การปรับปรุงวิธีซิมเพล็กซ์ด้วยการผ่อนปรนตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบสำหรับปัญหาตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย

เอื้ออารี บุญเพิ่ม[*1]

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต 99 หมู่ 18 ต.คลองหนึ่ง อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี 12121

บทคัดย่อ

วิธีซิมเพล็กซ์เป็นวิธีที่นิยมใช้เพื่อแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน โดยทั่วไปปัญหาที่มีตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย จะถูกเขียนในรูปของสองตัวแปรที่ไม่เป็นลบ ซึ่งส่งผลให้จำนวนของตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมายเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีในการจัดการกับตัวแปรที่เพิ่มขึ้นนี้ด้วยการผ่อนปรนตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งจากการพิจารณาค่าของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ สำหรับปัญหาการหาค่าสูงที่สุดตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบจะถูกผ่อนปรน หลังจากนั้นปัญหาผ่อนปรนจะถูกนำไปหาผลเฉลยด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ และเพื่อรับประกันผลเฉลยที่เหมาะที่สุด หรือการไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ หรือปัญหาไม่มีขอบเขต ตัวแปรผ่อนปรนจะถูกนำกลับมาพิจารณาอีกครั้ง ตัวอย่างการทำงานของขั้นตอนวิธีได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีนี้

คำสำคัญ: กำหนดการเชิงเส้น วิธีซิมเพล็กซ์ ตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย

* Corresponding author. E-mail: aua-aree@mathstat.sci.tu.ac.th

[1] อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Improving the Simplex Method Using the Relaxing Negative Cost Variable for the Unrestricted Variable Problem

Aua-aree Boonperm[*1]

Thammasat University, Rangsit Center, Khlong Luang, Pathum Thani 12121

Abstract

The simplex method is popularly used to solve standard linear programming problems. Generally, for an unrestricted variable problem, a single unrestricted variable is rewritten using two nonnegative variables, causing the number of variables to increase by a factor of two for each unrestricted variable. This paper proposes an algorithm to deal with this increase by relaxing one of two for each unrestricted variable by considering the coefficients of the objective function. For the maximization problem, the variables that had the negative coefficients were relaxed. Then, the relaxed problem was solved using the simplex method. In order to guarantee the optimal solution or infeasibility or unboundedness of the linear programming problem, the relaxed variables were reinserted back to the relaxation problem. Examples are presented to show the effectiveness of this algorithm.

Keywords: linear programming, simplex method, unrestricted variable

* Corresponding author. E-mail: aua-aree@mathstat.sci.tu.ac.th

1 Lecturer in Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

1. บทนำ

กำหนดการเชิงเส้น (linear programming) เป็นวิธีการเพื่อหาค่าสูงที่สุดหรือค่าต่ำที่สุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ภายใต้ข้อจำกัดหรือเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น (linear equality or inequality constraint) ซึ่ง ปัญหาหลายๆ ปัญหา ทั้งปัญหาทางด้านเศรษฐกิจ อุตสาหกรรม การคมนาคม เป็นต้น ต้องการการตัดสินใจที่ให้ผลตอบแทนที่สูงที่สุด หรือลดเวลา ลดค่าใช้จ่ายให้ต่ำที่สุด ภายใต้ข้อจำกัดที่มี ซึ่งปัญหาเหล่านี้สามารถนำมาสร้างเป็นตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น (linear programming model) และนำตัวแบบนั้นมาหาผลเฉลยหรือหาคำตอบที่เหมาะที่สุด (optimal solution)

สำหรับวิธีการในการหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้นเป็นอีกงานวิจัยที่นักวิจัยสนใจศึกษาเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องและรวดเร็ว ในปัจจุบันวิธีที่นิยมใช้ในการหาคำตอบของปัญหากำหนดการเชิงเส้นคือวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) และวิธีจุดภายใน (interior point method)

วิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) ได้ถูกคิดค้นโดย George Dantzig [1] ในปี 1947 ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่ค่อนข้างมีประสิทธิภาพ โดยวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) จะเริ่มการทำงานที่จุดกำเนิดเมื่อจุดกำเนิดเป็นจุดที่เป็นไปได้ และขยับไปยังจุดสุดขีดที่เป็นไปได้ที่อยู่ติดกัน (adjacent extreme feasible point) โดยจุดถัดไปจะให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ดีขึ้น จนกระทั่งพบผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แต่อย่างไรก็ตาม Victor Klee และ George Minty [2] ได้สร้างรูปแบบตัวอย่างปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่แสดงให้เห็นว่าวิธีซิมเพล็กซ์มีเวลาในการทำงานเป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential time) ซึ่งจะใช้เวลานานในการหาผลเฉลย และต่อมา Narendra Karmarkar [3] ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีเพื่อแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีเวลาในการทำงานเป็นฟังก์ชันพหุนาม (polynomial time) และเรียกขั้นตอนวิธีนี้ว่า วิธีจุดภายใน (interior point method)

วิธีจุดภายใน (interior point method) จะมีจำนวนรอบในการทำซ้ำโดยประมาณไม่เกิน 100 รอบ โดยไม่ขึ้นกับขนาดของปัญหา [4-6] ดังนั้นวิธีจุดภายในจึงใช้ได้ดีกับปัญหาที่มีขนาดใหญ่ แต่ในการทำซ้ำแต่ละรอบของวิธีจุดภายในจะมีความซับซ้อนและยุ่งยากมากกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ โดยเฉพาะในกรณีที่เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของปัญหาเป็นเมทริกซ์หนาแน่น (dense matrix) นั่นคือมีสมาชิกที่ไม่ใช่ศูนย์จำนวนมาก จะทำให้วิธีจุดภายในใช้เวลาในแต่ละการทำซ้ำมากขึ้น ดังนั้นวิธีจุดภายในจึงไม่เหมาะกับปัญหาขนาดเล็ก ขนาดกลาง และปัญหาขนาดใหญ่ที่มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของปัญหาเป็นเมทริกซ์หนาแน่น ในขณะที่วิธีซิมเพล็กซ์ยังเป็นวิธีที่นิยมสำหรับการแก้ปัญหาขนาดเล็ก ขนาดกลางและยังนิยมใช้ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงจำนวนเต็ม (integer programming problem) ดังนั้นการปรับปรุงขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นจึงเป็นงานวิจัยที่นักวิจัยสนใจ และพยายามคิดค้นขั้นตอนวิธีใหม่ๆ เพื่อให้การหาคำตอบของปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีความถูกต้องและรวดเร็วมากยิ่งขึ้น ในการปรับปรุงขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์มีหลายส่วนที่นักวิจัยสนใจปรับปรุงเช่น การหาหลักเกณฑ์ใหม่ในการเลือกตัวแปรเข้า (entering variable) หรือตัวแปรออก (leaving variable) [7-10] การหาจุดเริ่มต้นใหม่ในการเริ่มขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ [11-12] หรือการใช้ขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์โดยไม่ใช้ตัวแปรเทียม [13-22] เป็นต้น

แนวคิดที่สำคัญแนวคิดหนึ่งที่ถูกนำมาใช้สร้างขั้นตอนวิธีในการหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหรือปรับปรุงขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น คือการพิจารณามุมระหว่างเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับ ซึ่งในปี 2004 กฤษฎา นารอง และ กรุง สินอภิรมย์สราญ [23-24] ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีใหม่ที่ใช้ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติ ซึ่งปัญหาที่นำมาพิจารณาจะต้องเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และไม่มีเงื่อนไขบังคับเกินจำเป็น (redundant constraint) โดยวิธีการที่นำเสนอนี้ได้ใช้เวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์แบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับออกเป็น 2 กลุ่ม และเงื่อนไขบังคับที่มีเวกเตอร์เกรเดียนต์ทำมุมน้อยที่สุดจากแต่ละกลุ่มจะให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ต่อมาในปี 2007 เอื้ออารี บุญเพิ่ม และ กรุง สินอภิรมย์สราญ [25-26] ได้ขยายแนวคิด

นี้เพื่อใช้กับปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 3 มิติ โดยการฉาย (projection) ปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 3 มิติลงบนสมการเงื่อนไขบังคับที่มีเวกเตอร์เกรเดียนต์ทำมุมน้อยที่สุดกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งจะทำให้ปัญหาที่ได้เป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติ และแก้ปัญหานี้โดยใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดใน 2 มิติ และตรวจสอบผลเฉลยที่ได้ด้วยเงื่อนไขเคเคที (KKT conditions) เพื่อรับประกันว่าเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด

ในปี 2005 Helcio Vieira Junior* และ Marcos Pereira Estellita Lins [11] ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีเพื่อปรับปรุงขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยได้นำเสนอการเลือกฐานหลักเริ่มต้น (initial basis) สำหรับขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์เพื่อแก้ปัญหาควบคู่ (dual problem) โดยฐานหลักเริ่มต้นนี้ได้จากการพิจารณาเงื่อนไขบังคับที่มีเวกเตอร์เกรเดียนต์ทำมุมน้อยที่สุดกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ในปัญหาหลัก (primal problem) และตัวแปรในปัญหาควบคู่ (dual problem) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับเหล่านี้ จะเป็นตัวแปรที่ให้ฐานหลักเริ่มต้นในปัญหาควบคู่ และเริ่มขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ด้วยฐานหลักนี้ในปัญหาควบคู่ ซึ่งวิธีการนี้สามารถใช้ได้เมื่อฐานหลักเริ่มต้นเป็นฐานหลักไม่เอกฐานเท่านั้น ดังนั้นในปี 2007 Jian-Feng Hu [12] จึงได้ปรับปรุงให้ขั้นตอนวิธีของ Helcio Vieira Junior* และ Marcos Pereira Estellita Linsสามารถใช้งานได้ในกรณีที่ฐานหลักเริ่มต้นไม่เป็นเอกฐาน

ในปี 2006 H.W. Corley Jay Rosenberge Wei-chang Yeh และ T.K. Sung [20] ได้ปรับปรุงขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ด้วยการลดรูปของปัญหาให้มีขนาดเล็กลง โดยใช้เงื่อนไขบังคับที่มีเวกเตอร์เกรเดียนต์ทำมุมน้อยที่สุดกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์มาหาผลเฉลยก่อน และผ่อนปรนเงื่อนไขบังคับอื่นๆ ออกจากการหาผลเฉลย หลังจากได้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดแล้วจะเพิ่มเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยที่สุดถัดไปมาพิจารณากับผลเฉลยนั้น ถ้าผลเฉลยไม่ขัดแย้งกับเงื่อนไขบังคับจะเพิ่มเงื่อนไขบังคับถัดไปจนกระทั่งพบว่าทุกเงื่อนไขบังคับสอดคล้องกับผลเฉลย ซึ่งงานวิจัยนี้มีข้อจำกัดคือสัมประสิทธิ์ของปัญหาต้องไม่เป็นลบเท่านั้น

ต่อมาในปี 2010 Wei-Chang Yeh และ Hertert W. Corley [10] ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีเพื่อปรับปรุงขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์เช่นเดียวกัน โดยได้นำเสนอหลักเกณฑ์การหมุน (pivot rule) แบบใหม่ ซึ่งเป็นหลักเกณฑ์ที่ใช้ในการเลือกตัวแปรเข้า โดยหลักเกณฑ์นี้จะเลือกตัวแปรเข้าจากปัญหาหลักที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับในปัญหาควบคู่ที่มีเวกเตอร์เกรเดียนต์ทำมุมน้อยที่สุดกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งผลที่ได้พบว่าสามารถใช้ได้เป็นอย่างดีกับปัญหาของ Klee และ Minty นอกจากนี้ยังมีอีกหลายงานวิจัยที่นำเสนอเกี่ยวกับการนำมุมน้อยที่สุดมาใช้ในการปรับปรุงขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น [19-20]

ในปี 2014 Aua-aree Boonperm และ Krung Sinapiromsaran [21, 22] ได้นำแนวคิดการใช้เวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมแหลมกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งมีโอกาสที่จะเป็นเงื่อนไขบังคับที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด หรือให้ผลเฉลยที่อยู่ใกล้กับผลเฉลยที่เหมาะที่สุดมาสร้างขั้นตอนวิธีที่ไม่ใช้ตัวแปรเทียม โดยเริ่มจากการแบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับออกเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มของเงื่อนไขบังคับมุมแหลม (acute constraint) และกลุ่มของเงื่อนไขบังคับไม่เป็นมุมแหลม (non-acute constraint) และเริ่มต้นการทำงานของขั้นตอนวิธีด้วยการนำกลุ่มของเงื่อนไขบังคับไม่เป็นมุมแหลม (non-acute constraint) ออกจากการพิจารณา และเรียกปัญหานี้ว่าปัญหาการผ่อนปรนเงื่อนไขบังคับไม่เป็นมุมแหลม (non-acute constraint relaxation problem) ซึ่งปัญหาผ่อนปรนนี้สามารถใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการหาผลเฉลยได้โดยไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแปรเทียม และตรวจสอบผลเฉลยที่ได้โดยการนำเงื่อนไขบังคับในกลุ่มของเงื่อนไขบังคับไม่เป็นมุมแหลมกลับเข้ามาพิจารณา โดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์ควบคู่ (dual simplex method) ซึ่งจากผลการทดสอบขั้นตอนวิธีพบว่าวิธีการนี้สามารถหาผลเฉลยได้เร็วขึ้นเมื่อเทียบกับวิธีซิมเพล็กซ์แบบดั้งเดิม แต่อย่างไรก็ตามวิธีการนี้ได้สร้างขึ้นมาเพื่อใช้กับปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีตัวแปรในรูปแบบไม่จำกัดเครื่องหมาย (unrestricted variable) ซึ่งขั้นตอนวิธีนี้ยังคงใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการหาผลเฉลย ดังนั้นปัญหากำหนดการเชิงเส้นจะต้องถูกเขียนในรูปแบบมาตรฐาน

(standard form) ก่อนเริ่มการทำงานของขั้นตอนวิธี นั่นคือ ตัวแปรไม่จำกัดใดๆ จะถูกเขียนในรูปของผลต่างของตัวแปรที่ไม่เป็นลบสองตัวแปร ซึ่งส่งผลให้จำนวนของตัวแปรเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าของจำนวนตัวแปรทั้งหมด

จากปัญหาข้างต้น เอื้ออารี บุญเพิ่ม [27] ได้นำเสนอวิธีการจัดการกับปัญหาตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย โดยการผ่อนปรนตัวแปรมุมป้านควบคู่ หลังจากนั้นปัญหาผ่อนปรนจะถูกนำไปหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และนำตัวแปรมุมป้านควบคู่กลับมาพิจารณาอีกครั้ง เพื่อรับประกันผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ซึ่งวิธีการนี้จะต้องเพิ่มการคำนวณ นั่นคือคำนวณมุมระหว่างเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่เพื่อเลือกตัวแปรที่จะผ่อนปรน

จากปัญหาข้างต้นพบว่า ถ้าเราสามารถเลือกตัวแปรที่ต้องการผ่อนปรนได้โดยไม่ต้องมีการคำนวณเพิ่มจะสามารถลดการคำนวณในการหาผลเฉลยได้ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอขั้นตอนวิธีในการเลือกตัวแปรผ่อนปรน โดยพิจารณาจากสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์โดยตรง ตัวแปรที่เพิ่มขึ้นจากการทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จะมีสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเดิม ถ้าสัมประสิทธิ์เดิมมีเครื่องหมายเป็นบวกจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใหม่เป็นลบ แต่ถ้าสัมประสิทธิ์เดิมมีเครื่องหมายเป็นลบจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใหม่เป็นบวก ดังนั้นสำหรับปัญหาการหาค่าสูงที่สุด ตัวแปรที่ควรจะเพิ่มค่าคือตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นบวก ดังนั้นตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบจะถูกผ่อนปรน หลังจากนั้นปัญหาผ่อนปรนจะถูกนำไปหาผลเฉลยด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ และเพื่อรับประกันผลเฉลยที่เหมาะที่สุด หรือการไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ หรือปัญหาไม่มีขอบเขต ตัวแปรผ่อนปรนจะถูกนำกลับมาพิจารณาอีกครั้ง โดยในงานวิจัยนี้ได้แบ่งการนำเสนอออกเป็นดังนี้ ในหัวข้อที่ 2 จะกล่าวถึงขอบเขตของปัญหาและแนวคิดของงานวิจัย ในหัวข้อที่ 3 ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีนี้อย่างเป็นขั้นตอน ในหัวข้อที่ 4 ได้นำเสนอตัวอย่างการทำงานของขั้นตอนวิธี และในหัวข้อสุดท้ายได้สรุปผลการวิจัย

2. แนวคิดหลักของงานวิจัย

2.1 ปัญหาตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย

ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ปัญหาที่มีตัวแปรตัดสินใจไม่จำกัดเครื่องหมายจะถูกเขียนในรูปของสองตัวแปรที่ไม่เป็นลบ ซึ่งส่งผลให้จำนวนของตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมายเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า ในบางปัญหาเราสามารถแก้ปัญหานี้ได้โดยการพิจารณาปัญหาควบคู่แทน เนื่องจากในปัญหาควบคู่ตัวแปรควบคู่จะมีค่าไม่เป็นลบ แต่ในบางกรณีตัวแปรตัดสินใจของปัญหาควบคู่ก็ยังคงเป็นตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมาย ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้สนใจการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในรูปแบบต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \quad\vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนของตัวแปรตัดสินใจ

m เป็นจำนวนของเงื่อนไขบังคับ

$x_1,\ldots,x_n$ เป็นตัวแปรตัดสินใจ

$c_1,\ldots,c_n$ เป็นสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

$a_{i1},\ldots,a_{in}$ เป็นสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับที่ i สำหรับ $i = 1,\ldots,m$

และ $b_1,\ldots,b_m$ เป็นค่าทางด้านขวามือ

นั่นคือตัวแปรตัดสินใจไม่จำกัดเครื่องหมาย ซึ่งปัญหา (1) สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์และเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array} \tag{2}$$

เมื่อ $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ เป็นเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$\mathbf{x}$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรตัดสินใจ

และ $\mathbf{b}$ เป็นเวกเตอร์ทางด้านขวามือ

สำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (2) ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์จะต้องเขียนปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน นั่นคือตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย x_i ใดๆ จะถูกเขียนให้อยู่ใน

รูป $x_i = x_i^+ - x_i^-$ เมื่อ $x_i^+, x_i^- \geq 0$ ดังนั้นปัญหากำหนดการเชิงเส้น (2) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^- \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{A}\mathbf{x}^+ - \mathrm{A}\mathbf{x}^- = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}^+, \quad \mathbf{x}^- \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3}$$

ในปัญหา (3) พบว่าจำนวนตัวแปรตัดสินใจที่ไม่จำกัดเครื่องหมายเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า และจะสังเกตได้ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจจะต่างกันเพียงเครื่องหมายบวกหรือลบเท่านั้น ซึ่งในแต่ละการทำซ้ำของวิธีซิมเพล็กซ์ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งคู่ก็ยังคงมีเครื่องหมายที่ตรงข้ามกัน ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงพิจารณาเพื่อเลือกตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งมาหาผลเฉลยก่อน และผ่อนปรนตัวแปรอีกตัว และแก้ปัญหานั้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ โดยจะพิจารณาการเลือกตัวแปรจากสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

2.2 ปัญหาผ่อนปรนตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบสำหรับปัญหาตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย

พิจารณาพจน์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ของตัวแปร x_i เมื่อ x_i ไม่จำกัดเครื่องหมาย นั่นคือ $c_i x_i$ พบว่าพจน์ใหม่หลังการเขียนในรูปแบบมาตรฐานเป็นดังนี้

$$c_i x_i = c_i x_i^+ - c_i x_i^- \tag{4}$$

และสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับจะถูกเขียนได้ในรูป

$$\mathbf{a}_{:i} x_i = \mathbf{a}_{:i} x_i^+ - \mathbf{a}_{:i} x_i^- \tag{5}$$

เมื่อ $\mathbf{a}_{:i}$ คือสัมประสิทธิ์หลักที่ i ของเมทริกซ์ A ซึ่งพบว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่เพิ่มมาจะมีเครื่องหมายตรงข้ามกับสัมประสิทธิ์เดิม ดังนั้นเพื่อลดการคำนวณในการหาผลเฉลยเราควรผ่อนปรนตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง และหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรนนั้น หลังจากนั้นพิจารณาว่าผลเฉลยนั้นเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้นหรือไม่

สำหรับปัญหาการหาค่าสูงที่สุด ตัวแปรที่ควรจะเพิ่มค่าคือตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ที่เป็นบวก และตัวแปรที่ไม่ควรเพิ่มค่าคือตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบ ดังนั้นเราจะเลือกผ่อนปรนตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบ โดยพิจารณาดังนี้

- ถ้า $c_i \geq 0$ เราจะเก็บตัวแปร x_i^+ ไว้พิจารณาหาผลเฉลย และจะผ่อนปรนตัวแปร x_i^-
- ถ้า $c_i < 0$ เราจะเก็บตัวแปร x_i^- ไว้พิจารณาหาผลเฉลย และจะผ่อนปรนตัวแปร x_i^+

ซึ่งการพิจารณาผ่อนปรนตัวแปรด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์จะลดการคำนวณในการเลือกตัวแปรผ่อนปรนได้ ซึ่งเราเรียกปัญหานี้ว่า **ปัญหาผ่อนปรนตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบสำหรับปัญหาตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย** ซึ่งสามารถเขียนปัญหาผ่อนปรนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{c}_+^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_+ \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{A}_+\mathbf{x}_+ = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_+ \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7}$$

เมื่อ $\mathbf{c}_+^{\mathrm{T}}$ เป็นเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่มีค่าเป็นบวก เวกเตอร์ $\mathbf{x}_+$ และ เมทริกซ์ A_+ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรตัดสินใจและเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่สอดคล้องกับเวกเตอร์ $\mathbf{c}_+^{\mathrm{T}}$ ตามลำดับ และกำหนดให้ $\mathbf{c}_-^{\mathrm{T}}$ เป็นเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่มีค่าเป็นลบ เวกเตอร์ $\mathbf{x}_-$ และ เมทริกซ์ A_- เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรตัดสินใจและเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่สอดคล้องกับเวกเตอร์ $\mathbf{c}_-^{\mathrm{T}}$ ตามลำดับ

เนื่องจากปัญหาผ่อนปรนมีจำนวนตัวแปรที่น้อยกว่าปัญหากำหนดการเชิงเส้นเดิม ถ้าเราพบผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรน และผลเฉลยนั้นเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น เราจะสามารถลดการคำนวณในแต่ละการทำซ้ำของวิธีซิมเพล็กซ์ได้ อย่างไรก็ตามผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรนอาจจะไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้นเดิม ดังนั้นเราสามารถตรวจสอบผลเฉลยและดำเนินการหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดต่อได้โดยการพิจารณาค่า reduced cost ของตัวแปร $\mathbf{x}_+$ ในตารางที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรนได้ เนื่องจากค่า reduced cost ของตัวแปร $\mathbf{x}_-$ จะมีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับค่า reduced cost ของตัวแปร $\mathbf{x}_+$ ดังนั้นถ้าค่า reduced cost ของตัวแปร $\mathbf{x}_+$ เป็นศูนย์จะได้ว่าผลเฉลยชุดนี้จะเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น โดยเราสามารถกำหนดค่าของ $\mathbf{x}_-$ เป็นศูนย์ แต่ถ้ามีค่า reduced cost ของตัวแปร $\mathbf{x}_+$ บางตัว

มากกว่าศูนย์ จะได้ว่า ผลเฉลยชุดนี้ไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น เนื่องจากค่า reduced cost ของตัวแปร $\mathbf{x}_-$ บางตัวมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้นเราสามารถเพิ่มค่าของตัวแปร $\mathbf{x}_-$ นั้นได้ และดำเนินการหาผลเฉลยต่อไปได้โดยการนำสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของตัวแปร $\mathbf{x}_-$ ที่มีเครื่องหมายตรงข้ามกับสัมประสิทธิ์ของตัวแปร $\mathbf{x}_+$ กลับเข้ามาพิจารณาในตารางที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรน ซึ่งเราสามารถสรุปขั้นตอนวิธีในการหาผลเฉลยได้ดังต่อไปนี้

3. ขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย

สำหรับขั้นตอนวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถทำได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สำหรับ $i = 1,\ldots,n$

ถ้า $c_i \geq 0$ ผ่อนปรนตัวแปร x_i^-

มิฉะนั้น ผ่อนปรนตัวแปร x_i^+

ขั้นตอนที่ 2 หาผลเฉลยของปัญหาผ่อนปรนด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

ขั้นตอนที่ 3

3.1 ถ้าปัญหาผ่อนปรนไม่มีขอบเขตแล้วปัญหา (2) ไม่มีขอบเขต จบการทำงาน

3.2 ถ้าปัญหาผ่อนปรนพบผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหรือไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ แล้วนำตัวแปรผ่อนปรนทั้งหมดกลับเข้ามาพิจารณาและหาผลเฉลยด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ จบการทำงาน

ในกรณีที่ปัญหาผ่อนปรนไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ เราจะได้ว่าตารางที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรนจะมีตัวแปรเทียมบางตัวมีค่าไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นเราจะนำสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของตัวแปร $\mathbf{x}_-$ ที่มีเครื่องหมายตรงข้ามกับสัมประสิทธิ์ของตัวแปร $\mathbf{x}_+$ กลับเข้ามาพิจารณาในตารางที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรน และหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดต่อไป

4. ตัวอย่างการทำงานของขั้นตอนวิธี

ในการทำงานของขั้นตอนวิธีจะพบว่าในแต่ละการทำซ้ำขั้นตอนวิธีที่นำเสนอจะทำงานกับเมทริกซ์ที่มีขนาดเล็กกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งจะส่งผลให้เวลาในการคำนวณเพื่อหาผลเฉลยจะลดลง เพื่อแสดงประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธี ในหัวข้อนี้จะแสดงการทำงานของขั้นตอนวิธีผ่านตัวอย่างปัญหากำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.1 พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & -2x_1 + 3x_2 = 6 \end{aligned} \tag{8}$$

ซึ่งตัวแปร x_1 และ x_2 ไม่จำกัดเครื่องหมาย การใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการแก้ปัญหา จะต้องเขียนตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมายได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & -x_1^+ + x_1^- + x_2^+ - x_2^- \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1^+ + 3x_1^- + 2x_2^+ - 2x_2^- = 6 \\ & -2x_1^+ + 2x_1^- + 3x_2^+ - 3x_2^- = 6 \\ & x_1^+, \quad x_1^-, \quad x_2^+, \quad x_2^- \geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

จาก (9) จะได้ว่าตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบคือ x_1^+ และ x_2^- ดังนั้นเราจะผ่อนปรนตัวแปร x_1^+ และ x_2^- และปัญหาผ่อนปรนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1^- + x_2^+ \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1^- + 2x_2^+ = 6 \\ & 2x_1^- + 3x_2^+ = 6 \\ & x_1^-, \quad x_2^+ \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

ซึ่งเราสามารถหาผลเฉลยของปัญหานี้ได้ด้วยวิธีบิ๊กเอ็ม (Big-M method) และตารางที่เหมาะที่สุดของวิธีบิ๊กเอ็มเป็นดังนี้

ตารางที่ 1 ตารางที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรน (10)

	z	x_1^-	x_2^+	x_{a_1}	x_{a_2}	RHS
	1	0	0	M-1/5	M-1/5	-12
x_1^-	0	1	0	1	1	6/5
x_2^+	0	0	1	1	1	6/5

เมื่อ x_{a_1} และ x_{a_2} เป็นตัวแปรเทียม ด้วยการทำซ้ำ 2 ครั้ง และพบผลเฉลยที่เหมาะที่สุด คือ $(x_1^-, x_2^+) = (6/5, 6/5)$ และจากตารางที่ 1 จะได้ว่าค่า reduced cost ของตัวแปร x_1^- และ x_2^+ มีค่าเป็น 0 ดังนั้น

ค่า reduced cost ของตัวแปร x_1^+ และ x_2^- จะเป็นศูนย์เช่นกัน ดังนั้นกำหนด $(x_1^+, x_2^-) = (0,0)$ นั่นคือ $(x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-) = (0, 6/5, 6/5, 0)$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา (9) และ $(x_1, x_2) = (-6/5, 6/5)$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา (8) และพบว่าจำนวนการทำซ้ำของขั้นตอนวิธีนี้เท่ากับจำนวนการทำซ้ำด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งขั้นตอนวิธีนี้มีการดำเนินการบนเมทริกซ์ที่มีขนาดเล็กกว่าวิธีซิมเพล็กซ์

จากตัวอย่างที่ 4.1 ขั้นตอนวิธีที่นำเสนอนี้สามารถลดขนาดของเมทริกซ์ในการหาผลเฉลยได้ โดยผลเฉลยที่ได้ยังเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหาเดิม ในกรณีที่ปัญหาผ่อนปรนไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ เราสามารถดำเนินการเพื่อหาผลเฉลยได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.2 พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 = 2 \end{aligned} \tag{11}$$

ซึ่งตัวแปร x_1 และ x_2 ไม่จำกัดเครื่องหมาย เราสามารถเขียนปัญหาในรูปแบบมาตรฐาน และเลือกผ่อนปรนตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบได้ดังปัญหาต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1^+ + x_2^- \\ \text{s.t.} \quad & x_1^+ - x_2^- = 2 \\ & -x_1^+ - 2x_2^- = 2 \\ & x_1^+,\ x_2^- \ge 0 \end{aligned} \tag{12}$$

ซึ่งเราสามารถหาผลเฉลยของปัญหานี้ได้ด้วยวิธีบิ๊กเอ็ม (Big-M method) และตารางที่เหมาะที่สุดของวิธีบิ๊กเอ็มเป็นดังนี้

ตารางที่ 2 ตารางที่เหมาะที่สุดของปัญหาผ่อนปรน (12)

	z	x_1^+	x_2^-	x_{a_1}	x_{a_2}	RHS
	1	0	$3M$ -3	2	0	$-4M+4$
x_1^+	0	1	-1	1	0	2
x_{a_2}	0	0	-3	1	1	4

เมื่อ x_{a_1} และ x_{a_2} เป็นตัวแปรเทียม ด้วยดำเนินการทำซ้ำ 1 ครั้งพบว่าปัญหาผ่อนปรนไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ ดังนั้นเราจะนำตัวแปรที่ถูกผ่อนปรนกลับเข้ามาพิจารณาดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3 นำตัวแปรผ่อนปรนกลับมาพิจารณา

	z	x_1^+	x_2^-	x_{a_1}	x_{a_2}	x_1^-	x_2^+	RHS
	1	0	$3M$ -3	2	0	0	$-3M$ +3	$-4M$+4
x_1^+	0	1	-1	1	0	-1	1	2
x_{a_2}	0	0	-3	1	1	0	3	4

หลังจากการดำเนินการทำซ้ำอีก 1 ครั้ง พบผลเฉลยที่เหมาะที่สุดคือ $(x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-) = (2/3, 0, 0, 4/3)$ และได้ว่า $(x_1, x_2) = (2/3, -4/3)$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา (11) เมื่อแก้ปัญหานี้ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์พบว่าจำนวนการทำซ้ำของขั้นตอนวิธีนี้เท่ากับจำนวนการทำซ้ำด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งขั้นตอนวิธีนี้มีการดำเนินการบนเมทริกซ์ที่มีขนาดเล็กกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ในการกระทำซ้ำครั้งที่ 1

นอกจากรูปแบบปัญหา (1) เรายังสามารถใช้ขั้นตอนวิธีกับรูปแบบปัญหาใดๆ ของปัญหาที่มีตัวแปรตัดสินใจไม่จำกัดเครื่องหมาย พร้อมทั้งแก้ปัญหาไม่มีขอบเขตได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.3 พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & -x_1 - x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \end{aligned} \tag{13}$$

ซึ่งตัวแปร x_1 x_2 และ x_3 ไม่จำกัดเครื่องหมาย จากการพิจารณาสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ เราสามารถเขียนปัญหาผ่อนปรนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1^- + x_2^- + 4x_3^+ \\ \text{s.t.} \quad & x_1^- - x_2^- + 2x_3^+ \le 9 \\ & -x_1^- - x_2^- - x_3^+ \le 2 \\ & x_1^- - x_2^- + x_3^+ \le 4 \\ & x_1^-,\ x_2^-,\ x_3^+ \ge 0 \end{aligned} \tag{14}$$

หลังจากการแก้ปัญหาผ่อนปรนด้วยวิธีซิมเพล็กซ์พบว่าปัญหานี้ไม่มีขอบเขต ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าปัญหา (13) ไม่มีขอบเขต ซึ่งขั้นตอนวิธีนี้ใช้การทำซ้ำ 2 ครั้ง และวิธีซิมเพล็กซ์ใช้การทำซ้ำ 2 ครั้งจึงพบว่าผลเฉลยไม่มีขอบเขต โดยจำนวนการทำซ้ำของขั้นตอนวิธีนี้เท่ากับจำนวนการทำซ้ำ

ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ แต่ในแต่ละการทำซ้ำของขั้นตอนวิธีที่นำเสนอจะดำเนินการกับเมทริกซ์ที่มีขนาดเล็กกว่าการทำงานของขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งเราสามารถลดการทำงานในแต่ละการทำซ้ำได้

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าขั้นตอนวิธีที่นำเสนอสามารถลดการทำงานในแต่ละการทำซ้ำได้ ในงานวิจัยนี้จะนำขั้นตอนวิธีไปใช้กับงานวิจัยของ Aua-aree Boonperm และ Krung Sinapiromsaran [21] ซึ่งเป็นงานวิจัยที่ใช้แก้ปัญหาที่มีตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย โดยจะนำตัวอย่างที่ 1 ในงานวิจัย [21] มาแสดงการทำงานของขั้นตอนวิธี ซึ่งตัวอย่างที่ 1 ต้องการหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 - x_2 \le -4 \\
& -3x_1 - 3x_2 \le -9 \\
& -x_1 - 2x_2 \le -4 \\
& -3x_1 + x_2 \le 6 \\
& x_1 - 3x_2 \le 6 \\
& 2x_1 - 3x_2 \le 12 \\
& 3x_1 + 5x_2 \le 30 \\
& x_2 \le 5 \\
& -x_1 - x_2 \le -2 \\
& -4x_1 - x_2 \le -4
\end{aligned}
\tag{15}
$$

สำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นข้างต้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ จะต้องเพิ่มตัวแปรช่วย (slack variable) จำนวน 5 ตัวแปร ตัวแปรเกิน (surplus variable) จำนวน 5 ตัวแปร ตัวแปรเทียม (artificial variable) จำนวน 5 ตัวแปร และยังต้องเพิ่มตัวแปรที่มาจากตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมายอีก 2 ตัวแปร ซึ่งจะทำให้ปัญหามีขนาดที่ใหญ่ขึ้น ในงานวิจัย [21] ได้นำเสนอการทำงานโดยไม่ใช้ตัวแปรเทียม และลดขนาดปัญหาลงเหลือการแก้ปัญหาดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 5x_2 \le 30 \\
& x_2 \le 5
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ซึ่งเขียนตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมายได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_1^+ - x_1^- + 2x_2^+ - 2x_2^- \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1^+ - 3x_1^- + 5x_2^+ - 5x_2^- \le 30 \\
& x_2^+ - x_2^- \le 5 \\
& x_1^+,\ x_1^-,\ x_2^+,\ x_2^- \ge 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

จาก (17) จะได้ว่าตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบคือ x_1^- และ x_2^- ดังนั้นเราจะผ่อนปรนตัวแปร x_1^- และ x_2^- และปัญหาผ่อนปรนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_1^+ + 2x_2^+ \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1^+ + 5x_2^+ \le 30 \\
& x_2^+ \le 5 \\
& x_1^+,\ x_2^+ \ge 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

หลังจากแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กซ์พบว่าผลเฉลยของปัญหานี้ได้จากการทำซ้ำ 2 ครั้ง และผลเฉลยที่เหมาะที่สุด คือ $(x_1^+, x_2^+) = (5/3, 5)$ โดยค่า reduced cost ของตัวแปร x_1^+ และ x_2^+ มีค่าเป็น 0 ดังนั้นค่า reduced cost ของตัวแปร x_1^- และ x_2^- จะเป็นศูนย์เช่นกัน นั่นคือ $(x_1^-, x_2^-) = (0,0)$ และพบผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น ซึ่งมีจำนวนการทำซ้ำของขั้นตอนวิธีนี้เท่ากับจำนวนการทำซ้ำด้วยขั้นตอนวิธีในงานวิจัย [21] โดยที่จำนวนตัวแปรในการทำงานแต่ละการทำซ้ำน้อยกว่าในงานวิจัย [21]

จากตัวอย่างข้างต้นพบว่าเราสามารถลดขนาดของเมทริกซ์ในการทำซ้ำของขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ได้ ถ้าปัญหามีจำนวนตัวแปรที่มาก เราจะสามารถลดขนาดของเมทริกซ์ได้ครึ่งหนึ่งของจำนวนตัวแปรที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งถ้าสามารถลดขนาดของเมทริกซ์ได้ก็จะสามารถลดเวลาในการทำงานในแต่ละการทำซ้ำได้ และในการเลือกตัวแปรผ่อนปรนสามารถพิจารณาได้โดยตรงจากสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์โดยไม่ต้องคำนวณมุมในปัญหาควบคู่

5. สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีเพื่อลดการทำงานของขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์สำหรับปัญหาที่มีตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย ซึ่งวิธีซิมเพล็กซ์จะทำงานกับปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน โดยตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมายจะเขียนในรูปผลต่างของสองตัวแปรที่ไม่เป็นลบ ซึ่งส่งผลให้จำนวนของตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมายเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า ดังนั้นขั้นตอนวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ จะช่วยลดการทำงานได้ด้วยการผ่อนปรนตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง โดยการพิจารณาสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยตัวแปรที่ถูกผ่อนปรนคือตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบ ซึ่งการ

พิจารณาผ่อนปรนด้วยวิธีนี้สามารถทำได้ง่าย ไม่ยุ่งยากและลดการคำนวณเพื่อพิจารณาตัวแปรผ่อนปรนได้ หลังจากนั้นปัญหาผ่อนปรนจะถูกนำไปหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และเพื่อรับประกันผลเฉลยที่เหมาะที่สุด หรือการไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ หรือปัญหาไม่มีขอบเขต ตัวแปรผ่อนปรนจะถูกนำกลับมาพิจารณาอีกครั้ง และเราพบว่าขั้นตอนวิธีนี้สามารถใช้ลดการคำนวณของขั้นตอนวิธีซิมเพล็กซ์ได้ อย่างไรก็ตามในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีด้วยตัวอย่าง ซึ่งยังขาดการทดสอบกับปัญหาที่หลากหลาย ซึ่งเราจะศึกษาและทำการทดสอบต่อไป

6. เอกสารอ้างอิง

[1] D.B. George., *Linear programming and extensions*. New Jersey: *Princeton University Press,* 1963.

[2] K. Victor and M.J. George, "How good is the simplex algorithm? in inequalities," *New York: Academic Press*., pp. 159-175, 1972.

[3] K.K. Narendra, "A new polynomial-time algorithm for linear programming," *Combinatorica*., Vol. 4, pp. 373–395, 1984.

[4] M. Roy, S. Radhika, S. Matthew, L. Irvin and S. David, "Interior point methods for linear programming: Just call Newton," *Lagrange, and Fiacco and McCormick!, Interfaces*., Vol. 20, pp. 105–116, 1990.

[5] G. Donald and S. Katya, "A product-form Cholesky factorization method for handling dense columns in interior point methods for linear programming," *Mathematical Programming*., Vol. 99, pp. 1-34, 2004.

[6] M. Csaba, "Detecting "dense" columns in interior point methods for linear programs," *Computational Optimization and Applications*. Vol. 36, pp. 309–320, 2007.

[7] P. Ping-Qi, "Practical finite pivoting rules for the simplex method," *OR Spektrum*., Vol. 12, pp. 219-225, 1990.

[8] S.V. Nebojša and S.S. Predrag, "Two direct methods in linear programming," *European Journal of Operational Research*., Vol. 131, pp. 417-439, 2001.

[9] L. Wei, "A note on two direct methods in linear programming," *European Journal of Operational Research*., Vol. 158, pp. 262-265, 2004.

[10] Y. Wei-Chang and C. Herbert, "A simple direct cosine simplex algorithm," *Applied Mathematics and Computation*., Vol. 214, pp. 178-186, 2009.

[11] J. Helcio Vieira J.* and L. Marcos Pereira Estellita, "An improved initial basis for the simplex algorithm," *Computers & Operations Research*., Vol. 32, pp. 1983-1993, 2005.

[12] H. Jian-Feng, "A note on "an improved initial basis for the simplex algorithm"," *Computers & Operations Research*., Vol. 34, pp. 3397-3401, 2007.

[13] Z. Stanley, "The criss-cross method for solving linear programming problems," *Management Science*., Vol. 15, pp. 426-445, 1969.

[14] A. Hossein, "An artificial-free simplex-type algorithm for general LP models," *Mathematical and Computer Modelling*., Vol. 25, pp. 107-123, 1997.

[15] A. Hossein, "Initialization of the simplex algorithm: an artificial-free approach," *SIAM Review*., Vol. 39, pp. 736-744, 1997.

[16] E. Andreas and H. Petra, "A counterexample to H. Arsham's "Initialization of the simplex algorithm: an artificial-free approach"," *SIAM Review*., Vol. 40, online, 1998.

[17] P. Ping-Qi, "Primal perturbation simplex algorithms for linear programming," *Journal of Computational Mathematics*., Vol. 18, pp. 587-596, 2000.

[18] A. Hossein, "Big-M free solution algorithm for general linear programs," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*., Vol. 32, pp. 37-52, 2006.

[19] A. Hossein, "A computationally stable solution algorithm for linear programs," *Applied Mathematics and Computation*., Vol. 188, pp. 1549-1561, 2007.

[20] C. Herbert, R. Jay, Y. Wei-Chang and S. Tai-Kuan, "The cosine simplex algorithm," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*., Vol. 27, pp. 1047-1050, 2006.

[21] B. Aua-aree and S. Krung, "Artificial-free simplex algorithm based on the non-acute constraint relaxation," *Applied Mathematics and Computation*., Vol. 234, pp. 385-401, 2014.

[22] B. Aua-aree and S. Krung, "The artificial-free technique along the objective direction for the simplex algorithm," *Journal of Physics: Conference Series*., online, pp. 1-4, 2014.

[23] S. Krung and N. Krisada, "A Novel algorithm for solving 2-dimensional linear programming," *The 2nd OR-CRN conference*, pp. 61-69, 2004.

[24] S. Krung and N. Krisada, "A minimal angled algorithm for solving a 2-dimensional linear programming problem," *Engineering journal Kasetsart*, vol. 18, no. 54-55, pp. 107-115, 2004-2005.

[25] B. Aua-aree and S. Krung, "Solve 3 dimensional Linear programming Problems by the Minimal Angled Projection Method," *The 11th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering*, pp. 393-398, 2007.

[26] B. Aua-aree and S. Krung, "Minimal Angled Method for 3-dimensional Linear Programming Problems," M.S. Thesis, Computational Science. Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand, 2007.

[27] เอื้ออารี บุญเพิ่ม. "การปรับปรุงวิธีซิมเพล็กซ์ด้วยการผ่อนปรนตัวแปรมุมป้านควบคู่สำหรับปัญหาตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมาย.", *Proceeding of Operations Research Network of Thailand 2017 (OR-NET 2017)*., pp. 204-210, 2017.