

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัวภายใต้สัญญาณรบกวนที่มีขอบเขต

Controller Design for One-link Flexible Robot Arm under Bounded Disturbance

ชลธิ์ ขรขันธ์ และ เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย

Chonlatee Khorakhan and David Banjerdpongchai

ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

254 ถนนพญาไท ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330 โทร. 0-2218-6487 โทรสาร 0-2251-8991

Email: b david@chula.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมสำหรับแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว เพื่อกำจัดผลกระทบเนื่องจากสัญญาณรบกวนที่มีขอบเขต การออกแบบตัวควบคุมมีรูปแบบเป็นปัญหาการควบคุม l_1 แบบเหมาะที่สุดซึ่งมีวัตถุประสงค์ทำให้ผลตอบสนองสัญญาณออกมีค่ายอดต่ำสุด ขั้นตอนการออกแบบใช้การแยกตัวประกอบเฉพาะร่วม และทฤษฎีบทภาวะคู่กัน เพื่อแปลงปัญหาการออกแบบตัวควบคุมให้เป็นโปรแกรมเชิงเส้น ผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น นำไปสู่ตัวควบคุมแบบเหมาะที่สุด ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์แสดงให้เห็นว่า ในเหตุการณ์ที่มีสัญญาณรบกวนจำเพาะ สัญญาณออกมีค่ายอดต่ำสุด และเข้าสู่ศูนย์อย่างรวดเร็ว ท้ายสุด เราเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการออกแบบด้วยวิธีควบคุม l_1 กับผลของการออกแบบตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดดบิต จะเห็นถึงข้อดีของการควบคุม l_1

คำสำคัญ: การออกแบบตัวควบคุม l_1 , สัญญาณรบกวนที่มีขอบเขต ทฤษฎีบทภาวะคู่กัน, โปรแกรมเชิงเส้น, แขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว

Abstract

This paper presents a controller design for one-link flexible robot arm to reject effect due to bounded disturbances. The controller design problem is formulated as l_1 control synthesis which aims to minimize the peak output response. The design procedure employs the coprime factorization and duality theorem to transform the controller design problem to linear programming (LP). Then, the optimal solution of LP problem leads to the optimal controller. The computer simulation shows that for specific disturbances the output response has minimum peak magnitude and rapidly decays to zero. Finally, we compare the results based on l_1

control design with that of an observer-based deadbeat controller to show advantages of l_1 control.

Keywords: l_1 controller design, bounded disturbance, duality theorem, linear program, flexible robot arm.

1. บทนำ

ปัจจุบันได้มีการนำแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวมาใช้แทนแขนหุ่นยนต์แบบแข็งเกร็งโดยเฉพาะในส่วนของการผลิต [1, 2] ข้อดีของแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวคือใช้พลังงานต่ำในการขับเคลื่อน แต่เนื่องจากผลของความอ่อนตัวทำให้การควบคุมตำแหน่งที่ปลายแขนหุ่นยนต์ทำได้ยาก จึงต้องออกแบบตัวควบคุมเพื่อลดปัญหาดังกล่าว Dahleh และ Diaz-Bobillo [3] นำเสนอแนวทางการออกแบบตัวควบคุมเพื่อให้สัญญาณมีค่ายอดต่ำสุดสำหรับระบบเชิงเส้นเวลาวิชุด (discrete-time linear systems) ภายใต้สัญญาณเข้าที่มีขอบเขต ซึ่งการออกแบบตัวควบคุมนี้สามารถครอบคลุมระบบเชิงเส้นแบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ สัญญาณออกหลายสัญญาณ (multi-input multi-output) [4] ในงานวิจัยก่อนหน้านี้นี้ พบว่าตัวควบคุม l_1 มีลักษณะเป็นตัวควบคุมแบบเดดบิต (deadbeat) และทำให้สัญญาณออกมีค่ายอดต่ำสุด และเข้าสู่ศูนย์อย่างรวดเร็ว ในงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม l_1 และประยุกต์การออกแบบตัวควบคุม l_1 กับระบบแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว [1, 2] รวมทั้งเปรียบเทียบผลการออกแบบกับตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดดบิต [5] เพื่อชี้ให้เห็นถึงข้อดีของตัวควบคุม l_1

บทความนี้มีลำดับการนำเสนอ ดังนี้ ตอนที่ 2 ทบทวนคณิตศาสตร์เบื้องต้นที่จำเป็นในการกำหนดปัญหาการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีสัญญาณเข้ามีขอบเขต ตอนที่ 3 นำเสนอการออกแบบตัวควบคุม l_1 และขั้นตอนการหาผลเฉลย หลังจากนั้น ตอนที่ 4 และตอนที่ 5 แสดงผลการจำลองด้วย

คอมพิวเตอรื และเปรียบเทียบกับผลการออกแบบตัวควบคุมอิงตัว
สังเกตแบบเคดบิท ตามลำดับ สุดท้าย ตอนที่ 6 เป็นบทสรุป

2. คณิตศาสตร์เบื้องต้น

กำหนดให้ x เป็นสัญญาณ หรือลำดับเวกเตอร์ค่าจริง กล่าวคือ
 $x = (x(0), x(1), x(2), \dots)$ โดยที่ $x(k) \in \mathcal{R}^n$ (1)
นิยามนอร์ม ∞ ของสัญญาณ x เท่ากับ

$$\|x\|_{\infty} = \sup_k \max_i |x_i(k)| \quad (2)$$

จะเห็นว่า $\|x\|_{\infty}$ เป็นขนาดสูงสุดของสัญญาณ [3] กำหนดให้ปริภูมิ
 X กับ Y ซึ่งเป็นปริภูมิเชิงเส้นที่มีนอร์มกำกับ (normed linear space)
โดยมี T เป็นระบบหรือตัวดำเนินการระหว่างปริภูมิ X กับ Y ทั้งนี้
นอร์มเหนี่ยวนำของระบบ T บ่งบอกถึงอัตราขยายที่ระบบ T กระทำ
บนปริภูมิ X ในงานวิจัยนี้ เรานำความสนใจที่ตัวดำเนินการ A จาก
ปริภูมิของสัญญาณ $(\mathcal{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ ไปยัง $(\mathcal{R}^m, \|\cdot\|_{\infty})$ และนอร์ม
เหนี่ยวนำของตัวดำเนินการ A มีนิยามดังนี้

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (3)$$

นอร์มเหนี่ยวนำนี้มีชื่อเรียกว่านอร์ม l_1 ของเมทริกซ์ A นอร์ม l_1 มี
ค่าเท่ากับผลบวกเชิงแถวมากที่สุด (maximum row summation)

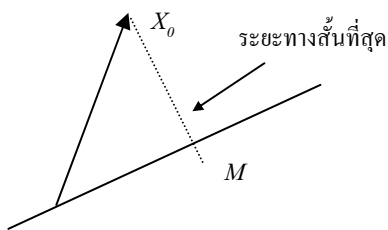
เราอาจแสดงให้เห็นว่า การออกแบบตัวควบคุม สมมูลกับปัญหา
ระยะทางสั้นที่สุด (minimum distance problem) ที่มีมิติอนันต์ ดัง
แสดงในรูปที่ 1 ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\min_{x \in M} \|x_0 - x\| \quad (4)$$

เมื่อ X เป็นปริภูมิเชิงเส้นที่มีนอร์มกำกับ

x_0 เป็นสมาชิกของ X ที่มีค่าคงที่

M เป็นเซตย่อยของปริภูมิ X



รูปที่ 1 ปัญหาระยะทางสั้นที่สุด

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีขอบเขต (bounded linear
function) บน X โดยที่

$$\|f\| = \sup_{x \in X, \|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (5)$$

และกำหนดให้ X^* เป็นปริภูมิคู่กัน (dual space) ของ X ซึ่งรวมฟังก์ชัน
เชิงเส้นที่มีค่าจำกัดทั้งหมดบน X เมื่อ $x \in X$ และ $f \in X^*$
นอกจากนี้ $\langle f, x \rangle = f(x)$ มีความหมายเป็นค่าของฟังก์ชัน ณ จุด x
ทุก ๆ ฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีขอบเขตบน l_1 และเขียนแทนด้วย

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i x_i \quad (6)$$

เมื่อ $y = \{y_i\}$ เป็นสมาชิกของ l_{∞} โดยที่

$$|f(x)| = |\langle y, x \rangle| \leq \|y\|_{\infty} \|x\|_1 \quad (7)$$

จะเห็นว่าเวกเตอร์ $x^* \in X^*$ วางตัวในอยู่ในแนวเดียวกับเวกเตอร์
 $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ

$$\langle x, x^* \rangle = \|x\| \|x^*\| \quad (8)$$

สำหรับฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีขอบเขตบน l_1 เมื่อ x วางตัวอยู่ในแนว
เดียวกับ y จะได้ว่า

$$|\langle y, x \rangle| = \|y\|_{\infty} \|x\|_1 \quad (9)$$

กำหนดให้ S เป็นปริภูมิย่อยของ X และ S^{\perp} ปริภูมิตั้งฉาก
(orthogonal space) ของ S จะได้ว่า S^{\perp} เป็นปริภูมิย่อยของ X^*
และ

$$S^{\perp} = \{r \in X^* \mid \langle r, x \rangle = 0, \forall x \in S\} \quad (10)$$

ถ้าเวกเตอร์ x อยู่ในปริภูมิ l_1 และเวกเตอร์ y อยู่ในปริภูมิ l_{∞} แล้ว x
และ y วางตัวอยู่ในแนวเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ

- $x_i = 0$ เมื่อ $y_i < \|y\|_{\infty}$
- $x_i y_i \geq 0$

ทฤษฎีบทภาวะคู่กัน (duality theorem) [4] กล่าวไว้ว่า ปัญหา
ระยะทางสั้นที่สุดในปริภูมิหลัก (primal space) X สมมูลกับปัญหา
การหาค่าสูงสุดในปริภูมิคู่กัน (dual space) X^* ซึ่งอาจแสดงให้เห็น
ดังนี้

- ให้ x เป็นสมาชิกในปริภูมิเชิงเส้น X และ d แทนระยะทางจาก x
ไปยังปริภูมิย่อย M จะได้ว่า

$$d := \inf_{m \in M} \|x - m\| = \max_{x^* \in BM^{\perp}} \langle x, x^* \rangle \quad (11)$$

โดยที่ปัญหาการหาค่าสูงสุดมีผลเฉลยดังนี้

$$x_0^* \in M^{\perp} \text{ และ } \|x_0^*\| = 1$$

- ปัญหาการหาค่าต่ำสุดของ (11) มีผลเฉลยดังนี้

$$m_0 \in M$$

จะได้ว่า $x - m_0$ วางตัวอยู่ในแนวเดียวกับ x_0^*

จากทฤษฎีบทภาวะคู่กัน จะเห็นว่า ปัญหาหลักมี
วัตถุประสงค์เพื่อหา $m \in M$ ที่ทำให้ $\|x - m\|$ มีค่าต่ำสุด เมื่อ
แปลงเป็นปัญหาคู่กัน จะได้ว่า เราต้องการหา $x^* \in BM^{\perp}$ ที่ทำให้
 $\langle x, x^* \rangle$ มีค่าสูงสุด

สำหรับการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้น กำหนดให้เซตของ
สัญญาณรบกวนมีขอบเขต กล่าวคือ

$$\{w \in I_\infty \mid \|w\|_\infty \leq 1\} \quad (12)$$

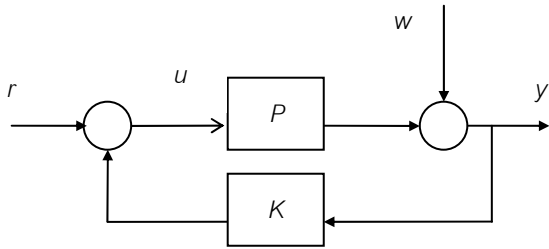
และฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเชิงเส้นเวลาขึ้นยงจากสัญญาณรบกวน w ไปยังสัญญาณออก z แทนด้วยสัญกรณ์ ϕ การออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ผลตอบสนองของสัญญาณออกมีขนาดต่ำสุด สมมูลกับปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะกรณีเลวสุด (worst-case performance) นั่นคือ การออกแบบตัวควบคุมมีรูปแบบดังนี้

$$\min_K (\max_w \|\phi w\|_\infty) = \min \|\phi\| \quad (13)$$

โดยที่ K เป็นตัวควบคุมที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพ ปัญหาทางซ้ายของ (13) มีวัตถุประสงค์เพื่อทำให้ผลตอบสนองของสัญญาณออกมีขนาดต่ำสุดภายใต้สัญญาณเข้าที่มีขนาดจำกัด ขณะที่ ปัญหาทางขวาของ (13) เป็นปัญหาอิงกับนอร์ม l_1

3. การออกแบบตัวควบคุม l_1

พิจารณาแผนภาพบล็อกของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีสัญญาณเข้าเดี่ยว-สัญญาณออกเดี่ยวดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แผนภาพบล็อกของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีสัญญาณเข้าเดี่ยว-สัญญาณออกเดี่ยว

จากรูปที่ 2 y และ u เป็นสัญญาณออกที่วัดได้และสัญญาณควบคุม r และ w เป็นสัญญาณอ้างอิงและสัญญาณรบกวน ตามลำดับ กำหนดให้ระบบที่ต้องการควบคุมมีฟังก์ชันถ่ายโอน

$$P(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{M(\lambda)}$$

โดยที่ $N(\lambda)$ และ $M(\lambda)$ เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วม และอาจแสดงให้เห็นว่า ตัวควบคุมทั้งหมดที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพ ได้แก่

$$K = \frac{X(\lambda) + M(\lambda)Q(\lambda)}{Y(\lambda) - N(\lambda)Q(\lambda)} \quad (14)$$

เมื่อ $X(\lambda)$ และ $Y(\lambda)$ สอดคล้องกับสมการเบซุต (Bezout equation) กล่าวคือ

$$X(\lambda)N(\lambda) + Y(\lambda)M(\lambda) = I \quad (15)$$

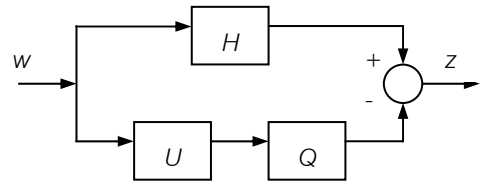
และ Q เป็นพารามิเตอร์อิสระ นอกจากนี้ เมื่อแยกตัวประกอบเฉพาะร่วมแล้ว จะได้เมทริกซ์ถ่ายโอนของระบบวงปิดเป็น

$$H(P, K) = \begin{bmatrix} N(Y - NQ) & M(Y - NQ) \\ M(Y - NQ) & M(X - MQ) \end{bmatrix} \quad (16)$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบวงปิดเป็นฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) ของตัวแปร K และเป็นฟังก์ชันสัมพรรค (affine function) ของพารามิเตอร์ Q ฉะนั้น สำหรับระบบเชิงเส้นสัญญาณเข้าเดี่ยว-สัญญาณออกเดี่ยวจะมีฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดเท่ากับ

$$\phi = H - UQ$$

ซึ่งมีรูปแบบตามแผนภาพบล็อกดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แผนภาพบล็อกของระบบควบคุมสมมูล

จากรูปที่ 3 การออกแบบตัวควบคุมมีรูปแบบเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังนี้

$$\min_{Q \in I_1} \|H - UQ\| \quad (17)$$

จะเห็นว่า การออกแบบตัวควบคุม (17) อาจเขียนในรูปแบบของปัญหาการหาระยะทางสั้นที่สุดและมีมิติไม่จำกัด

$$\min_{R \in S} \|H - R\| \quad (18)$$

เมื่อ S เป็นปริภูมิย่อยของ l_1 โดยที่

$$S = \{R \in I_1 \mid R = UQ, Q \in I_1\} \quad (19)$$

ถ้า $\hat{U}(\lambda)$ ไม่มีศูนย์ (zero) ที่ขอบวงกลมหนึ่งหน่วย และให้ a_i เป็นศูนย์ของ $\hat{U}(\lambda)$ ซึ่งมีตำแหน่งอยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วยและมีค่าไม่ซ้ำกัน กำหนดให้

$$\underline{a} = (1, a, a^2, \dots) \quad (20)$$

$$\Re \underline{a} = (1, \Re(a), \Re(a^2), \dots)$$

$$\Im \underline{a} = (0, \Im(a), \Im(a^2), \dots)$$

โดย $\Re \underline{a}$ และ $\Im \underline{a}$ เป็นสมาชิกของเซต

$$C_0 = \{x \in I_\infty \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0\}$$

ต่อไป กำหนดให้ M เป็นปริภูมิย่อยที่มีมิติจำกัดของ C_0 กล่าวคือ

$$M = \text{Span} \left\{ \Re(\underline{a}_i), \Im(\underline{a}_i) \right\} \quad (21)$$

และให้ $H \in I_1$ และ $R \in M^\perp \subset I_1$ เมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทภาวะคู่กัน จะได้ว่า $S = M^\perp$ ปัญหาหาระยะทางสั้นที่สุดอาจแปลงให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} \phi^0 &= \min_{R \in M^+} \|H - R\| = \sup_{x \in BM} \langle x, H \rangle \\ &= \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2N}} \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathfrak{R}[\hat{H}(a_i)] + \alpha_{i+N} \mathfrak{I}[\hat{H}(a_i)] \end{aligned}$$

s.t.

$$\|x\|_\infty = \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathfrak{R}(a_i^k) + \alpha_{i+N} \mathfrak{I}(a_i^k) \right| \leq 1 \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots$$

(22)

จะเห็นว่า เมื่อใช้ทฤษฎีบทภาวะคู่กัน การคำนวณหาค่า ϕ^0 อาจแปลงไปเป็นปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแปรสูงสุด $2N$ ตัว หรือกล่าวได้ว่า ปัญหาการหาค่าต่ำสุดที่มีมิติไม่จำกัดสามารถแปลงไปเป็นปัญหาการหาค่าสูงสุดซึ่งมีมิติจำกัด เนื่องจาก $|a_i| < 1$ จึงมีค่า k ที่มากพอค่าหนึ่งซึ่งทำให้ $|a_i^k|$ มีค่าน้อยมาก และพจน์ต่าง ๆ ที่เหลืออยู่ในเงื่อนไขบังคับของปัญหาการหาค่าต่ำสุด (22) ไม่ส่งผลใด ๆ ต่อระบบควบคุม ขอให้ผู้อ่านดูการพิสูจน์ ใน [3]

สำหรับ \tilde{x} ซึ่งเป็นผลเฉลยของปัญหาคู่กัน มีลักษณะดังนี้

1. $\|\tilde{x}\| = 1$
2. $|\tilde{x}_i| < 1$ ตั้งแต่ i บางค่า

ทฤษฎีบท 3.1 ปัญหาการหาค่าต่ำสุด $\phi^0 = H - R^0$ มีผลเฉลยสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\phi^0(k) \tilde{x}(k) \geq 0$
2. $\phi^0(k) = 0$ เมื่อ $|\tilde{x}(k)| < 1$
3. $\sum_{k=0}^{L-1} |\phi^0(k)| = v^0$
4. $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^0(k) a_i^k = H(a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$

เราอาจคำนวณ R^0 ได้จาก $R^0 = H - \phi^0$ นั่นคือ R^0 เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ตรงไปตรงมาที่ ϕ^0 เป็นฟังก์ชันตรรกยะ

ทฤษฎีบท 3.2 ในกรณีที่ $\hat{U}(\lambda)$ มีศูนย์อยู่ที่ขอบของวงกลมหนึ่งหน่วย กำหนดให้ \tilde{U} แทนส่วนของ U ใน (17)

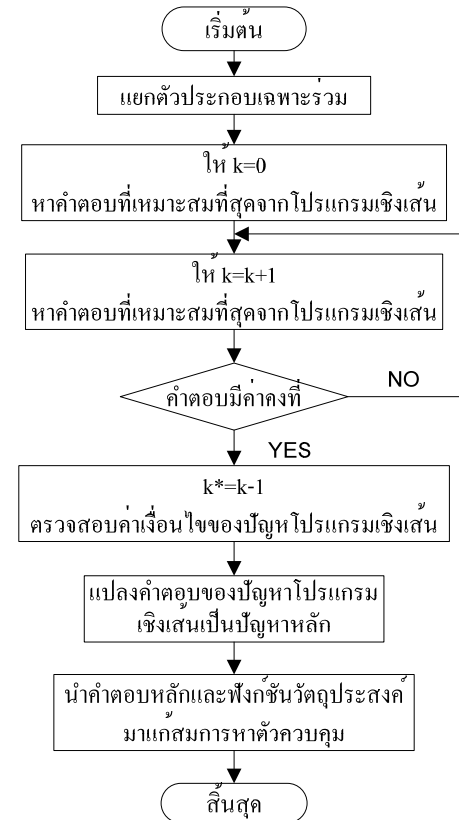
1. ถ้า a เป็นศูนย์ของ \hat{U} ภายในวงกลมหนึ่งหน่วยด้วยภาวะรากซ้ำเท่ากับ l แล้ว a จะเป็นศูนย์ของ \tilde{U} ด้วยภาวะรากซ้ำเท่ากับ l
 2. ถ้า a เป็นศูนย์ของ \hat{U} บนวงกลมหนึ่งหน่วยด้วยภาวะรากซ้ำเท่ากับ l แล้ว a จะเป็นศูนย์ของ \tilde{U} ด้วยภาวะรากซ้ำเท่ากับหนึ่ง
- อนึ่ง การมีศูนย์ที่ขอบวงกลมของ U จะไม่สามารถรับประกันผลเฉลยที่เหมาะสมของปัญหาค่าต่ำสุดได้ โดยทั่วไป ผลเฉลยของปัญหาการออกแบบตัวควบคุม l , มีสมบัติดังนี้

1. เป็นผลตอบสนองอิมพัลส์ที่จำกัด (finite impulse response) ซึ่งทำให้ตัวควบคุมแบบเหมาะที่สุดเป็นตัวควบคุมเดคิพ
2. ถ้าไม่มีศูนย์บนขอบวงกลมหนึ่งหน่วย ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมจะมีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดเสมอ
3. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดไม่จำเป็นต้องมีค่าตอบเดียว

ในการหาผลเฉลยของปัญหาการออกแบบตัวควบคุม l , มีขั้นตอนตามผังงานดังแสดงในรูปที่ 4

3. การออกแบบตัวควบคุมสำหรับแกนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว

ที่ผ่านมา มีการวิจัยทางนำแกนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวมาใช้งานกันมากขึ้น [1, 2] ทั้งนี้เพราะแกนหุ่นยนต์แบบแข็งเกร็งที่ใช้กันโดยทั่วไปมีข้อเสียคือ มีน้ำหนักมาก ทำให้การเคลื่อนที่ช้า และต้องใช้พลังงานมากในการขับเคลื่อน ดังนั้นจึงต้องใช้ตัวขับเคลื่อนขนาดใหญ่ นอกจากนี้แกนหุ่นยนต์แบบแข็งเกร็งยังมีน้ำหนักบรรทุก (payload) ต่ำ ในทางกลับกัน แกนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวมีข้อดีคือ



รูปที่ 4 ผังงานของขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม l ,

มีน้ำหนักเบา เคลื่อนที่เร็ว และใช้พลังงานในการขับเคลื่อนน้อย แต่ก็มีข้อเสียคือ เนื่องจากความอ่อนตัวของแกนหุ่นยนต์ ทำให้เกิดการแกว่งที่ตำแหน่งปลายเมื่อแกนหุ่นยนต์มีการเคลื่อนที่ ทำให้การควบคุมทำได้ยากกว่าแกนหุ่นยนต์แบบแข็งเกร็ง นอกจากนี้ยังเป็นระบบมีเฟสไม่ต่ำสุด จึงต้องใช้การควบคุมที่ซับซ้อนเพื่อให้ได้ตัวควบคุมที่มีความสามารถสูงกว่าเดิม ด้วยเหตุผลที่กล่าวมา งานวิจัยนี้จึงสนใจที่จะศึกษาและพัฒนาการควบคุมแกนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว

งานวิจัยนี้ใช้แขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวเป็นกรณีศึกษา แขนหุ่นยนต์มีความยาวเท่ากับ 0.45 เมตร และมวลโหลด 0.05 กิโลกรัม เมื่อการชักตัวอย่างของสัญญาณเข้าและการคงค่าสัญญาณออกของระบบใช้ความถี่เท่ากับ 6 Hz พลาวัตของแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวมีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เวลาวิฤต [1] ดังนี้

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (23)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0.9421 & -0.0301 & 0.0970 & -0.009 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.0538 \quad 0.2141 \quad 0.0818 \quad 0.0032]$$

เมื่อพิจารณาระบบควบคุมดังรูปที่ 1 กำหนดให้สัญญาณอ้างอิงเป็นศูนย์ และมีสัญญาณรบกวนต่อระบบ ในงานนี้ สัญญาณรบกวนมีขอบเขตจำกัด วัตถุประสงค์ในการควบคุมระบบ เพื่อให้ผลตอบสนองของสัญญาณออกเนื่องจากสัญญาณรบกวนมีค่ายอดต่ำสุด ซึ่งสามารถจัดให้มีรูปแบบเป็นการออกแบบตัวควบคุม l_1 ดังนี้

$$\min_{K \in l_1} \|(1 + PK)^{-1}\|_1 \quad (24)$$

ต่อจากนั้น ประยุกต์การแยกตัวประกอบเฉพาะร่วมซึ่งอาจทำได้หลายวิธี เช่น ใช้การออกแบบตัวควบคุม DLQG [6] จะได้

$$F = [-1.1613 \quad -0.0615 \quad -0.0819 \quad 0.0075] \quad (25)$$

$$L = [-3.3280 \quad -3.6132 \quad -3.0378 \quad -0.1358]^T$$

หลังจากนั้น คำนวณ $\hat{N}(\lambda), \hat{M}(\lambda), \hat{X}(\lambda), \hat{Y}(\lambda)$ โดยที่

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & B \\ \hline F & 1 \end{array} \right]$$

$$N = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & B \\ \hline C+DF & D \end{array} \right]$$

$$Y = \left[\begin{array}{c|c} A+LC & -B-LD \\ \hline F & 1 \end{array} \right]$$

$$X = \left[\begin{array}{c|c} A+LC & L \\ \hline F & 0 \end{array} \right]$$

เมื่อใช้การแยกตัวประกอบเฉพาะร่วม ปัญหาการออกแบบตัวควบคุม (24) อาจเขียนให้อยู่ในรูปแบบ

$$\min_K \|(1 + \hat{P}\hat{K})^{-1}\|_1 = \min_Q \|\hat{M}(\hat{Y} - \hat{N}Q)\|_1$$

$$= \min_Q \|\hat{H} - \hat{U}Q\|_1$$

$$= \min_{R \in l_1} \|\hat{H} - \hat{R}\|_1$$

โดยที่ $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -0.2814$ เป็นศูนย์ที่คู่หรือบนขอบวงกลมหนึ่งหน่วยของ $\hat{U}(\lambda)$ เมื่อใช้ทฤษฎีบท (26) กัน อาจแปลงเป็นปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น

$$\phi^0 = \min_{R \in S} \|H - R\|_1$$

$$= \max_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} (\alpha_1 H(0) + \alpha_2 H(1) + \alpha_3 H(-0.2814))$$

$$= \max_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} (\alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(1))$$

(27)

และมีเงื่อนไขบังคับดังนี้

$$\|x\|_\infty = |\alpha_1(0)^k + \alpha_2(1)^k + \alpha_3(-0.1039)^k| \leq 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

ปรากฏว่า เงื่อนไขบังคับเริ่มเข้าเงื่อนไขเมื่อ $k \geq 3$ และปัญหาการหาค่าสูงสุดมีผลเฉลยเท่ากับ

$$\tilde{\alpha}_1 = 2, \tilde{\alpha}_2 = -1, \tilde{\alpha}_3 = 0 \quad (28)$$

$$\phi^0 = 2$$

(29)

จะเห็นว่า ผลเฉลยของปัญหาการหาค่าสูงสุด (27) มีค่าเท่ากับ

$$\tilde{x}(0) = 1, \tilde{x}(1) = \tilde{x}(2) = -1 \quad (30)$$

$$|\tilde{x}(k)| < 1, k = 3, 4, 5, \dots$$

จาก ทฤษฎีการวางตัวในแนวเดียวกันของเวกเตอร์ในปริภูมิ l_1 และ l_∞ เราสามารถแปลงผลเฉลยนี้ให้เป็นผลเฉลยของ

ปัญหาการหาค่าต่ำสุด $\phi^0 = H - R^0$ กล่าวคือ

$$\phi^0(0) \geq 0, \quad \phi^0(1), \phi^0(2) \leq 0 \quad (31)$$

$$\phi^0(k) = 0, k = 3, 4, 5, \dots$$

ในการหาผลเฉลยของการออกแบบตัวควบคุม l_1 เงื่อนไขบังคับประกอบด้วย

$$\phi^0(0) - \phi^0(1) - \phi^0(2) = 2 \quad (32)$$

$$\phi^0(0) = 1$$

$$\phi^0(0) + \phi^0(1) \cdot (1) + \phi^0(2) \cdot (1)^2 = 0$$

$$\phi^0(0) + \phi^0(1) \cdot (-0.1039) + \phi^0(2) \cdot (-0.1039)^2 = 1$$

ฉะนั้น

$$\phi(z) = \frac{z^2 - 0.0941z - 0.9059}{z^2} \quad (33)$$

และจากความสัมพันธ์

$$\phi(z) = \frac{1}{1 + P(z)K(z)}$$

จะได้ว่า ตัวควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดเท่ากับ

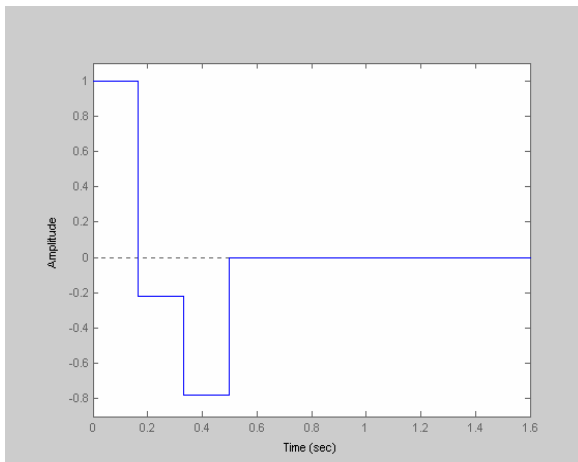
$$K(z) = \frac{4.078z^3 + 0.2361z^2 + 0.3588z - 0.03667}{z^3 + 1.203z^2 + 0.3465z + 0.01291}$$

(34)

4. ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

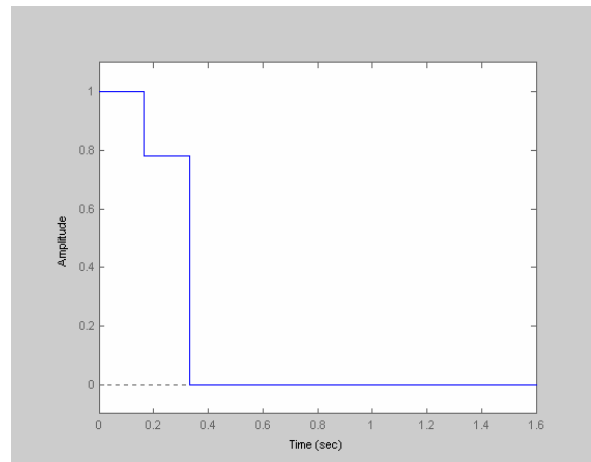
ในตอนนี้ เรานำเสนอการจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ของระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวโดยทดสอบกับสัญญาณรบกวน 2 ชนิด ได้แก่ สัญญาณอิมพัลส์ (impulse signal) และสัญญาณขั้น (step signal) ทั้งนี้กำหนดให้สัญญาณอ้างอิงเท่ากับศูนย์ เมื่อป้อนสัญญาณรบกวน

เป็นสัญญาณอิมพัลส์ จะได้ผลตอบสนองของตำแหน่งเชิงมุมที่ปลายแขนดังรูปที่ 5 และสัญญาณควบคุมดังแสดงในรูปที่ 6

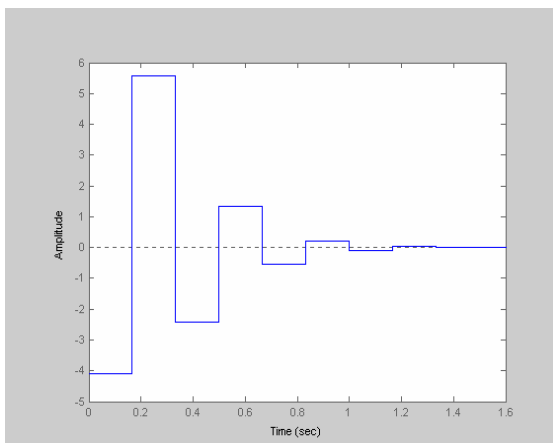


รูปที่ 5 ตำแหน่งเชิงมุมที่ปลายแขนเมื่อสัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณอิมพัลส์ และใช้ตัวควบคุม I_1

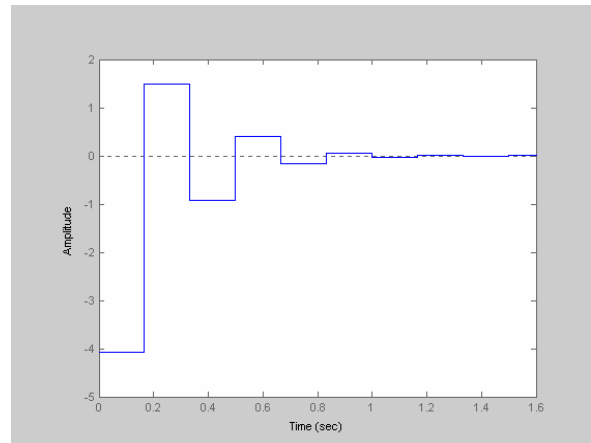
ศูนย์ เมื่อพิจารณาสัญญาณควบคุมในรูปที่ 8 จะเห็นว่าสัญญาณควบคุมมีขอบเขตภายในช่วงที่ยอมรับได้และเข้าสู่ศูนย์เช่นกัน



รูปที่ 7 ตำแหน่งที่ปลายแขนเมื่อสัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย และใช้ตัวควบคุม I_1



รูปที่ 6 สัญญาณควบคุมเมื่อสัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณอิมพัลส์ และใช้ตัวควบคุม I_1



รูปที่ 8 สัญญาณควบคุมเมื่อสัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย และใช้ตัวควบคุม I_1

จากรูปที่ 5 จะเห็นว่าสัญญาณออกของระบบวงปิดมีค่ายอดจำกัดและผลตอบสนองเข้าสู่ศูนย์ เมื่อคำนวณนอร์ม I_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของผลตอบสนองอิมพัลส์ของสัญญาณออก ปรากฏว่า มีค่าเท่ากับผลเฉลยของปัญหาการหาค่าต่ำสุด นอกจากนี้ ในรูปที่ 6 จะเห็นว่าสัญญาณควบคุมมีขนาดอยู่ในขอบเขตที่ไม่สูงมากและเข้าสู่ศูนย์เช่นกัน ในกรณีนี้ที่สัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณขั้น จะได้ผลตอบสนองของตำแหน่งที่ปลายแขน และสัญญาณควบคุมดังแสดงในรูปที่ 7 และ 8 ตามลำดับ ในรูปที่ 7 จะเห็นว่า ผลตอบสนองของตำแหน่งปลายแขนเข้าสู่ศูนย์ภายในเวลาการชักตัวอย่าง 2 ครั้ง ที่เป็นเช่นนี้ เพราะวาระบบวงปิดมีอันดับเท่ากับ 2 ฉะนั้น ตัวควบคุมจึงมีลักษณะเป็นเดคบิท นอกจากนี้ ผลตอบสนองของตำแหน่งที่ปลายแขนมีค่ายอดจำกัด และเข้าสู่

โดยสรุป เมื่อจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์กับสัญญาณรบกวนทั้งสองชนิด ปรากฏว่า ตัวควบคุม I_1 มีลักษณะเป็นตัวควบคุมเดคบิท กล่าวคือ ผลตอบสนองของสัญญาณออกมีค่ายอดจำกัด และเข้าสู่ศูนย์อย่างรวดเร็ว นอกจากนี้ ผลลัพธ์ของการออกแบบแสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่ออกแบบได้นั้นสามารถนำไปใช้ควบคุมระบบจริงได้ เนื่องจากสัญญาณควบคุมของทั้ง 2 กรณีมีขนาดอยู่ในขอบเขตที่ยอมรับได้

ปัจจัยที่มีผลกระทบต่อผลตอบสนองและสัญญาณควบคุม ได้แก่ ความถี่การชักตัวอย่าง ในการทดลองต่อไป จึงเลือกความถี่การชักตัวอย่างมีค่าในช่วง 6 – 100 Hz และออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะสม ผลลัพธ์ของการออกแบบตัวควบคุมแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ผลกระทบของความถี่การชักตัวอย่างต่อการออกแบบ

ความถี่การชักตัวอย่าง (Hz)	นอร์มของ ϕ	ค่ายอดสัญญาณควบคุม	อันดับตัวควบคุม	ค่ายอดสัญญาณออก
6	2	4.08	3	1
10	2	20	3	1
20	2	428	3	1
50	2	21300	3	1
100	2	385000	3	1

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่านอร์ม I_1 ของระบบวงปิด อันดับของตัวควบคุม และค่ายอดของสัญญาณออกไม่ขึ้นกับความถี่ในการสุ่มระบบ นั่นคือ มีค่าคงที่เสมอ อย่างไรก็ตาม สัญญาณควบคุมมีค่ายอดเพิ่มขึ้นเมื่อความถี่ในการชักตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้น ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากช่วงเวลาเข้าของผลตอบสนองที่มีค่าเท่ากับอันดับของระบบ ดังนั้น เมื่อความถี่ในการชักตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้น ขณะที่อันดับของระบบและของตัวควบคุมไม่เปลี่ยนแปลง จึงทำให้ผลตอบสนองของระบบเข้าสู่ศูนย์เร็วขึ้น ฉะนั้น สัญญาณควบคุมจำเป็นต้องมีค่าสูงขึ้นเพื่อบังคับให้ผลตอบสนองเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวได้เร็วขึ้น ในกรณีของระบบแชนหุนยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัวนี้ สัญญาณควบคุมมีขีดจำกัด กล่าวคือมีค่าภายใน ± 5 volt ฉะนั้น ในการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด I_1 นี้ควรใช้ความถี่ในการชักตัวอย่างประมาณ 6 Hz

5. การเปรียบเทียบกับตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบีท

เพื่อให้เห็นข้อดีของการออกแบบตัวควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด เราจึงเปรียบเทียบผลการออกแบบที่ได้ในตอนที่แล้วกับตัวควบคุมเดคบีทที่ออกแบบด้วยวิธีการวางขั้ว (pole placement) [5] ตัวควบคุมเดคบีทมีรูปแบบเป็นตัวควบคุมอิงตัวสังเกตที่มีการวางขั้วทั้งหมดของระบบวงปิดไว้ที่ตำแหน่ง $z = 1$ จะได้อัตราขยายการป้อนกลับสถานะ F และอัตราขยายของตัวสังเกต L สำหรับระบบแชนหุนยนต์แบบอ่อนตัว ดังนี้

$$F = [0.9879 \quad -0.0206 \quad 0.3683 \quad -0.6318]^T \quad (35)$$

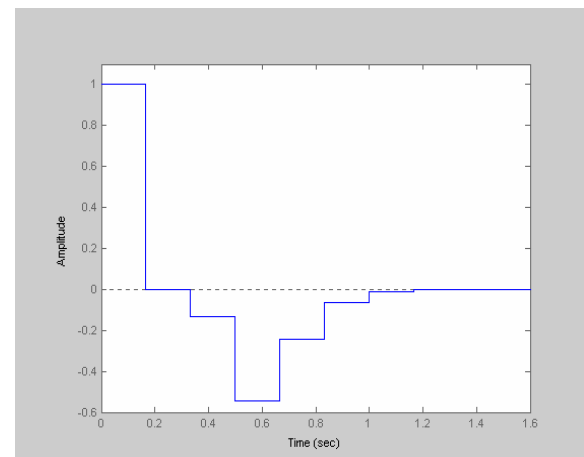
$$L = [2.8336 \quad -0.8692 \quad 0.4535 \quad 0.7444] \quad (36)$$

และจะได้ตัวควบคุมเป็น

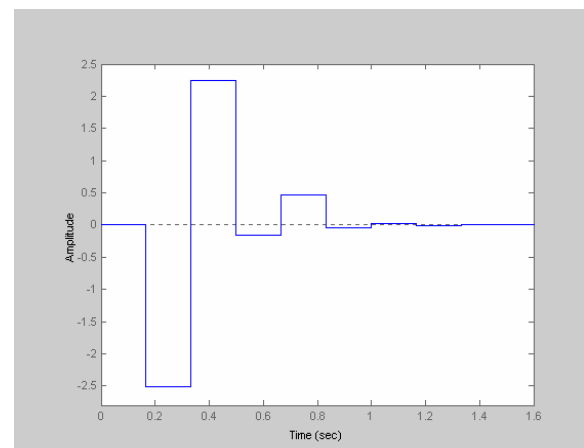
$$K(z) = \left[\frac{A - FC - BL}{F} \quad \frac{L}{0} \right] \quad (37)$$

$$= \frac{(2.514z^3 + 0.1306z^2 + 0.2106z - 0.0216)}{(z^4 + 0.9421z^3 + 0.7221z^2 + 0.2036z + 0.0076)}$$

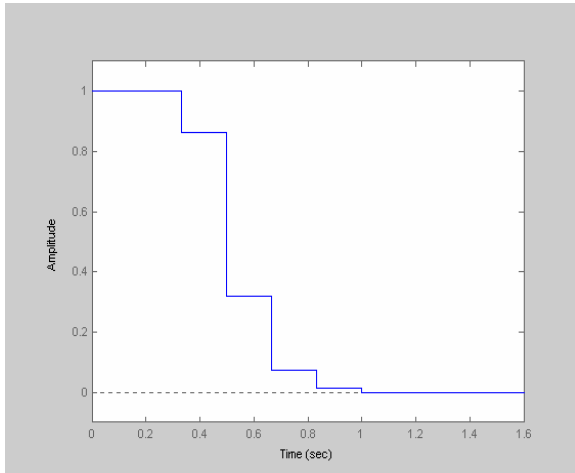
ต่อไป เราประยุกต์ตัวควบคุมนี้กับระบบควบคุมการป้อนกลับ เมื่อสัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย จะได้ผลตอบสนองของตำแหน่งที่ปลายแขน และสัญญาณควบคุมดังแสดงในรูปที่ 9 และ 10 ตามลำดับ และเมื่อสัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย ผลตอบสนองของตำแหน่งที่ปลายแขนและสัญญาณควบคุมดังแสดงในรูปที่ 11 และ 12 ตามลำดับ ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการออกแบบระหว่างตัวควบคุม I_1 กับตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบีท



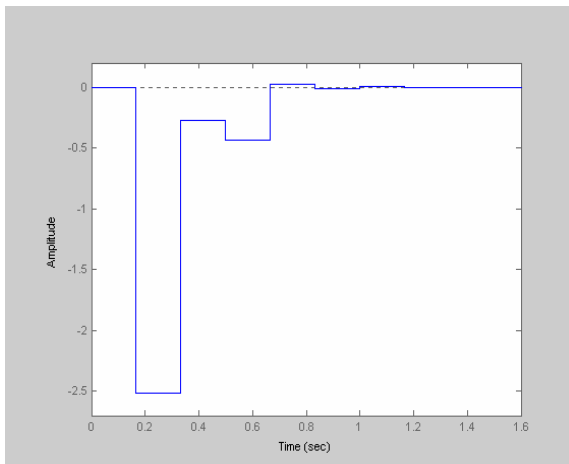
รูปที่ 9 ตำแหน่งที่ปลายแขนเมื่อให้สัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณอิมพัลส์ โดยใช้ตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบีท



รูปที่ 10 สัญญาณควบคุมเมื่อให้สัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณอิมพัลส์ โดยใช้ตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบีท



รูปที่ 11 ตำแหน่งที่ปลายแขนเมื่อให้สัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย โดยใช้ตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบิท



รูปที่ 12 สัญญาณควบคุมเมื่อให้สัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย โดยใช้ตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบิท

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ระหว่างตัวควบคุม I_1 กับตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบิท

ชนิดตัวควบคุม	ค่า I_1	ค่า ข อ ค สัญญาณตัวควบคุม	อันดับสัญญาณควบคุม	ค่า ข อ ค สัญญาณออก	เวลาเข้าที่ของผลตอบสนองสัญญาณขั้น
ตัวควบคุม I_1	2	-4.08	3	1	0.5 วินาที
ตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบิท	2.0018	-2.5	4	1	1 วินาที

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่าระบบควบคุมที่ใช้ตัวควบคุม I_1 มีค่า I_1 ต่ำกว่าระบบควบคุมที่ใช้ตัวควบคุมอิงตัวสังเกต ผลลัพธ์

นี้สอดคล้องกับทฤษฎีการควบคุม I_1 ที่มีวัตถุประสงค์เพื่อให้สัญญาณออกของระบบวงปิดมีค่าขอดีที่สุด เนื่องจากระบบวงปิดที่ใช้ตัวควบคุมอิงตัวสังเกตแบบเดคบิทมีอันดับสูงกว่าระบบวงปิดที่ใช้ตัวควบคุม I_1 ทำให้ผลตอบสนองที่ใช้การควบคุมเดคบิทมีช่วงเวลาเข้ามาสูงกว่า นอกจากนี้ จะสังเกตว่า สัญญาณควบคุมของตัวควบคุมอิงตัวสังเกตมีขนาดน้อยกว่าสัญญาณควบคุมของตัวควบคุม I_1 จึงทำให้ตัวควบคุมเดคบิทใช้เวลาในการกำจัดสัญญาณรบกวนมากขึ้น

6. บทสรุป

บทความนี้ได้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมสำหรับแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัวเพื่อให้ผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนที่มีขอบเขตมีค่าขอดีที่สุด การออกแบบตัวควบคุมนี้มีรูปแบบของปัญหาอาร์ม I_1 ขั้นตอนออกแบบประกอบด้วย การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น ตัวควบคุม I_1 สำหรับระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวนี้มีอันดับเท่ากับ 3 และมีลักษณะเป็นตัวควบคุมเดคบิทเมื่อจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ พบว่าผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์และสัญญาณขั้นมีค่าขอดีจำกัดและเข้าสู่ศูนย์อย่างรวดเร็ว นอกจากนี้ เมื่อเปรียบเทียบค่าอาร์ม I_1 ของฟังก์ชันถ่ายโอนจากสัญญาณรบกวนไปยังสัญญาณออกระหว่างการควบคุม I_1 และการควบคุมอิงตัวสังเกตเดคบิท พบว่าค่าอาร์ม I_1 หรือค่าขอดีสัญญาณของระบบที่ออกแบบด้วยวิธีควบคุม I_1 มีค่าต่ำสุด

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่และเครื่องมือในการทำงานวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- [1] วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ, มานพ วงศ์สายสุวรรณ และเดวิด บรรเจิดพงษ์ชัย “การควบคุมแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัวด้วยการควบคุมขั้นสูง” ในการประชุมวิชาการประจำปี 2543 เทคโนโลยี ECTI กับเศรษฐกิจใหม่ ณ ศูนย์ประชุมสหประชาชาติ กรุงเทพฯ มิถุนายน 2543 หน้า 302-314.
- [2] เดวิด บรรเจิดพงษ์ชัย และลัดดาวัลย์ แซ่ไถ้ว, “การออกแบบตัวควบคุมกททที่รวมเงื่อนไขเชิงเวลาสำหรับแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวข้อต่อเดียว” วิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา ฉบับที่ 3 ปีที่ 12 พ.ศ. 2544 หน้า 48-56.
- [3] M. A. Dahleh and I. J. Diaz-Bobillo, “Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach”, Prentice Hall, 1997.

- [4] M. A. Dahleh and J. B. Pearson, " L_1 Optimal Feedback Controllers for MIMO Discrete-time Systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-32, April 1987, pp. 314-322.
- [5] K. J. Astrom and B. Wittenmark, "Computer controlled systems", Prentice Hall, 3rd edition, 1997.
- [6] P. Chaichanavong and D. Banjerdpongchai, "A Case Study of Robust Control Experiment on One-link Flexible Robot Arm", In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Crowne Plaza Hotel & Resort, Phoenix, Arizona, USA. December 1999, pp. 4319-4324.