

# การควบคุมรูปร่างของคานยื่นโดยใช้วัสดุเพียโซอิเล็กทริก

## Shape Control of Cantilevered Beams Using Piezoelectric Materials

วัฒนชัย สมิตทากร และ ทวีชัย ศิริโคจรสมบัติ

Watanachai Smittakorn and Tawatchai Sirikojornsombat

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กทม. 10330

โทร 0-2218-6466 โทรสาร 0-2251-7304

Email: fcewsk@eng.chula.ac.th

### บทคัดย่อ

บทความนี้ อธิบายถึงการควบคุมรูปร่างของโครงสร้างคานยื่นโดยใช้วัสดุเพียโซอิเล็กทริก โครงสร้างคานที่พิจารณาประกอบด้วยชั้นของโครงสร้างหลัก และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ยึดติดกันอย่างสมบูรณ์ในรูปแบบของคานประกอบเป็นชั้นๆ การควบคุมการโก่งตัวของคานให้มีรูปร่างตามต้องการ จะใช้การกำหนดค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมสำหรับชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในแต่ละช่วงตามความยาวของคาน ซึ่งได้จากการคำนวณโดยอาศัยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษคกต่าง ร่วมกับการวิเคราะห์การโก่งตัวด้วยทฤษฎีคานชั้น ซึ่งจะพิจารณาแบ่งโดเมนในทิศทางตามความหนาออกเป็นชั้นๆ ฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวคานจะแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ ในขณะที่ฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความหนาจะแทนด้วยฟังก์ชันลากรางจ์เชิงเส้น จากกรณีศึกษาการควบคุมการโก่งตัวของคานยื่น โดยสมมติฟังก์ชันการโก่งตัวที่ต้องการเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่ง สอง และสาม พบว่าการแบ่งจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตลอดความยาวคานที่เพิ่มขึ้น จะช่วยให้สามารถควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานให้ใกล้เคียงกับการโก่งตัวที่ต้องการได้มากขึ้น

### Abstract

This article demonstrates the shape control of cantilevered beams by using piezoelectric materials. Laminated composite beams, composed of layers of substrate and piezoelectric material, perfectly bonded together, are considered. To control the deflection of the beam to a desired configuration, appropriate voltage for each portion along the length of the piezoelectric layer is sought by using the method of weighted residuals along with the analysis of beam by the layerwise theory. The domain in the direction through the thickness is divided into several sublayers. Shape functions in the longitudinal direction are represented by Fourier series, whereas the shape functions in the direction through the thickness are used as piecewise linear Lagrange interpolation functions. Various case studies of deflection control are

examined with the desired shapes given as polynomials degree one, two, and three. By increasing the number of portion along the length of the piezoelectric layer, the deflection with better agreement with the desired one can be obtained.

### 1. บทนำ

วัสดุเพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric material) มีคุณสมบัติที่สำคัญคือ เมื่อถูกแรงกระทำจะเกิดศักย์ไฟฟ้า (electric potential) ขึ้น คุณสมบัติดังกล่าวสามารถนำมาใช้เป็นตัวรับรู้ (sensor) ได้ ในทางกลับกันหากป้อนศักย์ไฟฟ้าให้แก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริก จะทำให้เกิดหน่วยแรงและความเครียดขึ้นในเนื้อวัสดุ ซึ่งคุณสมบัตินี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นตัวให้แรง (actuator) ได้ วัสดุเพียโซอิเล็กทริกได้ถูกนำไปใช้ในทางวิศวกรรมโครงสร้าง เช่น การลดการสั่นไหวของโครงสร้างเครื่องบิน การควบคุมเสียงของใบพัดเฮลิคอปเตอร์ [1] และการควบคุมรูปร่างของโครงสร้าง เป็นต้น โดยในอดีตที่ผ่านมาได้มีการนำวัสดุเพียโซอิเล็กทริกไปประยุกต์ใช้ร่วมกับวัสดุต่างๆ เช่น อลูมิเนียม แกรไฟต์-อีพอกซี และไม้ เป็นต้น ในรูปแบบของโครงสร้างประกอบเป็นชั้นๆ

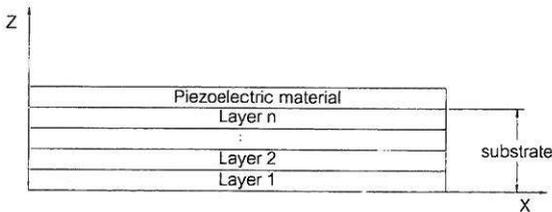
ในการศึกษาการควบคุมรูปร่างของโครงสร้างนั้น มีการนำวัสดุเพียโซอิเล็กทริกไปประยุกต์ใช้สำหรับควบคุมโครงสร้างคาน และโครงสร้างแผ่นเรียบ Donthreddy และ Chandrashekara [2] และ Eisenberger และ Abramovich [3] พิจารณาการควบคุมรูปร่างของคานยื่นและคานจตุรกรงรับธรรมดา Wang และคณะ [4] พิจารณาการควบคุมรูปร่างของแผ่นเรียบจตุรกรงรับธรรมดา ภายใต้น้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ การควบคุมการโก่งตัวของคานและแผ่นเรียบให้น้อยลงจนเกือบจะอยู่ในตำแหน่งเดิมที่ไม่มีมีการโก่งตัว จะใช้การให้ศักย์ไฟฟ้าที่มีค่าเท่ากันโดยตลอดแก่ชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริก Agrawal และคณะ [5] พิจารณาการควบคุมรูปร่างของแผ่นเรียบจตุรกรงรับธรรมดา โดยคิดวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเป็นแผ่นๆ เรียงติดกันบนแผ่นเรียบ การควบคุมการโก่งตัวกระทำโดย กำหนดค่าการโก่งตัวของแผ่นเรียบที่ต้องการ จากนั้นทำการหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมในแต่ละแผ่นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ที่จะทำให้แผ่นเรียบโก่งตัวใกล้เคียงกับที่ต้องการ Nguyen และ Tong [6] พิจารณาค่าแรงแยกและการวางตัวของ

RECEIVED 30 May, 2005

ACCEPTED 1 September, 2005

วัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่มีรูปร่างแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า และไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยที่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดอยู่เป็นแผ่นๆ เป็นช่วงๆ บนแผ่นเรียบ จากนั้นทำการหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมในแต่ละแผ่นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ที่จะทำให้แผ่นเรียบโค้งตัวใกล้เคียงกับที่ต้องการ

บทความนี้ ได้ทำการศึกษาการควบคุมการโค้งตัวของโครงสร้างคานยื่น ดังรูปที่ 1 ให้มีการเปลี่ยนรูปร่างเป็นไปตามที่ต้องการ โดยการกำหนดค่าศักย์ไฟฟ้าแบบคงที่เป็นช่วงๆ ให้แก่ชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริก โครงสร้างคานที่พิจารณาจะประกอบด้วยชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกและชั้นของโครงสร้างหลัก ซึ่งอาจประกอบขึ้นจากชั้นวัสดุหลายชั้น การควบคุมการโค้งตัวของโครงสร้างคานประกอบนี้จะอาศัยทฤษฎีตามชั้น ร่วมกับวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษคคค่าง ในการหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม ที่จะป้อนให้ในแต่ละช่วงของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริก เพื่อให้โครงสร้างคานเกิดการเปลี่ยนรูปร่างเป็นไปตามที่ต้องการ



รูปที่ 1 โครงสร้างคานซึ่งประกอบด้วยชั้นของโครงสร้างหลัก (substrate) และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก

**2. สมการควบคุม**

พฤติกรรมของการเปลี่ยนรูปร่างของโครงสร้างคาน ที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ภายใต้แรงกระทำร่วมกับสนามไฟฟ้า สามารถอธิบายได้ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

สมการสมดุลของแรงเมื่อไม่คิดน้ำหนักของวัตถุ และสมการของเม็ทซ์เวลล์สำหรับไฟฟ้าสถิตเมื่อไม่มีประจุอิสระ ในระนาบ 2 มิติ (x-z) คือ

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด และความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับศักย์ไฟฟ้า สำหรับปัญหาในระนาบ 2 มิติ (x-z) คือ

$$S_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

$$S_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{5}$$

$$S_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{6}$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{7}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{8}$$

เมื่อ  $\sigma$  คือ หน่วยแรง (stress),  $D$  คือ การกระจัดไฟฟ้า (electric displacement),  $S$  คือ ความเครียด (strain),  $u$  คือ การกระจัดในทิศทาง  $x$ ,  $w$  คือ การกระจัดในทิศทาง  $z$ ,  $E$  คือ สนามไฟฟ้า (electric field) และ  $\phi$  คือ ศักย์ไฟฟ้า (electric potential)

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและการกระจัดไฟฟ้า กับความเครียดและสนามไฟฟ้า ในช่วงเชิงเส้น สำหรับโครงสร้างคานในบทความนี้ จะสมมติให้มีพฤติกรรมแบบความเค้นระนาบ (plane stress) ในระนาบ  $x-z$  นั่นคือ  $\sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$  และ  $E_y = 0$  รวมทั้งสมมติให้  $\sigma_{zz} = 0$  เนื่องจากมีค่าน้อยมาก [7] คือ

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 2S_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{15} \\ \bar{e}_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 2S_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} \tag{10}$$

เมื่อ  $\bar{C}$  คือ สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่น (elastic coefficient),  $\bar{e}$  คือ สัมประสิทธิ์เพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric coefficient) และ  $\bar{\epsilon}$  คือ อัตราความจุกระแสไฟฟ้า (dielectric constant or permittivities) รายละเอียดของค่าพารามิเตอร์ต่างๆ แสดงไว้ในภาคผนวก ก

**3. สมการรูปแบบอ่อน**

การวิเคราะห์พฤติกรรมของการเสียรูปของโครงสร้างคานยื่นประกอบในบทความนี้ จะใช้วิธีการหาค่าตอบโดยประมาณจากสมการรูปแบบอ่อน ซึ่งได้จากการแปลงสมการสมดุลที่ (1) ถึง (3) โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษคคค่าง และการอินทิเกรตตลอดพื้นที่  $\Omega$  ในระนาบ  $x-z$  ดังนี้

$$\int_{\Omega} \delta u \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + \delta w \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \delta \phi \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \tag{11}$$

เมื่อ  $\delta u, \delta w, \delta \phi$  คือ ฟังก์ชันน้ำหนักใดๆ

เมื่อทำการอินทิเกรตทีละส่วนและประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์กับสมการที่ (11) จะได้

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \sigma_{xz} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial \delta w}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} D_x + \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} D_z \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (\delta u t_x + \delta w t_z + \delta \phi D_n) d\Gamma \tag{12}$$

เมื่อ  $t_x, t_z$  คือ หน่วยแรงที่ผิว และ  $D_n$  คือ การกระจายไฟฟ้าในทิศทางตั้งฉากกับผิว ( $\Gamma$  คือขอบเขตโดยรอบพื้นที่  $\Omega$ )

จากนั้น แทนค่าสมการที่ (9) และ (10) ประกอบกับสมการที่

(4) ถึง (8) ลงในสมการที่ (12) จะได้สมการรูปแบบอ่อน คือ

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \left( \bar{C}_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{e}_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \left( \bar{C}_{55} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \bar{e}_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \left( \bar{C}_{55} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \bar{e}_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \left( \bar{e}_{15} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \bar{e}_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} \left( \bar{e}_{31} \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{e}_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (\delta u t_x + \delta w t_z + \delta \phi D_n) d\Gamma \quad (13)$$

#### 4. แบบจำลองตามชั้น

หลังจากได้สมการรูปแบบอ่อนแล้ว ก็จะสามารถหาคำตอบโดยประมาณได้ โดยการสมมติฟังก์ชันคำตอบของการกระจายและศักย์ไฟฟ้าขึ้น แล้วนำไปแทนในสมการรูปแบบอ่อนที่ (13) สำหรับโครงสร้างคานประกอบในที่นี้กำหนดให้การกระจาย  $u$  และศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $z$  ส่วนการกระจาย  $w$  สมมติให้เป็นฟังก์ชันของ  $x$  เท่านั้น เนื่องจากมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากในทิศทางตามความหนา [7] ดังนี้

$$u(x, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_i^u(x) \psi_j(z) U_{ij} = N_{ij}^u U_{ij} = [N^u] \{U\} \quad (14)$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^m R_i^w(x) W_i = N_i^w W_i = [N^w] \{W\} \quad (15)$$

$$\phi(x, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_i^\phi(x) \psi_j(z) \Phi_{ij} = N_{ij}^\phi \Phi_{ij} = [N^\phi] \{\Phi\} \quad (16)$$

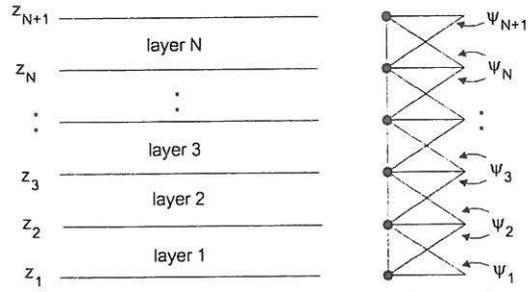
เมื่อ  $N_{ij}^u(x, z)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจาย  $u$ ,  $N_i^w(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจาย  $w$ ,  $N_{ij}^\phi(x, z)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$ ,  $R_i^u(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจาย  $u$  ในทิศทาง  $x$ ,  $R_i^w(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจาย  $w$  ในทิศทาง  $x$ ,  $R_i^\phi(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ในทิศทาง  $x$ ,  $\psi_j(z)$  คือ ฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์เชิงเส้นในทิศทาง  $z$  และ  $U_{ij}, W_i, \Phi_{ij}$  คือ ตัวไม่ทราบค่าของการกระจาย  $u, w$  และศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ตามลำดับ

ในแบบจำลองตามชั้น (layerwise model) นี้ จะใช้ฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์เชิงเส้นเป็นฟังก์ชันรูปร่างในทิศทาง  $z$  ดังรูปที่ 2 โดยฟังก์ชันการประมาณของชั้น  $j$  คือ

$$\psi_j(z) = \frac{z_{j+1} - z}{h_j} \quad (17)$$

$$\psi_{j+1}(z) = \frac{z - z_j}{h_j} \quad (18)$$

เมื่อ  $h_j = z_{j+1} - z_j$  คือ ความหนาของชั้น  $j$ ,  $j=1, 2, \dots, N$  และ  $N$  คือ จำนวนชั้นทั้งหมด



รูปที่ 2 ฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์เชิงเส้นในทิศทางตามความหนา

ตามวิธีของกาลอ์กิน (Galerkin) ฟังก์ชันน้ำหนักจะแทนด้วยฟังก์ชันรูปร่างของการกระจายและศักย์ไฟฟ้า นั่นคือ  $\delta u = [N^u]^T$ ,

$$\delta w = [N^w]^T \text{ และ } \delta \phi = [N^\phi]^T$$

หลังจากแทนค่าฟังก์ชันคำตอบตามสมการที่ (14) ถึง (16) รวมทั้งฟังก์ชันน้ำหนักลงในสมการรูปแบบอ่อนที่ (13) จะสามารถจัดรูปสมการได้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{u\phi} \\ K_{wu} & K_{ww} & K_{w\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi w} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^u \\ F^w \\ F^\phi \end{Bmatrix} \quad (19)$$

รายละเอียดของเทอมต่างๆ ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข สมการที่ (19) นี้ จะอยู่ในรูปสมการเชิงเส้น และเมื่อทำการแก้สมการก็จะสามารถหาค่าตัวไม่ทราบค่า  $U, W$  และ  $\Phi$  ได้ตามต้องการ

#### 5. เงื่อนไขขอบเขตและฟังก์ชันรูปร่าง

โครงสร้างคานชั้นในที่นี้ยึดติดแน่น (fixed) ที่ปลายด้านซ้าย และปล่อยอิสระ (free) ที่ปลายด้านขวา นั่นคือ เงื่อนไขขอบเขตของการกระจาย  $u$  และ  $w$  จะเป็นดังนี้

$$u(x=0, z) = 0 \quad (20)$$

$$w(x=0) = 0 \quad (21)$$

ฟังก์ชันรูปร่างตามความยาวคาน (แกน  $x$ ) ของการกระจาย  $u$  และ  $w$  ซึ่งจะต้องเลือกใช้ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวข้างต้น ในที่นี้จะเลือกใช้ฮาร์มอนิกฟูเรียร์ ดังนี้

$$R_i^u(x) = \sin\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) \quad (22)$$

$$R_i^w(x) = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) - 1 \quad (23)$$

ในการควบคุมรูปร่างของคานยื่นนี้ จะทำการกำหนด ศักย์ไฟฟ้าที่มีค่าคงที่เป็นช่วงๆ ตลอดความยาวคานที่มีผิวของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก (ส่วนที่ผิวล่างของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก กำหนดให้มีค่า ศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์) ซึ่งศักย์ไฟฟ้าดังกล่าว สามารถแทนได้ด้วย อนุกรมฟูเรียร์ ในที่นี้จะเลือกใช้ออนุกรมฟูเรียร์ไซน์ที่มีฟังก์ชันรูปร่าง ดังนี้

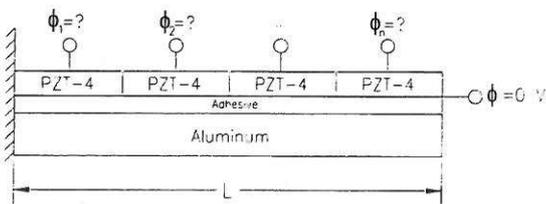
$$R_j^p(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (24)$$

6. การควบคุมการโก่งตัว

การควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานยื่น ที่มีวัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดอยู่ที่ผิวบน เพื่อให้ได้รูปร่างตามที่ต้องการ ในที่นี้จะกระทำ โดยการป้อนค่าศักย์ไฟฟ้าแบบคงที่เป็นช่วงๆ ให้กับชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก (ดูรูปที่ 3) ดังนั้นผลลัพธ์ของการโก่งตัวที่ต้องการจะประมาณ ได้ดังนี้

$$w(x) \approx \phi_1 f_1(x) + \phi_2 f_2(x) + \phi_3 f_3(x) + \dots + \phi_n f_n(x) \quad (25)$$

เมื่อ  $w(x)$  คือ ค่าการโก่งตัวที่ต้องการ,  $f_j(x)$  คือ การโก่งตัวของคาน เนื่องจากศักย์ไฟฟ้า 1 หน่วย ที่กำหนดให้กับชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในช่วง  $j$  และ  $\phi_j$  คือ ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่จะต้องป้อนให้กับ ชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในแต่ละช่วง



รูปที่ 3 โครงสร้างคานยื่นที่ทำการควบคุมการโก่งตัว

ค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมนี้ สามารถหาได้โดยอาศัยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ดังนี้

$$\int_x W_i \left[ w(x) - \sum_{j=1}^n \phi_j f_j \right] dx = 0 \quad (26)$$

เมื่อ  $W_i$  คือ ฟังก์ชันน้ำหนัก,  $i = 1, 2, \dots, n$  และ  $n$  คือ จำนวนช่วงที่ พิจารณาตามความยาวคานของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก

ฟังก์ชันน้ำหนัก  $W_i$  ในที่นี้เลือกใช้ฟังก์ชันการกระจัด เนื่องจากศักย์ไฟฟ้า 1 หน่วยในแต่ละช่วง ( $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ ) การหาค่า ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่สุดจะอาศัยการแก้สมการที่ (26) ซึ่งสามารถ เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[a]\{\phi\} = \{b\} \quad (27)$$

$$\text{เมื่อ } a_{ij} = \int_0^L f_i f_j dx \cdot b_i = \int_0^L f_i w(x) dx \text{ และ } i, j = 1, 2, \dots, n$$

7. ผลการศึกษา

โครงสร้างตัวอย่างคานยื่น ที่ทำการควบคุมการโก่งตัวใน บทความนี้ประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น คือ ชั้นของวัสดุหลัก (อลูมิเนียม) ชั้น ของวัสดุยึดติด (adhesive) และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 ดังแสดงในรูปที่ 3 ชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะถูกแบ่งออกเป็น ช่วงๆ เท่าๆ กันตลอดความยาวคาน ที่ผิวล่างของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ของทุกช่วงกำหนดให้มีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์ คุณสมบัติวัสดุของ อลูมิเนียม วัสดุยึดติด และวัสดุเพียโซอิเล็กทริก แสดงไว้ในตารางที่ 1 ในการวิเคราะห์การโก่งตัวของคานประกอบด้วยแบบจำลองตามชั้น จะ พิจารณาแบ่งจำนวนชั้นออกเป็น 6/1/2 (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) และใช้จำนวนเทอมของการกระจัด ในทิศทางตามความยาวคานเท่ากับ 20 เทอม ส่วนจำนวนเทอมของศักย์ไฟฟ้า ในทิศทางตามความยาวคาน ใช้เท่ากับ 150 เทอม

ตารางที่ 1 คุณสมบัติของอลูมิเนียม วัสดุยึดติด และวัสดุ PZT-4 (Chee และคณะ [8])

	Aluminum	Adhesive	PZT-4
$E_{11}$ (Pa)	$6.8900 \times 10^{10}$	$6.9000 \times 10^9$	$8.1300 \times 10^{10}$
$E_{33}$ (Pa)	$6.8900 \times 10^{10}$	$6.9000 \times 10^9$	$6.4500 \times 10^{10}$
$G_{13}$ (Pa)	$2.7600 \times 10^{10}$	$2.4600 \times 10^9$	$2.5600 \times 10^{10}$
$\nu_{13}$	0.25	0.4	0.43
$d_{31}$ (m/V)	-	-	$-1.22 \times 10^{-10}$
$\epsilon_{11}$ (F/m)	-	-	$1.305965 \times 10^{-8}$
$\epsilon_{33}$ (F/m)	-	-	$1.15102 \times 10^{-8}$
L (m)	0.1524	0.1524	0.1524
h (m)	0.01524	0.000254	0.001524
b (m)	0.0254	0.0254	0.0254

การควบคุมการโก่งตัวของคานยื่นในที่นี้ จะกำหนดรูปแบบ การโก่งตัวที่ต้องการ (Expected) ขึ้น 3 แบบ คือ แบบเส้นตรง แบบโค้ง กำลังสอง และแบบโค้งกำลังสาม (การโก่งตัวแบบเส้นตรงจะมีมุมหมุน ที่จุดยึดแน่นไม่เท่ากับศูนย์ อาจจะไม่เหมาะสมในการเปรียบเทียบ) การ หาค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม ในกรณีที่กำหนดการโก่งตัวที่ต้องการแบบ เส้นตรง พบว่า การโก่งตัวที่ได้เมื่อใช้ศักย์ไฟฟ้าแบบคงที่ตลอดความยาว คานจะมีค่าลาดเคลื่อนสูง การพิจารณาให้ค่าศักย์ไฟฟ้าแบบคงที่เป็น ช่วงๆ จะช่วยให้การควบคุมการโก่งตัวมีประสิทธิภาพมากขึ้น ดังรูปที่ 4 และจะเห็นว่า ถ้ายังแบ่งจำนวนช่วงการให้ศักย์ไฟฟ้าให้มากขึ้น ก็จะทำให้ ค่าลาดเคลื่อนยิ่งลดน้อยลง โดยที่แนวโน้มของค่าศักย์ไฟฟ้าเมื่อเพิ่ม จำนวนช่วง จะมีลักษณะแบบฟันปลาที่มีค่าลดลง เมื่อมีระยะห่างออก จากจุดรองรับแบบยึดแน่น สำหรับกรณีการโก่งตัวที่ต้องการแบบโค้ง กำลังสอง พบว่า การควบคุมโดยการให้ศักย์ไฟฟ้าคงที่เพียงค่าเดียว ตลอดความยาวคาน ก็เพียงพอที่จะทำให้คานเกิดการโก่งตัวได้ใกล้เคียง

กับที่ต้องการ ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 5 ที่แม้จะพิจารณาเพิ่มจำนวนช่วงของการให้ศักย์ไฟฟ้า ค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมของแต่ละช่วงเกือบจะไม่แตกต่างกัน ส่วนในกรณีการโค้งตัวที่ต้องการแบบโค้งกำลังสาม พบว่าการควบคุม โดยใช้ศักย์ไฟฟ้าแบบคงที่ตลอดความยาวคาน จะไม่เหมาะสม เนื่องจากมีค่าคลาดเคลื่อนสูง การพิจารณาให้ศักย์ไฟฟ้าแบบคงที่เป็นช่วงๆ จะเหมาะสมกว่า ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 6 การเพิ่มจำนวนช่วงการให้ศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่มากขึ้น จะช่วยให้การโค้งตัวที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการมากขึ้น ทั้งนี้ สำหรับการโค้งตัวแบบโค้งกำลังสาม ค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมกับการควบคุมจะมีลักษณะเป็นขั้นบันได ที่มีค่าเพิ่มขึ้นตามระยะห่างจากจุดรองรับแบบชัดเจน

8. สรุป

งานวิจัยนี้ได้นำแบบจำลองตามชั้น ไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมการโค้งตัวของโครงสร้างคานประกอบ ที่มีชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดอยู่ โดยอาศัยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษคก้าง ในการหาศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมสำหรับป้อนให้แก่ชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริก เพื่อควบคุมการโค้งตัวของโครงสร้างคานให้ได้รูปร่างตามที่ต้องการ ในที่นี้ได้ใช้ออนุกรมฟูเรียร์เป็นฟังก์ชันรูปร่างตามความยาวคาน เนื่องจากจะช่วยให้ผลลัพธ์ของการโค้งตัวที่ได้เป็นเส้นโค้งที่ต่อเนื่อง รวมทั้งยังสะดวกในการคำนวณ เมื่อต้องการผลลัพธ์ที่ละเอียดมากขึ้น ก็สามารถเพิ่มจำนวนเทอมได้โดยง่าย จากการทดสอบการควบคุมโครงสร้างคานอื่น โดยสมมติฟังก์ชันการโค้งตัวที่ต้องการเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังต่างๆ พบว่าการแบ่งจำนวนช่วงการให้ศักย์ไฟฟ้า แก่ชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตลอดความยาวคานที่เพิ่มขึ้น จะช่วยให้สามารถควบคุมการโค้งตัวของโครงสร้างคานให้ใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการได้มากขึ้น อนึ่งในกรณีที่การโค้งตัวที่ต้องการเป็นแบบโค้งกำลังสอง การควบคุมสามารถใช้ค่าศักย์ไฟฟ้าแบบมีค่าคงที่ตลอดความยาวของคานได้

เอกสารอ้างอิง

[1] H.J. Lee, "Finite element analysis of active and sensory thermopiezoelectric composite material", Glen Research Center, Cleland, Ohio, 2001, pp. 1-123.  
 [2] P. Donthireddy and K. Chandrashekhara, "Modeling and shape control of composite beams with embedded piezoelectric actuators", Composite Structures, Vol. 35, 1996, pp. 237-244.  
 [3] M. Eisenberger and H. Abramovich, "Shape control of non-symmetric piezolaminated composite beams", Composite Structures, Vol. 38, No. 1-4, 1997, pp. 565-571.  
 [4] Z. Wang, S. Chen, and W. Han, "The static shape control for intelligent structures", Finite Element in Analysis and Design, Vol. 26, 1997, pp. 303-314.  
 [5] B.N. Agrawal, M.A. Elshafei, and G. Song, "Adaptive antenna shape control using piezoelectric actuators", Acta Astronautica, Vol. 40, No. 11, 1997, pp. 521-826.

[6] Q. Nguyen and L. Tong, "Shape control of smart composite plate with non-rectangular piezoelectric actuators", Composite Structures, Vol. 66, 2004, pp. 207-214.  
 [7] S. Kapuria, "An efficient couple theory for multilayered beams with embedded piezoelectric sensory and active layers". International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, 2001, pp. 9179-9199.  
 [8] C.Y.K. Chee, L. Tong, and G.P. Steven, "A mixed model for composite beams with piezoelectric actuators and sensors". Smart Mater. Struct., Vol. 8, 1999, pp. 417-432.

ภาคผนวก ก

$$\bar{C}_{11} = (C_{11} - \frac{C_{12}C_{12}}{C_{22}}) - \frac{(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}})(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} = E_{11}$$

$$\bar{C}_{55} = C_{55} = G_{13}$$

$$\bar{e}_{31} = (e_{31} - \frac{C_{12}}{C_{22}}e_{32}) - \frac{(e_{33} - \frac{C_{23}e_{32}}{C_{22}})(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} = E_{11}d_{31}$$

$$\bar{e}_{15} = e_{15} = G_{13}d_{15}$$

$$\bar{\epsilon}_{11} = \epsilon_{11}$$

$$\bar{\epsilon}_{33} = (\epsilon_{33} + \frac{e_{32}e_{32}}{C_{22}}) + \frac{(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32})(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} \approx \epsilon_{33}$$

ภาคผนวก ข

$$K_{uu} = \int_{\Omega} ([N_{,x}^u]^T \bar{C}_{11} [N_{,x}^u] + [N_{,z}^u]^T \bar{C}_{55} [N_{,z}^u]) d\Omega$$

$$K_{uw} = \int_{\Omega} [N_{,z}^u]^T \bar{C}_{55} [N_{,z}^w] d\Omega$$

$$K_{u\phi} = \int_{\Omega} ([N_{,x}^u]^T \bar{e}_{31} [N_{,z}^{\phi}] + [N_{,z}^u]^T \bar{e}_{15} [N_{,x}^{\phi}]) d\Omega$$

$$K_{ww} = \int_{\Omega} [N_{,x}^w]^T \bar{C}_{55} [N_{,x}^w] d\Omega$$

$$K_{w\phi} = \int_{\Omega} [N_{,x}^w]^T \bar{C}_{55} [N_{,x}^{\phi}] d\Omega$$

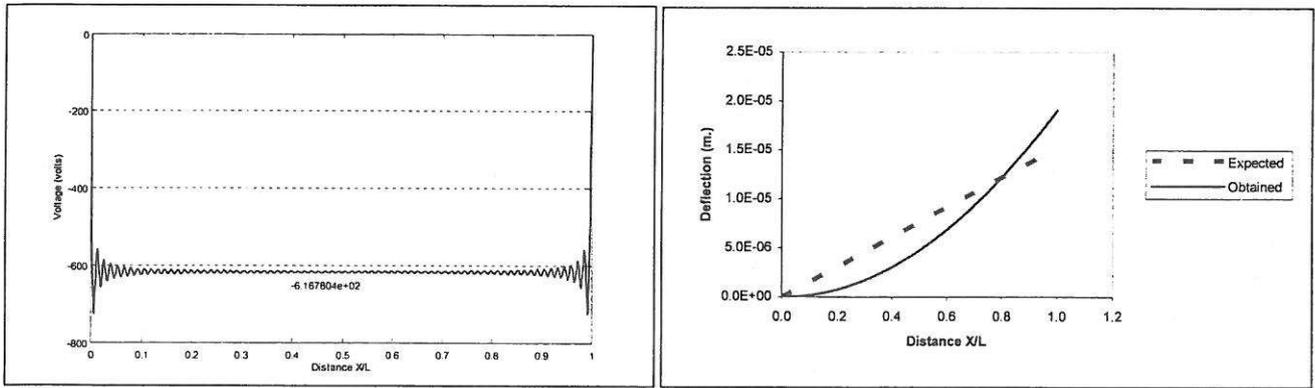
$$K_{\phi\phi} = \int_{\Omega} [N_{,x}^{\phi}]^T \bar{e}_{15} [N_{,x}^w] d\Omega$$

$$K_{\phi\psi} = - \int_{\Omega} ([N_{,x}^{\phi}]^T \bar{\epsilon}_{11} [N_{,x}^{\psi}] + [N_{,z}^{\phi}]^T \bar{\epsilon}_{33} [N_{,z}^{\psi}]) d\Omega$$

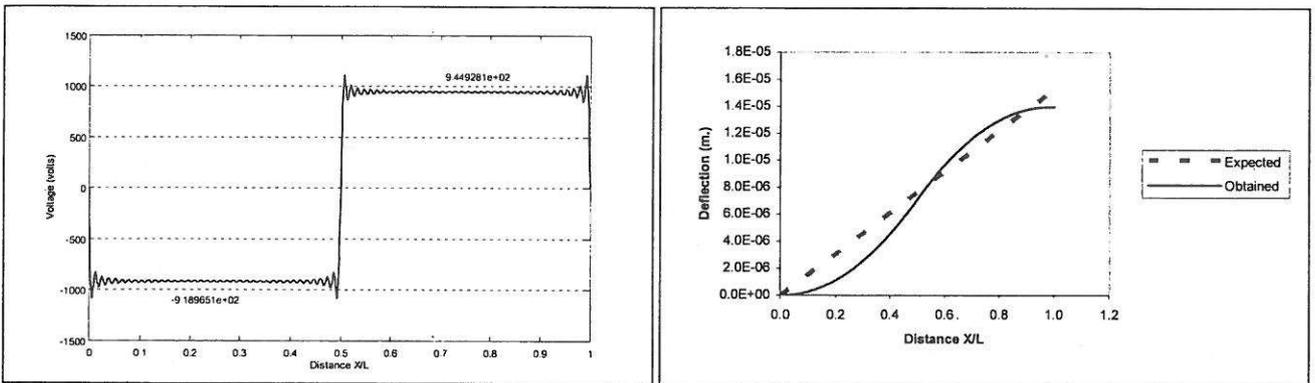
$$F^u = \oint_{\Gamma} ([N^u]^T t_x) d\Gamma$$

$$F^w = \oint_{\Gamma} ([N^w]^T t_z) d\Gamma$$

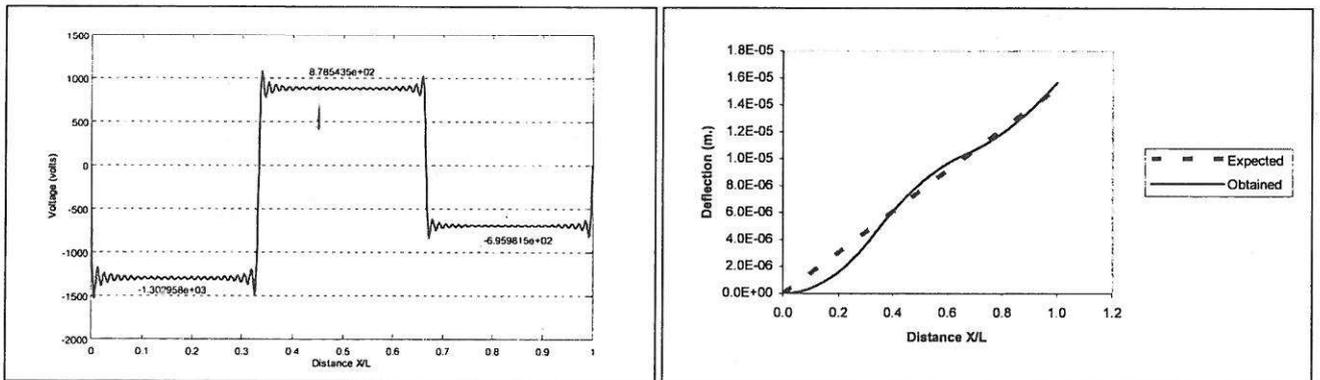
$$F^{\phi} = \oint_{\Gamma} ([N^{\phi}]^T D_n) d\Gamma$$



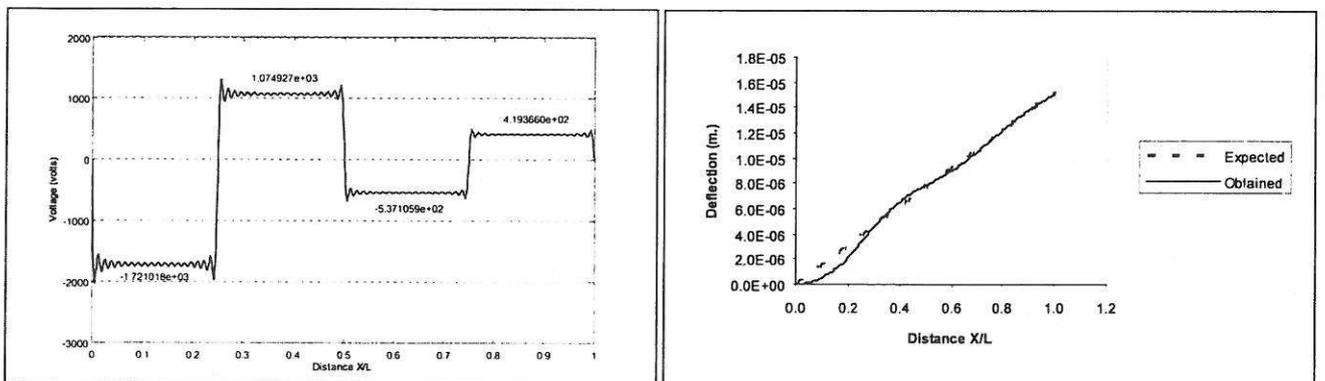
(น)



(ข)

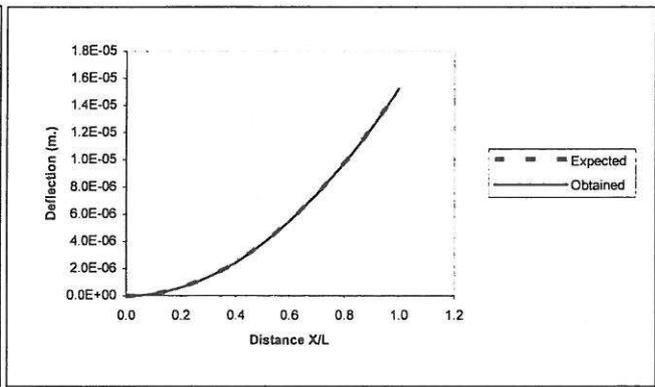
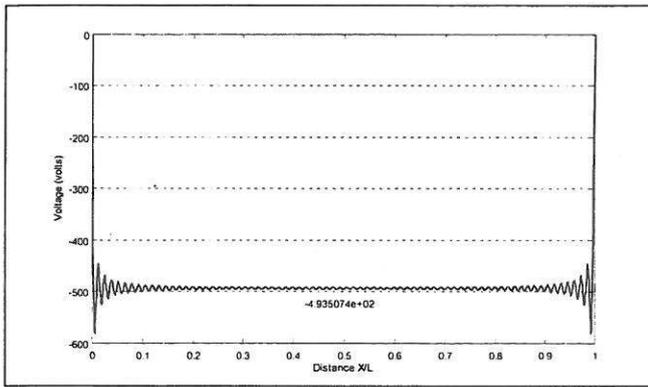


(ค)

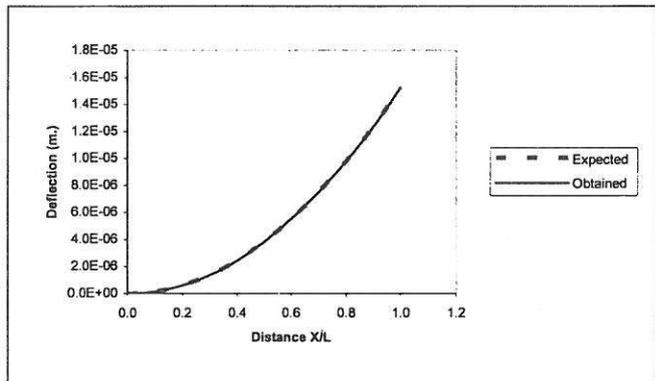
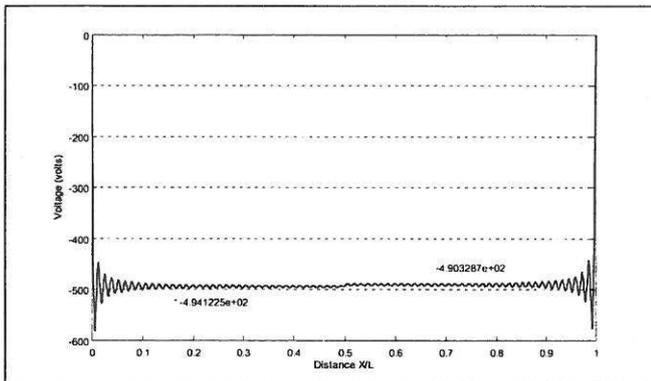


(ง)

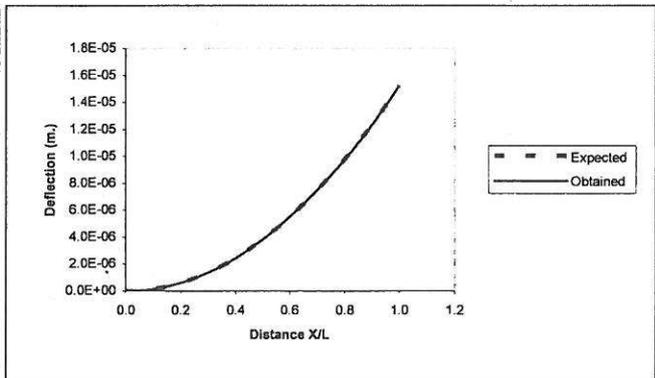
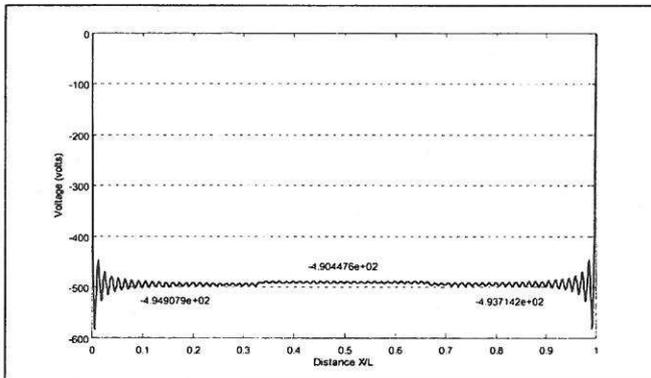
รูปที่ 4 ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมและการโค้งตัวที่ได้ เมื่อการโค้งตัวที่ต้องการเป็นแบบเส้นตรงและแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเป็น (ก) 1 ช่วง (ข) 2 ช่วง (ค) 3 ช่วง (ง) 4 ช่วง



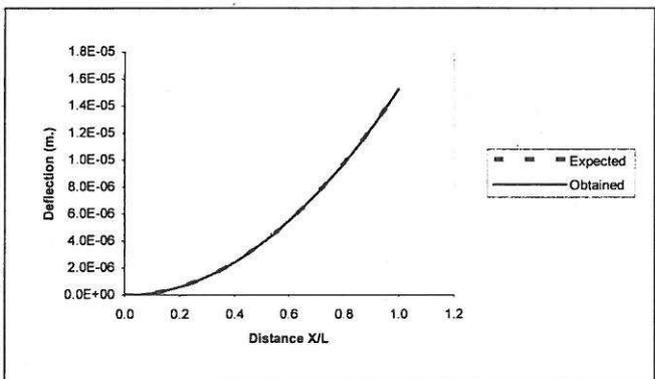
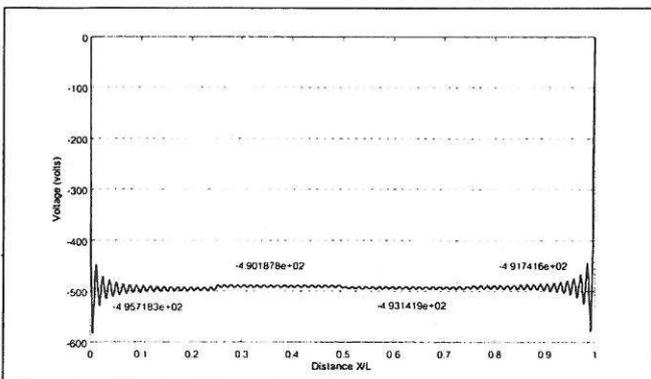
(ก)



(ข)

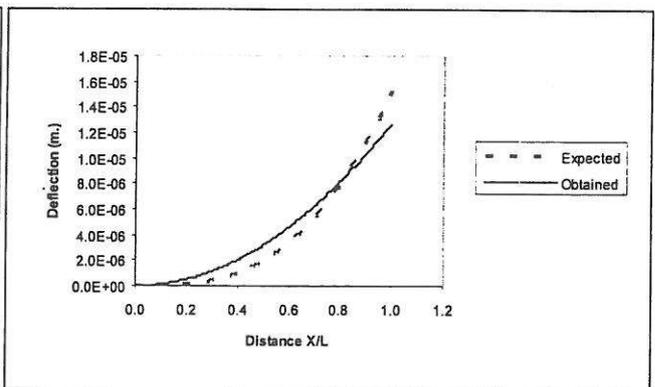
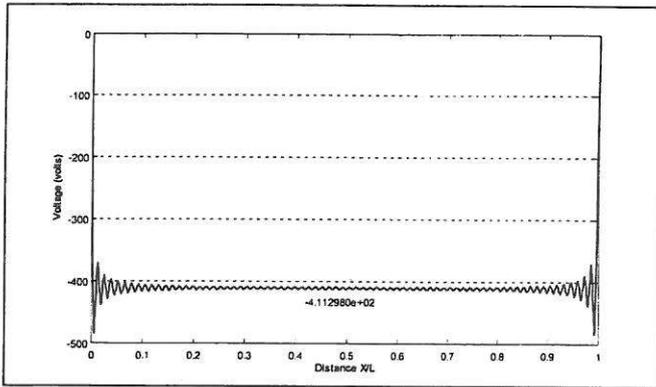


(ค)

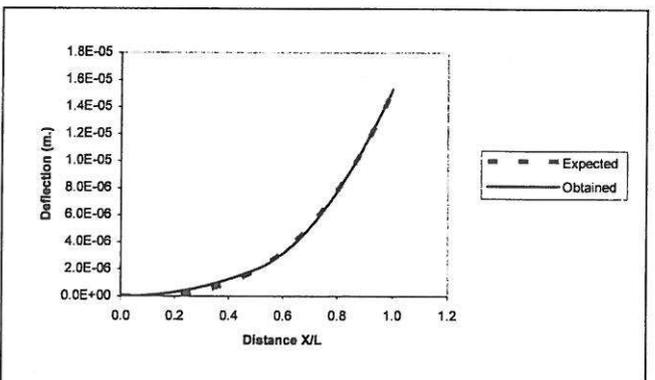
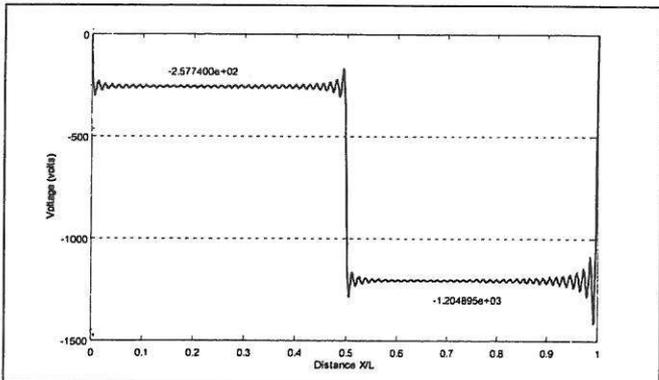


(ง)

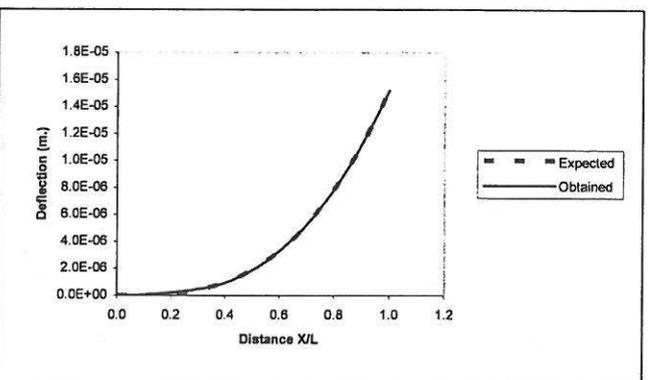
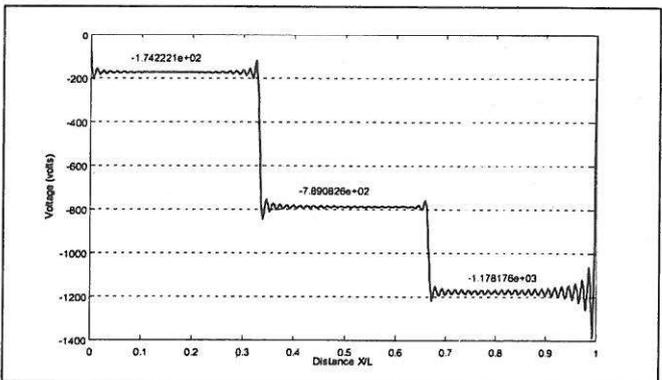
รูปที่ 5 ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมและการ โกงตัวที่ได้ เมื่อการ โกงตัวที่ต้องการเป็นแบบโค้งกำลังสองและแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเป็น (ก) 1 ช่วง (ข) 2 ช่วง (ค) 3 ช่วง (ง) 4 ช่วง



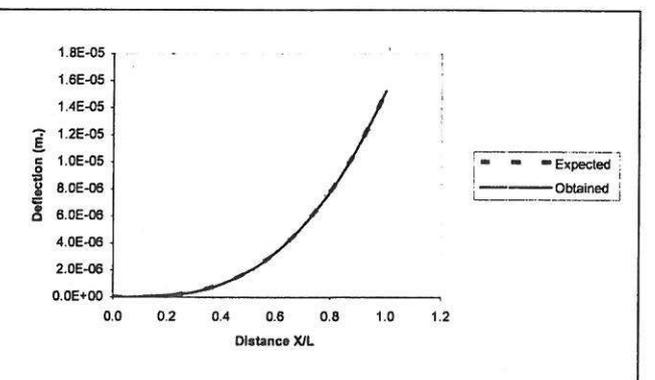
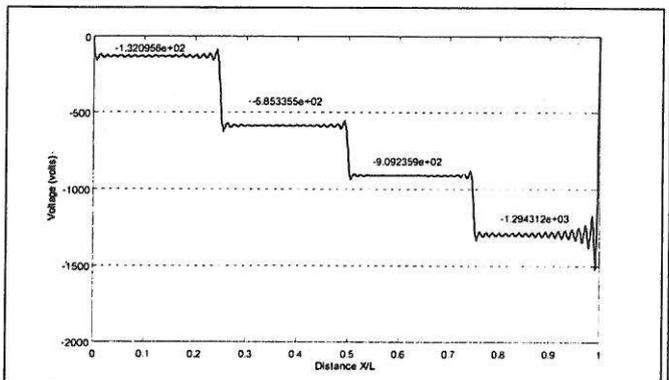
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 6 ค่ายไฟฟ้าที่เหมาะสมและการโค้งตัวที่ได้ เมื่อการโค้งตัวที่ต้องการเป็นแบบโค้งกำลังสามและแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเป็น (ก) 1 ช่วง (ข) 2 ช่วง (ค) 3 ช่วง (ง) 4 ช่วง