



การวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบางด้วยวิธีบาวคาร์ลีเอลิเมนต์

ANALYSIS OF INFLUENCE SURFACES OF THIN PLATES BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

ซุลกิฟลี เดมา¹ บุญมี ชินนาบุญ^{2*} สมชาย ชูชีพสกุล³

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

*Corresponding Author: boonme.chi@kmutt.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีบาวคาร์ลีเอลิเมนต์สำหรับการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นพื้นที่มีพฤติกรรมอยู่ในช่วงอีลาสติก โดยมีลักษณะทรงเรขาคณิตและเงื่อนไขขอบเขตแบบทั่วไป ตามหลักทฤษฎีฟังก์ชัน ระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชันการโก่งตัว การหมุนตัว และแรงภายใน (แรงเฉือน โมเมนต์คัต และ โมเมนต์บิด) ณ จุดที่พิจารณาสามารถสร้างได้โดยการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์จากทฤษฎีการคัตของแผ่นบางที่ถูกกระทำด้วยแรงซิงกูลาริตีที่เกี่ยวข้อง ณ จุดที่พิจารณานั้น ดังนั้นระนาบอินฟลูเอนซ์สามารถสร้างได้โดยกำหนดตัวดำเนินการทางดิฟเฟอเรนเชียลที่เหมาะสมกับแรงซิงกูลาริตี ด้วยจุดเด่นของวิธีบาวคาร์ลีเอลิเมนต์ทำให้การหาผลเฉลยของปัญหาการคัตของแผ่นบางที่ถูกกระทำด้วยแรงซิงกูลาริตีสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยปราศจากความยุ่งยาก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง สามารถได้ความถูกต้องแม่นยำที่ดีเยี่ยมโดยใช้กระบวนการคำนวณที่เล็กน้อย หลากหลายตัวอย่างและผลการคำนวณเชิงเลขได้ถูกนำเสนอเพื่อตรวจสอบและยืนยันความถูกต้องการประยุกต์ใช้และประสิทธิภาพของวิธีที่นำเสนอครั้งนี้

คำสำคัญ : วิธีบาวคาร์ลีเอลิเมนต์, แรงซิงกูลาริตี, ระนาบอินฟลูเอนซ์, ทฤษฎีฟังก์ชัน, แผ่นบาง

ABSTRACT

This paper presents the application of Boundary Element Method for construction of influence surfaces of elastic plates with general geometries and boundary conditions. According to the reciprocal theorem, the influence surfaces of the particular functions such as the deflection, rotation and stress resultants (shear forces, bending moments and twisting moments) at the observation point can be obtained from the solution of the governing differential equation of plate bending subjected to a generalized load singularity applied at that point. Then the involving influence surface can be obtained by employing the pertaining linear differential operator to the generalized load singularity. With the merit of Boundary Element Method, the solution of plate bending subjected to a generalized load singularity can be solved efficiently without difficulty. Furthermore,

excellent accuracy with low computational effort is attained. Several numerical examples and results are presented to validate the accuracy, applicability as well as effectiveness of the proposed method.

KEYWORDS: Boundary element method, generalized load singularity, Influence surfaces, Reciprocal theorem, Thin plates

1. บทนำ

ในปัจจุบันโครงสร้างแผ่นพื้นเป็นส่วนหนึ่งของระบบโครงสร้างทางวิศวกรรม ซึ่งมีการใช้งานในหลายด้าน อาทิ อาคาร ถนน และสะพาน เป็นต้น แผ่นพื้นที่น่าสนใจสามารถพบได้ในหลากหลายลักษณะเช่นกัน อาทิ แผ่นพื้นสี่เหลี่ยม แผ่นพื้นโค้ง แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และแผ่นพื้นวงกลม เป็นต้น ซึ่งการออกแบบโครงสร้างแผ่นพื้นดังกล่าวจำเป็นต้องวิเคราะห์หาการตอบสนองเมื่อมีแรงกระทำต่างๆ โดยเฉพาะเมื่อมีน้ำหนักจรที่สามารถเปลี่ยนตำแหน่งที่กระทำได้ตลอดโครงสร้าง การหาการตอบสนองที่สำคัญของโครงสร้าง อันได้แก่ การโก่งตัว แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ที่มีโอกาสเกิดค่าสูงสุดจึงเป็นสิ่งสำคัญในการออกแบบโครงสร้างเพื่อรับน้ำหนักจรดังกล่าว

ระนาบอินฟลูเอนซ์ (Influence surface) ของแผ่นพื้นเป็นเครื่องมือที่ช่วยในการวิเคราะห์หาค่าการตอบสนองสำหรับตำแหน่งที่สนใจ (Observation point) บนแผ่นพื้น ซึ่งมีหลักการเดียวกับเส้นอินฟลูเอนซ์ (Influence line) ของคานา ประโยชน์ของระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นพื้น คือ สามารถวิเคราะห์หาการตอบสนองสูงสุดสำหรับตำแหน่งที่สนใจ เช่น การโก่งตัว แรงเฉือน หรือโมเมนต์ดัด รวมทั้งสามารถวิเคราะห์รูปแบบการวางน้ำหนักจรที่ทำให้เกิดการตอบสนองสูงสุดนั้น ซึ่งมีประโยชน์ในการออกแบบโครงสร้างแผ่นพื้น

การวิเคราะห์พฤติกรรมและการตอบสนองของแผ่นพื้นดังกล่าวสามารถแบ่งออกเป็น 2 วิธี คือ 1) วิธีเชิงวิเคราะห์ และ 2) วิธีเชิงเลข ในส่วนวิธีเชิงวิเคราะห์จะมีข้อจำกัดที่สามารถวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นที่มีรูปร่างและน้ำหนักที่กระทำแบบง่ายไม่ซับซ้อนเท่านั้น ในขณะที่วิธีเชิงเลขสามารถลดข้อด้อยนี้โดยวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นที่มีลักษณะซับซ้อนได้ การวิเคราะห์วิธีเชิงเลขที่นิยมใช้กันในปัจจุบัน คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีบาวควารีเอลิเมนต์ ซึ่งแต่ละวิธีสามารถวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ได้เช่นกัน แต่ขั้นตอนการดำเนินงานมีความแตกต่างกันออกไป วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีข้อด้อยในการแก้ปัญหาที่จุดซิงกูลาร์ซึ่งทำได้ยุ่งยาก และต้องแบ่งออกเป็นอีกกรณีเพื่อให้ได้คำตอบ ในทางกลับกันวิธีบาวควารีเอลิเมนต์สามารถแก้ปัญหาที่จุดซิงกูลาร์ได้ง่าย โดยใช้ฟังก์ชันดิเรกเดลต้า (Dirac delta function) ทำให้ได้คำตอบสุดท้ายที่มีความสอดคล้องมากขึ้นและยังได้คำตอบใกล้เคียงกับวิธีเชิงวิเคราะห์อีกด้วย

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาการวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบางภายใต้การเสียดรูปน้อยและเป็นแผ่นพื้นที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่น วัสดุมีความเป็นเนื้อเดียวกันตลอดหน้าตัด โดยงานวิจัยนี้จะประยุกต์ใช้ทฤษฎีผกผัน (Reciprocal theorem) ร่วมกับกระบวนการของวิธีบาวควารีเอลิเมนต์ในการสร้างสมการบาวควารีอินทิกรัล ซึ่งลักษณะเด่นของงานวิจัยนี้ คือ การสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบางโดยลดกระบวนการคำนวณ จากโดยทั่วไปที่จะต้องทำการคำนวณแบบซ้ำๆกัน โดยเคลื่อนน้ำหนักจรขนาดหนึ่งหน่วยไปตลอดทั่วแผ่นบาง ในขณะที่งานวิจัยนี้จะสามารถสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ในการคำนวณเพียงครั้งเดียว โดยกำหนดให้ฟังก์ชันซิงกูลาร์ดีเบบดิเรกเดลต้าที่เกี่ยวข้องกระทำ ณ ตำแหน่งที่พิจารณาสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ อีกทั้งด้วยข้อดีของวิธีบาวควารีเอลิเมนต์ที่จะให้คำตอบที่มีความถูกต้องแม่นยำสูงและมีการแบ่งเอลิเมนต์เฉพาะที่ขอบเขตของแผ่นบางเท่านั้น นอกจากนี้ยังสามารถวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างแบบซับซ้อนได้โดยสะดวก จึงทำให้วิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้มีความเหมาะสมในการประยุกต์ใช้ในการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบาง ได้มีงานวิจัยศึกษามาแล้วดังนี้

Pucher [1] ได้สร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นพื้นสี่เหลี่ยม แผ่นพื้นวงกลม และ แถบแผ่นพื้น (Plate Strips) ซึ่งใช้ทฤษฎีเชิงวิเคราะห์ในการคำนวณหาระนาบอินฟลูเอนซ์แล้วมาเปรียบเทียบผลที่ได้จากทฤษฎีการตัดของแผ่นพื้น

Palmer [2] ได้ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์สร้างระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับแผ่นพื้นน้ำแข็งที่ลอยอยู่บนน้ำ โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีการตัดของแผ่นพื้นที่วางบนฐานรองรับแบบยึดหยุ่น งานวิจัยนี้ได้เน้นในการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์คัตและแสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในการหาค่าโมเมนต์คัตสูงสุดเมื่อมีแรงกระทำแบบกระจายสม่ำเสมอ

Memari และ West [3] ได้นำระนาบอินฟลูเอนซ์ไปใช้กับการออกแบบสะพานเพื่อหาค่าแรงภายในสูงสุดในที่สุด โดยแนะนำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติในการวิเคราะห์ และใช้วิธี Adjoint เพื่อกำหนดสัมประสิทธิ์อินฟลูเอนซ์สำหรับออกแบบสะพาน งานวิจัยนี้แสดงตัวอย่างการประยุกต์หาค่าแรงภายในสูงสุดในที่สุดที่เกิดขึ้นจากรถบรรทุกกระทำกับ โครงสร้างสะพาน

Cifuentes และ Paz [4] ได้เสนอกระบวนการที่ง่ายในการสร้างเส้นอินฟลูเอนซ์สำหรับ โครงถัก คานและระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับแผ่นพื้น ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งประยุกต์โดยใช้หลักการ Muller-Breslau

Orakdögen [5] ได้สร้างเส้นอินฟลูเอนซ์และระนาบอินฟลูเอนซ์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเริ่มจากการกำหนดเอลิเมนต์เมทริกซ์ของแรงโดยใช้กฎของ Betti และสมการในกระบวนการวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีที่นำเสนอสามารถประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์แบบต่างๆ ได้สะดวกมากขึ้น

Razouki และ Al-Ani [6] ได้ศึกษาการคำนวณอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์คัต ไปใช้วิเคราะห์กับแผ่นพื้นคอนกรีต โดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ในรูปแบบอนุกรมคู่ฟูรีเยร์ของทฤษฎีแผ่นบางแบบการเสียดรูปน้อย งานวิจัยนี้สร้างระนาบอินฟลูเอนซ์แบบตรงไปตรงมาโดยการวางน้ำหนักหนึ่งหน่วยไปที่ตำแหน่งต่างๆของแผ่นพื้น ดังนั้นจึงต้องใช้กระบวนการคำนวณที่ค่อนข้างมาก

Silva Almeida และ Oliveira Neto [7] ได้เสนอการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของการเคลื่อนที่และโมเมนต์คัตด้วยวิธีบาวดาเรียลเอนต์ โดยใช้เอลิเมนต์ที่ขอบเป็นพหุนามกำลังสองหรือขอบแบบโค้ง งานวิจัยนี้ใช้วิธีการวางแรงหนึ่งหน่วยไปที่ตำแหน่งต่างๆ ทั่วแผ่นพื้นเพื่อคำนวณค่าการตอบสนองที่สนใจ จากนั้นนำค่าดังกล่าวมาสร้างเป็นระนาบอินฟลูเอนซ์โดยใช้วิธี Least square ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงใช้กระบวนการคำนวณค่อนข้างมาก

Jepsen [8] ได้เสนอการสร้างเส้นอินฟลูเอนซ์และระนาบอินฟลูเอนซ์โดยใช้พื้นฐานของหลักการ Müller-Breslau และแนวคิดจากการใส่แรงที่โหนดที่สอดคล้องกับความไม่ต่อเนื่องของการเคลื่อนที่ (Consistent nodal forces) ซึ่งจะมีความคล้ายคลึงกับงานของ Orakdögen [5] แต่งานวิจัยนี้ได้ปรับปรุงให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง พบว่าเป็นการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ด้วยหลากหลายวิธี ทั้งวิธีเชิงวิเคราะห์ [1, 2, 6] ซึ่งมีข้อจำกัดที่สามารถวิเคราะห์แผ่นพื้นแบบง่ายเท่านั้น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [3, 4, 5, 8] ซึ่งต้องทำการแบ่งเอลิเมนต์ภายในโดเมน และวิธีบาวดาเรียลเอนต์ [7] ซึ่งยังมีข้อจำกัดที่ต้องใช้กระบวนการคำนวณแบบซ้ำๆ โดยการเคลื่อนน้ำหนักบรรทุกจากรขนาดหนึ่งหน่วยไปตลอดทั่วแผ่นพื้น ดังนั้นงานวิจัยที่นำเสนอครั้งนี้จะเป็นการลดข้อด้อยเหล่านี้ คือ สามารถสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบางที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตแบบซับซ้อนได้และมีความถูกต้องแม่นยำสูง โดยทำการแบ่งเอลิเมนต์เฉพาะที่ขอบเขตเท่านั้น อีกทั้งไม่จำเป็นต้องใช้กระบวนการคำนวณซ้ำๆในการเคลื่อนน้ำหนักบรรทุกจากรขนาดหนึ่งหน่วยไปตลอดทั่วแผ่นพื้นจึงสามารถลดขั้นตอนการคำนวณได้มาก

3. ระเบียบวิธีวิจัย

ในส่วนนี้จะแสดงการนำสมการอนุพันธ์จากทฤษฎีการค้ำของแผ่นบางมาแปลงให้อยู่ในรูปของสมการบาวดาร์อินทิกรัล และนำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบาง โดยมีรายละเอียดดังนี้

3.1 สมการอนุพันธ์การค้ำของแผ่นบาง

สมการอนุพันธ์สำหรับปัญหาการค้ำของแผ่นบางสามารถเขียนได้ดังนี้

$$D\nabla^4 w(x,y) = f(x,y) \quad (1)$$

โดย $w(x,y)$ คือ ระยะโก่งตัวของแผ่นบาง $f(x,y)$ คือ ภาระ (Load) ที่กระทำต่อแผ่นบาง ∇^4 คือ ตัวดำเนินการฮาร์มอนิกคู่ (Biharmonic Operator) ใน 2 มิติ โดยที่

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (2)$$

D คือ ความแข็งเชิงค้ำ (Flexural Rigidity) ของแผ่นบาง โดยที่

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

โดย E คือ โมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) h คือ ความหนาของแผ่นบาง และ ν คือ อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio) สำหรับ โมเมนต์ค้ำ M_x M_y โมเมนต์บิด M_{xy} และแรงเฉือน Q_x Q_y ภายในแผ่นบาง สามารถแสดงได้ดังสมการ ดังนี้

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (7)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (8)$$

ในขณะที่เงื่อนไขขอบเขตหรือที่รองรับของแผ่นบางสามารถกำหนดได้ ดังต่อไปนี้
ที่รองรับแบบธรรมดา (simple support)

$$w = 0, M_n = 0 \tag{9}$$

ที่รองรับแบบยึดแน่น (fixed support)

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{10}$$

ที่รองรับแบบอิสระ (free support)

$$V_n = 0, M_n = 0 \tag{11}$$

เมื่อ $w, \frac{\partial w}{\partial n}, V(w), M(w), T(w)$ คือ ระยะ โคงตัว ความชัน แรงเฉือน โมเมนต์คดและโมเมนต์บิดของที่รองรับ ตามลำดับ โดยที่

$$M = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tag{12}$$

$$T = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial n \partial t} \right) \tag{13}$$

$$V = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tag{14}$$

เมื่อ $n-t$ คือ ระบบพิกัดฉากที่ขอบเขตของแผ่นบาง โดย n คือ แกนที่ตั้งฉากกับขอบเขต และ t คือ แกนที่สัมผัสกับขอบเขต

3.2 การประยุกต์ใช้สมการอนุพันธ์การคดของแผ่นบางในการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการอนุพันธ์ของแผ่นบางและการนิยามของระนาบอินฟลูเอนซ์พอสังเขป รวมถึงการนำสมการอนุพันธ์ที่ได้จากทฤษฎีการคดของแผ่นบางไปประยุกต์ใช้กับการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันระยะ โคงตัว ฟังก์ชันโมเมนต์คด ฟังก์ชันโมเมนต์บิด และฟังก์ชันแรงเฉือน โดยการเริ่มจากสมการอนุพันธ์การคดของแผ่นบาง ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.1 ส่วนการให้ความหมายระนาบอินฟลูเอนซ์นั้นคือ ผงวัตถุที่แสดงค่าฟังก์ชันต่างๆ (ฟังก์ชันระยะ โคงตัว ฟังก์ชันโมเมนต์ และฟังก์ชันแรงเฉือน) ณ ตำแหน่งที่พิจารณา (Observation point) เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งของภาระแบบจุดขนาด 1 หน่วย ที่กระทำภายในแผ่นพื้น เมื่อได้ทราบนิยามของระนาบอินฟลูเอนซ์มาพอสังเขปแล้ว ลำดับต่อไปจะเป็นการนำทฤษฎีผกผัน มาประยุกต์ใช้กับสมการอนุพันธ์จากทฤษฎีการคดของแผ่นบางเพื่อใช้สร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ ดังนี้

จากทฤษฎีผกผัน เมื่อแรงซิงกูลาริตีหนึ่งหน่วย (Unit singularity) กระทำที่ จุด Q (รูปที่ 1) จะสามารถเขียนสมการได้ดังนี้ [9]

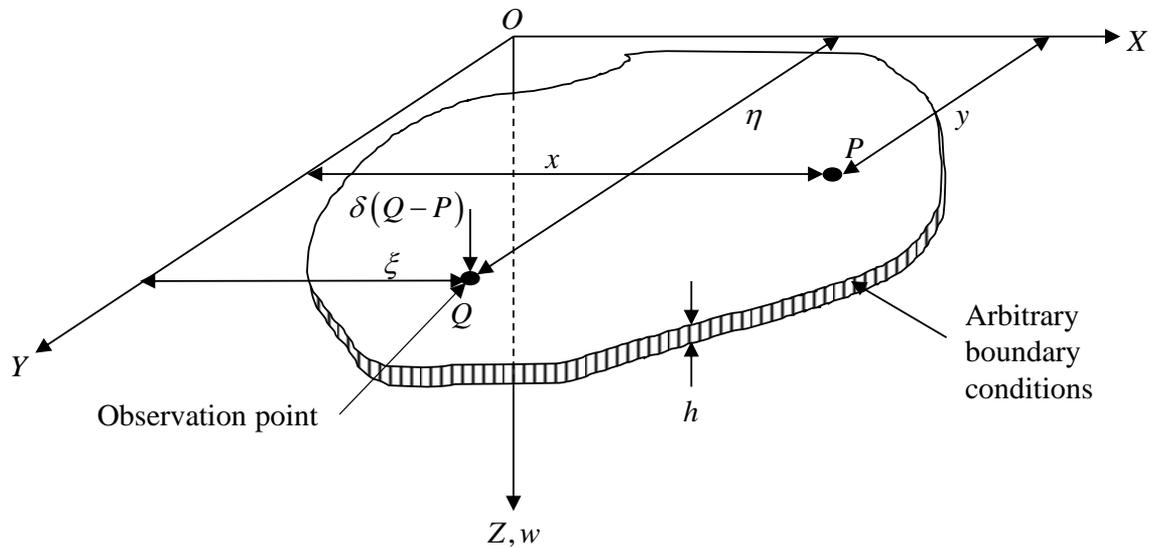
$$D\nabla^4 w = \delta(P-Q) \tag{15}$$

เมื่อ $\delta(P-Q)$ คือ ฟังก์ชันดิเรกเดลต้า (Dirac delta function) ซึ่งคำตอบ $w(x,y)$ จากสมการที่ 15 คือ ระนาบอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันระยะ โคงตัวของแผ่นบางสำหรับที่จุดพิจารณา Q

สำหรับระนาบอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์คด สามารถสร้างได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$D\nabla^4 w = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) [\delta(P-Q)] \quad (16)$$

$$D\nabla^4 w = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) [\delta(P-Q)] \quad (17)$$



รูปที่ 1 แนวคิดการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบาง

ซึ่งคำตอบ $w(x,y)$ จากสมการที่ 16 และสมการที่ 17 คือ ระนาบอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันโมเมนต์ดัด M_x และ M_y ตามลำดับ สำหรับที่จุดพิจารณา Q

สำหรับระนาบอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์บิด สามารถสร้างได้จากสมการ ดังต่อไปนี้

$$D\nabla^4 w = -(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\delta(P-Q)] \quad (18)$$

ซึ่งคำตอบ $w(x,y)$ จากสมการที่ 18 คือ ระนาบอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันโมเมนต์บิด M_{xy} สำหรับที่จุดพิจารณา Q

สำหรับระนาบอินฟลูเอนซ์ของแรงเฉือน สามารถสร้างได้จากสมการ ดังต่อไปนี้

$$D\nabla^4 w = -\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 [\delta(P-Q)] \quad (19)$$

$$D\nabla^4 w = -\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 [\delta(P-Q)] \quad (20)$$

ซึ่งคำตอบ $w(x,y)$ จากสมการที่ 19 และสมการที่ 20 คือ ระบายอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันแรงเฉือน Q_x และแรงเฉือน Q_y ตามลำดับ สำหรับที่จุดพิจารณา Q

จากสมการที่ 15 ถึงสมการที่ 20 จะพบว่าอยู่ในรูปแบบสมการอนุพันธ์ซึ่งรับแรงเป็นฟังก์ชันซิงกูลาริตี้แบบดิแรกเดลต้า ด้วยข้อดีของวิธีบาวารีเอลิเมนต์ที่สามารถหาคำตอบของปัญหาที่มีลักษณะเป็นซิงกูลาริตี้ได้อย่างแม่นยำ มีความถูกต้องสูง และสามารถลดขนาดของปัญหาได้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงสร้างสมการบาวารีเอลิเมนต์สำหรับสมการอนุพันธ์ที่ 15 ถึงสมการอนุพันธ์ที่ 20 เพื่อนำคำตอบที่ได้ไปสร้างระบายอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้อง ซึ่งลักษณะเด่นของงานวิจัยนี้ คือ การคำนวณหาระบายอินฟลูเอนซ์จากการคำนวณหา $w(x,y)$ ในคราวเดียว ซึ่งไม่ต้องใช้วิธีคำนวณซ้ำโดยการเคลื่อนน้ำหนักแบบจุดขนาด 1 หน่วยตลอดแผ่นพื้น โดยรายละเอียดจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

3.3 วิธีบาวารีเอลิเมนต์ (Boundary Element Method)

ในการประยุกต์ใช้วิธีบาวารีเอลิเมนต์ เราจำเป็นต้องทราบคำตอบพื้นฐาน (Fundamental solution) ของปัญหา ซึ่งสำหรับปัญหาการค้ำของแผ่นบาง คำตอบพื้นฐานได้จากสมการดังต่อไปนี้ [10]

$$DV^4u = \delta(P-Q) \quad (21)$$

โดย u คือ คำตอบพื้นฐานของปัญหาการค้ำของแผ่นบาง ซึ่งสามารถหาได้โดยเขียนสมการที่ 21 ให้อยู่ในระบบพิกัดขั้ว และจะพบว่ามิต่างนี้

$$u = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r^2 \quad (22)$$

เมื่อ r คือ ระยะห่างระหว่างจุด P ถึงจุด Q

สมการอนุพันธ์ที่ 15 ถึงสมการอนุพันธ์ที่ 20 สามารถเขียนเป็นสมการอินทิกรัลได้ดังนี้ [10]

$$\alpha w^{(i)}(P) = \int_{\Gamma} [uV(w) - wV(u) - u_{,n}M(w) + w_{,n}M(u)] ds + \sum_{l=1}^L \left(\int_l [uT(w) - wT(u)] \right) + \int_{\Omega} ub^{(i)} d\Omega, \quad (23)$$

โดย $\alpha = 1$ เมื่อ จุด P อยู่ภายในโดเมน ($P \in \Omega$), $\alpha = 0.5$ เมื่อ จุด P อยู่ที่ขอบเขต ($P \in \Gamma$), $i = 1 \dots 6$ และกำหนดให้

$$\int_{\Omega} ub^{(1)} d\Omega = \int_{\Omega} u\delta(P-Q) d\Omega = F^1 \quad (24)$$

$$\int_{\Omega} ub^{(2)} d\Omega = - \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right) d\Omega = F^2 \quad (25)$$

$$\int_{\Omega} ub^{(3)} d\Omega = - \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right) d\Omega = F^3 \quad (26)$$

$$\int_{\Omega} ub^{(4)}d\Omega = -\int_{\Omega} u\left((1-\nu)\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)d\Omega = F^4 \quad (27)$$

$$\int_{\Omega} ub^{(5)}d\Omega = -\int_{\Omega} u\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\delta d\Omega = F^5 \quad (28)$$

$$\int_{\Omega} ub^{(6)}d\Omega = -\int_{\Omega} u\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\delta d\Omega = F^6 \quad (29)$$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากปัญหาการตัดของแผ่นบางจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัวแปรที่ขอบเขตเสมอ ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องสร้างสมการอินทิกรัลเพิ่มอีก 1 สมการ โดยพิจารณาให้จุด P อยู่ที่ขอบเขต ($P \in \Gamma$) แล้วหาอนุพันธ์ของสมการที่ 23 เมื่อเทียบกับเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย (\mathbf{v}) ที่ขอบเขตนั้น เราสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\frac{1}{2}w_v^{(i)}(P) = \int_{\Gamma} [u_v V(w) - wV(u_v) - u_{,vn}M(w) + w_{,n}M(u_v)] ds + \sum_{l=1}^L (\|u_v T(w) - wT(u_v)\|)_l + \int_{\Omega} u_v b^{(i)}d\Omega, \quad (30)$$

เมื่อ $i = 1 \dots 6$ และกำหนดให้

$$\int_{\Omega} u_v b^{(1)}d\Omega = \int_{\Omega} u_v \delta(P-Q)d\Omega = F_v^1 \quad (31)$$

$$\int_{\Omega} u_v b^{(2)}d\Omega = -\int_{\Omega} u_v \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)d\Omega = F_v^2 \quad (32)$$

$$\int_{\Omega} u_v b^{(3)}d\Omega = -\int_{\Omega} u_v \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right)d\Omega = F_v^3 \quad (33)$$

$$\int_{\Omega} u_v b^{(4)}d\Omega = -\int_{\Omega} u_v \left((1-\nu)\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)d\Omega = F_v^4 \quad (34)$$

$$\int_{\Omega} u_v b^{(5)}d\Omega = -\int_{\Omega} u_v \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\delta d\Omega = F_v^5 \quad (35)$$

$$\int_{\Omega} u_v b^{(6)}d\Omega = -\int_{\Omega} u_v \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\delta d\Omega = F_v^6 \quad (36)$$

จากสมบัติของฟังก์ชันดิแรกเคลต้า

$$\int_{\Omega} h(P)\frac{\partial^{m+n}\delta(P-Q)}{\partial x^m\partial y^n}d\Omega = (-1)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}h(Q)}{\partial x^m\partial y^n} \quad (37)$$

เราสามารถคำนวณโดเมนอินทิกรัลจากสมการที่ 24 ถึงสมการที่ 29 และสมการที่ 31 ถึงสมการที่ 36 ได้ผลดังนี้

$$F^1 = \frac{1}{8\pi D}r^2 \ln r \quad (38)$$

$$F^2 = -\frac{1}{8\pi} \left[(2\ln r + 3r_x^2 + r_y^2) + \nu (2\ln r + 3r_y^2 + r_x^2) \right] \quad (39)$$

$$F^3 = -\frac{1}{8\pi} \left[(2\ln r + 3r_y^2 + r_x^2) + \nu (2\ln r + 3r_x^2 + r_y^2) \right] \quad (40)$$

$$F^4 = (1-\nu) \frac{1}{4\pi} r_x r_y \quad (41)$$

$$F^5 = \frac{1}{2\pi} \frac{r_x}{r} \quad (42)$$

$$F^6 = \frac{1}{2\pi} \frac{r_y}{r} \quad (43)$$

และ

$$F_v^1 = \frac{1}{8\pi D} r r_v (1 + 2\ln r) \quad (44)$$

$$F_v^2 = -\frac{1}{4\pi r} \left[(r_v + 2r_x r_y r_\tau) + \nu (r_v - 2r_x r_y r_\tau) \right] \quad (45)$$

$$F_v^3 = -\frac{1}{4\pi r} \left[(r_v - 2r_x r_y r_\tau) + \nu (r_v + 2r_x r_y r_\tau) \right] \quad (46)$$

$$F_v^4 = (1-\nu) \frac{1}{4\pi} (r_y^2 - r_x^2) r_\tau \quad (47)$$

$$F_v^5 = \frac{r_\tau r_y - r_v r_x}{2\pi r^2} \quad (48)$$

$$F_v^6 = -\left(\frac{r_\tau r_x + r_v r_y}{2\pi r^2} \right) \quad (49)$$

ดังนั้น จากสมการที่ 38 ถึงสมการที่ 49 พบว่าเราสามารถคำนวณหาค่าแม่นยำตรงของโดเมนอินทิกรัลในสมการที่ 24 ถึงสมการที่ 29 และสมการที่ 31 ถึงสมการที่ 36 โดยไม่จำเป็นต้องทำการแบ่งแผ่นบางออกเป็นโดเมนย่อย ซึ่งนี่คือลักษณะเด่นของวิธีการคำนวณที่นำเสนอในงานวิจัยนี้

จากนั้นเราสามารถใส่กระบวนการคำนวณตามวิธีบาวเดรีเอลิเมนต์ตามปกติ [10] โดยใช้สมการที่ 23 และสมการที่ 30 ในการสร้างสมการเพื่อคำนวณหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่ขอบเขตของแผ่นบาง จากนั้นเมื่อทราบค่าตัวแปรต่างๆที่ขอบเขตของแผ่นบางทั้งหมดแล้ว เราสามารถหาค่าการโก่งตัว $w^{(i)}(P)$ จากสมการที่ 23 เมื่อให้จุด $P(x, y)$ อยู่ในโดเมน ($P \in \Omega$) ซึ่ง $w^{(i)}(P)$ คือ ระบายอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันต่างๆ ดังนี้

$w^{(1)}(x, y)$ คือ ระบายอินฟลูเอนซ์ของระยะโก่งตัวสำหรับที่จุดพิจารณา Q

$w^{(2)}(x, y)$ คือ ระบายอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์คัต M_x สำหรับที่จุดพิจารณา Q

$w^{(3)}(x, y)$ คือ ระบายอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์คัต M_y สำหรับที่จุดพิจารณา Q

$w^{(4)}(x, y)$ คือ ระบายอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์บิด M_{xy} สำหรับที่จุดพิจารณา Q

$w^{(5)}(x, y)$ คือ ระบายอินฟลูเอนซ์ของแรงเฉือน Q_x สำหรับที่จุดพิจารณา Q

$w^{(6)}(x, y)$ คือ ระบายอินฟลูเอนซ์ของแรงเฉือน Q_y สำหรับที่จุดพิจารณา Q

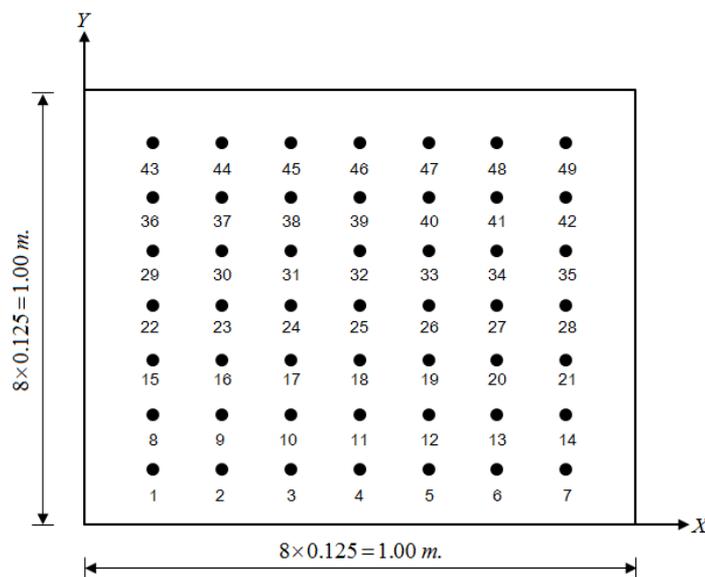
ดังนั้นจะพบว่าการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์โดยใช้วิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถคำนวณโดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีผกผันร่วมกับลักษณะเด่นของวิธีบาวคาร์เรลิเมนต์ ทำให้ลดขั้นตอนการคำนวณได้เป็นจำนวนมาก อีกทั้งยังได้ผลการคำนวณที่มีความถูกต้องแม่นยำสูงดังจะแสดงในหัวข้อต่อไป

4. ผลการวิเคราะห์

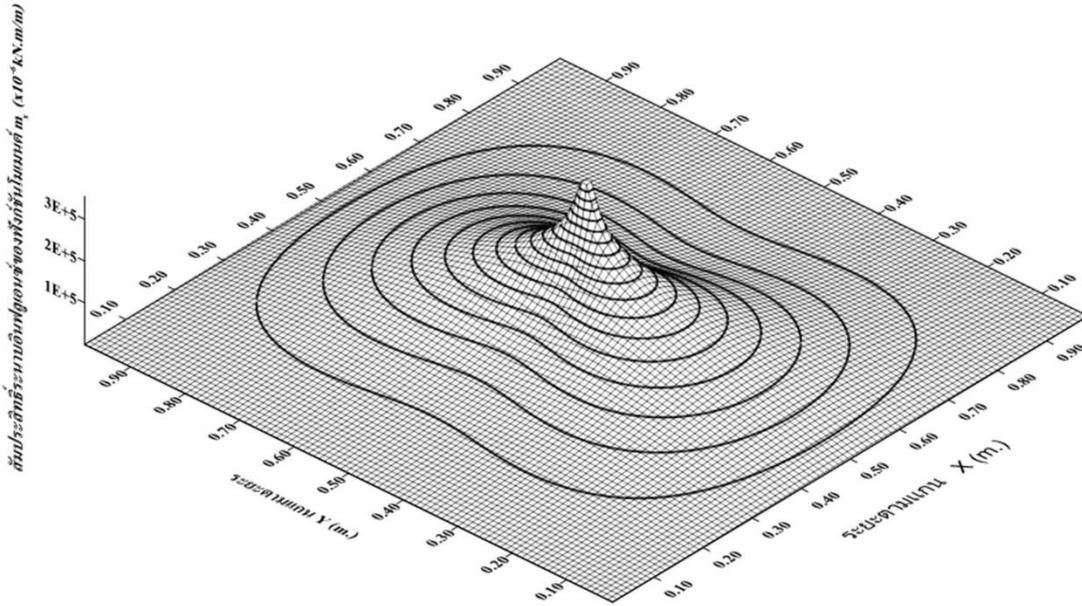
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบาง โดยที่แผ่นบางจะแบ่งตามลักษณะเรขาคณิต และมีเงื่อนไขที่ขอบเขตเป็นที่รองรับแบบธรรมดา แบบยึดแน่น และแบบอิสระ ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพและความถูกต้องของวิธีบาวคาร์เรลิเมนต์ที่นำเสนอครั้งนี้ โดยผลการคำนวณจากงานวิจัยนี้จะมาจาก $w^i(x,y)$ ซึ่งเป็นคำตอบจากสมการอนุพันธ์ที่ 15 ถึงสมการที่ 20 และใช้สมการบาวคาร์เรลิเมนต์ที่สมการที่ 23 ซึ่งเป็นการคำนวณหาระนาบอินฟลูเอนซ์โดยการคำนวณในคราวเดียว ในขณะที่ผลการคำนวณทั้งหมดที่จะนำมาเปรียบเทียบทั้งจากวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลข (วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์) สำหรับในหัวข้อนี้ จะเป็นการหาคำตอบจากการพิจารณาให้แรงกระทำแบบจุดขนาด 1 หน่วยกระทำตลอดทั้งแผ่นพื้นซึ่งจะเป็นการคำนวณซ้ำเป็นจำนวนมาก ซึ่งการวิเคราะห์นี้จะแบ่งตามหัวข้อดังต่อไปนี้

4.1 การวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่รองรับแบบธรรมดา

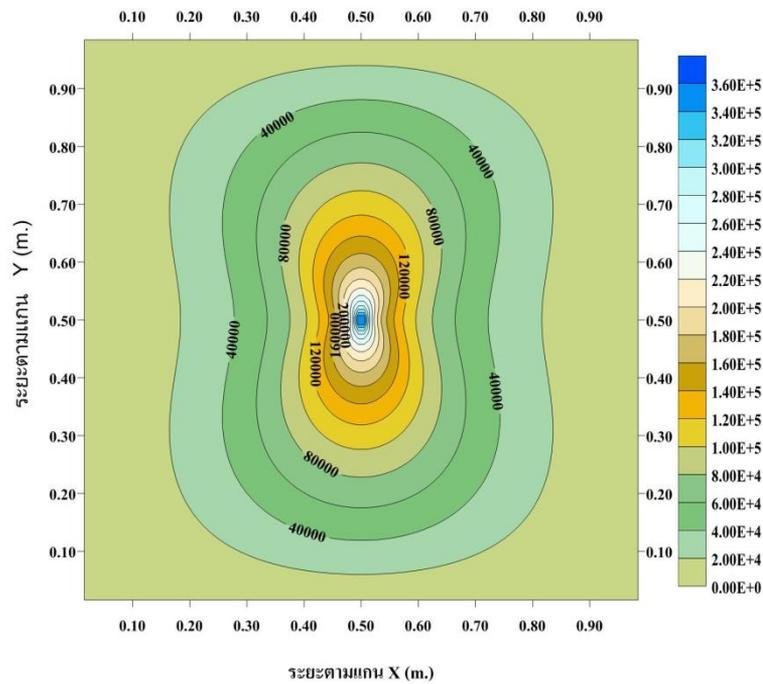
จากรูปที่ 2 แสดงลักษณะแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาด 1×1 m. โดยมีที่รองรับหรือเงื่อนไขที่ขอบเขตเป็นที่รองรับแบบธรรมดาทั้งสี่ด้าน และกำหนดให้แผ่นบางหนา 0.05 m. เป็นไปตามการจำแนกประเภทของแผ่นบาง กล่าวคือ อัตราส่วนความหนา (h) ต่อความกว้าง (L) อยู่ในช่วง $1/50$ ถึง $1/10$ ส่วนค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ $2,100,000$ kN/m² และค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับศูนย์ ระนาบอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์ดัด M_x สำหรับตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นพื้น (จุด 25 ในรูปที่ 2) สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงพื้นผิวสามมิติ และรูปที่ 4 ซึ่งแสดงเป็นลักษณะเส้นระดับ โดยในงานวิจัยนี้ได้จำลองแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์ที่ขอบเขตจำนวน 256 เอลิเมนต์ ซึ่งจะพบว่าลักษณะเส้นระดับจากรูปที่ 3 ในงานวิจัยนี้มีลักษณะคล้ายกับแผนภูมิเส้นระดับของ Pucher [1]



รูปที่ 2 ลักษณะแผ่นบางที่มีที่รองรับแบบธรรมดาทั้งสี่ด้านและจุดภายในโดเมน



รูปที่ 3 แผนภูมิพื้นผิวสามมิติแสดงระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชัน โมเมนต์ M_x



รูปที่ 4 แผนภูมิเส้นระดับแสดงระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชัน โมเมนต์ M_x ($\times 10^{-6} kN.m / m$)

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลการคำนวณที่ได้จากวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ ค่าสัมประสิทธิ์ของระนาบอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์คัต M_x สำหรับตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นพื้น ได้นำมาแสดงในตารางที่ 1 โดยผลการคำนวณจะมาจากการจำลองแผ่นบาง 4 รูปแบบตามจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบ คือ 32 64 128 และ 256 เอลิเมนต์ ซึ่งจะนำมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ [11] จากตารางที่ 1 จะพบว่าผลการคำนวณจากงานวิจัยนี้มีค่าใกล้เคียงมากกับผลที่ได้จากวิธีวิเคราะห์ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องที่สูงมากสำหรับคำตอบที่ได้จากวิธีบาวารีเอลิเมนต์ที่นำเสนอครั้งนี้ อีกทั้งยังพบว่าคำตอบจากวิธีบาวารีเอลิเมนต์จะมีความคลาดเคลื่อนลดลงเมื่อใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบเขตมากขึ้นซึ่งแสดงให้เห็นถึงความน่าเชื่อถือของวิธีที่นำเสนอครั้งนี้ เนื่องจากแสดงให้เห็นถึงการลู่เข้าสู่คำตอบแม่นยำตรง อนึ่งคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์จะได้จากกระบวนการคำนวณให้แรงแบบจุดขนาดหนึ่งหน่วยกระทำโดยตลอดทั่วแผ่นบาง ยกตัวอย่างเช่น หากต้องการสัมประสิทธิ์ตำแหน่งจุด 43 จะได้มาจากการนำแรงหนึ่งหน่วยกระทำที่จุดดังกล่าวแล้วหาค่าโมเมนต์คัต M_x ที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบาง (จุด 25) ดังนั้นเป็นการคำนวณที่ใช้เวลามากในการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ซึ่งจำเป็นต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์ทั่วทั้งแผ่นบาง

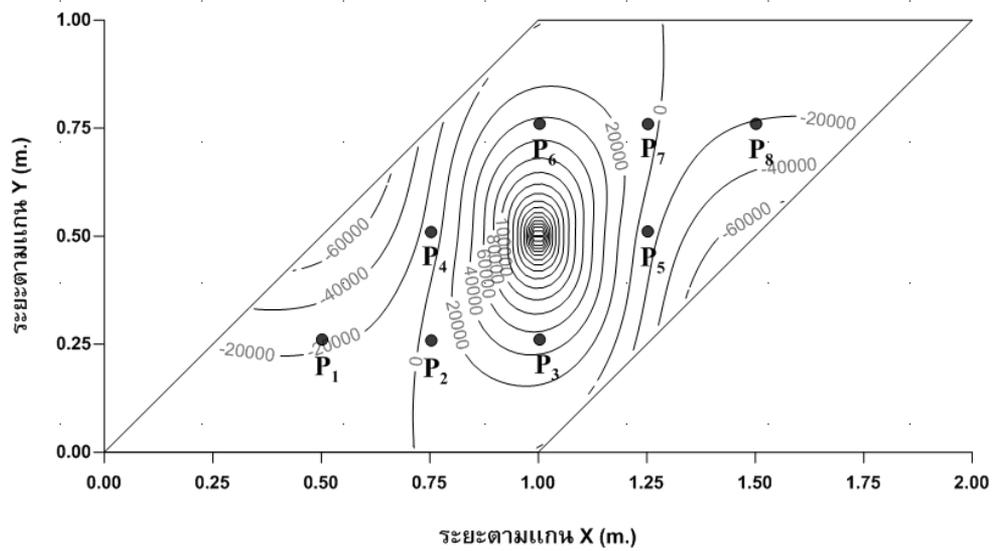
ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ระนาบอินฟลูเอนซ์ที่จุด 25 ของโมเมนต์ M_x ($\times 10^{-6} kN.m/m$) ภายในแผ่นบาง

จุด	วิธีเชิงวิเคราะห์ [11]	ค่าสัมประสิทธิ์ระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับ โมเมนต์ M_x เทียบกับจำนวนเอลิเมนต์ขอบ							
		32 เอลิเมนต์*		64 เอลิเมนต์*		128 เอลิเมนต์*		256 เอลิเมนต์*	
43	8561.78	8899.53	3.94%	8637.40	0.88%	8582.18	0.24%	8567.87	0.07%
49	8561.78	8899.53	3.94%	8637.40	0.88%	8582.18	0.24%	8567.87	0.07%
37	35068.74	35416.60	0.99%	35159.30	0.26%	35095.90	0.08%	35077.60	0.03%
41	35068.74	35416.60	0.99%	35159.30	0.26%	35095.90	0.08%	35077.60	0.03%
31	88859.05	89271.00	0.46%	88969.20	0.12%	88893.10	0.04%	88870.40	0.01%
33	88859.05	89271.00	0.46%	88969.20	0.12%	88893.10	0.04%	88870.40	0.01%
17	88859.05	89271.00	0.46%	88969.20	0.12%	88893.10	0.04%	88870.40	0.01%
19	88859.05	89271.00	0.46%	88969.20	0.12%	88893.10	0.04%	88870.40	0.01%
9	35068.74	35416.60	0.99%	35159.30	0.26%	35095.90	0.08%	35077.6	0.03%
13	35068.74	35416.60	0.99%	35159.30	0.26%	35095.90	0.08%	35077.6	0.03%
1	8561.78	8899.53	3.94%	8637.40	0.88%	8582.18	0.24%	8567.87	0.07%
7	8561.78	8899.53	3.94%	8637.40	0.88%	8582.18	0.24%	8567.87	0.07%

หมายเหตุ : * จำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบ

4.2 การวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบางแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Skew Plate)

ตัวอย่างนี้ทำการวิเคราะห์แผ่นบางแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยมีขนาดดังแสดงในรูปที่ 5 มีความหนาเท่ากับ 0.05 m โมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 2,000,000 kN/m² และอัตราส่วนบิดของเท่ากับ 0.3 ในขณะที่ด้านที่ขนานกับแนวแกน x กำหนดให้เป็นที่ยึดรับแบบยึดแน่นทั้งสองด้าน ส่วนด้านที่เหลือกำหนดให้เป็นที่ยึดรับแบบอิสระ ในการคำนวณครั้งนี้ใช้เอลิเมนต์ที่ขอบเขตจำนวน 496 เอลิเมนต์ โดยสามารถแสดงลักษณะของระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับโมเมนต์คัต M_x ที่จุดกึ่งกลางของแผ่นบาง ((x,y) = (1.00,0.50)) ได้ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 แผนภูมิเส้นระดับแสดงระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชัน โมเมนต์ M_x ที่กึ่งกลางแผ่นพื้น

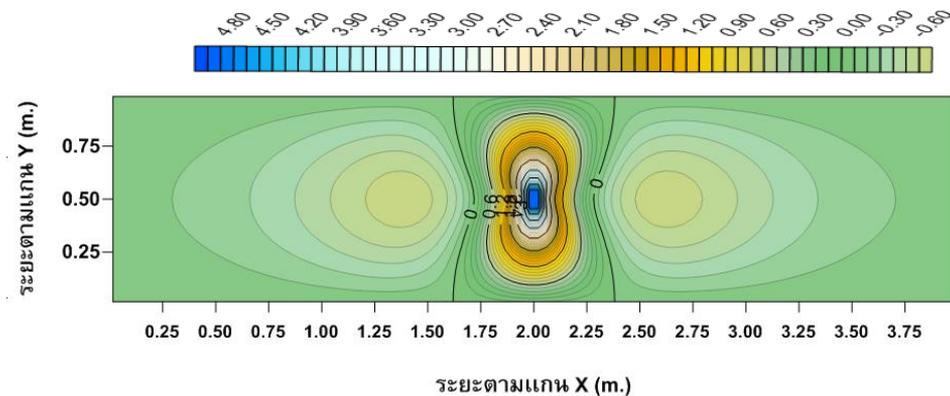
ตารางที่ 2 ค่าสัมประสิทธิ์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของโมเมนต์ M_x ($\times 10^{-6} kN.m / m$)

จุด	งานวิจัยนี้	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [12]	ค่าความต่าง(%)
P ₁	22677.00	22770.50	-0.41
P ₂	-4830.95	-4797.50	0.70
P ₃	-48426.20	-48382.50	0.09
P ₄	5224.00	5277.50	-1.01
P ₅	5224.00	5277.50	-1.01
P ₆	-48426.20	-48382.50	0.09
P ₇	-4830.95	-4797.50	0.70
P ₈	22677.00	22770.50	-0.41

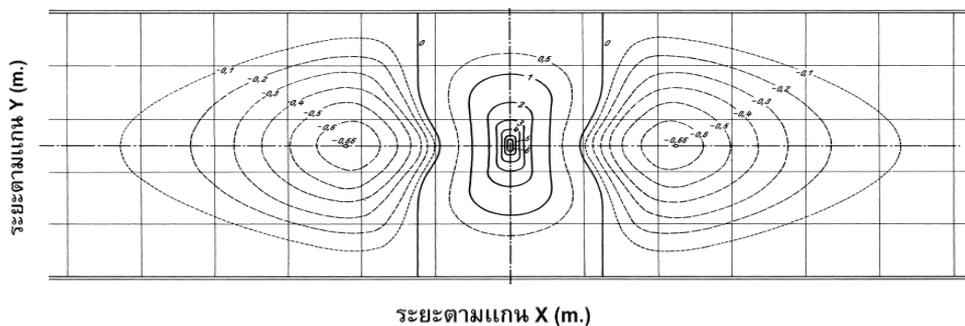
ค่าสัมประสิทธิ์ของระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับโมเมนต์คด M_x ที่จุดกึ่งกลางของแผ่นบาง ได้นำมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังแสดงในตารางที่ 2 ซึ่งจะพบว่าผลการคำนวณที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าสอดคล้องใกล้เคียงกันมาก ในขณะที่แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ [12] ใช้เอลิเมนต์ภายในโดเมนจำนวน 14,976 เอลิเมนต์ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องและประสิทธิภาพที่สูงของวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ที่นำเสนอครั้งนี้

4.3 การวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบางแบบแถบยาว (Strip Plate)

ตัวอย่างนี้แสดงระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชันโมเมนต์คด M_x ที่จุดกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแถบยาว ดังแสดงในรูปที่ 6(d) แผ่นบางมีขนาดความกว้าง 1.00 m. และความยาวเท่ากับ 4.00 m. มีความหนาเท่ากับ 0.05 m. โมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 2,000,000 kN/m² และอัตราส่วนปัวซองกำหนดให้เป็นศูนย์ ส่วนที่รองรับที่ขอบด้านขนานกับแนวระยะตามแกน x กำหนดให้เป็นที่ยึดแบบอตรรกะ ส่วนที่รองรับที่ขอบด้านขนานกับแนวระยะตามแกน y กำหนดให้เป็นที่ยึดแบบอตรรกะ



(ก)



(ข)

รูปที่ 6 แผนภูมิเส้นระดับแสดงระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชันโมเมนต์ M_x ที่กึ่งกลางแผ่นพื้น

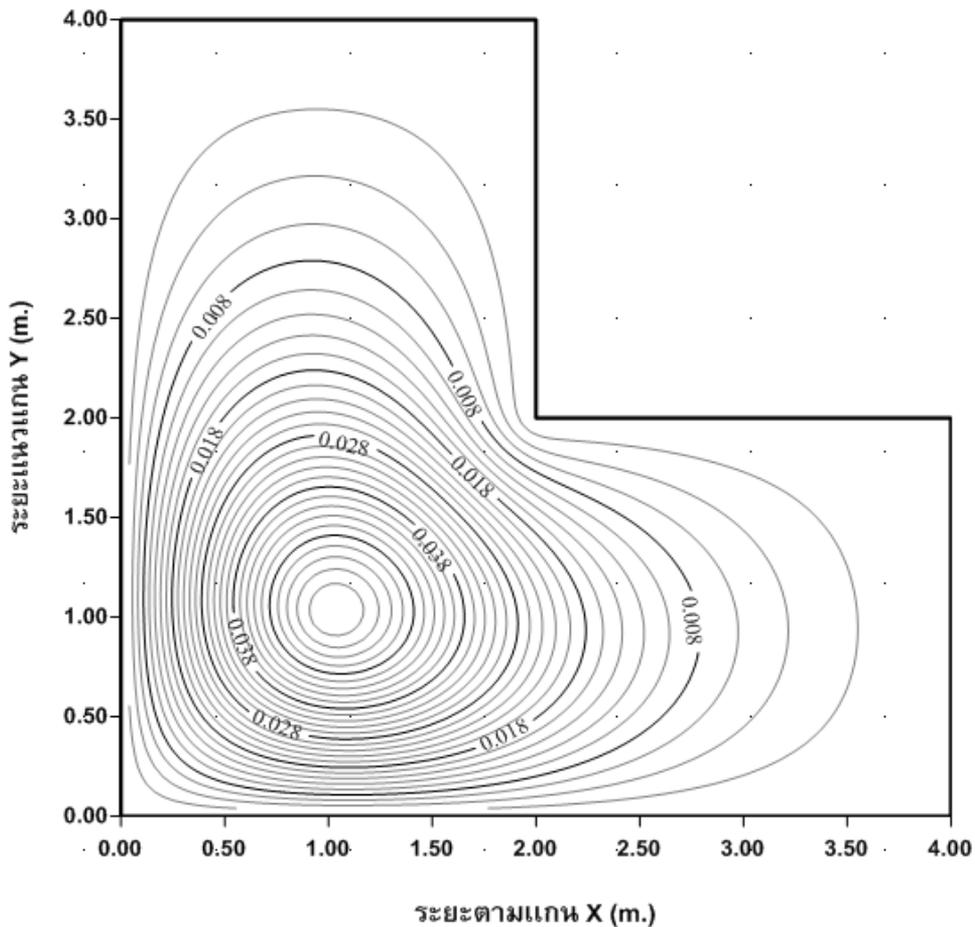
(ก) แผนภูมิเส้นระดับของงานวิจัยนี้

(ข) แผนภูมิเส้นระดับของ Pucher [1]

จากรูปที่ 6(ก) แสดงลักษณะเส้นระดับของระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชันโมเมนต์คัต M_x ที่ได้จากงานวิจัยนี้ ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ของระนาบอินฟลูเอนซ์ในรูปนี้แสดงอยู่ในหน่วย $10^{-6}/8\pi \text{ kN.m/m}$ เพื่อให้สอดคล้องกับหน่วยที่แสดงในรูปที่ 6(ข) ซึ่งเป็นรูปที่ได้มาจากการของ Pucher [1] จากการเปรียบเทียบระหว่างรูปที่ 6(ก) และ 6(ข) จะพบว่าเส้นระดับมีลักษณะที่สอดคล้องกัน

4.4 การวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของแผ่นบางแบบทั่วไป

ตัวอย่างนี้ทำการวิเคราะห์แผ่นบางที่มีขนาดดังแสดงในรูปที่ 7 โดยกำหนดให้แผ่นบางมีความหนาเท่ากับ 0.10 m. ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 2,100,000 kN/m² และค่าอัตราส่วนปัวซองของเท่ากับ 0.30 ส่วนเงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางกำหนดให้เป็นแบบธรรมดาทั้งหมดตลอดความยาวของขอบ อีกทั้งยังแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบเท่ากับ 6,400 เอลิเมนต์ สำหรับตัวอย่างนี้จะแสดงระนาบอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันการโก่งตัวที่พิกัด $(x,y) = (1.00,1.00)$



รูปที่ 7 แผนภูมิพื้นผิวสองมิติแสดงระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชันระยะโก่งตัว

จากรูปที่ 7 แสดงเส้นระดับของสัมประสิทธิ์ระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชันการ โกงตัว ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆที่แสดงนั้น จะมีค่ามากที่สุดที่พิกัด $(x,y) = (1.05,1.05)$ คือ 0.3026×10^{-3} m. เมื่อเทียบกับความหนาของแผ่นบาง การ โกงตัวมากที่สุดที่เกิดขึ้นต้อง น้อยกว่า 0.10h แต่ในตัวอย่างนี้มีค่าการ โกงตัวสูงสุดน้อยกว่าค่า โกงตัวสูงสุดที่ได้กำหนดในทฤษฎีการตัดภายใต้สมมติฐานการ โกง ตัวน้อย ทำให้ผลออกมาอยู่ในขอบเขตของทฤษฎีที่กำหนดไว้

สำหรับการตรวจสอบความถูกต้อง เนื่องจากแผ่นบางมีรูปร่างที่ซับซ้อนจึงไม่มีคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ งานวิจัยนี้จะ นำผลการคำนวณมาเปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากการแบ่ง โดเมนออกเป็น 49,152 เอลิเมนต์ โดยมีผลดังนี้

1. ค่าสัมประสิทธิ์ระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชันการ โกงตัวที่พิกัด $(x,y) = (1.50,1.50)$ คือ 0.1746914×10^{-3} m. ในขณะที่ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้คำตอบเท่ากับ 0.175×10^{-3} m. ดังนั้นจะพบว่าคำตอบที่ได้มีความสอดคล้องใกล้เคียงกันมาก

2. ค่าสัมประสิทธิ์ระนาบอินฟลูเอนซ์สำหรับฟังก์ชัน โมเมนต์คัต M_x ที่พิกัด $(x,y) = (1.50,1.50)$ คือ 0.056948 kN.m/m ในขณะที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้คำตอบเท่ากับ คือ 0.0548 kN.m/m ซึ่งมีความแตกต่างกันเพียงร้อยละ 3.83 ทำให้เห็นประสิทธิภาพ ของวิธีที่นำเสนอจนถึงแม้ว่าจะใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบเขตจำนวนไม่มากเมื่อเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

5. สรุปผลการวิจัย

1. งานวิจัยนี้ศึกษาการวิเคราะห์ระนาบอินฟลูเอนซ์ของฟังก์ชันระยะ โกงตัว โมเมนต์คัต โมเมนต์บิด และแรงเฉือน ของแผ่น บางที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของที่รองรับแบบต่างๆทั่วไปที่มีความซับซ้อนได้ โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีผสมกันร่วมกับวิธีบาวดา ริเอลิเมนต์

2. วิธีที่นำเสนอนี้สามารถสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ได้อย่างสะดวกโดยประยุกต์ใช้ฟังก์ชันคิแรกเคลดต้าที่เกี่ยวข้องกระทำที่ ตำแหน่งที่ต้องการสร้างระนาบอินฟลูเอนซ์ จึงสามารถลดขั้นตอนการคำนวณได้เป็นจำนวนมากเมื่อเทียบกับการคำนวณแบบ ตรงไปตรงมาที่ต้องมีการคำนวณ โดยใช้การเคลื่อนน้ำหนักแบบจุดขนาดหนึ่งหน่วยไปทั่วตลอดแผ่นพื้น

3. ผลการวิเคราะห์ที่ได้จากงานวิจัยนี้เมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะ แสดงให้เห็นถึงความถูกต้องแม่นยำที่ดีมาก อีกทั้งผลการคำนวณยังแสดงให้เห็นถึงการลู่เข้าสู่คำตอบแม่นยำตรงเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบเขตมากขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยคนแรกขอกราบขอบพระคุณ ดร.บุญมี ชินนาบุญ ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาและควบคุมงานวิจัยนี้ ที่กรุณาให้ คำแนะนำ และแนวทางในการแก้ปัญหาต่างๆ และขอขอบพระคุณ ศ.ดร.สมชาย ชูชีพสกุล ที่ให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์แก่ การทำวิจัยนี้ ประโยชน์อันใดที่ได้มาจากวิจัยนี้ย่อมเป็นผลมาจากความกรุณาของท่านดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจึงใคร่ ขอขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Pucher, E., *Influence Surfaces of Elastic Plates*, 4th Ed. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [2] Palmer W. T., The Influence Surface Method for Floating Ice Plates. *Canadian Geotechnical Journal*, 1975, 12(2), pp. 224-234.
- [3] Memari A.M., West H.H., Computation of bridge design forces from Influence surfaces. *Computers and Structures*, 1990, 38(516), pp. 547-556.

- [4] Cifuentes A., Paz M., A note on the determination of Influence lines and surfaces using finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1991,7, pp. 299-305.
- [5] Orakdögen E., Girgin K., Direct determination of influence lines and surfaces by F.E.M. *Structural Engineering and Mechanics*, 2005, 20(3), pp. 279-292.
- [6] Razouki S.S and AL-Ani S.H., Bending moment influence surfaces for rectangular concrete plates simply supported at three edges and built-in at the fourth edge. *Iraqi Academic Scientific Journals*, 2009, 16, pp. 4795-4821.
- [7] Silva Almeida V and Oliveira Neto L., Influence surfaces by boundary element/ least square methods coupling. *Engineering with Computers*, 2015, 32(2), pp. 231-246.
- [8] Jepsen S.M. and Lars Damkilde, A direct and fully general implementation of influence lines/surfaces in finite element software. *Journal of Advances in Engineering Software*, 2016, ISSN. 0965-9978.
- [9] Katsikadelis J.T., *The Analysis of Plates on Elastic Foundation by the Boundary Integral Equation Method*. PhD Thesis, Polytechnics University of New York 1982.
- [10] Katsikadelis J.T., *The Boundary Element Method for Plate Analysis*, New York, Academic Press, 2014.
- [11] Szilard R., *Theories and Applications of Plate Analysis Classical Numerical and Engineering Methods*, New Jersey, Hoboken, 2004.
- [12] SAP2000–Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures, *Computers and Structures*, Berkeley, California, 1996.
- [13] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., New York, McGraw-Hill, 1959