

การแก้ปัญหาการกำหนดงานแบบกำลังสองด้วยอัลกอริทึมผสมของการพลวัตกับการแตก และจำกัดบนแผ่นค่านวน

Solving the Quadratic Assignment Problem by a Hybrid DP/B&B Algorithm on a Spreadsheet

ปัญญา พิทักษ์กุล¹ และ เสรี เสวตเสรี²

¹ ภาควิชา วิศวกรรมอุตสาหการ มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิตย์ 110/1-4 ถ.ประชาชื่น หลักสี่ กทม. 10210

² ภาควิชา วิศวกรรมอุตสาหการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 50 ถ.พหลโยธิน จตุจักร กทม. 10903

¹ โทร.(02)9547300_ต่อ_586

E-Mail : panya_pitakgul@yahoo.com

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะแสดงวิธีการแก้ปัญหาการกำหนดงานแบบกำลังสองด้วยอัลกอริทึมผสมของการพลวัตกับการแตกและจำกัดบนแผ่นค่านวน จากการที่ใช้โครงสร้างการจัดกลุ่มของสถานะในการกำหนดการพลวัต เป็นเหตุให้วิธีการแตกและจำกัดนั้นถูกนำมาประยุกต์ใช้บนโครงสร้างของการจัดกลุ่มสถานะนี้ได้ ในการหาค่าจำกัดบนเพื่อการเริ่มต้นนั้นสามารถหาได้โดยวิธีวิวิธวิธีแบบละโมภและการสลับคู่ ส่วนการหาค่าจำกัดล่างนั้นวิธีการทดลองกำหนดงานหนึ่งๆสำหรับแต่ละขั้นจะถูกนำมาใช้ ผลรวมในผลคูณของการไหลและระยะทางจะถูกหามาได้ดังเช่นในการหาค่าจำกัดล่างโดยทั่วไป และจนกระทั่งขั้นตอนสุดท้ายผลรวมเหล่านี้ก็จะถูกนำมารวมกันเป็นค่าจำกัดล่างสำหรับลำดับการทดลองกำหนดงานนั้นๆ จากนั้นก็จะทำการเลือกค่าผลรวมในผลคูณของลำดับการกำหนดงานหนึ่งที่มีค่าน้อยที่สุดเป็นค่าจำกัดล่างสำหรับสถานะนั้น ด้วยผลจากการที่ได้ค่าจำกัดล่างที่ดีทำให้แผ่นค่านวนของปัญหามีตัวอย่างสามารถแสดงการจำกัดและผลที่ตามมาในการลดปริมาณการคำนวณได้อย่างชัดเจน

Abstract

The paper objective is to illustrate the method on a spreadsheet, in solving the quadratic assignment problem by a hybrid algorithm. Using the dynamic programming scheme, thereby, branch and bound strategies be applied on its state space. An initial upper bound is obtained by a greedy heuristic and its pairwise exchange. For obtaining the lower bound, trial assigning a facility for each step of stage is used. The products summation of the common flow data and the designated distances is derived as in finding the conventional lower bound. Until the final stage, these summations are added as the lower bound for that trial assigning sequence. Then the minimal products summation of an assigning sequence is chosen as the lower bound for that state. As a result of good lower bounds, the spreadsheet of example problem could illustrate the fathoming and its consequences clearly.

1. บทนำ

ปัญหาการกำหนดงานแบบกำลังสองนั้นเป็นปัญหาของการหาคำตอบที่ดีที่สุดที่ได้จากวิธีการจัดเรียงหรือจัดกลุ่ม (Permutation or Combination) ซึ่งเป็นการกำหนดงานจำนวนความสละควต่างๆให้กับตำแหน่งที่ตั้งต่างๆ โดยผู้ที่ได้เสนอปัญหานี้ขึ้นมา คือ Koopmans และ Beckman [1] ด้วยเหตุที่ปัญหานี้มีลักษณะนี้อยู่ในชั้นของปัญหาแบบ NP-complete ซึ่งเป็นลักษณะที่ยากที่จะหาคำตอบที่ดีที่สุดได้ และกลยุทธในการหาคำตอบของปัญหานี้จนถึงปัจจุบันสามารถที่จะแก้ปัญหาคำตอบเฉพาะปัญหาที่มีขนาดเล็กเท่านั้นประมาณว่า $N \leq 20$ ดังนั้นจึงมีนักวิจัยจำนวนมากที่หันไปหาวิธีการหาคำตอบโดยประมาณจากวิธีการฮิวริสติก แต่อย่างไรก็ตามมีนักวิจัยบางส่วนที่พยายามจะหาคำตอบที่ดีที่สุดโดยการพัฒนาค่าจำกัดล่างให้ดียิ่งขึ้นในการหาคำตอบจากวิธีการแตกและจำกัดจากการจัดเรียงโดยทั่วไป ดังเช่น Hahn และ Grant [2] และ Resende และคณะ [3]

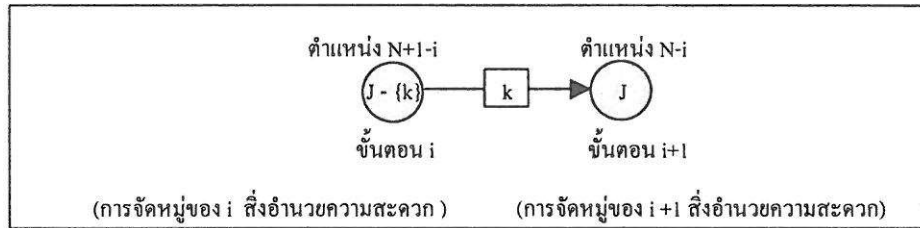
ด้วยว่าวัตถุประสงค์ของบทความนี้ต้องการที่จะแสดงให้เห็นว่าแนวความคิดในการลดปริมาณการคำนวณนั้นสามารถที่จะทำได้โดยการสร้างตัวแบบปัญหาให้อยู่ในรูปของการกำหนดการพลวัต ซึ่งเป็นวิธีการหาคำตอบโดยการจัดกลุ่มขณะเดียวกันจะใช้วิธีการแตกและจำกัดที่มีต่อมิติของนโยบายและสถานะในการกำหนดการพลวัตนี้ ซึ่งผู้วิจัยได้เคยเสนอแนวคิดนี้ครั้งหนึ่งแล้วในบทความ [4] แต่ด้วยเหตุผลที่แผ่นค่านวน (Spreadsheet) นั้นมีผู้ใช้จำนวนมากและมีบทบาทสำคัญในการใช้งานแก้ปัญหาดังที่กล่าวโดย ปรีชา และคณะ [5] กอปรกับมีความสามารถในการแสดงภาพของการคำนวณให้เราได้เห็นได้อย่างชัดเจน จึงเป็นที่มาของบทความนี้ โดยมีการจัดลำดับหัวข้อไว้ดังนี้คือ หัวข้อที่ 2 จะเป็นการสร้างตัวแบบปัญหาแบบกำหนดการพลวัต หัวข้อที่ 3 จะเป็นขั้นตอนในการจำกัด หัวข้อที่ 4 จะแสดงข้อเสนอทางทฤษฎีของอัลกอริทึมผสม หัวข้อที่ 5 จะเป็นแนวความคิดการออกแบบแผ่นค่านวนพร้อมทั้งแสดงตัวอย่างการคำนวณ และหัวข้อที่ 6 จะเป็นการสรุป

2. การสร้างตัวแบบปัญหาแบบกำหนดการพลวัต

RECEIVED 30 JULY, 2001

ACCEPTED 2 MAY, 2002

โดยทั่วไปตัวแบบปัญหาการกำหนดงานแบบกำลังสองจะอยู่ในรูปแบบกำหนดการไม่เชิงเส้นตรงของเลขจำนวนเต็ม(INLP)และการหาคำตอบมักจะทำได้โดยวิธีการกิ่งสาขาทั้งหมด ซึ่งจะใช้วิธีการแตกและจำกัดบนการจัดเรียง แต่ตัวแบบของปัญหาในที่นี้จะเป็นการสร้างในแบบของกำหนดการพลวัต ซึ่งแสดงแนวคิดของตัวแบบดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 ตัวแบบกำหนดการพลวัตสำหรับปัญหาการกำหนดงานแบบกำลังสอง (QAP)

กำหนดให้ J เป็นเซตของสิ่งอำนวยความสะดวกที่แสดงเป็นสถานะ(State)ในกำหนดการพลวัต จากรูปที่ 1 จะพบว่าเรากำหนดสิ่งอำนวยความสะดวกจากตำแหน่งที่ตั้งด้านหลังมาสู่ด้านหน้า นั่นคือเรากำหนดสิ่งอำนวยความสะดวก k เข้าไปทำให้เซตเดิม $J - \{k\}$ เป็นเซตใหม่ J โดยกำหนด k ที่ตำแหน่งที่ตั้ง $N - i$ ขณะเดียวกันเมื่อพิจารณาในแง่ของขั้นตอน(Stage)ในกำหนดการพลวัตก็จะเป็นขั้นตอนที่ $i + 1$ นั่นคือ เป็นการขยายมออีกหนึ่งขั้นตอนซึ่งเดิมอยู่ที่ขั้นตอนที่ i โดยที่ขั้นตอนสุดท้ายก็จะเป็นการกำหนดที่ตำแหน่งที่ตั้งหมายเลข 1 ดังนั้น J จึงเป็นเซตของสิ่งอำนวยความสะดวกที่กำหนดไปแล้วที่แสดงเป็นสถานะ และ $|J|$ จะแสดงถึงจำนวนสิ่งอำนวยความสะดวกในเซตที่แสดงเป็นลำดับขั้นตอนที่

โดยจะกำหนดค่าของฟังก์ชันย้อนกลับ $G_k(J)$ ว่าเป็นค่าสะสมของผลคูณระหว่างการไหลและระยะทางของการกำหนดที่เกิดขึ้นตั้งแต่สถานะ 0 จนกระทั่งถึงสถานะ J โดยที่ k เป็นสิ่งอำนวยความสะดวกสุดท้ายที่กำหนดซึ่งนำมาสู่สถานะ J นี้ ดังนั้นตัวแบบในกำหนดการพลวัตจึงเป็นดังนี้

$$G_k(J) = \min_{i \in (J-\{k\})} \left[\sum_{l=1}^{|J|-1} C_{i(l)k} \cdot D_{jl} \cdot x_{i(l)} \cdot x_{kl} + G_i(J - \{k\}) \right] \quad (1)$$

ที่ซึ่ง $|J| \geq 2$,

โดยที่ $i(t) = k$ ในขั้นตอนของการกำหนดที่ $|J| - t$ ที่ย้อนกลับไปในิการกำหนดจากสถานะนี้,

$$j = \{(N+1) - |J| + t\} \text{ และ } l = \{(N+1) - |J|\};$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ: $G_k(J) = 0$ ถ้า $|J| = 1$ หรือ สถานะว่างเปล่า; (2)

$$\text{และค่าที่ดีที่สุด: } \min_{k=1,2,\dots,N} [G_k(J)] \text{ เมื่อ } |J| = N; \quad (3)$$

โดยที่ $C_{i(l)k}$ เป็นการไหลระหว่างคู่ของสิ่งอำนวยความสะดวกที่ได้กำหนดคือ $i(t)$ และ k

D_{jl} เป็นระยะทางระหว่างตำแหน่ง j และ l ที่คู่ของสิ่งอำนวยความสะดวกได้ถูกกำหนดในตำแหน่งนั้นๆ และ

$$x_{i(l)} \text{ และ } x_{kl} \text{ จะมีค่าเป็น } 1$$

ดังนั้น $C_{i(l)k} \cdot D_{jl}$ จะเป็นค่าใช้จ่ายในการกำหนดสิ่งอำนวยความสะดวก $i(t)$ ให้กับตำแหน่ง j และสิ่งอำนวยความสะดวก k ให้กับตำแหน่ง l

3. ขั้นตอนในการจำกัด

ในการเริ่มต้นของขั้นตอนในการจำกัดนั้นเราจำเป็นต้องหาคำตอบที่เป็นไปได้ใดๆ เพื่อให้ค่าของฟังก์ชันย้อนกลับในการอ้างอิงเริ่มต้นที่เป็นค่าจำกัดบน(Upper Bound, U) โดยในที่นี้เราจะใช้วิธีฮิวริสติกแบบละโมภและการสลับคู่

ส่วนการหาค่าจำกัดล่าง(Lower Bound, LB) ของค่าสะสมในผลคูณการไหลกับระยะทางสำหรับเซตสิ่งอำนวยความสะดวกที่ยังไม่ได้จัด J' นั้นเราได้ปรับปรุงให้ดียิ่งขึ้นจาก[4] โดยจะมีขั้นตอนในการหา ดังนี้คือ

ขั้นที่ 1 ที่ขั้นตอน $|J|$ ใดๆ ทดลองกำหนด $j' \in J'$ สำหรับการเข้าไปสู่ขั้นตอนที่ $|J| + 1$

$$\text{ขั้นที่ 2 คำนวณ } LB_{|J|+1}(J') = \sum_{l=1}^{|J|} C_{il} \cdot D_{il} \text{ ให้}$$

เป็นค่าจำกัดล่างสำหรับขั้นตอนที่ $|J| + 1$

โดยที่ C_{il} แสดงลำดับการเพิ่มขึ้นของ C_{ij} ที่ซึ่ง $j \in J$

และ D_{il} แสดงลำดับการลดลงของ $D_{i,N-|J|}$ ที่ซึ่ง $l \in L$

(เซตของตำแหน่งที่ตั้งที่กำหนดสิ่งอำนวยความสะดวกไปแล้วจากด้านหลังมาด้านหน้า)

- ขั้นที่ 3 ปรับเซต J และ J' โดยการเพิ่ม j' ใน J และลด j' ใน J'
นั่นคือ เปรียบเสมือนเราเข้ามาสู่ขั้นตอนที่ $|J|+1$ แล้ว จากนั้นไปที่ขั้นที่ 1 ถ้าขั้นตอนปัจจุบันยังไม่ใช้ขั้นตอนที่ N ถ้าใช่ไปขั้นตอนต่อไป
- ขั้นที่ 4 คำนวณหา $LB(J')$ สำหรับลำดับ j' ที่ลองจัด โดยการบวกค่าจำกัดล่างสำหรับแต่ละขั้นที่หาได้ที่ขั้นที่ 2 จากขั้นตอนที่ $|J|+1$ จนถึงขั้นตอนที่ N
- ขั้นที่ 5 ทำการคำนวณขั้นที่ 1 ถึงขั้นที่ 4 ใหม่สำหรับลำดับ j' ที่ทดลองจัดใหม่ให้แตกต่าง เมื่อทำการสำรวจการจัดลำดับ j' จนหมดทุกทางเลือกแล้วไปขั้นที่ 6
- ขั้นที่ 6 ทำการกำหนดค่าจำกัดล่าง $LB(J') = \min_{seq-j'} LB(J')$
นั่นคือเลือกค่าจำกัดล่างต่ำสุดจากผลของการทดลองจัดลำดับ j' ทั้งหมด

ข้อสังเกต

1. สำหรับปัญหาย่อย n ที่ยังคงมีขนาดใหญ่ในการหาค่าจำกัดล่างนี้ จากการจัดลำดับของ j' แบบสำรวจหมดนั้นจะทำให้มีจำนวนถึง $n!$ วิธี ดังนั้นในขั้นที่ 5 นี้สำหรับ n ที่มีขนาดใหญ่ให้ทดลองจัดให้เกิดลำดับขึ้นในจำนวนหนึ่งที่หลากหลายแล้วสรุปเลือกในขั้นที่ 6
2. ถ้า C_i หรือการเรียงกลับของ C_i แสดงค่าเช่นเดียวกับลำดับของ $C_{i'(t)}$ โดยที่ $i'(t)$ เป็นสิ่งอำนวยความสะดวกที่ถูกจัดในขั้นตอนที่ $|J|+1-t$ เมื่อพิจารณาย้อนกลับโดยเริ่มจาก $t = 1, \dots, |J|$ และถ้า D_i หรือการเรียงกลับของ D_i แสดงค่าเช่นเดียวกับลำดับของ $D_{N-|J|+1, N-|J|}$ เมื่อย้อนกลับไปพิจารณาตำแหน่งที่ตั้งที่ผ่านมาสัมพันธ์กับปัจจุบัน โดยเริ่มจาก $t = 1, \dots, |J|$ สำหรับแต่ละ j' ในลำดับของ j' ที่ถูกเลือกเป็นตัวกำหนดค่าจำกัดล่างในขั้นที่ 6 เมื่อเป็นดังนั้นแสดงว่าลำดับของ j' สำหรับค่าจำกัดล่างนี้เป็นไปได้จริง (feasible)

4. ข้อเสนอทางทฤษฎีของอัลกอริทึมผสม

เมื่อให้ $\mathcal{P}$ เป็นปัญหาการหาคำตอบที่ดีที่สุดจากการจัดกลุ่มที่เราต้องการจะแก้ปัญหา โดยเราสมมุติว่ากำหนดการพลวัต $\mathcal{D}$ ซึ่งมีสมการฟังก์ชันเป็น (1) (2) และ (3) นี่แทนปัญหา $\mathcal{P}$ ดังกล่าว และถ้าให้ U เป็นค่าจำกัดบนในค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์สำหรับคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหา $\mathcal{P}$ เดิม โดยค่า U นี้หาได้จากคำตอบที่เป็นไปได้ใดๆอันหนึ่งหรือถ้าให้ U นี้หาได้จาก $G_k = 0 + \pi(\phi, \delta)$ สำหรับนโยบายใดๆ $\delta \in \Delta(\Omega_F)$ ดังนั้น U ก็เป็นค่าจำกัดบนค่าหนึ่งของ G_k^* ใน $\mathcal{D}$ นั่นคือ

$$U \geq G_k^* \quad (4)$$

ที่ซึ่ง $G_k^* = \min_{k=1, \dots, N} \{G_k(J) \mid J = \Omega_F\}$ เมื่อ Ω_F เป็นสภาวะสุดท้าย ถ้าให้ Ω เป็นมิติของสภาวะที่ไม่ว่างเปล่าในจำนวนที่แน่นอนจำนวนหนึ่งซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^n - 1$ สภาวะ โดยที่สภาวะว่างเปล่า $\phi \notin \Omega$ เป็นสภาวะเริ่มต้น $d \in D$ เป็นการตัดสินใจอันหนึ่งซึ่ง D เป็นเซตของการตัดสินใจจำนวนหนึ่ง เมื่อ $T: \Omega \times D \rightarrow \Omega$ เป็นการกำหนดจุดสภาวะที่เปลี่ยนแปลงไปสู่ ซึ่ง $T(J, d)$ คือสภาวะที่จะเป็นเมื่อการตัดสินใจ d ได้กระทำที่สภาวะ J เพื่อไปสู่สภาวะนี้ ขณะที่ $\pi: \Omega \times D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าใช้จ่าย ซึ่ง $\pi(J, d)$ เป็นค่าใช้จ่ายส่วนที่เพิ่มขึ้นเมื่อการตัดสินใจ d กระทำที่สภาวะ J โดย $0 \in \mathbb{R}$ เป็นค่าใช้จ่ายเริ่มต้นที่สภาวะว่างเปล่าและสภาวะในขั้นตอนที่ 1 ดังแสดงใน (2) ถ้าให้ Δ เป็นเซตของนโยบายหรือบางส่วนของนโยบายทั้งหมด(แสดงลำดับของการตัดสินใจ) ซึ่งหาได้โดยการจัดเรียงลำดับของการตัดสินใจที่เกิดขึ้นจาก D และให้ $\delta \in \Delta$ เป็นนโยบายหรือส่วนของนโยบายหนึ่ง เช่น $\delta = [\delta(1), \delta(2), \dots, \delta(n)]$ ซึ่ง $\delta(i) \in D, i = 1, 2, \dots, n$ เมื่อเราขยายขอบเขตของการพิจารณาการกำหนดจุดสภาวะที่เปลี่ยนแปลงไปสู่และฟังก์ชันค่าใช้จ่ายจาก $\Omega \times D$ ไปเป็น $\Omega \times \Delta$ ในลักษณะโน้มนำดังนี้ สำหรับ $\delta = \delta_1 \delta_2$ ได้ว่า $T(J, \delta) = T(T(J, \delta_1), \delta_2)$ และ $\pi(J, \delta) = \pi(J, \delta_1) + \pi(T(J, \delta_1), \delta_2)$ ดังนั้นสำหรับสภาวะใดๆ $J \in \Omega$ กำหนดให้ $\Delta(J)$ เป็นเซตของบางส่วนของนโยบาย (เป็นเซตของนโยบาย ถ้า $J = \Omega_F$ เมื่อ Ω_F เป็นสภาวะสุดท้าย) นั่นคือ $\Delta(J) = \{\delta \in \Delta \mid T(\phi, \delta) = J\}$ ถ้า $\Delta^*(J) \subseteq \Delta(J)$ เป็นเซตของบางส่วนของนโยบายที่ดีที่สุด สำหรับสภาวะ J นั่นคือ $\Delta^*(J) = \{\delta \in \Delta(J) \mid G_k(J) = 0 + \pi(\phi, \delta)\}$ (ของนโยบาย ถ้า $J = \Omega_F$) โดยสิ่งอำนวยความสะดวก k ถูกเลือกกำหนดเป็นตัวสุดท้ายเมื่อเข้าสู่สภาวะ J นี้ และถ้ากำหนดให้ $\chi(J)$ เป็นเซตของบางส่วนของนโยบายที่เป็นไปได้ที่จะทำให้นโยบายครบถ้วน

สมมุติฐานจากสภาวะ J ในขณะนี้ไปจนถึงสิ้นสุดที่สภาวะสุดท้าย นั่นคือ $\chi(J) = \{\delta \in \Delta \mid T(J, \delta) = \Omega_F\}$ เมื่อให้เซตของนโยบายที่เป็นไปได้สำหรับ $\mathcal{D}$ เป็น $\Delta(\Omega_F)$ และเซตของนโยบายที่ดีที่สุดสำหรับ $\mathcal{D}$ คือ $\Delta^* = \{\delta \in \Delta(\Omega_F) \mid G_k^* = 0 + \pi(\phi, \delta)\}$ และที่สำหรับแต่ละสภาวะ $J \in \Omega$ เรากำหนดค่าจำกัดล่าง LB: $\Omega_{J, \delta} \rightarrow R$ โดยที่ $J' \subseteq J'$ ด้วยคุณสมบัติที่ว่า

$$LB(J') \leq \pi(J, \delta) \quad \forall \delta \in \chi(J) \quad (5)$$

ดังนั้นจึงเป็นที่มาของข้อเสนอทางทฤษฎีสำหรับปัญหาการกำหนดงานแบบกำลังสอง ดังนี้คือ

ข้อเสนอที่ 1.1 (Proposition 1.1)

$$\text{ถ้า } G_k(J) + LB(J') > U \quad (6)$$

ดังนั้น $\delta\delta'_k \notin \Delta^*$ สำหรับนโยบายอื่นหนึ่งที่มี k เป็นตัวกำหนดเข้าสุดท้ายที่สภาวะ J นี้ $\delta'_k \in \Delta^*(J)$ และสำหรับทุกนโยบาย $\delta \in \chi(J)$ นั่นคือ กิ่ง δ'_k สามารถถูกจำกัดได้

การพิสูจน์ (Proof)

นำ (4) และ (5) แทนใน (6) เราจะได้ว่า

$$G_k(J) + LB(J') > G_k^* \quad \text{เมื่อเทียบกับ (4)}$$

$$\text{ได้ว่า } G_k(J) + \pi(J, \delta) > G_k^* \quad \text{เมื่อเทียบกับ (5)}$$

นั่นคือ กิ่ง δ'_k นี้เมื่อต่อด้วยบางส่วนของนโยบายที่เป็นไปได้ δ ที่จะทำให้นโยบายครบถ้วนสมบูรณ์ก็ตาม แต่จะไม่ทำให้นโยบายนี้เป็นคำตอบที่ดีที่สุดได้ ■

เมื่อเราพบว่า $LB(J') = \pi(J, \delta)$ โดย δ เป็นบางส่วนของนโยบายที่เป็นไปได้ และ $G_k(J) + LB(J') < U$ เราก็สามารถกำหนดให้ค่าจำกัดบนอ้างอิงใหม่เป็น $\hat{U} = G_k(J) + LB(J')$ และทราบว่า $\delta\delta'_k \in \Delta(\Omega_F)$ ดังนั้นถ้าเรากำหนดให้ $U = \hat{U}$ ในลักษณะนี้ นั่นก็จะทำให้เกณฑ์ในการจำกัดดีขึ้นอีก คือ

ข้อเสนอที่ 1.2 (Proposition 1.2)

$$\text{ถ้า } G_k(J) + LB(J') \geq \hat{U} \quad (7)$$

นั่นคือ กิ่ง δ'_k สามารถถูกจำกัดได้

มีข้อสังเกตที่ว่าเมื่อมีการใช้เกณฑ์โดย (7) ก็จะเป็นการสร้างความเป็นไปได้ในการที่จะตรวจสอบถึงการที่จะเป็นคำตอบที่ดีที่สุดของ $\delta\delta'_k$ ที่เป็นคำตอบอ้างอิงอยู่ โดยจะเป็นในกรณีที่กิ่งต่างๆที่จะทำให้การทำย้อนกลับนั้นสมบูรณ์ได้ถูกจำกัดจนหมด สิ่งนี้ก็จะเกิดผลที่ตามมาของข้อเสนอที่ 1.2 ดังนี้ คือ

ผลที่ตามมา 1.1 (Corollary 1.1)

เมื่อกิ่ง δ'_k ที่เข้าสู่สภาวะ J ทุกกิ่ง $k \in J$ ถูกจำกัดหมดด้วยเกณฑ์ตาม (7) ดังนั้นสภาวะ J นี้และกิ่งที่ออกจากสภาวะ J นี้ไปยังสภาวะอื่นๆ ก็สามารถถูกจำกัดไปด้วย

นั่นคือ ถ้า $\hat{U} = \{0 + \pi(\phi, \delta)\}$ สำหรับนโยบายที่เป็นไปได้ δ และไม่มีสภาวะ $T(J, \delta)$ โดยเมื่อ $J \neq \Omega_F$ ที่ไม่ถูกจำกัด จึงสรุปได้ว่า $\hat{U}$ เป็นนโยบายที่ดีที่สุดและเราสามารถหยุดการทำย้อนกลับของการกำหนดการพลวัตที่จุดนี้

ผลที่ตามมา 1.2 (Corollary 1.2)

ในการคำนวณฟังก์ชันย้อนกลับ $G_k(J)$ ของกิ่ง k ที่เข้าสู่สภาวะ J นั้น เมื่อกิ่ง k มาจากสภาวะ $J - \{k\}$ และที่สภาวะนี้มีกิ่ง i โดยที่เข้าสู่สภาวะนี้ถูกจำกัด เงื่อนไขดังกล่าวจะเป็นผลให้การคำนวณของฟังก์ชันย้อนกลับนี้ไม่ต้องพิจารณาจาก $G_i(J - \{k\})$

สิ่งที่ผลที่ตามมาทั้งสองได้ชี้ให้เห็นก็คือ การลดปริมาณการคำนวณของการกำหนดการพลวัต แต่ในขณะเดียวกันอัลกอริทึมผสมก็จำเป็นต้องมีการหาค่าจำกัดล่างซึ่งเป็นการเพิ่มปริมาณการคำนวณ และการเริ่มของอัลกอริทึมก็ต้องมีการคำนวณค่าจำกัดบนอ้างอิงเริ่มต้น

5. การออกแบบแผนคำนวณและตัวอย่าง

แนวคิดในการออกแบบแผนคำนวณนี้เราจะทำการแยกการคำนวณออกเป็นส่วนต่างๆกล่าวคือเป็น ส่วนแผนคำนวณหลัก ส่วนคำนวณย่อยสำหรับการคำนวณฟังก์ชันย้อนกลับ ส่วนคำนวณย่อยสำหรับค่าจำกัดล่าง และส่วนคำนวณย่อยสำหรับค่าจำกัดบนเริ่มต้น ซึ่งปัญหาตัวอย่างนี้เราจะใช้ปัญหาตัวอย่างจาก [6]

โดยแผนคำนวณหลักดังรูปที่ 2 นั้นเริ่มจากค่าพารามิเตอร์ของตัวอย่างปัญหา จากนั้นเราทำการสร้างรูปแบบของโครงสร้างพลวัตตามฟังก์ชันย้อนกลับ (1) ที่เริ่มจากขั้นตอนที่ 2 ไปจนถึงขั้นตอนสุดท้าย N ซึ่งในแต่ละขั้นตอนจะแสดงการจัดกลุ่มของเซต J และกิ่ง k ที่เข้าสู่สภาวะ J นี้ด้วย พร้อมกับแสดงค่าจำกัดล่างและผลรวม(Sum)ของ $G_k(J) + LB(J')$ เพื่อตรวจสอบการจำกัดตาม(7) ยกเว้นในขั้นตอนสุดท้าย และมีค่าจำกัดบนอ้างอิงเริ่มต้นที่ขั้นตอนที่ 2 กอปรกับที่แต่ละขั้นตอนเมื่อพิจารณาการจำกัดที่ผลรวมแล้วจะมีการกำหนดค่าจำกัดบนอ้างอิงใหม่(ถ้ามี) ยกเว้นในขั้นตอนสุดท้าย

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Computations Spreadsheets of the DP/B&B Approach for QAP (LB Model 7)														
2	Main-Computations Spreadsheet														
3		Cs, Unit in 1000 per week							Ds, Distance in feet						
4			1	2	3	4				1	2	3	4		
5		1	-	5	2	7			1	-	80	150	170		
6		2	6	-	3	8			2	-	-	130	100		
7		3	2	3	-	3			3	-	-	-	120		
8		4	7	8	3	-			4	-	-	-	-		
9															
10	STAGE 2	J	{1, 2}	{1, 3}	{1, 4}	{2, 3}	{2, 4}	{3, 4}							3270
11		k ∈ J	1	2	1	3	1	4	2	3	2	4	3	4	
12															
13		Ci(1)kD43	600	600	240	240	840	840	360	360	960	960	360	360	
14		Gi(J-k)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15		Gk(J)	600	600	240	240	840	840	360	360	960	960	360	360	
16		LB(J)	2740	2740	2990	2990	2460	2460	2840	2840	2340	2340	2840	2840	new U
17		Sum	X	X	3230	3230	X	X	3200	3200	X	X	3200	3200	
18					inf	inf			inf	inf			inf	inf	
19	STAGE 3	J	{1, 2, 3}	{1, 2, 4}	{1, 3, 4}	{2, 3, 4}									
20		k ∈ J	1	2	3	4	1	2	3	4	2	3	4		
21															
22		Ci(1)kD32	260	390	#	#	#	#	260	#	390	390	#	390	
23		Ci(2)kD42	600	500	#	#	#	#	700	#	700	800	#	800	
24		Gi(J-k)	360	240	#	#	#	#	360	#	240	360	#	360	
25		Gk(J)	1120	1130	#	#	#	#	1320	#	1330	1550	#	1550	
26		LB(J)	2200	2200	#	#	#	#	1900	#	1900	1650	#	1650	new U
27		Sum	X	X	#	#	#	#	3220	#	3230	3200	#	3200	
28			inf	inf					inf		inf	inf		inf	
29	STAGE 4	J					{1, 2, 3, 4}								
30		k ∈ J					1	2	3	4					
31											i	k=	1	1	
32		Ci(1)kD21					560	640	#	#	4	⇒	4	2	
33		Ci(2)kD31					300	450	#	#	3	⇒	3	3	
34		Ci(3)kD41					850	850	#	#	2	⇒	2	4	
35		Gi(J-k)					1550	1330	#	#	4				
36		Gk(J)					3260	X	#	#	3260				
37							*								
38	Note X's indicate fathomed branches. #'s indicate avoided computations. And * indicates optimal value.														

รูปที่ 2 แผ่นคำนวณหลักโดยอัลกอริทึมผสมของการกำหนดการพลวัตกับการแตกและจำกัดสำหรับปัญหา QAP

ขณะที่รูปที่ 3 จะแสดงการคำนวณฟังก์ชันย้อนกลับที่แต่ละขั้นตอนแล้วโยงผลในค่าของฟังก์ชันที่ระบุโดย “*” ที่ได้จากคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาย่อยในขณะนั้นที่ระบุโดยสมการ i กลับไปที่แผ่นคำนวณหลักสำหรับแต่ละ k ที่ระบุ และรูปที่ 4 นั้นจะเป็นการคำนวณค่าจำกัดล่างที่แต่ละขั้นตอนพร้อมกับระบุคำตอบที่ดีที่สุดในส่วนนี้โดยแสดง “feas” หรือ “inf” สำหรับการกำหนดที่เป็นไปได้และเป็นไปไม่ได้ตามลำดับ แล้วโยงผลลัพธ์เหล่านี้กลับไปแผ่นคำนวณหลัก

ส่วนรูปที่ 5 จะเป็นการแสดงการคำนวณค่าจำกัดบนเริ่มต้นโดยวิธีวิธิตดแบบละโมบที่ใช้การเริ่มต้นที่แตกต่างกันหลายจุด และเมื่อได้คำตอบแล้วจะมีการทดลองสลับคู่สุดท้ายของการกำหนดเพื่อดูโอกาสที่จะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าซึ่งในที่นี้จะแสดงเพียงการเริ่มต้นที่ชุดแรกเท่านั้น และเมื่อได้ผลลัพธ์แล้วจึงโยงกลับไปแผ่นคำนวณหลักเช่นกัน

ผลการคำนวณที่ได้จากแผ่นคำนวณนี้สามารถแสดงให้เห็นได้อย่างเด่นชัดในการจำกัดที่แผ่นคำนวณหลักและผลที่เกิดขึ้นตามมา โดยทำให้การคำนวณในฟังก์ชันย้อนกลับ ในค่าจำกัดล่าง และในแผ่นคำนวณหลักลดลง

ส่วนข้อจำกัดของแผ่นคำนวณในการออกแบบเมื่อขนาดของปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้นนั้น มิติของแผ่นคำนวณในส่วนสมการจะมีได้มากที่สุด 230 สมการ เมื่อขนาดของสมการเป็น 6 หน่วย สำหรับ Microsoft Excel 97 จะเป็นตัวกำหนดขนาดของปัญหาที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถทำได้

ส่วนจำนวนบรรทัดนั้นสามารถขยายได้มากกว่า 5000 บรรทัด ซึ่งจะไม่เป็นตัวจำกัดความสามารถของแผ่นคำนวณในปัญหานี้ และเมื่อพิจารณาจากจำนวนช่องสมการที่ต้องการสูงสุดในช่วงกลางของลำดับขั้นตอน (Stages) ที่จะใช้เป็นหน่วยความจำดังนี้คือ

สำหรับกรณีขนาดของปัญหา N เป็นเลขคี่มีความต้องการสมการเท่ากับ $\left[\frac{N}{(N+1)/2} \right] \times (N+1)/2$ สมการ โดยที่ $\left[\frac{n}{x} \right] = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

ขณะที่กรณีขนาดของปัญหา N เป็นเลขคู่มีความต้องการสมการเท่ากับ $\left[\frac{N}{N/2} \right] \times N/2$ สมการ

ดังนั้นขนาดของปัญหาที่ใหญ่ที่สุดที่แผ่นคำนวณสามารถทำได้คือ $N = 7$ ทั้งนี้เมื่อ $N = 8$ จะทำให้มีความต้องการสมการถึง 280 สมการซึ่งจะเกินขนาดของแผ่นคำนวณนี้ จึงจำเป็นต้องใช้แผ่นคำนวณเสริมเพิ่มเติมซึ่งน่าจะได้รับการศึกษาวิจัยต่อไป

6. สรุป

การแก้ปัญหาคำนวณการกำหนดงานแบบกำลังสองบนแผ่นคำนวณด้วยอัลกอริทึมผสมของการกำหนดการพลวัตกับการแตกและจำกัดนั้นสามารถทำได้และให้ผลคำนวณที่ละเอียดถูกต้อง แต่ทั้งนี้การแก้ปัญหา

	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR
2	Sub-Computations Spreadsheet for DP Recursive Function (continue)													
3	STAGE 3													
4		k = 2				k = 3				k = 4				
5				i				i				i		
6		390	1040	3		#	#	#		1040	390	3		
7		800	300	4		#	#	#		300	800	2		
8		360	360	3		#	#	#		360	360	3		
9		1550	1700	1550		#	#	#		1700	1550	1550		
10		*								*				
11	STAGE 4													
12		k = 1				k = 2								
13				i								i		
14		400	#	560	4		400	#	640	4				
15		300	#	300	3		450	#	450	3				
16		1190	#	850	2		1360	#	850	1				
17		1550	#	1550	4		1320	#	1330	4				
18		3440	#	3260	3260		3530	#	3270	3270				
19		*								*				

รูปที่ 3 การคำนวณฟังก์ชันย้อนกลับที่แต่ละ k ของแต่ละสภาวะ

	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD	BE	BF
1	Sub-Computations Spreadsheet for Lower Bounds (LB Model 7)													
2														
3	STAGE 2 J	{1, 2}		{1, 2}		{1, 3}		{1, 3}		{1, 4}		{1, 4}		
4	k ∈ J	1	1	2	2	1	1	3	3	1	1	4	4	
5	k3=j'	3	4	3	4	2	4	2	4	2	3	2	3	
6	k4=j'	4	3	4	3	4	2	4	2	3	2	3	2	
7	LB3(J')	660	1710	560	1710	890	1090	890	1090	1450	560	1450	560	
8	LB4(J')	2200	1030	2200	1030	2200	1900	2200	1900	1030	1900	1030	1900	
9	LB(J')	2760	2740	2760	2740	3090	2990	3090	2990	2480	2460	2480	2460	
10		inf		inf		inf		inf		inf		inf		
11	'Feas' and 'Inf' indicate feasible and infeasible assignment on its derived lower bound respectively,													
12	knowing D's orders.													
25														
26	STAGE 3 J	{1, 2, 3}			{1, 2, 4}			{1, 3, 4}			{2, 3, 4}			
27	k ∈ J	1	2	#	#	#	#	1	#	4	2	#	4	
28	k4=j'	4	4	#	#	#	#	2	#	2	1	#	1	
29	LB4(J')	2200	2200	#	#	#	#	1900	#	1900	1650	#	1650	
30		inf		inf				inf		inf		inf		
31	'Feas' and 'Inf' indicate feasible and infeasible assignment on its derived lower bound respectively,													
32	knowing D's orders.													

รูปที่ 4 การคำนวณค่าจำกัดล่างในแต่ละสภาวะ

	BG	BH	BI	BJ	BK	BL	BM	BN	BO	BP	BQ	BR	BS	BT	
1	Sub-Computations Spreadsheet for an Initial Upper Bound														
2	The Greedy Heuristic Approach (Many Starting Points)														
3	Each starting point is the first assignment of any facility number to location 4.														
4	1. Starting with facility 1						4	2	3	1					
5	Location.....>						1	2	3	4					
6	Stage 2	Assigning facility				3	⇒	Min. contribution to Obj. Val. =				240			
7	Stage 3	Assigning facility				2	⇒	Con. to Obj. Val. =				890	*		
8						4	⇒	Con. to Obj. Val. =				1090			
9		Assigning facility				2	⇒	Min. contribution to Obj. Val. =				990			
10	Stage 4	Assigning facility				4	⇒	Min. contribution to Obj. Val. =				2280			
11											Objective Value =		3410		
12	Swop on last two assignments						⇒	2	4	3	1				
13	2. Starting with facility 2						4	1	3	2					
14	Location.....>						1	2	3	4					

รูปที่ 5 การคำนวณค่าจำกัดบนอ้างอิงเริ่มต้น

บนแผ่นคำนวณจำเป็นต้องเป็นปัญหามิติขนาดเล็กๆ เท่านั้น ทั้งนี้เพราะความสามารถของแผ่นคำนวณ Excel ที่ใช้ทดสอบอยู่นี้มีจำกัด โดยเฉพาะฟังก์ชันเงื่อนไข if นั้นมีความสำคัญและจำเป็นมากในการกำหนดทิศทางของคำสั่งนั้นจะได้ไม่เกิน 7 เงื่อนไขซ้อน ดังนั้นบางส่วนของแผ่นคำนวณต้องทำการตัดแยกคำสั่ง กล่าวคือแทนที่จะสร้างเงื่อนไขซ้อนเพียงครั้งเดียวและนำไปใช้กับกรณีอื่นๆ โดยการคัดลอกนั้นไม่สามารถทำได้ แต่เราจำเป็นต้องใช้วิธีคัดลอกแล้วดัดแปลงแทนให้สอดคล้องกับกรณีอื่นๆ แต่ในบางครั้งเราก็ไม่สามารถดัดแปลงการพิจารณาได้เลย เช่นการตรวจสอบเพื่อกำหนดค่าจำกัดบนใหม่ในตัวอย่างแผ่นคำนวณนี้ไม่สามารถทำได้เลย แม้ปัญหามิตินี้มีขนาดเล็กก็ตาม โดยเราจำเป็นต้องตรวจสอบและกำหนดเอง และโครงสร้างของปัญหามิติหนึ่งๆ ก็สามารถใช้ได้กับปัญหาในขนาดนั้นๆ เท่านั้น โดยเราไม่สามารถที่จะนำไปใช้กับปัญหาที่มีขนาดต่างกันได้เลย ซึ่งสิ่งเหล่านี้เป็นข้อจำกัดของการใช้ประโยชน์จากแผ่นคำนวณบนคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน โดยเฉพาะผู้ออกแบบจะต้องตระหนักถึงเงื่อนไขที่ตนสร้างไว้ในแผ่นคำนวณอย่างแม่นยำด้วย แต่อย่างไรก็ตามการคำนวณบนแผ่นคำนวณนั้นสามารถให้รายละเอียดในการสร้างความเข้าใจต่อผู้ใช้เป็นอย่างมาก อีกทั้งให้ความถูกต้องและรวดเร็ว

เอกสารอ้างอิง

- [1] T. Koopmans and M. Beckmann, "Assignment problems and the location of economic activities," *Econometrica* 25 (1957), 53-76.
- [2] P. M. Hahn and T. L. Grant, "Lower bounds for the quadratic assignment problem based upon a dual formulation," *Operations Research* 46 (1998), 912-922.
- [3] M. Resende, K. Ramakrishnan, and Z. Drezner, "Computing lower bounds for the quadratic assignment problem with an interior point algorithm for linear programming," *Operations Research* 43(1995), 781-791.
- [4] P. Pitakgul, S. Svetasreni, and P. Charnsethikul, "A Hybrid Dynamic Programming/Branch-and-Bound Approach for the Quadratic Assignment Problem," in *Proceedings of the International Workshop on the Quadratic Assignment Problem and Extensions*, P. Charnsethikul, R. Kanjanapanyakorn, and P. Sudas Na Ayudhaya (Eds.), Kasetsart University, Bangkok, (2000), 77-83.
- [5] ปรีชา พันธุมสินชัย, พิชิต สุขเจริญพงษ์ และ พิรุทธิ์ ชาญเศรษฐิกุล, "การเรียนการสอน Management Science โดยใช้ Excel Spreadsheet," การประชุมวิชาการข่ายงานวิศวกรรมอุตสาหกรรมปี 2542, ขอนแก่น, (1999), หน้า 44 – 55.

- [6] R.L. Rardin, *Optimization in Operations Research*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1997, 577-579.