

การออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน โดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นฮอโมโทปี

Robust $\mathcal{H}_2$ Controller Design for Lur'e Systems with Multiple Slope Restrictions Using a Homotopy Linear Matrix Inequality Approach

ฐานา นามประดิษฐ์ และ เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย

ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์: 0-2218-6487 โทรสาร: 0-2251-8991 e-mail: bdavid@chula.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอแนวทางใหม่ในการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง. ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นป้อนกลับแทนความไม่แน่นอนเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีความจำและไม่แปรผันตามเวลา. ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรขาเข้าและตัวแปรขาออกของฟังก์ชัน อยู่ในเซกเตอร์ที่มีขอบเขตและมีความชันที่มีขอบเขต. ปัญหาการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่พิจารณาอยู่ในรูปแบบปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่. บทความนี้เสนอวิธีการกำจัดเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุมจากเงื่อนไขการออกแบบ และใช้การวนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเพื่อหาตัวควบคุม ซึ่งคำตอบที่ได้เป็นคำตอบเฉพาะที่. ตัวอย่างเชิงเลขแสดงให้เห็นว่า ตัวควบคุมที่ออกแบบสามารถรักษาเสถียรภาพ และปรับปรุงสมรรถนะของระบบวงปิดภายใต้ความไม่แน่นอนให้ดีขึ้น. ดังนั้นวิธีออกแบบตัวควบคุมที่นำเสนอจึงเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการประกันเสถียรภาพ และสมรรถนะของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ภายใต้ความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง.

คำสำคัญ: ระบบลูเร, การจำกัดความชัน, การวิเคราะห์สมรรถนะ, การสังเคราะห์ตัวควบคุม, อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น, วิธีฮอโมโทปี.

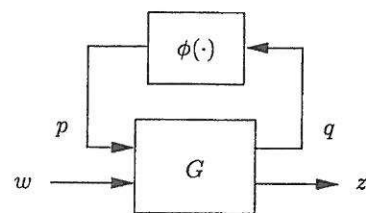
Abstract

This paper presents a novel approach of the robust $\mathcal{H}_2$ controller design for linear time-invariant systems subject to real parametric uncertainty. The uncertainty set is described by memoryless, time-invariant, sector-bounded, and slope-restricted nonlinearities. The controller synthesis is formulated as nonlinear optimization over bilinear matrix inequalities. By eliminating the dynamic matrix of design variables and alternating between three different linear matrix inequality problems, locally optimal solutions can be obtained. The numerical examples show that our designed robust controllers can retain stability and improve performance of the closed-loop uncertain systems.

Therefore, the unified approach leads to an effective design tool which guarantees both stability and performance of linear time-invariant systems under real parametric uncertainty.

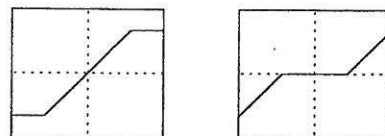
Keywords: Lur'e systems, slope restriction, performance analysis, controller synthesis, linear matrix inequalities, homotopy method.

1. บทนำ



รูปที่ 1: แผนภาพระบบลูเร

ระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา (linear time invariant system) ที่มีการป้อนกลับผ่านองค์ประกอบไม่เชิงเส้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเซกเตอร์ (sector bounded nonlinear element) เรียกว่าระบบลูเร (Lur'e systems) แสดงดังรูปที่ 1.



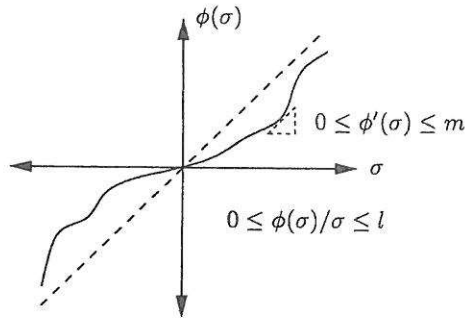
(ก) การอิมิตัว

(ข) เซกเตอร์ผลสอง

รูปที่ 2: ลักษณะขององค์ประกอบไม่เชิงเส้น

แบบจำลองดังกล่าวครอบคลุมระบบควบคุมทั่วไป ที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นแฝงอยู่ในระบบ. ความไม่เป็นเชิงเส้นดังกล่าวสามารถจำแนกได้เป็น 2 กลุ่ม. กลุ่มแรกเป็นความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากองค์ประกอบทางกายภาพโดยตรง เช่น การอิมิตัวของตัวขับเคลื่อน

(saturating actuator), และเขตไร้ผลสนอง (dead zone) แสดงดังรูปที่ 2. กลุ่มที่สองเป็นความไม่เป็นเชิงเส้น ที่เกิดจากความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง เช่น ความแข็งตึงของสปริง (spring stiffness) และสัมประสิทธิ์หน่วง (damping coefficient), ซึ่งเมื่อพิจารณาความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรขาเข้า (input variable) และตัวแปรขาออก (output variable) ก็สามารถสร้างเป็นแบบจำลองที่เทียบเท่ากับความเป็นเชิงเส้นในกลุ่มแรกได้.



รูปที่ 3: ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรขาเข้าและตัวแปรขาออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

นอกจากเงื่อนไขเชกเตอร์, องค์ประกอบไม่เชิงเส้นมักจะมีลักษณะสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไขความชัน (slope constraint) ด้วย, และการเพิ่มเติมเงื่อนไขความชันให้กับองค์ประกอบไม่เชิงเส้นในแบบจำลองที่พิจารณา จะทำให้ความอนุรักษ์ (conservatism) ของการวิเคราะห์สมรรถนะของวงควบคุม และการสังเคราะห์ตัวควบคุม (controller synthesis) ลดลงได้. ดังนั้นระบบที่มีการจำกัดความชัน (Lur'e systems with slope restriction) จึงเป็นแบบจำลองที่เหมาะสมกว่าระบบแบบเดิม. ในบทความนี้จะพิจารณาระบบที่มีป้อนกลับผ่านองค์ประกอบไม่เชิงเส้น ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเชกเตอร์ และเงื่อนไขความชัน. ฟังก์ชันที่แทนองค์ประกอบไม่เชิงเส้นไม่มีความจำ (memoryless) และไม่แปรผันตามเวลา (time invariant). นอกจากนี้กำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรขาเข้า และตัวแปรขาออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นถูกจำกัดขอบเขตอยู่ในจุดภาค (quadrant) ที่หนึ่งและสาม แสดงดังรูปที่ 3.

ในการพิจารณาเสถียรภาพสัมบูรณ์ (absolute stability) สำหรับระบบ, Lur'e และ Postnikov [1] ได้นำเสนอฟังก์ชันเลียปูนอฟ (Lyapunov function) ในรูปกำลังสองของตัวแปรสถานะ (state variable) และอินทิกรัล (integral) ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นดังนี้

$$V(x) = x^T P x + \int_0^q \phi(\sigma) d\sigma.$$

Popov [2] ได้นำเสนอสมการสำหรับบ่งชี้เสถียรภาพของระบบ เรียกว่าเกณฑ์โปปอฟ (Popov criterion). ฟังก์ชันเลียปูนอฟที่ใช้ในการวิเคราะห์ของโปปอฟ สามารถนำมาประยุกต์ร่วมกับดัชนีสมรรถนะ H_2 (H_2 performance index) เพื่อคำนวณ

หาขอบเขตบน (upper bound) ของสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุด (worst-case H_2 performance) ของระบบได้. Boyd และคณะ [3] ได้นำเสนอเงื่อนไขเพียงพอ (sufficient condition) สำหรับคำนวณหาขอบเขตบนของสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบในรูปแบบของปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequalities, LMI). Banjerdpongchai และ How [4] ได้ขยายผลการวิเคราะห์สมรรถนะ H_2 [3] ไปสู่การสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยการแก้ปัญหามาตรการเมทริกซ์เชิงเส้นแบบวนซ้ำ (iterative LMI). อย่างไรก็ตามงานวิจัยที่ผ่านมา [1, 2, 3, 4] พิจารณาเงื่อนไขเชกเตอร์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นเท่านั้น. ดังนั้นการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะ โดยใช้ประโยชน์จากเงื่อนไขความชันด้วยน่าจะลดความอนุรักษ์ลงได้.

การลดความอนุรักษ์ของการวิเคราะห์เสถียรภาพ จะทำให้เราสามารถประกันเสถียรภาพของระบบได้ โดยที่ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมีขอบเขตเชกเตอร์กว้างกว่าค่าเดิม, และการลดความอนุรักษ์ของการวิเคราะห์สมรรถนะ จะทำให้เราสามารถประกันค่าสมรรถนะได้ต่ำลงกว่าเดิม, เมื่อฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมีขอบเขตเชกเตอร์ที่กำหนด.

ในภายหลัง Park [5] ได้นำเสนอเกณฑ์ (criterion) ในการบ่งชี้เสถียรภาพของระบบที่มีการจำกัดความชัน ในรูปแบบปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยใช้ประโยชน์จากคุณสมบัติของเงื่อนไขเชกเตอร์ และเงื่อนไขความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น. เกณฑ์เสถียรภาพของ Park ให้ผลลัพธ์ที่มีความอนุรักษ์น้อยกว่าเกณฑ์โปปอฟสำหรับระบบที่มีการจำกัดความชัน. จากผลดังกล่าวนี้ เราได้นำเสนอการวิเคราะห์สมรรถนะ H_2 ของระบบที่มีการจำกัดความชันหลายค่า ในรูปแบบปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้น [6]. การวิเคราะห์สมรรถนะแบบใหม่มีความอนุรักษ์น้อยกว่าการวิเคราะห์แบบเดิม [3] สำหรับระบบที่มีการจำกัดความชัน.

จุดมุ่งหมายของบทความนี้ คือการขยายผลการวิเคราะห์สมรรถนะ H_2 [6] ไปสู่การสังเคราะห์ตัวควบคุม H_2 คงทน สำหรับระบบที่มีการจำกัดความชัน. ปัญหาการออกแบบตัวควบคุม H_2 คงทนที่พิจารณา อยู่ในรูปแบบปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (bilinear matrix inequality, BMI). บทความนี้ นำวิธีการแก้ปัญหามาตรการเมทริกซ์เชิงเส้นแบบวนซ้ำจาก [4] มาใช้ในการแก้ปัญหา BMI. เป็นที่สังเกตว่าปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้นมีลักษณะเป็นปัญหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ (convex optimization) และสามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธี interior-point อย่างมีประสิทธิภาพ.

ลำดับเนื้อหาในบทความเป็นดังนี้ ในตอนที่ 2 อธิบายสัญกรณ์และนำเสนอบทตั้ง (lemma) ทางพีชคณิตที่ใช้ในขั้นตอนการสังเคราะห์ตัวควบคุม. ในตอนที่ 3 กล่าวถึงการกำหนดปัญหามาตรการวิเคราะห์สมรรถนะและการสังเคราะห์ตัวควบคุม H_2 คงทน. ในตอนที่ 4 กล่าวถึงนิยามของสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบ และนำเสนอทฤษฎีบทสำหรับคำนวณค่าขอบเขตบนของดัชนีสมรรถนะดังกล่าว. ในตอนที่ 5 นำเสนอการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยวิธีการหาค่าเหมาะที่สุดสองขั้นตอน (two-stage optimization). ในตอนที่ 6 นำเสนอตัวอย่างเชิงเลข (numerical

example) เป็นการออกแบบตัวควบคุมลงท่นสำหรับระบบ 2 ระบบ ได้แก่ ระบบมวลสปริง (mass-spring system) และระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ (coupling rotating disk system), และในตอนท่ 7 นำเสนอบทสรุป.

2. สัญกรณ์และบทตั้งทางคณิตศาสตร์

$\mathbb{R}^{m \times n}$ แทนปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) ค่าจริงขนาด $m \times n$. สำหรับเมทริกซ์ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, A^T แทนตัวสลับเปลี่ยน (transpose) ของ A . ถ้า $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{Tr} A$ แทนผลบวกในแนวทแยงมุม (trace) ของ A . เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity) แทนด้วยสัญลักษณ์ I . สำหรับเมทริกซ์สมมาตรค่าจริง (real symmetric matrix) A , นิพจน์ $A > 0$ แทนเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite), นั่นคือ เมทริกซ์ที่มีค่าเฉพาะจริง (eigenvalue) ทุกค่า เป็นบวก และนิพจน์ $A \geq 0$ แทนเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (semi-positive definite), นั่นคือ เมทริกซ์ที่มีค่าเฉพาะจริงทุกค่าเป็นบวกหรือศูนย์.

$\mathcal{L}_2^n$ คือปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) ของสัญญาณ n จำนวน ที่มีค่าอินทิกรัลของกำลังสองของสัญญาณในช่วง $[0, \infty)$ มีค่าจำกัด (finite), นั่นคือ สำหรับ $z \in \mathcal{L}_2^n$ จะสอดคล้องกับ $\|z\|_2^2 := \int_0^\infty z^T z dt < \infty$, เมื่อ $\|\cdot\|$ แทนนอร์ม (norm) $\mathcal{L}_2$, โดยมาก $\mathcal{L}_2^n$ เขียนย่อเป็น $\mathcal{L}_2$.

บทตั้ง 1 (Elimination Lemma [3]) กำหนดให้ $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ และ $V \in \mathbb{R}^{n \times q}$. นิยาม $U_\perp$ เป็นส่วนเติมเต็มตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ U , และ $V_\perp$ เป็นส่วนเติมเต็มตั้งฉากของ V . จะมีเมทริกซ์ $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$G + VX^T U^T + UXV^T < 0$$

ก็ต่อเมื่อ

$$V_\perp^T G V_\perp < 0, \text{ และ } U_\perp^T G U_\perp < 0.$$

พิสูจน์: ดูใน [3] หน้า 32–33.

บทตั้ง 2 (Completion Lemma [7]) กำหนดให้ P และ $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน. จะมีเมทริกซ์บวกแน่นอน $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ ซึ่งกลุ่ม (block) บนซ้ายขนาด $m \times m$ ของ $\tilde{P}$ คือ P , และกลุ่มบนซ้ายขนาด $m \times m$ ของ $\tilde{P}^{-1}$ คือ Q , ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (1)$$

พิสูจน์: ดูใน [7].

สำหรับเมทริกซ์ P และ Q แต่ละคู่ที่สอดคล้องกับ (1), เซตของเมทริกซ์ $\tilde{P}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในบทตั้ง 2 จะถูกแจกแจงโดย

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & I \\ I & (P - Q^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

เมื่อ $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ แล้วแต่จะกำหนด (arbitrary) ที่หาตัวผกผันได้ (invertible). จะได้ว่า

$$\tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & I \\ I & (Q - P^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

เมื่อ $N = (I - QP)M^{-1}$.

3. กำหนดปัญหา

พิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาภายใต้ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w + B_u u \\ q &= C_q x + D_{qp} p + D_{qw} w + D_{qu} u \\ z &= C_z x + D_{zp} p + D_{zw} w + D_{zu} u \\ y &= C_y x + D_{yp} p + D_{yw} w + D_{yu} u \\ p &= \phi(q) := \begin{bmatrix} \phi_1(q_1) & \dots & \phi_{n_p}(q_{n_p}) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2)$$

เมื่อ

$x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ คือ ตัวแปรสถานะ (state variable),
 $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ คือ สัญญาณรบกวนขาเข้า (input disturbance),
 $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ คือ สัญญาณสมรรถนะขาออก (performance output),
 $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ คือ สัญญาณควบคุมขาเข้า (control input),
 $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ คือ สัญญาณออกของระบบ,
 $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_p}$ คือ สัญญาณเข้าของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น,
 $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_p}$ คือ สัญญาณออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น.

กำหนดให้ D_{zw} มีค่าเป็นศูนย์ตามคุณสมบัติตั้งไว้ดี (well-posedness) เพื่อให้สามารถคำนวณค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้, และกำหนดให้ D_{qp} , D_{qw} , D_{qu} , และ D_{zp} มีค่าเป็นศูนย์.

ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น $\phi_i(\sigma)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขเชกเตอร์ $[0, l_i]$ นั่นคือ $0 \leq \phi_i(\sigma)/\sigma \leq l_i$, $\forall i = 1, \dots, n_p$, และสอดคล้องเงื่อนไขความชัน $[0, m_i]$ นั่นคือ $0 \leq \phi'_i(\sigma) \leq m_i$, $\forall i = 1, \dots, n_p$. กำหนดให้ $L := \text{diag}(l_1, \dots, l_{n_p})$ เป็นเมทริกซ์กำหนดขอบเขตเชกเตอร์, และ $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_{n_p})$ เป็นเมทริกซ์การจำกัดความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น. กรณีเฉพาะหนึ่งของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ได้แก่ ฟังก์ชันเชิงเส้น นั่นคือ $p = \gamma q$ โดยที่ $0 \leq \gamma \leq l$.

หมายเหตุ 1 สำหรับระบบลูเร (2) ที่มีเงื่อนไขเชกเตอร์และเงื่อนไขความชันในรูปแบบทั่วไป (general form) เป็นดังนี้

$$\alpha \leq \phi(\sigma)/\sigma \leq \beta, \text{ และ } \delta \leq \phi'(\sigma) \leq \xi.$$

เราสามารถทำการแปลงวงรอบ (loop transformation) [3] เพื่อแปลงเงื่อนไขเชกเตอร์ให้อยู่ในรูปแบบ

$$0 \leq \bar{\phi}(\sigma)/\sigma \leq l_i$$

เมื่อ $\bar{\phi}(\sigma) = l_i(\phi(\sigma) - \alpha\sigma)/(\beta - \alpha)$.

การแปลงดังกล่าวจะทำให้เงื่อนไขความชันเปลี่ยนเป็น

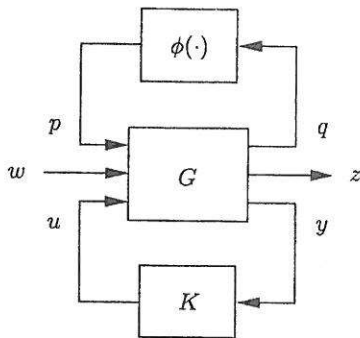
$$l_i(\delta - \alpha)/(\beta - \alpha) \leq \bar{\phi}'(\sigma) \leq l_i(\xi - \alpha)/(\beta - \alpha).$$

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่อยู่ในขอบเขตเชกเตอร์ $[\alpha, \beta]$ และขอบเขตความชัน $[\delta, \xi]$ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่อยู่ในขอบเขตเชกเตอร์ $[0, l_i]$ และขอบเขตความชัน $[0, m_i]$ ได้ก็ต่อเมื่อ $\delta = \alpha$. ในกรณีที่ $\delta \neq \alpha$, เราอาจเปลี่ยนขอบเขตเชกเตอร์ไปเป็น $[\delta, \beta]$ เพื่อให้ได้เงื่อนไขตามรูปแบบมาตรฐานได้. อนึ่ง การแปลงวงรอบนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันไม่เชิงเส้นแบบหลายค่า (multiple nonlinearities) ได้.

พิจารณาตัวควบคุมเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ในรูปแบบสมการสถานะ ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c. \end{aligned} \quad (3)$$

เมื่อ $x_c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ คือตัวแปรสถานะของตัวควบคุม, A_c , B_c , และ C_c คือเมทริกซ์ค่าคงที่ซึ่งมีขนาดเหมาะสม.



รูปที่ 4: แผนภาพระบบลูเรที่มีการป้อนกลับด้วยตัวควบคุม

ระบบวงปิดของระบบลูเร (2) และตัวควบคุม $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c$ แสดงดังรูปที่ 4 มีพลวัต (dynamic) เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_p p + \tilde{B}_w w \\ q &= \tilde{C}_q \tilde{x} \\ z &= \tilde{C}_z \tilde{x} \\ p &= \phi(q) \end{aligned} \quad (4)$$

โดยที่

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c + B_c D_{yu} C_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_p &= \begin{bmatrix} B_p \\ B_c D_{yp} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_w = \begin{bmatrix} B_w \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_q &= \begin{bmatrix} C_q & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_z = \begin{bmatrix} C_z & D_{zu} C_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เมื่อ $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x & x_c \end{bmatrix}^T$.

ปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน คือ กำหนดพารามิเตอร์ของระบบ พร้อมทั้งเมทริกซ์กำหนดขอบเขตเชกเตอร์ L , เมทริกซ์การจำกัดความชัน M , และพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c , B_c , และ C_c มาให้ แล้วคำนวณหาค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุด ซึ่งจะนำเสนอในทฤษฎีบทและการวิเคราะห์ในตอนต่อไป.

ปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน คือ กำหนดพารามิเตอร์ของระบบ พร้อมทั้งเมทริกซ์กำหนดขอบเขตเชกเตอร์ L , และเมทริกซ์การจำกัดความชัน M มาให้ แล้วหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c , B_c , และ C_c ที่ทำให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบวงปิดมีค่าต่ำที่สุด ซึ่งจะนำเสนอขั้นตอนการออกแบบในตอนต่อไป.

ความแตกต่างระหว่างการออกแบบตัวควบคุมในบทความนี้ กับการออกแบบตัวควบคุมในงานวิจัยก่อนหน้า [4] คือการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนใน [4], พิจารณาระบบลูเรที่มีการจำกัดขอบเขตเชกเตอร์ ซึ่งเรียกการออกแบบตัวควบคุมแบบดังกล่าวว่า Popov Controller Synthesis หรือ PCS. แต่สำหรับงานวิจัยนี้, การสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน พิจารณาระบบลูเรที่มีการจำกัดทั้งขอบเขตเชกเตอร์และความชัน ซึ่งเรียกการออกแบบตัวควบคุมแบบนี้ว่า Generalized Popov Controller Synthesis หรือ GPCS.

4. การวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$

ในตอนนี้จะกล่าวถึงนิยามของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร และทฤษฎีบทสำหรับคำนวณหาค่าขอบเขตบนของดัชนีสมรรถนะ (performance index) ดังกล่าว

สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คือพลังงานของสัญญาณสมรรถนะขาออก z , ของระบบที่ถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณรบกวนขาเข้าแบบอิมพัลส์ (impulse) δw_i , $i = 1, \dots, n_w$ [8]. ในทางคณิตศาสตร์เรานิยามดัชนีสมรรถนะเป็น ดังนี้

$$\mathcal{J}_2^2 := \sup \sum_{i=1}^{n_w} \int_0^\infty z_i^T(t) z_i(t) dt \quad (5)$$

โดยที่สภาวะเริ่มต้น (initial condition) $x(0) = 0$.

การพิจารณาระบบ ที่มีสัญญาณรบกวนขาเข้าแบบอิมพัลส์ และมีสภาวะเริ่มต้นเป็นศูนย์ เทียบเท่ากับการพิจารณาระบบที่ไม่มีสัญญาณรบกวนขาเข้าและมีสภาวะเริ่มต้น $x_i(0) = B_w e_i$ เมื่อ $\{e_1, \dots, e_{n_w}\}$ เป็นฐานหลัก (basis) ชุดหนึ่งของ $\mathbb{R}^{n_w}$. การนิยามดัชนีสมรรถนะโดยพิจารณาระบบแบบหลัง ทำให้สามารถคำนวณค่าดัชนีสมรรถนะ $\mathcal{J}_2^2$ ได้. แต่ในทางปฏิบัติการคำนวณค่าดัชนีสมรรถนะ $\mathcal{J}_2^2$ ทำได้ยาก, ดังนั้นเราจึงคำนวณขอบเขตบนของดัชนีสมรรถนะ $\mathcal{J}_2^2$ แทน ดังจะนำเสนอในทฤษฎีบทต่อไป.

การวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบลู่วิ่งที่มีการจำกัดความชัน คือ กำหนดพารามิเตอร์ของระบบ พร้อมทั้งเมทริกซ์กำหนดขอบเขตเชกเตอร์ L , เมทริกซ์การจำกัดความชัน M , และพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c , B_c , และ C_c มาให้ แล้วคำนวณหาค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุด โดยพิจารณา $\tilde{P}$, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 , T_2 เป็นตัวแปร ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้.

ทฤษฎีบท 1 (ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุด) ถ้ามีฟังก์ชันเลียปูนอฟ [5] ดังนี้

$$V(\tilde{x}) := \tilde{x}^T \tilde{P} \tilde{x} + 2 \sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^{n_p} \eta_{j,i} \quad (6)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} 0 &\leq \eta_{1,i} := \lambda_{1,i} \int_0^{q_i} \phi_i(\sigma) d\sigma \\ 0 &\leq \eta_{2,i} := \lambda_{2,i} \int_0^{q_i} \{l_i \sigma - \phi_i(\sigma)\} d\sigma \\ 0 &\leq \eta_{3,i} := \lambda_{3,i} \int_0^{q_i} \phi'_i(\sigma) \sigma d\sigma \\ 0 &\leq \eta_{4,i} := \lambda_{4,i} \int_0^{q_i} \{m_i - \phi'_i(\sigma)\} \sigma d\sigma \\ 0 &\leq \eta_{5,i} := \lambda_{5,i} \int_0^{q_i} \phi'_i(\sigma) \phi_i(\sigma) d\sigma \\ 0 &\leq \eta_{6,i} := \lambda_{6,i} \int_0^{q_i} \phi'_i(\sigma) \{l_i \sigma - \phi_i(\sigma)\} d\sigma \\ 0 &\leq \eta_{7,i} := \lambda_{7,i} \int_0^{q_i} \{m_i - \phi'_i(\sigma)\} \phi_i(\sigma) d\sigma \\ 0 &\leq \eta_{8,i} := \lambda_{8,i} \int_0^{q_i} \{m_i - \phi'_i(\sigma)\} \{l_i \sigma - \phi_i(\sigma)\} d\sigma \end{aligned}$$

$\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$, และ $\lambda_{j,i} \geq 0$, $j = 1, \dots, 8$, $i = 1, \dots, n_p$, สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{21}^T & \tilde{F}_{31}^T \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} & \tilde{F}_{32}^T \\ \tilde{F}_{31} & \tilde{F}_{32} & \tilde{F}_{33} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (7)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11} &= \tilde{A}^T (\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q) + (\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q) \tilde{A} + \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z \\ \tilde{F}_{21} &= \tilde{B}_p^T (\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q) + \Sigma_2 \tilde{C}_q \tilde{A} + T_1 L \tilde{C}_q \\ \tilde{F}_{22} &= \Sigma_2 \tilde{C}_q \tilde{B}_p + \tilde{B}_p^T \tilde{C}_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \\ \tilde{F}_{31} &= \Sigma_3 \tilde{C}_q + T_2 M \tilde{C}_q \tilde{A} \\ \tilde{F}_{32} &= \Sigma_4 + T_2 M \tilde{C}_q \tilde{B}_p \\ \tilde{F}_{33} &= -2T_2 \\ \Sigma_1 &= L \Lambda_2 + M \Lambda_4 + L M \Lambda_8 \\ \Sigma_2 &= \Lambda_1 - \Lambda_2 + M \Lambda_7 - M \Lambda_8 \\ \Sigma_3 &= \Lambda_3 - \Lambda_4 + L \Lambda_6 - L \Lambda_8 \\ \Sigma_4 &= \Lambda_5 - \Lambda_6 - \Lambda_7 + \Lambda_8 \\ \Lambda_j &:= \text{diag}(\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n_p}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, 8 \\ T_k &:= \text{diag}(\tau_{k,1}, \dots, \tau_{k,n_p}) \geq 0, \quad k = 1, 2 \\ L &:= \text{diag}(l_1, \dots, l_{n_p}) \geq 0 \\ M &:= \text{diag}(m_1, \dots, m_{n_p}) \geq 0 \end{aligned}$$

ขอบเขตบนของ $\mathcal{J}_2^2$ จะมีค่าจำกัด, และสามารถคำนวณได้จากกรณฑ์ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \text{Tr } \tilde{B}_w^T [\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_0 \tilde{C}_q] \tilde{B}_w \\ \text{subject to} \quad & (7), \tilde{P} > 0, \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1, T_2) \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

โดยที่ $\Sigma_0 = L(\Lambda_1 + \Lambda_2) + M(\Lambda_3 + \Lambda_4) + LM(\Lambda_5 + \Lambda_6 + \Lambda_7 + \Lambda_8)$.

พิสูจน์: พิจารณาระบบวงปิด (4) ที่มีสถานะเริ่มต้น $\tilde{x}(0)$, ถ้า

$$\dot{V}(\tilde{x}) + z^T z \leq 0 \quad (9)$$

จะได้ว่าสามารถคำนวณค่าขอบเขตบนของ $\mathcal{J}_2^2$ ได้จาก

$$\mathcal{J}_2^2 \leq V(\tilde{x}(0)) \quad (10)$$

ขั้นแรก จัดรูปอสมการเงื่อนไข (9) ให้เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นก่อน โดยหาอนุพันธ์ (derivative) ของฟังก์ชันเลียปูนอฟ (6) เทียบกับเวลา และรวมกับพจน์ $z^T z$ จะได้อสมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2\tilde{x}^T \tilde{P} \dot{\tilde{x}} + 2p^T \Lambda_1 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2\tilde{x}^T \tilde{C}_q^T L \Lambda_2 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} \\ &\quad - 2p^T \Lambda_2 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2p^T \Lambda_3 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2\tilde{x}^T \tilde{C}_q^T M \Lambda_4 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} \\ &\quad - 2p^T \Lambda_4 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2p^T \Lambda_5 \dot{p} + 2p^T L \Lambda_6 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} - 2p^T \Lambda_6 \dot{p} \\ &\quad + 2p^T M \Lambda_7 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} - 2p^T \Lambda_7 \dot{p} + 2\tilde{x}^T \tilde{C}_q^T L M \Lambda_8 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} \\ &\quad - 2p^T M \Lambda_8 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} - 2p^T L \Lambda_8 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2p^T \Lambda_8 \dot{p} \\ &\quad + \tilde{x}^T \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z \tilde{x} \end{aligned} \quad (11)$$

อสมการ (9) สมมูล (equivalent) กับอสมการ (11) สำหรับทุกค่า $\tilde{x}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเชกเตอร์ และเงื่อนไขความชัน ดังนี้

$$p_i(p_i - l_i \tilde{C}_{i,q} \tilde{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_p \quad (12)$$

$$\dot{p}_i(\dot{p}_i - m_i \tilde{C}_{i,q} \dot{\tilde{x}}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_p \quad (13)$$

รวมเงื่อนไขเชกเตอร์ (12) และเงื่อนไขความชัน (13) กับอสมการ (11) โดยใช้ S-Procedure [3] จะได้

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2\tilde{x}^T \tilde{P} \dot{\tilde{x}} + 2p^T \Lambda_1 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2\tilde{x}^T \tilde{C}_q^T L \Lambda_2 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} \\ &\quad - 2p^T \Lambda_2 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2p^T \Lambda_3 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2\tilde{x}^T \tilde{C}_q^T M \Lambda_4 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} \\ &\quad - 2p^T \Lambda_4 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2p^T \Lambda_5 \dot{p} + 2p^T L \Lambda_6 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} - 2p^T \Lambda_6 \dot{p} \\ &\quad + 2p^T M \Lambda_7 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} - 2p^T \Lambda_7 \dot{p} + 2\tilde{x}^T \tilde{C}_q^T L M \Lambda_8 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} \\ &\quad - 2p^T M \Lambda_8 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} - 2p^T L \Lambda_8 \tilde{C}_q \dot{\tilde{x}} + 2p^T \Lambda_8 \dot{p} \\ &\quad + \tilde{x}^T \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z \tilde{x} + 2\tilde{x}^T \tilde{C}_q^T L T_1 p - 2p^T T_1 p \\ &\quad + 2\tilde{x}^T \tilde{A}^T \tilde{C}_q^T M T_2 \dot{p} + 2p^T \tilde{B}_p^T \tilde{C}_q^T M T_2 \dot{p} \\ &\quad - 2p^T T_2 \dot{p} \end{aligned} \quad (14)$$

แทนค่า $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B}_p p$ และจัดอสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองในตัวแปร $\begin{bmatrix} \tilde{x}^T & p^T & \dot{p}^T \end{bmatrix}^T$ จะได้เป็นอสมการเมทริกซ์ (7)

ขั้นที่สอง หาค่าขอบเขตบนของ $V(\tilde{x}(0))$ ในอสมการ (10) โดยแทนค่าพจน์อินทิกรัลด้วยขอบเขตบนของมัน จะได้

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}(0)) &\leq \tilde{x}(0)^T \tilde{P} \tilde{x}(0) + \tilde{x}(0)^T \tilde{C}_q^T L(\Lambda_1 + \Lambda_2) \tilde{C}_q \tilde{x}(0) \\ &\quad + \tilde{x}(0)^T \tilde{C}_q^T M(\Lambda_3 + \Lambda_4) \tilde{C}_q \tilde{x}(0) \\ &\quad + \tilde{x}(0)^T \tilde{C}_q^T LM(\Lambda_5 + \Lambda_6 + \Lambda_7 + \Lambda_8) \tilde{C}_q \tilde{x}(0) \end{aligned}$$

เนื่องจากเราพิจารณากรณีที่ไม่มีสัญญาณรบกวนขาเข้า จึงกำหนดให้สภาวะเริ่มต้นมีค่าเป็น $\tilde{x}(0) = \tilde{B}_w$. กำหนดให้ $\Sigma_0 = L(\Lambda_1 + \Lambda_2) + M(\Lambda_3 + \Lambda_4) + LM(\Lambda_5 + \Lambda_6 + \Lambda_7 + \Lambda_8)$ จะได้ว่า

$$V(\tilde{x}(0)) \leq \text{Tr } \tilde{B}_w^T [\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_0 \tilde{C}_q] \tilde{B}_w$$

ดังนั้น เราสามารถคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบวงปิด (4) ที่นิยามโดย (5) จากการแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุด (8) $\square$

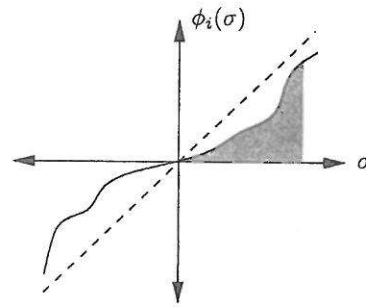
หมายเหตุ 2 เมื่อกำหนดค่า L , M และพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c , B_c , และ C_c มาให้, ปัญหาค่าเหมาะที่สุด (8) จะเป็นปัญหาค่าเหมาะที่สุดเชิงเส้นบนตัวแปร $\tilde{P}$, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 และ T_2 ซึ่งสามารถหาคำตอบทั่วไป (global solution) ได้. ในที่นี้ เราเรียก $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 และ T_2 ว่าตัวคูณโปโปฟ (Popov multiplier).

หมายเหตุ 3 พิจารณาคุณสมบัติภายในของเงื่อนไขเชกเตอร์ และเงื่อนไขความชันในโดเมนเวลา ดังนี้

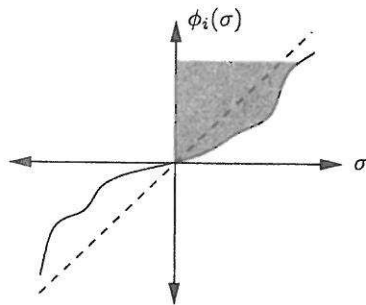
1. ถ้า $f(\sigma) \geq 0$, จะได้ว่า $\int_0^q f(\sigma) d\sigma \geq 0$.
2. เนื่องจาก $\phi_i(\sigma)$ ถูกจำกัดอยู่ในจุดภาคที่หนึ่ง และสาม, ดังนั้น $\phi_i(\sigma) \geq 0$.
3. เนื่องจาก $\phi_i(\sigma)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด (non-decreasing function), ดังนั้น $\phi_i'(\sigma) \sigma^2 \geq 0$, และ $\phi_i'(\sigma) \phi_i(\sigma) \sigma \geq 0$.
4. $\{l_i \sigma - \phi_i(\sigma)\}$ มีเครื่องหมายเดียวกับ $\phi_i(\sigma)$ หรือมีค่าเท่ากับศูนย์.
5. $\{m_i - \phi_i'(\sigma)\}$ ไม่เป็นลบแน่นอน (non-negative).

รวมเงื่อนไขข้างต้นเข้าด้วยกันจะได้ว่าฟังก์ชันเลเยอร์โนฟ (6) ไม่เป็นลบแน่นอน. นอกจากนั้นผลรวมของอินทิกรัลใน (6) ยังสามารถเขียนได้เป็นการจัดหมู่ (combination) ของพจน์อินทิกรัล 4 พจน์ ดังนี้

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^{n_p} \eta_{j,i} &= 2 \sum_{i=1}^{n_p} (\lambda_{2,i} l_i + \lambda_{4,i} m_i + \lambda_{8,i} m_i l_i) I_1 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n_p} (\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i} + \lambda_{7,i} m_i - \lambda_{8,i} m_i) I_2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n_p} (\lambda_{3,i} - \lambda_{4,i} + \lambda_{6,i} l_i - \lambda_{8,i} l_i) I_3 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n_p} (\lambda_{5,i} - \lambda_{6,i} - \lambda_{7,i} + \lambda_{8,i}) I_4 \end{aligned}$$



รูปที่ 5: ความหมายเชิงรูปภาพของ I_3



รูปที่ 6: ความหมายเชิงรูปภาพของ I_4

โดยที่

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{q_i} \sigma d\sigma = \frac{1}{2} q_i^2 \\ I_2 &= \int_0^{q_i} \phi_i'(\sigma) \phi_i(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} [\phi_i(q_i)]^2 \\ I_3 &= \int_0^{q_i} \phi_i(\sigma) d\sigma \\ I_4 &= \int_0^{q_i} \phi_i'(\sigma) \sigma d\sigma \end{aligned}$$

พจน์อินทิกรัล I_1 และ I_2 สามารถแปลความหมายเป็นพลังงานของสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น. พจน์อินทิกรัล I_3 และ I_4 สามารถแปลความหมายเป็นพื้นที่ใต้กราฟดังรูปที่ 5 และ 6, ซึ่งเป็นปริมาณที่แทนพลังงานเสมือน (energy-like quantities).

หมายเหตุ 4 ปัญหาค่าเหมาะที่สุด (8) มาจากปัญหาค่าเหมาะที่สุด เมื่อพิจารณาสภาวะเริ่มต้นเป็น $\tilde{x}(0)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && V(\tilde{x}(0)) \\ &\text{subject to} && \dot{V}(\tilde{x}) + z^T z \leq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

การพิจารณาเงื่อนไขความชัน และพจน์อินทิกรัลใหม่ในฟังก์ชันเลเยอร์โนฟ (6) ทำให้องศาความอิสระ (degree of freedom) ของปัญหาค่าเหมาะที่สุด (15) เพิ่มขึ้น. ดังนั้นปัญหาค่าเหมาะที่สุด (8) จึงยืดหยุ่นมากขึ้น, และทำให้ความอนุรักษ์ของการวิเคราะห์สมรรถนะลดลง.

หมายเหตุ 5 ถ้าฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่พิจารณา มีเพียงเงื่อนไขเชกเตอร์ เงื่อนไขในการวิเคราะห์สมรรถนะ (8) จะเท่ากับ เงื่อนไขในการวิเคราะห์ในงานวิจัยก่อนหน้า [3]. จึงกล่าวได้ว่าการใช้ฟังก์ชันเลียบูโนฟูรูปแบบใหม่ [5] ในการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน อาจช่วยลดความอนุรักษ์ของการวิเคราะห์ได้เมื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชันเลียบูโนฟูแบบ Lur'e-Postnikov ในการวิเคราะห์.

5. การสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน

ในตอนนี้จะนำเสนอขั้นตอนวิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุม ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (Popov multiplier optimization) และการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม (controller optimization) และในตอนท้ายจะนำเสนอขั้นตอนการออกแบบโดยสรุป.

ปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน คือ กำหนดพารามิเตอร์ของระบบ พร้อมทั้งเมทริกซ์กำหนดขอบเขตเชกเตอร์ L , และเมทริกซ์การจำกัดความชัน M มาให้ แล้วหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c, B_c , และ C_c ที่ทำให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบวงปิดมีค่าต่ำที่สุด โดยพิจารณา $\bar{P}, \Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1, T_2, A_c, B_c$, และ C_c เป็นตัวแปร.

ปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน เปรียบได้กับปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ เมื่อพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c, B_c , และ C_c เป็นตัวแปรอิสระ ดังนี้

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \text{Tr } \bar{B}_w^T [\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_0 \bar{C}_q] \bar{B}_w \\ &\text{subject to} \quad \bar{P} > 0, \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1, T_2) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{21} & \bar{F}_{31} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{32} \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & \bar{F}_{33} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (16)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \bar{F}_{11} &= \bar{A}^T (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q) + (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q) \bar{A} + \bar{C}_z^T \bar{C}_z \\ \bar{F}_{21} &= \bar{B}_p^T (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q) + \Sigma_2 \bar{C}_q \bar{A} + T_1 L \bar{C}_q \\ \bar{F}_{22} &= \Sigma_2 \bar{C}_q \bar{B}_p + \bar{B}_p^T \bar{C}_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \\ \bar{F}_{31} &= \Sigma_3 \bar{C}_q + T_2 M \bar{C}_q \bar{A} \\ \bar{F}_{32} &= \Sigma_4 + T_2 M \bar{C}_q \bar{B}_p \\ \bar{F}_{33} &= -2T_2 \end{aligned}$$

ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (16) เป็นปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ เนื่องจากในฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function) และเงื่อนไขสมการ มีพจน์ผลคูณระหว่าง $\bar{P}, \Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1$ และ T_2 กับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c, B_c , และ C_c .

ในการแก้ปัญหาการสังเคราะห์ดังกล่าว, เราจะแบ่งการแก้ปัญหาออกเป็น 2 ขั้นตอน. ขั้นแรก การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ คือกำหนดให้พารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c, B_c ,

และ C_c เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่, แล้วหาค่าเหมาะที่สุดของตัวแปร $\bar{P}, \Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1$ และ T_2 (เป็นขั้นตอนเดียวกับการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ นั้นเอง). ขั้นที่สอง การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม คือกำหนดให้ $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1$ และ T_2 เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่, แล้วหาค่าเหมาะที่สุดของตัวแปร $\bar{P}$ และพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c, B_c , และ C_c , โดยใช้การกำจัดตัวแปรพลวัตของตัวควบคุมออกจากเงื่อนไขการออกแบบ และวนซ้ำแก้ปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้นหลายสมการ ด้วยหลักการของวิธีฮอโมโทปี (homotopy) [9, 10, 11] ในการหาคำตอบ.

5.1 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ

กำหนดให้พารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c, B_c , และ C_c เป็น เมทริกซ์ค่าคงที่ และแบ่ง (partition) เมทริกซ์ $\bar{P}$ ออกเป็น เมทริกซ์ย่อย ดังนี้

$$\bar{P} := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}.$$

ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (16) กลายเป็นปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ดังนี้

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \text{Tr} [B_w^T (P_{11} + C_q^T \Sigma_0 C_q) B_w + B_w^T P_{12} B_c D_{yw} \\ &\quad + D_{yw}^T B_c^T P_{12}^T B_w + D_{yw}^T B_c^T P_{22} B_c D_{yw}] \\ &\text{subject to} \quad \bar{P} > 0, \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1, T_2) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} & H_{41} \\ H_{21} & H_{22} & H_{32} & H_{42} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{43} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (17)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} H_{11} &= A^T (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) + (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) A \\ &\quad + C_z^T C_z + C_y^T B_c^T P_{12}^T + P_{12} B_c C_y \\ H_{21} &= C_c^T B_u^T (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) + A_c^T P_{12}^T \\ &\quad + C_c^T D_{yu}^T B_c^T P_{12}^T + P_{12}^T A + P_{22} B_c C_y + C_c^T D_{zu}^T C_z \\ H_{22} &= C_c^T B_u^T P_{12} + P_{12}^T B_u C_c + A_c^T P_{22} + P_{22} A_c \\ &\quad + C_c^T D_{yu}^T B_c^T P_{22} + P_{22} B_c D_{yu} C_c + C_c^T D_{zu}^T D_{zu} C_c \\ H_{31} &= B_p^T (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) + D_{yp}^T B_c^T P_{12}^T + \Sigma_2 C_q A \\ &\quad + T_1 L C_q \\ H_{32} &= B_p^T P_{12} + D_{yp}^T B_c^T P_{22} + \Sigma_2 C_q B_u C_c \\ H_{33} &= \Sigma_2 C_q B_p + B_p^T C_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \\ H_{41} &= \Sigma_3 C_q + T_2 M C_q A \\ H_{42} &= T_2 M C_q B_u C_c \\ H_{43} &= \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p \\ H_{44} &= -2T_2. \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถแก้ปัญหาเพื่อหาค่าตัวคูณ $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1$ และ T_2 ที่เหมาะที่สุด, และค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดได้.

5.2 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม

จากการสังเกตปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (16) พบว่าเมทริกซ์ A_c ปรากฏอยู่ในสมการเงื่อนไขเท่านั้น ดังนั้นเราสามารถลดจำนวนตัวแปรโดยการกำจัด A_c ออกจากสมการเงื่อนไขได้ โดยกำหนดให้

$$\bar{A}_0 := \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_y & B_c D_{yu} C_c \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad \bar{J} := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

จะได้ว่า $\bar{A}$ สามารถเขียนได้เป็น $\bar{A} = \bar{A}_0 + \bar{J} A_c \bar{J}^T$, และสมการเงื่อนไขใน (16) จัดรูปได้เป็น

$$\bar{G} + V A_c^T U^T + U A_c V^T < 0 \quad (18)$$

เมื่อ $\bar{G}$, V , และ U มีค่าดังนี้

$$\bar{G} := \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{21}^T & \bar{G}_{31}^T \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} & \bar{G}_{32}^T \\ \bar{G}_{31} & \bar{G}_{32} & \bar{G}_{33} \end{bmatrix} \quad (19)$$

โดยที่

$$\bar{G}_{11} = \bar{A}_0^T (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q) + (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q) \bar{A}_0 + \bar{C}_z^T \bar{C}_z$$

$$\bar{G}_{21} = \bar{B}_p^T (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q) + \Sigma_2 \bar{C}_q \bar{A}_0 + T_1 L \bar{C}_q$$

$$\bar{G}_{22} = \Sigma_2 \bar{C}_q \bar{B}_p + \bar{B}_p^T \bar{C}_q^T \Sigma_2 - 2T_1$$

$$\bar{G}_{31} = \Sigma_3 \bar{C}_q + T_2 M \bar{C}_q \bar{A}_0$$

$$\bar{G}_{32} = \Sigma_4 + T_2 M \bar{C}_q \bar{B}_p$$

$$\bar{G}_{33} = -2T_2$$

$$V := \begin{bmatrix} \bar{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad U := \begin{bmatrix} (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q) \bar{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

จากบทตั้ง 1 (Elimination Lemma) [3] จะได้ว่าสมการ (18) เป็นจริงก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$V_\perp^T \bar{G} V_\perp < 0, \quad \text{และ} \quad U_\perp^T \bar{G} U_\perp < 0 \quad (20)$$

โดยที่ $V_\perp$ และ $U_\perp$ คือส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ V และ U . กำหนดให้

$$V_\perp = \begin{bmatrix} \bar{J}_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$U_\perp = \begin{bmatrix} (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q)^{-1} \bar{J}_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

แบ่งเมทริกซ์ $\bar{P}$ และ $\bar{Q} = (\bar{P} + \bar{C}_q^T \Sigma_1 \bar{C}_q)^{-1}$ ออกเป็นเมทริกซ์ย่อย ดังนี้

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$$

เมื่อ P_{11} และ Q_{11} เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และเมทริกซ์ Q_{12} มีความสัมพันธ์กับ P_{11} , Q_{11} , และ P_{12} โดย $Q_{12} = (I - Q_{11}(P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q)) P_{12}^{-T}$. กำหนดให้ $Y := C_c Q_{12}^T$ และ $Z := P_{12} B_c$, จากเงื่อนไข $V_\perp^T \bar{G} V_\perp < 0$ จะได้

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{21}^T & R_{31}^T \\ R_{21} & R_{22} & R_{32}^T \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

โดยที่

$$R_{11} = A^T (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) + C_y^T Z^T$$

$$+ (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) A + Z C_y + C_z^T C_z$$

$$R_{21} = B_p^T (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) + D_{yp}^T Z^T$$

$$+ \Sigma_2 C_q A + T_1 L C_q$$

$$R_{22} = \Sigma_2 C_q B_p + B_p^T C_q^T \Sigma_2 - 2T_1$$

$$R_{31} = \Sigma_3 C_q + T_2 M C_q A$$

$$R_{32} = \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p$$

$$R_{33} = -2T_2.$$

จากเงื่อนไข $U_\perp^T \bar{G} U_\perp < 0$ ใช้ส่วนเติมเต็มของชูร์ (Schur complement) จะได้

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21}^T & S_{31}^T & S_{41}^T \\ S_{21} & S_{22} & S_{32}^T & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

โดยที่

$$S_{11} = Q_{11} A^T + A Q_{11} + Y^T B_u^T + B_u Y$$

$$S_{21} = B_p^T + \Sigma_2 C_q A Q_{11} + \Sigma_2 C_q B_u Y + T_1 L C_q Q_{11}$$

$$S_{22} = \Sigma_2 C_q B_p + B_p^T C_q^T \Sigma_2 - 2T_1$$

$$S_{31} = \Sigma_3 C_q Q_{11} + T_2 M C_q A Q_{11} + T_2 M C_q B_u Y$$

$$S_{32} = \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p$$

$$S_{33} = -2T_2$$

$$S_{41} = C_z Q_{11} + D_{zu} Y.$$

จากบทตั้ง 2 (Completion Lemma) [7] สำหรับเมทริกซ์ $Q_{11} > 0$ และ $P_{11} \geq Q_{11}^{-1}$, เมทริกซ์บล็อกด้านล่างขนาด $n \times n$ ของ $\bar{P}$ และของ $\bar{Q}$ จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์ $P_{22} = P_{12}^T (P_{11} - Q_{11}^{-1})^{-1} P_{12}$ และ $Q_{22} = Q_{12}^T (Q_{11} - P_{11}^{-1})^{-1} Q_{12}$, ถ้า $\bar{P} > 0$ และ $\bar{P} \bar{Q} = I$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q & I \\ I & Q_{11} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (23)$$

จากการเปลี่ยนรูปสมการเงื่อนไข จะได้สมการเงื่อนไขทั้งหมด 3 สมการคือ (21), (22) และ (23). สมการ (21)

และ (23) เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น, แต่อสมการ (22) เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ โดยมีพจน์ผลคูณระหว่างตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม Q , Y และตัวคูณโปปอฟ $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 และ T_2 . ซึ่งเมื่อกำหนดให้ตัวคูณดังกล่าวเป็นค่าคงที่, อสมการ (22) จะเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น.

พิจารณาทรงกึ่งขั้นจุดประสงค์ในปัญหา (16) จากการแทนค่าโดยตรงจะได้

$$\text{Tr} \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} + C_q^T \Sigma_0 C_q & Z \\ Z^T & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} \quad (24)$$

เมื่อมีเมทริกซ์สมมาตร $X \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} X &\geq B_c^T P_{22} B_c \\ &\geq Z^T ((P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) - Q_{11}^{-1})^{-1} Z. \end{aligned} \quad (25)$$

ใช้ส่วนเติมเต็มของชูร์ อสมการ (25) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} X & Z^T & 0 \\ Z & (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) & I \\ 0 & I & Q_{11} \end{bmatrix} > 0. \quad (26)$$

จะสังเกตได้ว่าอสมการเงื่อนไข (26) ครอบคลุมเงื่อนไขในอสมการ (23) ด้วย ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องพิจารณาอสมการ (23) อีก.

เมื่อกำหนดให้ตัวคูณโปปอฟ $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 และ T_2 มีค่าคงที่หาค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม P_{11} , Q_{11} , X , Y , Z ได้จากการแก้ปัญหามหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && (24) \\ &\text{subject to} && (21), (22), (26). \end{aligned} \quad (27)$$

จากนั้นเราสามารถหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุมได้ ดังนี้

$$B_c = P_{12}^{-1} Z \quad (28)$$

$$C_c = Y(I - (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) Q_{11})^{-1} P_{12} \quad (29)$$

เมื่อ P_{12} เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่สามารถหาตัวผกผันได้. (เหตุผลที่เราสามารถเลือกเมทริกซ์ P_{12} ได้เพราะว่าตัวแปรสถานะของตัวควบคุม x_c สามารถเปลี่ยนพิกัด (coordinates) ได้นั่นเอง)

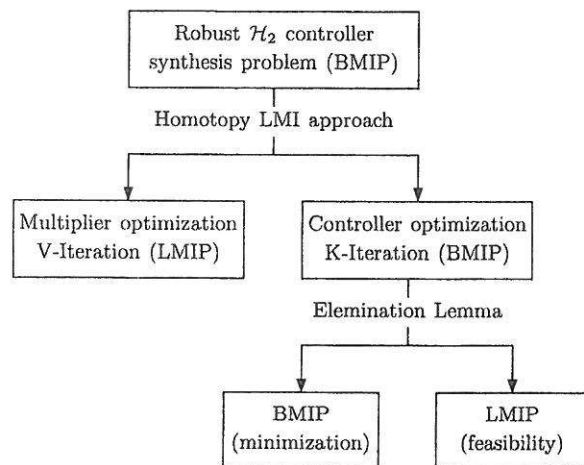
และเมื่อเราทราบค่า $\bar{P}$, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 , T_2 , B_c และ C_c ก็สามารถหาค่า A_c ที่สอดคล้องกับอสมการ (18) ได้ ซึ่งเป็นปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ (feasibility problem) ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น หรืออาจหา A_c จากวิธีวิเคราะห์ (analytical method) [4] ได้อีกวิธีหนึ่ง.

หมายเหตุ 6 การกำจัดตัวพลวัตของตัวควบคุม (A_c) ออกจากอสมการเงื่อนไข, ยังคงทำให้ปัญหาที่พิจารณา เป็นปัญหามหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่เช่นเดิม แต่เป็นปัญหามหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ที่มีพจน์เชื่อมร่วม (coupling term) ลดลง.

หมายเหตุ 7 ในการหาค่าเหมาะที่สุดทั้ง 2 ขั้นตอน มีตัวแปรร่วม (common variable) คือ $\bar{P}$ ซึ่งเชื่อว่าจะช่วยให้การลู่เข้า (convergence) สู่คำตอบเป็นไปได้อย่างรวดเร็ว.

5.3 ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม

ปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน ถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วนโดยใช้หลักการแก้ปัญหาแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นฮอมอโทปี. ปัญหาแรก คือปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ ซึ่งเป็นปัญหามหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMIP). ปัญหาที่สอง คือปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม ซึ่งเป็นปัญหามหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (BMIP). ในการแก้ BMIP ปัญหาที่สองนั้น, เราใช้บทตั้ง 1 (Elimination Lemma) ในการกำจัดเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุม (A_c) ออกจากเงื่อนไขของการออกแบบ เพื่อลดจำนวนพจน์เชื่อมร่วมระหว่างกลุ่มของตัวแปร ซึ่งหลังจากการกำจัดตัวแปร, เราจะได้ BMIP และ LMIP อย่างละหนึ่งปัญหา ดังรูปที่ 7.



รูปที่ 7: แผนภาพการจัดรูปแบบปัญหา

นิยามให้ $\min f(X)$ แทนปัญหาการหาค่าต่ำสุด (minimization problem) โดยที่ฟังก์ชันจุดประสงค์และอสมการเงื่อนไขเป็นฟังก์ชันของ X , ดังนั้นปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม (16) พิจารณาได้เป็น

$$\min f(\bar{P}, V, K, L, M) \quad (30)$$

เมื่อ

V คือ ตัวแปรในขั้นตอนการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ ได้แก่ $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 และ T_2 ,

K คือ ตัวแปรในขั้นตอนการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม ได้แก่ A_c , B_c , และ C_c ,

L คือ เมทริกซ์กำหนดขอบเขตเชกเตอร์,

M คือ เมทริกซ์กำหนดการจำกัดความชัน.

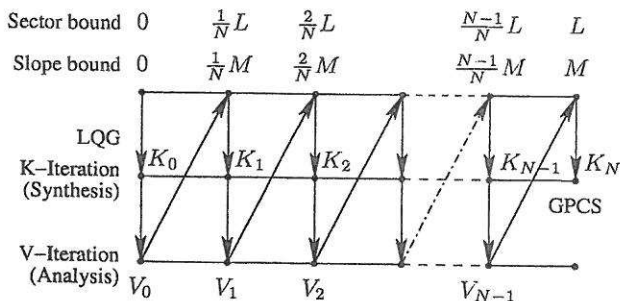
เป็นที่ทราบกันดีว่าปัญหา (30) เป็นปัญหายาก [12], ดังนั้นเราจะใช้หลักการของวิธีฮอโมโทปีสร้างลำดับ (sequence) ของปัญหาง่ายจากปัญหาเดิม. พิจารณาฮอโมโทปี

$$H(\bar{P}, V, K, \lambda) := f(\bar{P}, V, K, \lambda L, \lambda M) \quad (31)$$

เมื่อ λ เป็นค่าจริงในช่วงปิด $[0, 1]$.

คำตอบของปัญหา $\min H(\bar{P}, V, K, 0)$ คือตัวควบคุมเริ่มต้น (initial controller) ซึ่งในที่นี้ได้จากการออกแบบตัวควบคุม LQG ซึ่งเป็นตัวควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด (optimal controller) กรณีระบบไม่มีความไม่แน่นอน, และคำตอบของปัญหา $\min H(\bar{P}, V, K, 1)$ คือตัวควบคุม H_2 คงทนที่ต้องการนั่นเอง. ดังนั้นปัญหการออกแบบตัวควบคุม จึงพิจารณาได้เป็นลำดับของปัญหา $\min H(\bar{P}, V, K, \lambda)$ เมื่อ λ มีค่าจาก 0 ถึง 1 นั้นเอง.

ในการแก้ปัญหา เราแบ่งช่วงของ λ ตั้งแต่ 0 ถึง 1 ออกเป็น $(N+1)$ จุด นั่นคือ $\lambda_n = n/N$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, เพื่อสร้างลำดับจำกัด (finite sequence) ของปัญหาขึ้นมา [11, 13]. ถ้าลำดับของปัญหา $\min H(\bar{P}, V, K, \lambda_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, มีคำตอบทุกปัญหา เราจะได้คำตอบของปัญหา $\min H(\bar{P}, V, K, 1)$ เป็นคำตอบของปัญหา (30) เดิม. แต่ถ้าหากปัญหาในลำดับดังกล่าวหาคำตอบไม่ได้ ให้ทำตามขั้นตอนเดิมตั้งแต่ต้น โดยเพิ่มจำนวนสมาชิกของลำดับให้มากขึ้น (เช่น เพิ่ม N เป็นสองเท่า).



รูปที่ 8: แผนภาพการแก้ปัญหาด้วยวิธีฮอโมโทปีเชิงเส้น

แผนภาพในรูปที่ 8 แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาสังเคราะห์ตัวควบคุม H_2 คงทน. การแก้ปัญหาประกอบด้วย 3 ขั้นตอนคือการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของตัวควบคุมโปปอฟ ที่เรียกว่า V-Iteration, การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของตัวควบคุม ที่เรียกว่า K-Iteration, และการเพิ่มค่าขอบเขตเชกเตอร์และความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น. ในการแก้ปัญหา, จะเริ่มด้วยการออกแบบตัวควบคุม LQG, จากนั้นกำหนดให้พารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c , B_c , และ C_c เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ (K_0), โดยพิจารณาตัวควบคุมโปปอฟ $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 , T_2 และ $\bar{P}$ เป็นตัวแปร และคำนวณหาค่าตัวควบคุมโปปอฟที่เหมาะสมที่สุด (V-Iteration). เมื่อได้ค่าตัวควบคุมโปปอฟที่เหมาะสมที่สุด (V_0) แล้ว, เพิ่มค่าขอบเขตเชกเตอร์และความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นขึ้น 1 ขั้น และกำหนดให้ตัวคุณดังกล่าวเป็นเมทริกซ์

ค่าคงที่, โดยพิจารณาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_c , B_c , C_c และ $\bar{P}$ เป็นตัวแปร และคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (K-Iteration). จากนั้นก็วนซ้ำแก้ปัญหา V-K Iteration และเพิ่มค่าขอบเขตเชกเตอร์และความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น จนกระทั่งได้ตัวควบคุมคงทนต่อฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเชกเตอร์และความชันที่ต้องการ.

กำหนดให้อักษรปกติแทนค่าคงที่ และอักษรตัวหนา (bold-face) แทนค่าที่พิจารณาเป็นตัวแปร, โดยที่ V_i แทน $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$, T_1 , และ T_2 ในรอบที่ i และ K_i แทน A_c , B_c , และ C_c ในรอบที่ i ตามลำดับ, ลำดับการแก้ปัญหา เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} & \min H(\bar{P}, V_0, K_0, 0) \\ & \min H(\bar{P}, V_0, K_1, \frac{1}{N}) \\ & \min H(\bar{P}, V_1, K_1, \frac{1}{N}) \\ & \min H(\bar{P}, V_1, K_2, \frac{2}{N}) \\ & \vdots \\ & \min H(\bar{P}, V_{N-1}, K_{N-1}, \frac{N-1}{N}) \\ & \min H(\bar{P}, V_{N-1}, K_N, 1) \end{aligned}$$

ขั้นตอนการออกแบบสรุปได้ ดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้นของ N (เช่น $N := 1$), และกำหนดค่ามากที่สุดของ N ที่ยอมรับได้ (เช่น $N_{\max} := 2^5$). กำหนดให้ $n := 0$ และคำนวณหาตัวควบคุมเริ่มต้น (A_c, B_c, C_c) ด้วยการออกแบบตัวควบคุม LQG.
2. คำนวณตัวควบคุมโปปอฟ ($\Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1, T_2$) โดยแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของตัวควบคุมโปปอฟ (17) เมื่อกำหนดให้ (A_c, B_c, C_c) เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่.
3. ให้ $n := n + 1$ และ $\lambda_n := n/N$. จากนั้นให้ $L := \lambda_n \cdot L_{\text{spec}}$ และ $M := \lambda_n \cdot M_{\text{spec}}$ (เพิ่มค่าขอบเขตเชกเตอร์และความชันขึ้นอีกหนึ่งขั้น).
4. ทำซ้ำ { [วงรอบนอก]

(a) ทำซ้ำ { [วงรอบใน]

- i. คำนวณ (P_{11}, Q_{11}, X, Y, Z) โดยแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของตัวควบคุม (27) เมื่อกำหนดให้ ($\Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1, T_2$) เป็นค่าคงที่. จากนั้น หา $\bar{P}$, B_c และ C_c จากบทตั้ง 2.
- ii. คำนวณเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุม A_c ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (18).
- iii. คำนวณตัวควบคุมโปปอฟ ($\Lambda_1, \dots, \Lambda_8, T_1, T_2$) โดยแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ของตัวคุณ

โปปอฟ (17) เมื่อกำหนดให้ (A_c, B_c, C_c) เป็นค่าคงที่.

} [วงรอบใน] จนกระทั่งสอดคล้องกับเงื่อนไขการหยุดหรือปัญหา LMI (27) ไม่มีคำตอบ.

(b) ถ้าปัญหา LMI (27) ไม่มีคำตอบให้เพิ่มค่า N (เช่นเพิ่ม N เป็นสองเท่า). จากนั้นกำหนดให้ $n := 0$ และกำหนดตัวควบคุมเริ่มต้น (A_c, B_c, C_c) ด้วยตัวควบคุม LQG. แต่ถ้า $N > N_{\max}$ สรุปได้ว่าการออกแบบล้มเหลว.

(c) ให้ $n := n + 1$ และ $\lambda_n := n/N$. จากนั้นให้ $L := \lambda_n \cdot L_{\text{spec}}$ และ $M := \lambda_n \cdot M_{\text{spec}}$.

} [วงรอบนอก] ถ้า $n = N$ (นั่นคือ $\lambda_n = 1$) จะได้ (A_c, B_c, C_c) เป็นพารามิเตอร์ของตัวควบคุมคงที่ที่ต้องการ.

หมายเหตุ 8 เงื่อนไขการหยุดวงรอบในคือ เมื่อค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดที่คำนวณได้มีค่าลดลงจากรอบก่อนหน้า น้อยกว่าค่าที่กำหนด. เช่น เมื่อใช้เกณฑ์การหยุดสัมบูรณ์ (absolute stopping criterion) และเกณฑ์การหยุดสัมพัทธ์ (relative stopping criterion) เท่ากับ 0.1%, การทำซ้ำวงรอบในจะหยุดเมื่อค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดที่คำนวณได้มีค่าลดลงจากรอบก่อนหน้า น้อยกว่า 0.1% เมื่อคำนวณแบบสัมบูรณ์และสัมพัทธ์เทียบกับค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดในรอบก่อนหน้า.

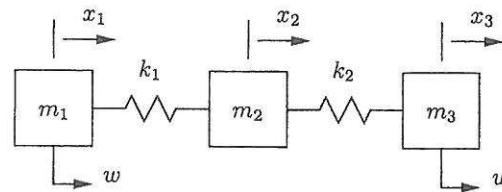
6 ตัวอย่างเชิงเลข

ในตอนนี้นำเสนอตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุม 2 ตัวอย่าง คือ ระบบมวลสปริงที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ 1 ค่า และระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ ที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ 2 ค่า เพื่อยืนยันว่าวิธีการออกแบบใหม่ที่น่าเสนอให้ผลที่มีความอนุรักษ์น้อยกว่า เมื่อเทียบกับวิธีการออกแบบในงานวิจัยก่อนหน้านี้ [4].

ในการแก้ปัญหาหอสสมการเมทริกซ์เชิงเส้นใช้ LMI Toolbox [14] สำหรับ MATLAB หาคำตอบบนเครื่องคอมพิวเตอร์ PC ความเร็ว CPU 1.8GHz, RAM 512MB. ในการเปรียบเทียบผลการควบคุมจะออกแบบตัวควบคุมสามชนิดคือ Linear Quadratic Gaussian (LQG), Popov Controller Synthesis (PCS), และตัวควบคุมที่น่าเสนอ คือ Generalized Popov Controller Synthesis (GPCS).

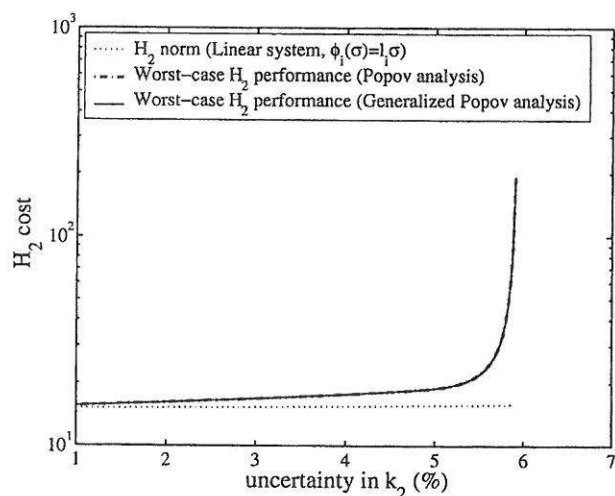
6.1 ระบบมวลสปริง

ระบบมวลสปริงแสดงดังรูปที่ 9 ประกอบด้วยมวล 3 ก้อนต่อเข้าด้วยกันด้วยสปริง 2 เส้น. สปริงที่เชื่อมต่อกันระหว่างมวลก้อนที่ 2 และ 3 มีความไม่แน่นอนที่อธิบายลักษณะได้ด้วย $k_2 =$



รูปที่ 9: ระบบมวลสปริง

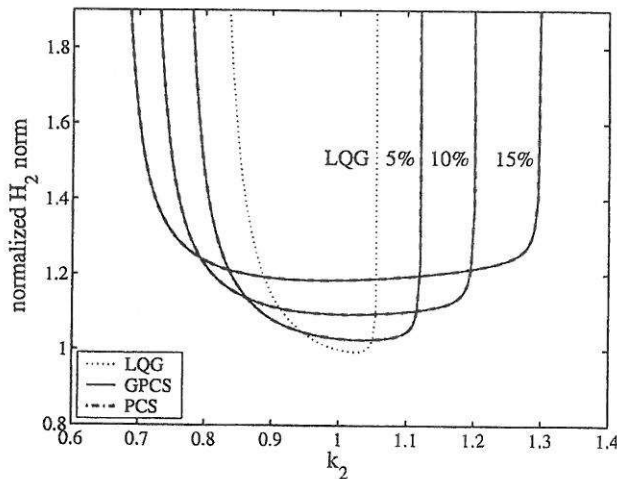
$k_{2,\text{nom}}(1 + \delta)$ เมื่อ $k_{2,\text{nom}}$ เป็นค่าที่ระบุ (nominal value). ความไม่แน่นอนแทนด้วย δ . สัญญาณออกคือ $y = x_1 + x_2$ และสมรรถนะขาออกคือ $z = [x_1 + x_2 \quad u]^T$. พารามิเตอร์ของระบบมีดังนี้ $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $k_1 = 1$, และ $k_{2,\text{nom}} = 1$. ในการออกแบบตัวควบคุม GPCS และ PCS เราประมาณความไม่แน่นอนของความแข็งตึงของสปริง (spring stiffness) เป็น $k_2(x) = k_{2,\text{nom}}[x + \gamma\phi(x)]$, เมื่อ $\phi(x)$ สอดคล้องกับขอบเขตเซกเตอร์ $[-1, 1]$ และการจำกัดความชัน $[-1, 1]$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นของการกระจัด (displacement) ของสปริง x , $\gamma > 0$ เป็นตัวคูณเพื่อระบุขอบเขตความไม่แน่นอน.



รูปที่ 10: สมรรถนะ H_2 ของระบบวงปิดเมื่อ k_2 เปลี่ยนแปลง

ในขั้นตอนแรกเราวิเคราะห์สมรรถนะ H_2 ของระบบวงปิดที่ควบคุมด้วยตัวควบคุม LQG ก่อน. การวิเคราะห์ทำได้โดยการคำนวณค่าสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบวงปิดเมื่อค่าความแข็งตึงสปริง k_2 มีค่าเปลี่ยนแปลงไป จาก 0% ถึง 7%. รูปที่ 10 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างนอร์ม H_2 ของระบบวงปิดเมื่อพิจารณาให้ความไม่แน่นอนเป็นเชิงเส้น, สมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบวงปิดที่คำนวณโดยใช้ทฤษฎีบทจาก [4], และสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบวงปิดที่คำนวณโดยใช้ทฤษฎีบท 1. จากกราฟพบว่าสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบวงปิดที่คำนวณจากวิธีทั้งสองมีค่าเท่ากันและมีค่ามากกว่าค่านอร์ม H_2 ของระบบเชิงเส้นเสมอ. เนื่องจากการเท่ากันของค่าที่ได้จากเงื่อนไขทั้งสองทำให้สันนิษฐานได้ว่าขั้นตอนการออกแบบที่น่าเสนอ (GPCS)

อาจไม่สามารถลดความอนุรักษ์ลงได้ในกรณีนี้. นอกจากนี้ยังพบว่าไม่สามารถประกันสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบวงปิดในกรณีความไม่แน่นอนแบบไม่เชิงเส้นมากกว่า 6% ได้.



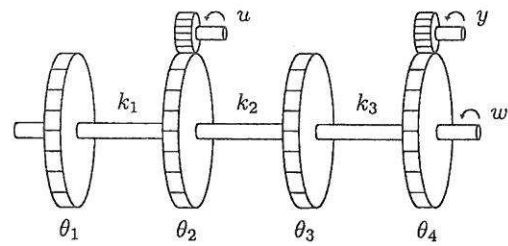
รูปที่ 11: นอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบวงปิดสำหรับระบบมวลสปริง

เราออกแบบตัวควบคุมโดยใช้วิธี GPCS และ PCS, วิธีละ 3 กรณีคือ สำหรับ γ มีค่าเท่ากับ 0.05, 0.10, และ 0.15 นั่นคือพิจารณาความไม่แน่นอนใน k_2 เป็น $\pm 5\%$, $\pm 10\%$, และ $\pm 15\%$ ตามลำดับ. สำหรับการทดลองนี้ใช้เกณฑ์การหยุดสัมบูรณ์ และเกณฑ์การหยุดสัมพัทธ์เท่ากับ 0.1% ของขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณได้. ผลเปรียบเทียบสมรรถนะของระบบแสดงดังรูปที่ 11 คือค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalize) สำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน. การคำนวณฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ คำนวณเทียบกับความแข็งแกร่งของสปริง k_2 ที่มีค่าเปลี่ยนแปลงไป.

ดังที่ได้แสดงในรูปที่ 11, ณ ตำแหน่ง $k_2 = 1$ ซึ่งเป็นจุดที่ความไม่แน่นอนเป็นศูนย์ ตัวควบคุม LQG ให้ค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบวงปิดมีค่าต่ำที่สุด เนื่องจากตัวควบคุม LQG เป็นตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุดนั่นเอง. แต่เนื่องจากการออกแบบตัวควบคุม LQG ไม่ได้คำนึงถึงการประกันสมรรถนะของระบบ ดังนั้นจึงมีความคงทนน้อยกว่าตัวควบคุม GPCS และ PCS. ซึ่งตัวควบคุม GPCS และ PCS ประกันสมรรถนะของระบบ สำหรับการแปรผันของพารามิเตอร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น. ตัวควบคุมทั้งสองแบบถูกออกแบบเพื่อประกันสมรรถนะของระบบในระดับที่ต่างกัน เพื่อแสดงให้เห็นถึงระดับของสมรรถนะที่ประกันที่เพิ่มสูงขึ้นเมื่อระดับความไม่แน่นอนมีค่ามากขึ้นเป็น $\pm 10\%$ และ $\pm 15\%$ ตามลำดับ.

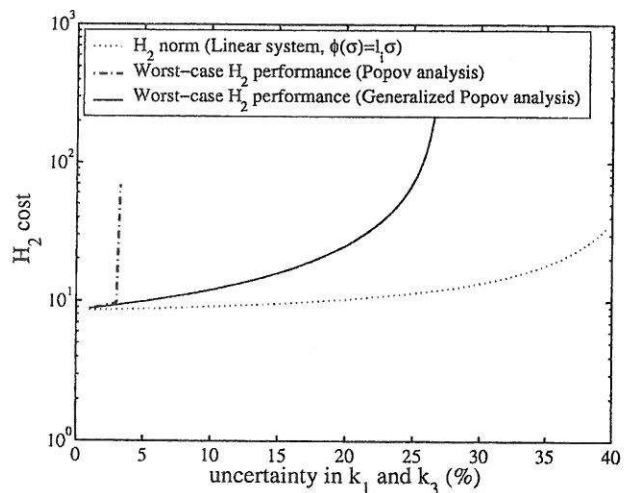
ในการทดลองนี้วิธีการออกแบบ GPCS และ PCS ให้ตัวควบคุมเดียวกัน และให้ตรรกะนี้สมรรถนะที่เท่ากันด้วย ดังจะเห็นได้จากเส้นกราฟที่ทับกันพอดี. จะเห็นว่าฟังก์ชันสูญเสียในรูปแบบใหม่ที่ใช้ใน GPCS ไม่สามารถลดความอนุรักษ์ลงได้เมื่อพิจารณาความไม่แน่นอนเพียงค่าเดียว.

6.2 ระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ



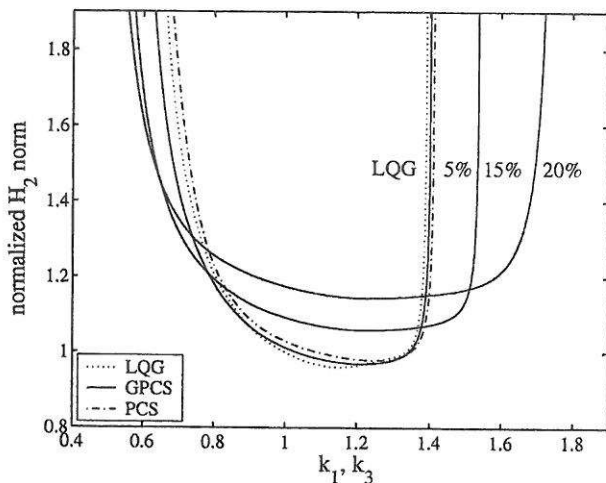
รูปที่ 12: ระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ

ระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ แสดงดังรูปที่ 12 ประกอบด้วยจานหมุน 4 แผ่นต่อเข้าด้วยกันด้วยสปริง 3 เส้น. สปริงถูกกำหนดให้มีความไม่แน่นอนที่อธิบายลักษณะได้ด้วย $k_1 = k_{1,nom}(1 + \delta_1)$ และ $k_3 = k_{3,nom}(1 + \delta_3)$ เมื่อ $k_{1,nom}$ และ $k_{3,nom}$ เป็นค่าที่ระบุ. ความไม่แน่นอนแทนด้วย δ_1 และ δ_3 . สัญญาณออกคือ $y = \theta_4$ และสมรรถนะขาออกคือ $z = [\theta_4 + 0.1\theta_4 \ u]^T$. ในปัญหานี้ เราประมาณความไม่แน่นอนของความแข็งแกร่งของสปริงเป็น $k_1(x) = k_{1,nom}[x + \gamma_1\phi(x)]$, และ $k_3(x) = k_{3,nom}[x + \gamma_3\phi(x)]$ เมื่อ $\phi(x)$ สอดคล้องกับขอบเขตเซกเตอร์ $[-1, 1]$ และการจำกัดความชัน $[-1, 1]$.



รูปที่ 13: สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบวงปิดเมื่อ k_1, k_3 เปลี่ยนแปลง

ในขั้นตอนแรกเราวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบวงปิดที่ควบคุมด้วยตัวควบคุม LQG ก่อน. การวิเคราะห์ทำได้โดยการคำนวณค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบวงปิดเมื่อค่าความแข็งแกร่งของสปริง k_1 และ k_3 มีค่าเปลี่ยนแปลง. รูปที่ 13 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างนอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบวงปิดเมื่อพิจารณาให้ความไม่แน่นอนเป็นเชิงเส้น, สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบวงปิดที่คำนวณโดยใช้ทฤษฎีบทจาก [4], และสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบวงปิดที่คำนวณโดยใช้ทฤษฎีบท 1. จากกราฟพบว่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบวงปิดที่คำนวณโดยใช้ทฤษฎีบท



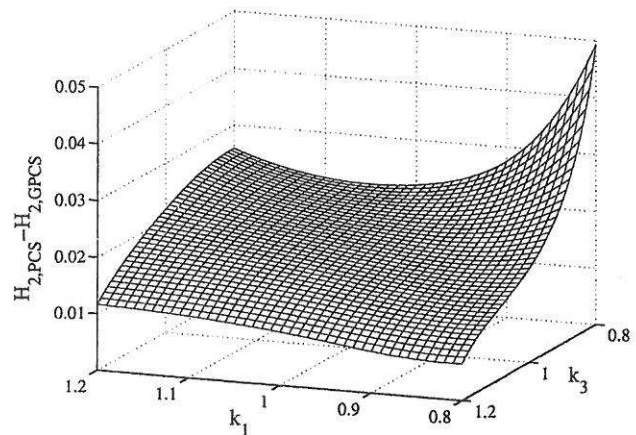
รูปที่ 14: นอร์ม H_2 ของระบบวงปิดสำหรับระบบจานหมุน

จาก [4] มีค่ามากกว่าสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบวงปิดที่คำนวณโดยใช้ทฤษฎีบท 1. ดังนั้นสันนิษฐานได้ว่าขั้นตอนการออกแบบที่นำเสนอ (GPCS) น่าจะลดความไม่แน่นอนในการออกแบบลงได้ในกรณีนี้.

เราออกแบบตัวควบคุมโดยใช้วิธี GPCS สำหรับกรณี $\gamma_1 = \gamma_3$ คือพิจารณากรณีที่ขอบเขตความไม่แน่นอนใน k_1 เท่ากับขอบเขตความไม่แน่นอนใน k_3 . ตัวควบคุมที่ออกแบบมี 3 กรณี คือ γ_1 และ γ_3 มีค่าเท่ากับ 0.05, 0.10, และ 0.20 นั่นคือพิจารณาความไม่แน่นอนใน k_1 และ k_3 เป็น $\pm 5\%$, $\pm 10\%$, และ $\pm 20\%$ ตามลำดับ. นอกจากนั้นเราออกแบบตัวควบคุมโดยใช้วิธี PCS สำหรับ γ_1 และ γ_3 มีค่าเท่ากับ 0.05 นั่นคือพิจารณาความไม่แน่นอนใน k_1 และ k_3 เป็น $\pm 5\%$ เพื่อการเปรียบเทียบ (การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธี PCS สำหรับ γ_1 และ γ_3 มากกว่า $\pm 5\%$ ล้มเหลว เนื่องจากความไม่แน่นอนของวิธี). สำหรับการทดลองนี้ใช้เกณฑ์การหยุดสัมบูรณ์และสัมพัทธ์เท่ากับ 0.1% ของขอบเขตบนของสมรรถนะ H_2 . ผลเปรียบเทียบสมรรถนะคงทนแสดงดังรูปที่ 14 คือค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ H_2 ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐาน สำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน. การคำนวณฟังก์ชันจุดประสงค์ H_2 คำนวณเทียบกับความแข็งแกร่งของสปริง k_1 และ k_3 ซึ่งมีค่าเปลี่ยนแปลงไปโดยที่กำหนดให้ $k_1 = k_3$.

สำหรับระบบที่ไม่มีค่าความไม่แน่นอน (ณ ตำแหน่ง $k_1 = k_3 = 0$) ตัวควบคุม LQG ให้ค่านอร์มของระบบวงปิดต่ำสุดแต่โดยรวมแล้วมีความคงทนน้อยกว่าตัวควบคุม GPCS. ตัวควบคุม GPCS ที่ประกันสมรรถนะคงทนในระดับที่ต่างกันถูกออกแบบเพื่อแสดงให้เห็นถึงระดับของสมรรถนะที่ประกันที่เพิ่มสูงขึ้น เมื่อระดับความไม่แน่นอนมีค่ามากขึ้นเป็น $\pm 10\%$ และ $\pm 20\%$.

ในรูปที่ 15 แสดงผลต่างระหว่างสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบวงปิดด้วยตัวควบคุมจากวิธี GPCS และ PCS เมื่อความไม่แน่นอนเป็น $\pm 5\%$ ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐาน. ผลต่างนิยามด้วย $H_{2,PCS} - H_{2,GPCS}$, ถูกคำนวณเทียบกับความแข็งแกร่งของ



รูปที่ 15: ผลต่างระหว่างสมรรถนะ H_2 กรณีเลวสุดของระบบวงปิดด้วยตัวควบคุมจากวิธี GPCS และ PCS

สปริง k_1 และ k_3 . พบว่าผลต่างมีค่ามากกว่าศูนย์ตลอดช่วงพารามิเตอร์ที่พิจารณา หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง ตรรกะนี้สมรรถนะของระบบวงปิดด้วยตัวควบคุมจากวิธี GPCS มีค่าต่ำกว่าจากวิธี PCS เสมอเมื่อ k_1 และ k_3 แปรผันอย่างอิสระต่อกัน. เมื่อ k_1 และ k_3 มีค่าเปลี่ยนแปลงในขอบเขต $\pm 20\%$, จะเห็นได้ว่า $H_{2,GPCS}$ มีค่าต่ำกว่า $H_{2,PCS}$ ประมาณ 1-5%.

การพิจารณาทั้ง k_1 และ k_3 เป็นความไม่แน่นอนที่อิสระต่อกัน ทำให้ GPCS มีความไม่แน่นอนน้อยกว่า PCS ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากการเพิ่มองศาความอิสระ ของเครื่องมือการวิเคราะห์สมรรถนะนั่นเอง.

ตารางที่ 1: จำนวนรอบการวนซ้ำของการแก้ปัญหา GPCS

	ระบบมวลสปริง			ระบบจานหมุน		
	$\pm 5\%$	$\pm 10\%$	$\pm 15\%$	$\pm 5\%$	$\pm 15\%$	$\pm 20\%$
จำนวนรอบวงรอบนอก	1	2	4	1	1	1
จำนวนรอบวงรอบใน	5	5-6	4-5-5-6	3	5	8

ตารางที่ 1 แสดงจำนวนรอบการวนซ้ำของการแก้ปัญหา GPCS, โดยแสดงจำนวนรอบของวงรอบนอก และวงรอบในสำหรับแต่ละปัญหา. จากตารางพบว่าจำนวนรอบของวงรอบนอกขึ้นอยู่กับขนาดของขอบเขตเซกเตอร์ที่สามารถประกันสมรรถนะ H_2 ได้ ของระบบวงปิดด้วยตัวควบคุม LQG. ส่วนจำนวนรอบของวงรอบในมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตามความยากของปัญหา.

7. สรุป

บทความนี้ได้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุม H_2 คงทนสำหรับระบบที่มีการจำกัดความชัน. การประกันสมรรถนะคงทน

ของระบบทำได้โดย หาฟังก์ชันเลียปูนอฟที่สอดคล้องกับเงื่อนไข
อสมการ ปัญหาดังกล่าวอยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด
ภายใต้กรอบงานอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น. ตัวอย่างการออกแบบ
สองตัวอย่างแสดงให้เห็นว่า วิธีการออกแบบที่นำเสนอสามารถ
รักษาเสถียรภาพ และปรับปรุงสมรรถนะของระบบวงปิดที่มีความไม่
แน่นอนให้ดีขึ้นได้. ยิ่งไปกว่านั้นการออกแบบที่นำเสนอยังมีความ
อนุรักษ์น้อยกว่างานวิจัยก่อนหน้านี้, และได้ผลลัพธ์การควบคุมที่
ให้สมรรถนะที่ต่ำลงสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ภายใต้
ความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง.

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยที่หนึ่งได้รับการสนับสนุนจากสำนักงานกองทุนสนับสนุน
การวิจัย (สกว.) ภายใต้โครงการปริญญาเอกกาญจนาภิเษก, พุนวิจัย
เลขที่ PHD/0148/2546.

เอกสารอ้างอิง

- [1] A. I. Lur'e, and V. N. Postnikov, "On the theory of stability of control systems," *Applied mathematics and mechanics*, 8(3), 1944, In Russian.
- [2] V. M. Popov, "Absolute stability of nonlinear systems of automatic control," *Automation and Remote Control*, vol. 22, pp. 857-875, 1962.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, Jun. 1994.
- [4] D. Banjerdpongchai, and J. P. How, "Parametric robust $\mathcal{H}_2$ control design using iterative linear matrix inequalities synthesis," *AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 23, pp. 138-142, Jan. 2000.
- [5] P. Park, "Stability criteria of sector- and slope-restricted Lur'e systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, pp. 308-313, Feb. 2002.
- [6] T. Nampradit, and D. Banjerdpongchai, "Performance analysis of Lur'e systems with multiple slope restrictions using convex optimization," in *Proceedings of the 4th Asian Control Conference*, Singapore, pp. 1097-1102, Sep. 2002.
- [7] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, and G. Becker, "A collection of robust control problems leading to LMI's," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 1245-1250, Dec. 1991.
- [8] A. A. Stoorvogel, "The robust $\mathcal{H}_2$ control problem: A worst case design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, pp. 1358-1370, Sep. 1993.
- [9] S. L. Richter, and R. A. DeCarlo, "Continuation methods: Theory and applications," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, pp. 660-665, Jun. 1983.
- [10] S. L. Richter, and R. A. DeCarlo, "A homotopy method for eigenvalue assignment using decentralized state feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 29, pp. 148-158, Feb. 1984.
- [11] G. Zhai, M. Ikeda, and Y. Fujisaki, "Decentralized $\mathcal{H}_\infty$ controller design: A matrix inequality approach using a homotopy method," *Automatica*, vol. 37, pp. 565-572, Apr. 2001.
- [12] O. Toker, and H. Ozbay, "On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback," *Proc. American Control Conf.*, pp. 2525-2526, Jun. 1995.
- [13] J. H. Alva, "The feasibility of continuation methods for nonlinear equations," *SIAM J. Numerical Analysis*, vol. 11, pp. 102-120, 1974.
- [14] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox for User's Guide*, The Math Works Inc., MA, 1995.