

โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

AN AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING FINITE ELEMENT PROGRAM USING LINEAR STRAIN TRIANGLE

ศ.ดร.ทักษิณ เทพชาตรี , ชัยณรงค์ เสียงไพพรพันธ์

Thaksin Thepchatri , Chainarong Siangpraiphan

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 02-218-6468

บทคัดย่อ

การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยที่ให้ความสำคัญคลาดเคลื่อนกระจายออกไปเท่าๆ กันตลอดทั้งโดเมนของปัญหา จะทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดเมื่อเทียบกับโครงข่ายที่มีระดับขั้นความละเอียดเท่ากัน แต่การที่จะให้ผลเฉลยเข้าใกล้ค่าที่ถูกต้อง จำเป็นต้องปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายให้มีความต่อเนื่องและมีขนาดชิ้นส่วนที่เหมาะสม ซึ่งต้องใช้เวลาและแรงงานจำนวนมาก ในการเตรียมข้อมูลเพื่อทำการวิเคราะห์แต่ละครั้ง ดังนั้น จึงได้มีการพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติขึ้น ปัจจุบันได้มีการนำเอาวิธีการปรับเรียบเชิงมุมมาใช้เพื่อปรับปรุงให้โครงข่ายมีรูปร่างและขนาดชิ้นส่วนที่ดีขึ้น ทว่าผลที่ได้ยังไม่เป็นที่น่าพอใจ เนื่องจากชนิดของชิ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์มีพฤติกรรมที่ไม่ยืดหยุ่น ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้ทำการปรับปรุงคุณสมบัติของชิ้นส่วนให้มีพฤติกรรมยืดหยุ่นมากขึ้น โดยเปลี่ยนจากชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น จากปัญหาดังกล่าวที่ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบ พบว่าจำนวนระดับขั้นความละเอียดสามารถลดลงได้ประมาณ 3 - 30 เท่า โดยที่มีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ใกล้เคียงกัน ในขณะที่เวลาในการคำนวณน้อยลงได้ประมาณ 3 - 300 เท่า ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่า โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่นำเสนอสามารถคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาในระนาบได้อย่างมีประสิทธิภาพและรวดเร็ว โดยลดเวลาที่ใช้ในการเตรียมข้อมูลและการคำนวณได้เป็นอย่างมาก

Abstract

Given the same number of degrees of freedom (DOF) for a problem, an analysis employing the finite element method gives the best solution when errors are uniformly distributed over the whole domain. To obtain better solutions with minimum effort of data preparation and less computation time, an automatic adaptive remeshing technique is being developed. To date, a mesh improvement procedure, angle – based smoothing technique has already been

incorporated into a finite element analysis program. Numerical analysis with benchmark plane stress problems utilizing such approach showed satisfactory results. However, due to the use of the constant strain triangular element (CST), the computation time required is still ineffective. In this research, a better element type, the linear strain triangular element (LST) is used. It has been found that, from the selected examples having the same constraints, the LST approach can reduce the total DOF by approximately 3-30 times. The calculation time, as a consequence, can be reduced by about 3-300 times. Thus, it has been shown that the proposed finite element program can quickly and effectively solve a plane problem with a minimum effort of data preparation and computation time.

1. บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการวิเคราะห์ปัญหาที่นิยมใช้กันมากในทางวิศวกรรม เพราะสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาต่างๆ ได้หลายประเภท รวมถึงปัญหาที่มีความสลับซับซ้อนมาก โดยความแม่นยำของผลเฉลยขึ้นอยู่กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ และขนาดของชิ้นส่วนที่ประกอบกันขึ้นเป็นโครงข่ายของปัญหานั้นๆ ยิ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของปัญหามากเท่าไร ความแม่นยำในการเป็นตัวแทนของชิ้นส่วนก็จะดีมากขึ้นเท่านั้น ในขณะที่การเพิ่มจำนวนชิ้นส่วน ซึ่งเป็นการลดขนาดของช่วงประมาณ จะช่วยลดค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยได้ในการวิเคราะห์ปัญหาหนึ่งๆ โดยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่กำหนดให้ การเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลยมักจะนิยมใช้วิธีการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วน ได้แก่การใช้ชิ้นส่วนขนาดเล็กในพื้นที่ที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูง และใช้ชิ้นส่วนขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยน้อย ซึ่งการที่จะสร้างชิ้นส่วนให้ได้ลักษณะดังกล่าวนี้ จำเป็นต้องมีการเตรียมข้อมูลและการคำนวณหลายรอบ จนกว่าผลเฉลยจะเข้าสู่ค่าที่เชื่อถือได้ ดังนั้นกระบวนการสร้างและปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติจึงเข้ามามีบทบาทในการวิเคราะห์ปัญหาด้วย

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยมีเป้าหมายเพื่อลดปริมาณการเตรียมข้อมูลให้น้อยที่สุด แต่ให้ผลลัพธ์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนอยู่ในเกณฑ์ที่ต้องการอย่างรวดเร็ว ในบทความนี้ได้นำเสนอโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะวิเคราะห์ปัญหาในระนาบแบบรวดเร็ว และความแม่นยำของผลเฉลยมีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์อยู่ในเกณฑ์กำหนด โดยจะพัฒนาจากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ [1-2] โดยจะพัฒนาให้มีประสิทธิภาพในขั้นตอนการวิเคราะห์หาค่าขึ้น โดยเอาชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น มาใช้แทนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ ส่วนการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมจะใช้วิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอน (Delaunay Triangulation) ร่วมกับวิธีการปรับเรียบเชิงมุม (angle-based smoothing) เพื่อช่วยปรับปรุงให้โครงข่ายมีรูปร่างและขนาดของชิ้นส่วนที่ดีขึ้น

2. ทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย

2.1 การสร้างโครงข่ายชิ้นส่วน

ในงานวิจัยนี้เลือกใช้การสร้างโครงข่ายชิ้นส่วนด้วยวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอน (Delaunay Triangulation)[3] ซึ่งเป็นการเชื่อมโยงจุดต่างๆเป็นโครงข่ายสามเหลี่ยมรูปร่างดีที่ไม่มีการซ้อนทับกัน โดยมีหลักการในการเลือกจุดที่ใช้เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมจะต้องเป็นจุดที่สร้างวงกลมผ่านจุดยอดทั้งสามได้โดยไม่มีจุดใดอยู่ภายใน ซึ่งในการสร้างโครงข่ายชิ้นส่วนทำได้ โดยการกำหนดฐานของสามเหลี่ยมจากเส้นขอบของปัญหา แล้วเลือกจุดที่ห้วงกลมที่มีรัศมีเล็กที่สุดจากจุดทั้งหมดโดยรอบเป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ก็จะได้อสามเหลี่ยมหนึ่งรูปและเส้นฐานสำหรับสร้างสามเหลี่ยมเพิ่มขึ้นอีกสองเส้น จากนั้นเลือกจุดในลักษณะเดิมกับเส้นฐานใหม่จนกระทั่งสามารถสร้างสามเหลี่ยมได้เต็มพื้นที่ที่ต้องการ

สำหรับการเพิ่มจุดที่ใช้ในการสร้างสามเหลี่ยมด้วยวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอน จะเลือกการสร้างจุดตามแนวทางของ Weatherill และคณะ [4] ซึ่งกำหนดให้มีการเพิ่มจุดที่กึ่งกลางของสามเหลี่ยมที่มีอยู่แล้ว โดยจุดที่เพิ่มเข้าไปต้องมีระยะห่างจากจุดข้างเคียงไม่น้อยกว่าระยะที่กำหนดซึ่งสามารถนำขนาดของชิ้นส่วนที่คำนวณได้ มาเป็นตัวกำหนด ก็จะได้อโครงข่ายชิ้นส่วนที่ขนาดของชิ้นส่วนสอดคล้องกับความคลาดเคลื่อนของปัญหามาต้องการ

2.2 การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายชิ้นส่วน

เป้าหมายหลักของการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายชิ้นส่วนคือการพยายามทำให้ชิ้นส่วนที่พิจารณา มีด้านทุกด้านเท่ากันให้ได้มากที่สุดและมีความต่อเนื่องกันทั่วทั้งโครงข่าย วิธีการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ประกอบด้วยการจัดระเบียบชิ้นส่วนใหม่ซึ่งเป็นการปรับปรุงด้านคุณภาพรูปร่างของชิ้นส่วน (shape improvement) โดยใช้วิธีที่เรียกว่าการผ่อนปรนโครงข่าย (mesh relaxation)[5] ซึ่งจะเป็นการปรับ

รูปร่างรูปร่างชิ้นส่วนด้วยการสลับขอบของชิ้นส่วนที่ติดกัน โดยให้ความสำคัญกับขอบของชิ้นส่วนแต่ละอันแตกต่างกันไปตามเงื่อนไขที่กำหนด แล้วทำซ้ำไปเรื่อยๆ จากขอบของชิ้นส่วนที่วิกฤตมากสลับกับการปรับเรียบซึ่งเป็นการปรับตำแหน่งจุดต่อด้วยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม (angle-based smoothing)[6] โดยจะพยายามปรับขนาดมุมที่อยู่บนจุดยอดสามเหลี่ยมด้านที่ติดกันให้มีขนาดเท่ากัน ทำให้สามารถควบคุมมุมที่มีขนาดใกล้เคียงศูนย์ หรือ 180 องศาให้มีจำนวนลดลงได้ ส่งผลให้ชิ้นส่วนมีรูปร่างดีและมีความต่อเนื่องเพิ่มมากขึ้น การวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อนของปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงมีความถูกต้องมากขึ้นด้วย

2.3 ความคลาดเคลื่อน

ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรงได้แก่ผลต่างระหว่างค่าหน่วยแรงที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับค่าผลเฉลยแม่นยำตรง ดังแสดงในสมการ (2.3.1)

$$e_{\sigma}^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (2.3.1)$$

โดยที่ e_{σ}^* คือ ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง, σ^* คือ ค่าหน่วยแรงแม่นยำตรง, σ_h คือ ค่าหน่วยแรงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แต่เนื่องจากในกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วน ค่าหน่วยแรงแม่นยำตรงของปัญหายังไม่ทราบล่วงหน้า จึงยังไม่สามารถหาความคลาดเคลื่อนตามสมการ (2.3.1) ได้โดยตรง ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะใช้ค่าหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์รอบจุดต่อนั้น ซึ่งถือว่าเป็นค่าที่มีความถูกต้องกว่าตำแหน่งอื่นๆ ร่วมกับวิธีการฟื้นตัวเป็นหย่อม (patch recovery) [7-12] ในการประมาณค่าหน่วยแรง ณ จุดต่อต่างๆในโครงข่ายให้มีความแม่นยำขึ้น จากนั้นจะทำการประมาณค่าหน่วยแรงที่แม่นยำกว่า (σ^*) โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

ให้หน่วยแรงที่แม่นยำกว่า (σ^*) เป็นหน่วยแรงที่ได้จากการประมาณค่าจากตำแหน่งเกาส์ซึ่งอยู่ในรูปของพหุนามดังสมการ (2.3.2)

$$\sigma^* = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + \dots \quad (2.3.2 \text{ a.})$$

$$\sigma^* = [p]\{a\} \quad (2.3.2 \text{ b.})$$

โดยที่ $[p]$ คือ ฟังก์ชันฐาน (base function) อยู่ในรูปตัวแปรของพหุนาม $[1 \ x \ y \ xy \ x^2 \dots]$, $\{a\}$ คือ ค่าคงตัวของพหุนามที่ต้องการคำนวณหา $\{a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \dots\}$

หลักการของวิธีกำลังสองน้อยสุดคือการหาค่าคงตัว $\{a\}$ เพื่อให้หน่วยแรงโดยประมาณมีความแตกต่างจากจุดที่ประมาณมาน้อยที่สุด หรืออีกนัยหนึ่งก็คือเศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่าง

หน่วยแรงโดยประมาณและหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์ $R(a)$ มีค่าน้อยสุด ซึ่งสามารถแสดงได้ดังในสมการ (2.3.3)

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - [p(x_i, y_i)]\{a\})^2 \quad (2.3.3)$$

โดยที่ x_i, y_i คือ ค่าพิกัดที่จุดเกาส์, n คือ จำนวนจุดเกาส์รอบจุดต่อ ในการหาค่าคงตัว $\{a\}$ เพื่อให้ได้เศษตกค้างต่ำสุด ทำได้โดยกำหนดค่าอนุพันธ์ของเศษตกค้างให้เท่ากับศูนย์ โดยหาอนุพันธ์เทียบกับค่าคงตัวแต่ละตัว จะได้สมการซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนของค่าคงตัวดังนี้

$$\sum_{i=1}^n [p(x_i, y_i)]^T [p(x_i, y_i)]\{a\} = \sum_{i=1}^n \sigma_h(x_i, y_i) [p(x_i, y_i)]^T \quad (2.3.4)$$

เนื่องจากในงานวิจัยนี้ชิ้นส่วนที่ใช้เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมความเครียดเชิงเส้น ดังนั้นจึงเลือกใช้ฟังก์ชันพื้นฐานเป็นพหุนามกำลังสอง โดยเลือกใช้ $p = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2]$

หลังจากได้ค่าหน่วยแรงที่แม่นยำกว่าที่จุดต่อทุกจุดแล้ว จะทำการประมาณค่าหน่วยแรงที่ตำแหน่งใดๆ ในชิ้นส่วนด้วยฟังก์ชันพื้นฐาน (shape function) เช่นเดียวกับที่ใช้ในการหาค่าการกระจัดในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (2.3.5)

$$\{\sigma^*(x, y)\} = [N(x, y)]\{\sigma_n^*\} \quad (2.3.5)$$

โดยที่ σ_n^* คือ หน่วยแรงที่แม่นยำกว่าตำแหน่งจุดต่อ, σ^* คือ หน่วยแรงที่แม่นยำกว่าที่ตำแหน่งใดๆ, N คือ ฟังก์ชันพื้นฐานในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากนั้นสามารถคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนของหน่วยแรงในแต่ละชิ้นส่วนได้ แต่เนื่องจากหน่วยแรงที่ได้มีลักษณะเป็นเวกเตอร์ซึ่งไม่สะดวกในการใช้งาน ในงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้นอร์มชนิดแอลทูนอร์ม (L_2 norm) ในการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนต่างๆ ดังแสดงในชุดสมการ (2.3.6)

$$\begin{aligned} \|e^*\|_{2l} &= \left(\int_{\Omega} (N\sigma_n^* - \sigma_h)^T (N\sigma_n^* - \sigma_h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|e^*\|_{2g} &= \left(\sum_{i=1}^{Ne} \|e^*\|_{2l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|U^*\|_{2l} &= \left(\int_{\Omega} (N\sigma_n^*)^T (N\sigma_n^*) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|U^*\|_{2g} &= \left(\sum_{i=1}^{Ne} \|U^*\|_{2l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \eta_g^* &= \frac{\|e^*\|_{2g}}{\|U^*\|_{2g}} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

โดยที่ $\|U^*\|_{2l}$ คือ แอลทูนอร์มของความเค้นเฉพาะที่ในชิ้นส่วน, $\|e^*\|_{2l}$ คือ แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ในชิ้นส่วน, $\|U^*\|_{2g}$ คือ แอลทูนอร์มของความเค้นรวม, $\|e^*\|_{2g}$ คือ แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อนรวม, Ne คือ จำนวนชิ้นส่วนในระบบ, η_g^* คือ ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม, Ω คือ โดเมนของความคลาดเคลื่อนหรือหน่วยแรงที่พิจารณา

2.4 การประมาณขนาดของชิ้นส่วน

เนื่องจากความคลาดเคลื่อนแปรตามขนาดของชิ้นส่วนยกกำลังด้วยกำลังของพหุนามในฟังก์ชันฐาน ดังนั้นจึงสามารถคำนวณหาขนาดของชิ้นส่วนที่มีความคลาดเคลื่อนเท่ากับความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้จากขนาดของชิ้นส่วนและความคลาดเคลื่อนในปัจจุบัน ได้ดังแสดงในสมการ (2.4.1)

$$h_{new} = h_{exist} \cdot \left(\frac{\|e\|_a}{\|e\|_{exist}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.4.1)$$

โดยที่ p คือ ระดับขั้นของพหุนามในฟังก์ชันฐานคือ 2, h_{new} คือ ขนาดของชิ้นส่วนที่จะสร้างชิ้นใหม่, h_{exist} คือ ขนาดของชิ้นส่วนในปัจจุบัน, $\|e\|_a$ คือ ความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้, $\|e\|_{exist}$ คือ ความคลาดเคลื่อนในปัจจุบัน ($\|e^*\|_{2l}$)

จากข้อเท็จจริงที่ว่าจุดที่มีความคลาดเคลื่อนรวมมีตำแหน่งเหมาะสมสุด (optimal) เป็นจุดที่มีความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่มีขนาดเท่ากันในทุกๆ บริเวณ ดังนั้นในการหาความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชิ้นส่วนเพื่อใช้ในสมการ (2.4.1) จึงได้จากการเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้รวม ดังแสดงในสมการ (2.4.2)

$$\|e\|_a = \eta_a \frac{\|U^*\|_{2g}}{\sqrt{Ne}} \quad (2.4.2)$$

โดยที่ $\|e\|_a$ คือ ความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชิ้นส่วน, η_a คือ ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ของโครงข่าย

เมื่อกำหนดหาขนาดของชิ้นส่วนที่จะสร้างชิ้นใหม่ได้แล้วก็จะทำการเพิ่มจุดต่อและสร้างโครงข่ายชิ้นส่วนใหม่ต่อไป จากนั้นก็จะทำการวิเคราะห์ซ้ำในกระบวนการเดิมดังที่กล่าวมาแล้วจนกระทั่งความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม (η_g^*) น้อยกว่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ของโครงข่าย (η_a) โปรแกรมจึงหยุดทำงาน

3. ตัวอย่างการคำนวณเชิงเลข

ในงานวิจัยนี้เลือกใช้ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำ, แบบสมมาตร เป็นปัญหาที่ใช้ทดสอบประสิทธิภาพที่ดีขึ้นของงานวิจัยนี้ จากงานวิจัยเดิม ซึ่งเป็นปัญหาที่ไม่สามารถหาค่าผลเฉลยแม่นยำได้และ

