี้

$$J_{NC} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N u_{ji}^m d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j) + \sum_{i=1}^N \delta^2 \left(1 - \sum_{j=1}^C u_{ji} \right)^m$$

โดยการหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่อไปนี เมื่อเทียบกับ $\mathbf{U}$ และจุดศูนย์กลางของกลุ่ม $\mathbf{V}$ จะได้ u_{ji} และ $\mathbf{V}_j$ ดังต่อไปนี้

$$u_{ji} = \frac{(d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j))^{\frac{1}{m-1}}}{\sum_{k=1}^C (d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_k))^{\frac{1}{m-1}} + (\delta^2)^{\frac{1}{m-1}}}$$

และ

$$\mathbf{V}_j = \frac{\sum_{k=1}^N u_{jk}^m \mathbf{X}_k}{\sum_{k=1}^N u_{jk}^m}$$

Dave' ได้แนะนำการคำนวณ δ^2 ดังต่อไปนี้

$$\delta^2 = \frac{\lambda}{CN} \left[\sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j) \right]$$

โดยที่ λ เป็นตัวคูณสเกลาร์ (scale multiplier) ที่ขึ้นอยู่กับแต่ละปัญหา

อาศัยพื้นฐานจากขั้นตอนวิธี NC และ $j = 1, 2, \dots, C$ $i = 1, 2, \dots, N$ ขั้นตอนวิธี KNC ในปริภูมิที่มีมิติสูงกว่าจะแสดงได้ ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนวิธี KNC

เริ่มต้น (Initialization)

1. เลือกจำนวนกลุ่ม C , m , λ และ $\varepsilon \in (0,1)$ เป็นค่าเงื่อนไขในการหยุด
2. เลือกฟังก์ชันเคอร์เนล K และพารามิเตอร์ที่เหมาะสม
3. เริ่มต้นจุดศูนย์กลางในแต่ละกลุ่ม $\mathbf{V}_j^0$
4. คำนวณ u_{ji}^0 :

$$u_{ji}^0 = \frac{d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^0)}{\sum_{k=1}^C d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_k^0)}$$

เมื่อ $d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j)$ เป็นระยะทางยูคลิดียน

5. ตั้งค่าจำนวนวนซ้ำ $r = 1$ และจำนวนวนซ้ำสูงสุด r_{max}

วนซ้ำ (Repeat)

1. คำนวณเมตริกซ์เคอร์เนล $K(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1})$ และ $K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \mathbf{V}_j^{r-1})$:

$$K(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}) = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_k)}{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m}$$

$$K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \mathbf{V}_j^{r-1}) = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m (u_{jl}^{r-1})^m K(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_l)}{\left(\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m \right)^2}$$

$$\text{เมื่อ } \phi(\mathbf{V}_j^{r-1}) = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m \phi(\mathbf{X}_k)}{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^{r-1})^m}$$

2. คำนวณ $d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1})$

$$d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}) = K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i) - 2K(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}) + K(\mathbf{V}_j^{r-1}, \mathbf{V}_j^{r-1})$$

3. คำนวณ δ^2 (Rehm F. et al.) :

$$\delta^2 = \frac{\lambda}{(C-1)N} \left[\sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}) \right]$$

4. คำนวณค่าความเป็นสมาชิก u_{ji}^0 :

$$u_{ji}^r = \frac{(d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_j^{r-1}))^{\frac{1}{m-1}}}{\sum_{k=1}^C (d^2(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_k^{r-1}))^{\frac{1}{m-1}} + (\delta^2)^{\frac{1}{m-1}}}$$

5. คำนวณจุดศูนย์กลางของแต่ละกลุ่มใหม่ V_j^r :

$$V_j^r = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^r)^m \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^N (u_{jk}^r)^m}$$

6. เพิ่มค่า r

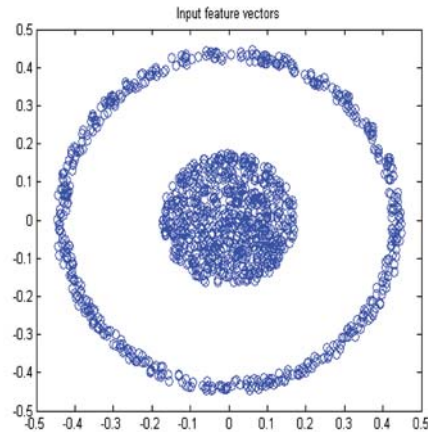
เงื่อนไขในการหยุด

$$\|U_j^r - U_j^{r-1}\| < \varepsilon \text{ หรือ } r > r_{\max}$$

2. วิธีการทดลอง

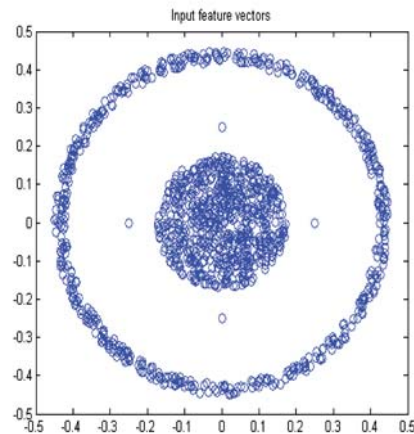
ในหัวข้อนี้ FKCS และ KNC จะถูกทดสอบบนชุดข้อมูลวงแหวนเพื่อทดสอบประสิทธิภาพ ในการแบ่งกลุ่มข้อมูล ฟังก์ชันเคอร์เนลที่เลือกใช้เป็น ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนที่มีซิกมา (sigma, σ) $\sigma = 0.2$ และโพลิโนเมียลที่มีอันดับ 2 และชุดข้อมูลวงแหวนที่เพิ่มข้อมูลรบกวน เพื่อทดสอบความคงทนต่อข้อมูลรบกวน โดยทดสอบกับขั้นตอนวิธี FKCM, FKCS และ KNC ฟังก์ชันเคอร์เนลที่เลือกใช้ คือ ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนที่มี $\sigma = 0.2$ ในที่นี้จะให้ จำนวนกลุ่ม $C = 2$, $m = 2$ และ $\varepsilon = 0.01$ สำหรับขั้นตอนวิธี FKCS และ $\varepsilon = 0.00001$, $\lambda = 0.7$ สำหรับขั้นตอนวิธี KNC

ชุดข้อมูลวงแหวนถูกแบ่งออกเป็นสองส่วน คือ วงในและวงนอกที่มีรัศมี 0.03 และ 0.42-0.45 ตามลำดับ ทั้งวงในและวงนอกมีจุดศูนย์กลางร่วมกันที่จุดกำเนิด (origin) ในการสุ่มข้อมูลจะสุ่มจากข้อมูลทั้งหมด 48,000 ข้อมูล โดยมีการกระจายข้อมูลเป็นเส้นโค้งปกติ กล่าวคือ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 ผลลัพธ์หนึ่งของชุดข้อมูลวงแหวน

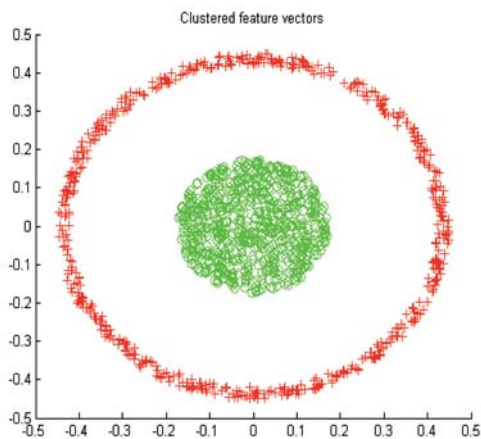
ในส่วนของการทดสอบความคงทนต่อข้อมูลรบกวนจะทำการเพิ่มข้อมูลรบกวนไปยังชุดข้อมูลวงแหวนที่เกิดจากการสุ่มข้อมูลเพียงครั้งเดียว และเพิ่มข้อมูลรบกวนทั้งหมด 4 ข้อมูล โดยมีตำแหน่งดังต่อไปนี้ $\{(0,0.25), (0,-0.25), (0.25,0), (-0.25,0)\}$ ดังแสดงในรูปที่ 2



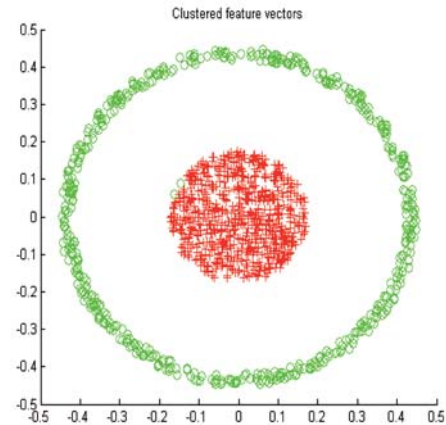
รูปที่ 2 ผลลัพธ์ของการเพิ่มข้อมูลรบกวนไปยังชุดข้อมูลวงแหวน

3. ผลการทดลองและวิจารณ์ผล

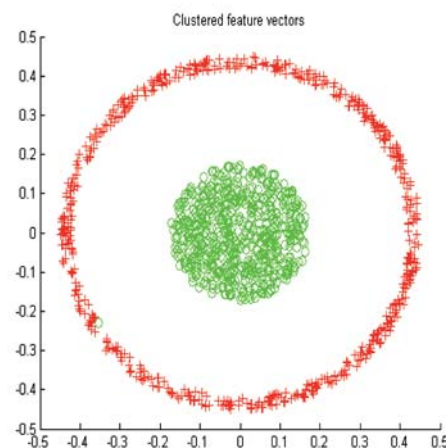
จากการทดลองปรากฏผลดังแสดงในรูปและตารางต่อไปนี้ รูปที่ 3 แสดงถึงผลลัพธ์หนึ่งในการใช้ขั้นตอนวิธี FKCS ที่ใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลิโนเมียล รูปที่ 4 และ 5 แสดงถึงผลลัพธ์หนึ่งในการใช้ขั้นตอนวิธี KNC ที่ใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลิโนเมียลตามลำดับ ตารางที่ 1 แสดงถึงอัตราเฉลี่ยความถูกต้องของการแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงแหวนจากการทดลอง 10 ครั้ง



รูปที่ 3 ผลลัพธ์หนึ่งของขั้นตอนวิธี FKCS โดยใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลิโนเมียล



รูปที่ 4 ผลลัพธ์หนึ่งของขั้นตอนวิธี KNC โดยใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียน



รูปที่ 5 ผลลัพธ์หนึ่งของขั้นตอนวิธี KNC โดยใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบโพลิโนเมียล

ตารางที่ 1 อัตราค่าเฉลี่ยความถูกต้องของการแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงแหวน (ทดลอง 10 ครั้ง)

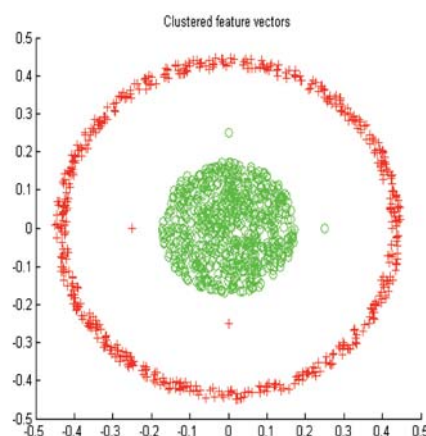
ขั้นตอนวิธี กลุ่ม	FKCS ที่ใช้ ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบ เกาส์เซียน $\sigma = 0.2$	FKCS ที่ใช้ ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบ โพลีโนเมียลอันดับ 2	KNC ที่ใช้ฟังก์ชันเคอร์เนล แบบเกาส์เซียน $\sigma = 0.2$ $\lambda = 0.7$	KNC ที่ใช้ฟังก์ชันเคอร์เนล แบบโพลีโนเมียลอันดับ 2 $\lambda = 0.7$
วงใน	100%	100%	99.66%	100%
วงนอก	100%	100%	100%	84.04%

จากรูปที่ 3 จะเห็นได้ว่าขั้นตอนวิธี FKCS สามารถแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงแหวนได้อย่างสมบูรณ์ไม่ว่าจะใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลีโนเมียล ส่วนขั้นตอนวิธี KNC สามารถแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงแหวนได้เกือบสมบูรณ์ในวงใน แต่วงนอกแบ่งกลุ่มข้อมูลได้สมบูรณ์ ดังแสดงในรูปที่ 4 เมื่อใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียน ในส่วนฟังก์ชันเคอร์เนลแบบโพลีโนเมียลสามารถแบ่งกลุ่มข้อมูลวงในได้สมบูรณ์ แต่ในวงนอกแบ่งกลุ่มข้อมูลได้เกือบสมบูรณ์ดังแสดงในรูปที่ 5

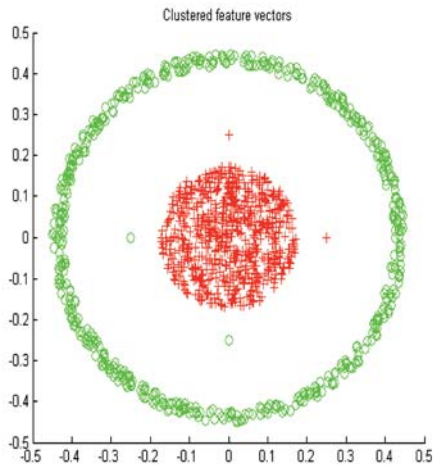
จากตารางที่ 1 แสดงถึงอัตราเฉลี่ยความถูกต้องในการแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงแหวนด้วยจำนวนการทดลอง 10 ครั้ง จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าขั้นตอนวิธี FKCS สามารถแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงแหวนได้ 100% ทั้งวงในและวงนอก ไม่ว่าจะใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลีโนเมียล ในส่วนของขั้นตอนวิธี KNC ที่ใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนจะสามารถแบ่งกลุ่มข้อมูลวงนอกได้สมบูรณ์ที่ 100% แต่วงในไม่สามารถแบ่งกลุ่มข้อมูลวงนอกได้อย่างสมบูรณ์ แต่อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาที่ค่าอัตราความถูกต้องเฉลี่ยแล้วจะเห็นว่าค่าที่สูงมาก คือ 99.66% ส่วนในการใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบโพลีโนเมียลจะสามารถแบ่ง

กลุ่มชุดข้อมูลวงแหวนวงในได้อย่างสมบูรณ์ 100% ส่วนวงนอกยังแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลไม่สมบูรณ์ คือ 84.04% ซึ่งถือว่าเป็นอัตราความถูกต้องเฉลี่ยที่สูง แต่ยังไม่เท่ากับในกรณีที่ใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียน

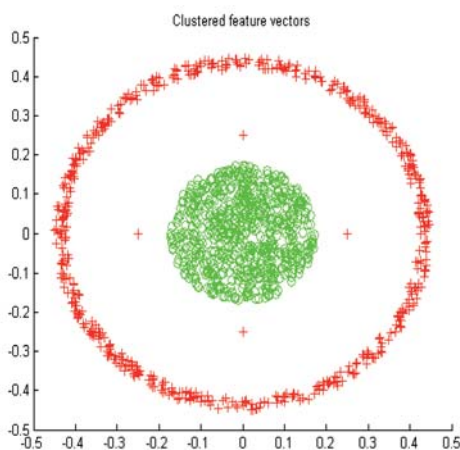
ในส่วนการทดสอบความคงทนต่อข้อมูลรบกวนบนขั้นตอนวิธี FKCM, FKCS และ KNC ได้ผลการทดลองดังแสดงในรูปที่ 6-8 ตามลำดับ



รูปที่ 6 ผลลัพธ์ของขั้นตอนวิธี FKCM



รูปที่ 7 ผลลัพธ์ของขั้นตอนวิธี FKCS



รูปที่ 8 ผลลัพธ์ของขั้นตอนวิธี KNC

จากรูปที่ 6-8 จะเห็นได้ว่า KNC ยังสามารถแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลออกเป็นสองกลุ่มได้อย่างชัดเจน โดยที่ข้อมูลรอบวงทั้ง 4 ข้อมูลถูกแบ่งกลุ่มให้อยู่วงนอกทั้งหมดดังแสดงในรูปที่ 8 แต่ขั้นตอนวิธี FKCM และ FKCS จะแบ่งกลุ่มข้อมูลรอบวง $\{(-0.25,0),(0,-0.25)\}$ ให้อยู่วงนอก และข้อมูลรอบวง $\{(0.25,0),(0,0.25)\}$ ถูกแบ่งกลุ่มให้อยู่วงในดังแสดงในรูปที่ 6-7 ตามลำดับ ซึ่งบ่งบอกถึงความไม่คงทนต่อข้อมูลรอบวง

4. สรุป

ในการวัดประสิทธิภาพการแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงแหวนจากรูปที่ 3 และตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่าขั้นตอนวิธี FKCS สามารถแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงแหวนได้อย่างสมบูรณ์ไม่ว่าจะใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลิโนเมียล ซึ่งเป็นผลมาจากการที่ FKCS ถูกพัฒนามาจาก FCS และจุดศูนย์กลางมวล โดยเฉพาะอย่างยิ่งจุดศูนย์กลางมวล เนื่องด้วยจุดศูนย์กลางมวลเป็นค่าเฉลี่ยของภาพ (Image) ในการส่ง ดังนั้น จึงทำให้ฟังก์ชันเคอร์เนลไม่มีผลกระทบต่อ FKCS หรืออาจจะกล่าวได้ว่า FKCS ใช้ได้กับฟังก์ชันเคอร์เนลได้หลากหลาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลิโนเมียล ในกรณีของขั้นตอนวิธี KNC ยังไม่สามารถแบ่งกลุ่มชุดข้อมูลวงในหรือวงนอกได้อย่างสมบูรณ์ กล่าวคือฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนจัดกลุ่มข้อมูลวงนอกได้อย่างสมบูรณ์ และฟังก์ชันเคอร์เนลแบบโพลิโนเมียลจัดกลุ่มข้อมูลวงในได้อย่างสมบูรณ์ แต่อย่างไรก็ตาม ทั้งฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนและโพลิโนเมียลยังสามารถแบ่งกลุ่มข้อมูลในอัตราความถูกต้องที่สูงมาก เมื่อมาเปรียบเทียบกับระหว่างฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนกับโพลิโนเมียล ฟังก์ชันแบบเกาส์เซียนจะให้อัตราความถูกต้องที่สูงกว่าฟังก์ชันเคอร์เนลแบบโพลิโนเมียล ซึ่งเป็นไปในทิศทางเดียวกับขั้นตอนวิธี FKCM (Z.-D. Wu et al., 2003)

ในการทดสอบความคงทนต่อข้อมูลรอบวงจากรูปที่ 6-8 จะเห็นได้ว่าขั้นตอนวิธี KNC มีความคงทนต่อข้อมูลรอบวงได้ดีกว่าขั้นตอนวิธี FKCM และ FKCS ที่ $\sigma = 0.22$ เนื่องด้วยขั้นตอนวิธี KNC ถูกพัฒนามาจากต้นแบบการ

รบกวน ซึ่งต้นแบบดังกล่าวถูกสร้างมาเพื่อแก้ปัญหาความคงทนต่อข้อมูลรบกวน กล่าวคือ ต้นแบบการรบกวนจะให้ทุก ๆ ข้อมูลของชุดข้อมูลมีระยะทางที่เท่า ๆ กันกับกลุ่มข้อมูลรบกวน (Noise cluster) (R.N. Dave', 1991) รวมทั้งขั้นตอนวิธี KNC ใช้ระยะทางเคอร์เนลจึงทำให้ขั้นตอนวิธีนี้คงทนต่อข้อมูลรบกวนในชุดข้อมูลที่มีความสลับซับซ้อนดังเช่นชุดข้อมูลวงแหวน

ขั้นตอนวิธี FKCS มีข้อดีในการใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลที่หลากหลายมากกว่า FKCM และ KNC แต่ก็มีปัญหาในการแบ่งกลุ่มข้อมูลในกรณีที่มีข้อมูลรบกวนเหมือนกับขั้นตอนวิธี FKCM ส่วนขั้นตอนวิธี KNC มีข้อดีในการคงทนต่อข้อมูลรบกวนได้ดีกว่าขั้นตอนวิธี FKCM และ FKCS แต่ยังมีประสิทธิภาพในการแบ่งกลุ่มข้อมูลในกรณีที่ไม่มีข้อมูลรบกวนด้อยกว่าขั้นตอนวิธี FKCS กล่าวคือ มีปัญหามากกับฟังก์ชันเคอร์เนลแบบโพลีโนเมียล ซึ่งเป็นผลการทดลองที่เป็นไปในทิศทางเดียวกับขั้นตอนวิธี FKCM

ขั้นตอนวิธีที่นำเสนอในที่นี้เป็นขั้นตอนวิธี การแบ่งกลุ่มข้อมูลแบบไม่มีผู้สอน (unsupervised) ซึ่งมีการพัฒนาอย่างยาวนาน เมื่อเร็ว ๆ นี้ได้มีการพัฒนาเทคโนโลยีทางด้านนี้ขึ้นมาใหม่ โดยแยกมาอีกหนึ่งแบบที่เรียกว่าแบบกึ่งมีผู้สอน (semi-supervised) ซึ่งกำลังเป็นที่สนใจในปัจจุบันและอนาคต การแบ่งกลุ่มข้อมูลแบบกึ่งมีผู้สอนมีแนวความคิดที่แตกต่างจากแบบไม่มีผู้สอนเพียงเล็กน้อย กล่าวคือ แบบไม่มีผู้สอนจะไม่มีกำหนดข้อมูลให้อยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งก่อน หรืออาจจะกล่าวได้ว่าให้ขั้นตอนวิธีจัดกลุ่มให้กับข้อมูลทั้งหมด แต่สำหรับแบบกึ่งมีผู้สอนจะมีการกำหนดให้ข้อมูลอยู่ในกลุ่มเดียวกันหรือไม่อยู่ใน

กลุ่มเดียวกันเพียงส่วนหนึ่งโดยที่เรียกว่าข้อจำกัด (constraint) ซึ่งส่วนนี้จะเป็นส่วนน้อยของชุดข้อมูล แล้วจึงให้ขั้นตอนวิธีแบ่งกลุ่มให้ ณ ปัจจุบันขั้นตอนวิธี K-Mean ที่ถูกนำเสนอโดย K. Wagstaff et al. (K. Wagstaff et al., 2001) และ FCM ถูกนำเสนอโดย N. Grira et al. (N. Grira et al., 2005) สามารถทำในแบบกึ่งไม่มีผู้สอนได้แล้ว และที่สำคัญ KFCM ที่ถูกนำเสนอโดย D. Zhang et al. (D. Zhang et al., 2004) ซึ่งใช้ระเบียบวิธีเคอร์เนลที่นำมาใช้กับ FCM แต่แตกต่างจาก FKCM กล่าวคือ KFCM จะใช้เมตริกซ์เคอร์เนลโดยตรงและใช้ได้กับฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียนเท่านั้น แต่ FKCM จะใช้เมตริกซ์เคอร์เนลที่คำนวณมาจากค่าความเป็นสมาชิกและสามารถใช้กับฟังก์ชันเคอร์เนลได้หลากหลายมากกว่า ซึ่ง KFCM สามารถนำมาใช้ในแบบกึ่งมีผู้สอนได้แล้ว โดยการนำเสนอของ N. Wang et al. (N. Wang et al., 2008) ซึ่งทำให้มองเห็นได้ว่าเราสามารถนำ FKCM, PKCM, FKCS และ KNC มาพัฒนาในรูปแบบกึ่งไม่มีผู้สอนได้

5. เอกสารอ้างอิง

- D. Zahang, K. Tan and S. Chen. 2004. Semi-supervised kernel-Based Fuzzy C -Means. Springer Berlin/Heidelberg. Lecture Note in Computer Science. (Vol. 3316): 1229-1234.
- J.C. Bezdek. 1973. Fuzzy Mathematics in pattern classification Ph.D. dissertation. Ithaca, NY. Dept. Appl. Math., Cornell University.

- J. Shawe-Taylor, C. Cristianini. 2004. Kernel Methods for Pattern Analysis. Cambridge: Cambridge University Press.
- J.-H. Wang, W.-J. Lee, S.-J. Lee. 2006. A Kernel-based Fuzzy Clustering Algorithm. The Proceedings of the First International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC'06).
- K.-L. Wu, J. Yu, M.-S. Yang. 2005. A Novel Fuzzy Clustering Algorithm Base on Fuzzy Scatter Matrix With Optimality Tests. on Pattern Recognition Letters. issue 5(Vol. 26): 639-652.
- K.-L. Wu, M.-S. Yang. 2002. Alternative c-means clustering algorithms. Pattern Recognition. Issue 10 (Vol. 35): 2267-2278.
- K.R. Pal, K. Pal, J.C. Bezdek. 2004. A New Hybrid C-Mean Clustering Model. Proceedings of the IEEE International Conference On Fuzzy Systems. (Vol. 1): 179-184.
- K. Wagstaffet, C. Cardie et al., 2001. Constrained K-means Clustering with Background Knowledge. Proceedings of the Eighteenth International Conference on Machine Learning: 577-584.
- M.-S. Yang, H.-S. Tsai. 2008. A Gaussian kernel-base fuzzy c-mean algorithm with a spatial bias correction. on Pattern Recognition Letters. issue 12 (Vol. 29): 1713-1725.
- N. Grira, M. Crucian et al. 2005. Semi-Supervised Fuzzy Clustering with Pairwise-Constrained Competitive Agglomeration. The 14th IEEE on Fuzzy System: 867-872.
- N. Wang, X. Li et al. 2008. Semi-supervised Kernel-based Fuzzy C-Means with Pairwise Constraints. 2008 International Joint Conference on Neural Networks: 1098-1102.
- Rehm F., Klawonn F., Kruse R. A Novel Approach to Noise Clustering for Outlier Detection. available from: <http://public.rz.fh-wolfenbuettel.de/~klawonn/Papers/rehmetalsc07.pdf>.
- R. Krishnapuram, J. Keller. 1993. A Possibilitic Approach to Clustering. IEEE Trans. Fuzzy Systems. (Vol. 1. No. 2): 98-110.
- W. Choti wattana. 2009. Noise Clustering Algorithm based on Kernel Method. 2009 IEEE International Advance Computing Conference (IACC 2009): 56-60.
- W. Choti wattana, W. Sripoom. 2009. Fuzzy Compactness and Separation Algorithm based on Kernel Method. 2009 IEEE International Advance Computing Conference (IACC 2009): 26-31.

- X.-H. Wu. 2006. Noise clustering using a new distance. The Proceeding of the 2006 IEEE International Conference on Information Acquisition' 2006: 1015-1020.
- X.-H. Wu. 2006. A possibilistic c-means clustering algorithm based on kernel method. IEEE International Conference on Information Acquisition'2006: 2062-2066.
- Z.-D. Wu, W.-x, Xie. 2003. Fuzzy c-means clustering algorithm based on kernel method. The Fifth International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Applications: 1-6.