

การคำนวณการไหลในทางน้ำเปิดหนึ่งมิติบนพื้นฐาน Flux difference splitting

Flux difference splitting for one-dimensional open channel flow

สนธิ วงษา

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

91 สุขสวัสดิ์ 48 บางมด กรุงเทพฯ 10140

โทรศัพท์ 470-8536 โทรสาร 470-8532

E-Mail: isanngsa@cc.kmutt.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อศึกษาการไหลในทางน้ำเปิดแบบไม่คงที่ที่มีผิวอิสระชนิดหนึ่งมิติ โดยใช้กระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์บนพื้นฐาน Flux difference splitting ร่วมกับค่าประมาณ Jacobian เพื่อแก้สมการตามแบบ Roe และ Lax-Wendroff scheme ซึ่งมีพื้นฐานการคำนวณแบบ Explicit แบบจำลองนี้สามารถนำไปใช้คำนวณการไหลที่มีทั้งการไหลแบบได้วิฤติและการไหลแบบเหนือวิฤติพร้อมกันได้ บทความอธิบายรายละเอียดของแบบจำลองและขอบเขตรอบนอกกับสภาพเริ่มต้น พร้อมทั้งแสดงผลการคำนวณและเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของสมการกับผลการทดลอง เพื่อแสดงความสามารถในการนำเอาแบบจำลองไปประยุกต์ใช้งาน

Abstract

A model for one-dimensional open-channel unsteady free surface flows is presented in this paper. Roe and Lax-Wendroff finite difference scheme based on explicit scheme incorporated with flux difference splitting technique with approximate Jacobian is used in the model formulation. Flows with simultaneous presence of supercritical and subcritical regions can be analyzed by the proposed models. Details of the models and various boundary and initial conditions are described. Some numerical results and comparisons with existing experiment data and analytical solutions are presented to demonstrate applicability of the models.

1. บทนำ

การไหลในทางน้ำเปิดที่มีการไหลแบบเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว (Rapidly varied flow) มีความสำคัญต่อกิจกรรมของมนุษย์และสิ่งแวดล้อมเป็นอย่างมาก ตัวอย่างที่พบบ่อย ๆ เช่นการเกิดปรากฏการณ์น้ำกระโดด (Hydraulic jump) ในลำน้ำธรรมชาติ ซึ่งทำให้อากาศสามารถแทรกตัวเข้าไปในน้ำตื้นนั้นได้เป็นผลให้คุณภาพของน้ำดีขึ้น การเปิด/ปิดบานประตูระบายน้ำอย่างกะทันหันอาจก่อให้เกิดความเสียหายต่ออาคารทางชลศาสตร์ และในกรณีที่เขื่อนด้านเหนือน้ำพัง

หลายลงจะมีผลทำให้เกิดน้ำท่วมอย่างฉับพลัน คลื่นน้ำ (Bore) ที่เคลื่อนตัวไปยังพื้นที่ราบล้นท้ายน้ำและข้ามสันคันกันน้ำก่อให้เกิดความเสียหายและผลกระทบอย่างใหญ่หลวงต่อชีวิตและทรัพย์สินในบริเวณคันท้ายน้ำ เป็นต้น การวิเคราะห์และทำนายระดับน้ำและเวลาในการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำได้อย่างแม่นยำ ก็จะสามารถแก้ปัญหาและบรรเทาความเสียหายที่จะเกิดขึ้นได้ในระดับหนึ่ง

การศึกษาการไหลแบบไม่คงที่ในทางน้ำเปิดที่เกี่ยวข้อง เช่น ปัญหาการกระโดด ปัญหาการเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำที่เกิดจากการเปิด/ปิดประตูน้ำแบบฉับพลัน และปัญหาเขื่อนแตกแบบฉับพลัน เป็นต้น เป็นหัวข้อวิจัยสำคัญในหลายทศวรรษที่ผ่านมา ทั้งนี้เนื่องจากการวิเคราะห์สามารถทำได้โดยการแก้สมการอนุพันธ์ควบคุมการไหล อย่างไรก็ตามการแก้สมการอนุพันธ์จะสามารถทำได้ในกรณีที่มีสูตรให้เป็นสมการอย่างง่ายเท่านั้นซึ่งไม่เหมาะสมในการนำมาประยุกต์ใช้กับสภาพความเป็นจริง การศึกษาของ Stoker [1] แสดงสมการเชิงวิเคราะห์สำหรับปัญหาคลื่นน้ำและเขื่อนแตกที่เหมาะสมในการนำมาประยุกต์ แต่ก็มีข้อจำกัดเรื่องปัญหาของเวลาและประสิทธิภาพการคำนวณ รวมทั้งการนำเอาลักษณะทางกายภาพของภูมิประเทศเข้าร่วมคำนวณ เมื่อเปรียบเทียบกับ การคำนวณเชิงตัวเลขแล้วจะมีความเหมาะสมน้อยกว่า

มีการการศึกษาเพื่อแก้สมการของ St. Venant [2] โดยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่ผ่านหลายแบบ อาทิเช่น Mahmood และ Yevjevich [3] ใช้สมการแบบ Preissmann scheme Abbott [4] ใช้สมการแบบ Abbott-Ionescu scheme Fennema และ Chaudhry [5] ใช้สมการแบบ Beam & Warming และ Gabutti scheme บนพื้นฐาน Flux vector splitting โดย Beam & Warming scheme สามารถใช้คำนวณเมื่ออัตราส่วนความลึกด้านท้ายน้ำกับอ่างเก็บน้ำ $h_r/h_f \geq 0.001$ Glaister [6] ได้ประยุกต์เทคนิคค่าเฉลี่ยของ Roe กับสมการการไหลน้ำตื้น Roe [7] ประยุกต์เทคนิค Flux vector และ Flux difference splitting คำนวณการไหลของปัญหาเขื่อนแตกในทางน้ำเปิดที่มีความกว้างหนึ่งหน่วย Alcrudo และคณะ [8] ประยุกต์เทคนิค Flux difference splitting คำนวณการไหลในทางน้ำเปิดโดยแก้สมการแบบ Upwind และ Lax-Wendroff scheme Navarro และคณะ [9] คำนวณการไหลในทางน้ำเปิดโดยแก้สมการแบบ TVD MacCormack Jha และคณะ [10], [11], [12] ใช้ Beam & Warming scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux vector splitting

และ TVD MacCormack Lax-Friedrichs และ Lax-Wendroff scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux difference splitting สามารถใช้คำนวณเมื่ออัตราส่วนความลึกค่าน้ำกับอ่างเก็บน้ำ $h_r/h_r \geq 0.0001$

สำหรับเรื่องการศึกษา น้ำกระโดด Gharangik และ Chaudhry [13] ได้นำเอาสมการแบบ MacCormack และ Two-Four scheme เพื่อแก้สมการของ Boussinesq และเปรียบเทียบผลการคำนวณกับการทดลอง ซึ่งพบว่าสมการแบบ MacCormack scheme ไม่มีความเหมาะสม และพจน์ของ Boussinesq มีผลต่อการตัดสินใจตำแหน่งของการเกิดน้ำกระโดดเพียงเล็กน้อย Meselhe และคณะ [14] ศึกษาการไหลแบบเปลี่ยนแปลงโดยพัฒนาสมการแบบ MESH scheme พบว่าผลการคำนวณบริเวณหน้าตัดที่มีความชันมาก (Steep slope) เส้นผิวน้ำที่ได้มีลักษณะเกิดการกระจาย (Dispersion) ขึ้น

บทความนี้ศึกษาการคำนวณการไหลในทางน้ำเปิดชนิดหนึ่งมิติ ซึ่งทำได้โดยการแก้สมการของ St. Venant และใช้กระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Roe และ Lax-Wendroff scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux difference splitting ร่วมกับค่าประมาณ Jacobian ซึ่งมีพื้นฐานการคำนวณแบบ Explicit โดยหน้าตัดลำน้ำมีลักษณะธรรมชาติ (Natural cross-section) รายละเอียดของบทความประกอบด้วย ในอันดับแรกแสดงสมการควบคุมการไหล คือไปแสดงรายละเอียดของกระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ สภาพเริ่มต้นและขอบเขตรอบนอกของสมการแบบต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงผลการคำนวณและเปรียบเทียบกับผลการทดลองปัญหา น้ำกระโดด และคำตอบเชิงวิเคราะห์ของปัญหาการคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิดประตูน้ำแบบกะทันหัน กับปัญหาเขื่อนแตก เพื่อแสดงความสามารถและความเหมาะสมในการนำเอาแบบจำลองไปประยุกต์ใช้งาน

2. สมการพื้นฐาน

สมการของ St. Venant [2] ในรูปแบบคอนเซอร์ватฟ (Conservative) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + G &= 0 \\ U &= \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A + gF_h \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} 0 \\ -gI_1 - gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

โดยที่ A เป็น พื้นที่หน้าตัดเปียกน้ำ

Q เป็น อัตราการไหล

F_h เป็น แรงเนื่องจากแรงดันสถิตยของน้ำ

I_1 เป็น พจน์การเปลี่ยนแปลงความกว้างของหน้าตัด

S_0 เป็น ความลาดของท้องน้ำ

S_f เป็น ความลาดของแรงเสียดทาน

g เป็น ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

x เป็น ระยะทางในแนวแกน x

t เป็น เวลา

แรงเนื่องจากแรงดันสถิตยของน้ำ F_h และพจน์การเปลี่ยนแปลงความกว้างของหน้าตัด I_1 เขียนได้ตามสมการที่ (3) และ (4) ตามลำดับ ดังนี้

$$F_h = \int_0^{h(x,t)} (h-\eta)w(x,\eta)d\eta \quad (3)$$

$$I_1 = \int_0^{h(x,t)} (h-\eta) \frac{\partial w(x,\eta)}{\partial x} d\eta \quad (4)$$

โดยที่ h เป็น ความลึกของน้ำ

$w(x, h)$ เป็น ความกว้างที่ระดับความลึก h

$$\left(w(x,\eta) = \frac{\partial A(x,\eta)}{\partial \eta} \right)$$

สมการที่ (1) สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของสมการแบบไม่อนุรักษ์ (non-conservative) และโดยอาศัยการประยุกต์หลักการ Jacobian จะได้ว่า

$$A = \frac{\partial E}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ gA/w - Q^2/A^2 & 2Q/A \end{bmatrix} \quad (5)$$

โดยที่ A เป็น เวกเตอร์ของค่า Jacobian ของ $\partial E/\partial U$

เนื่องจากสมการพื้นฐานของการไหลในทางน้ำเปิดเป็นระบบสมการแบบไฮเปอร์โบลิก จึงสามารถหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของ A ได้ดังนี้

$$\lambda^{1,2} = u \pm c \quad (6)$$

$$e^{1,2} = \begin{pmatrix} I \\ u \pm c \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$u = Q/A \quad (8)$$

$$c = \sqrt{gA/w} \quad (9)$$

โดยการแทนค่าพจน์ต่าง ๆ ในสมการที่ (5) ถึง (9) ลงในสมการที่ (1) จะได้ว่า

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + G = 0 \quad (10)$$

2.1 ค่าเฉลี่ยของ Roe

Roe [7] ได้เสนอเทคนิคในการคำนวณค่าเฉลี่ยของ Jacobian เพื่อแก้สมการของ Euler โดยรักษาลักษณะสมบัติอนุรักษ์ของสมการไว้

ได้ และ Glaister [6] ได้นำมาประยุกต์ในสมการการไหลในทางน้ำเปิด โดยที่ค่าประมาณ Jacobian ของเวลาใด ๆ ต้องมีลักษณะสมบัติ 4 ประการดังนี้

(i) $\Delta E_{i+1/2} = \tilde{A}_{i+1/2} \Delta U_{i+1/2}$ เพื่อประกันลักษณะสมบัติอนุพันธ์ของสมการ

(ii) $A_{i+1/2} = \tilde{A}_{i+1/2}(U_i, U_{i+1/2})$ แสดงค่าเฉลี่ย

(iii) $A(U, U) = A(U) = \partial E / \partial U$ เพื่อแสดงการคงอยู่ของสมการดั้งเดิม

(iv) มีเซตไอเกนเวกเตอร์ของค่าไอเกนที่เป็นจำนวนจริง จากลักษณะสมบัติข้างต้นทำให้สามารถคำนวณค่าเฉลี่ยของค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ได้จาก

$$\tilde{\lambda}^{1,2} = \tilde{u} \pm \tilde{c} \quad (11)$$

$$\tilde{e}^{1,2} = \begin{pmatrix} I \\ \tilde{u} \pm \tilde{c} \end{pmatrix} \quad (12)$$

2.2 สมการแบบ Roe scheme

สมการของกระบวนการไฟในดัดเพื่อเรนจ์แบบ Upwind scheme ของเวลา $t+1$ ใด ๆ เขียนได้เป็น

$$U^{t+1} = U^t - \gamma \left[\Delta E_{i+1/2}^{t-} + \Delta E_{i-1/2}^{t+} \right] - (\Delta t) S_i^t \quad (13)$$

โดยที่ g เป็น อัตราส่วนของช่วงเวลากับระยะทาง ($= \Delta t / \Delta x$) สัญลักษณ์ $+$ กับ $-$ แสดงฟลักซ์ที่ส่วนประกอบเป็นค่าบวกกับค่าลบ ตามลำดับ

เมื่อประยุกต์ค่าประมาณ Jacobian กับสมการที่ (13) จะได้ว่า

$$U^{t+1} = U^t - \gamma \left[\sum_{k=1}^2 \tilde{\lambda}_{i+1/2}^{k-} \tilde{\alpha}_{i+1/2}^k \tilde{e}_{i+1/2}^k + \sum_{k=1}^2 \tilde{\lambda}_{i-1/2}^{k+} \tilde{\alpha}_{i-1/2}^k \tilde{e}_{i-1/2}^k \right] - (\Delta t) S_i^t \quad (14)$$

โดยสามารถแยกค่าไอเกนเป็นค่าบวกและลบได้ดังสมการที่ (15) คือ

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^{k+} &= 0.5(\tilde{\lambda}^k + |\tilde{\lambda}^k|) \\ \tilde{\lambda}^{k-} &= 0.5(\tilde{\lambda}^k - |\tilde{\lambda}^k|) \end{aligned} \quad (15)$$

แทนค่าสมการที่ (15) ลงในสมการควบคุมการไหล (สมการที่ (14)) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} U^{t+1} = U^t - \frac{\gamma}{2} & \left[\sum_{k=1}^2 \left(\tilde{\lambda}_{i+1/2}^k - |\tilde{\lambda}_{i+1/2}^k| \right) \tilde{\alpha}_{i+1/2}^k \tilde{e}_{i+1/2}^k \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^2 \left(\tilde{\lambda}_{i-1/2}^k + |\tilde{\lambda}_{i-1/2}^k| \right) \tilde{\alpha}_{i-1/2}^k \tilde{e}_{i-1/2}^k \right] \\ & - (\Delta t) S_i^t \end{aligned} \quad (16)$$

สมการที่ (16) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบง่าย ๆ ตามสมการแบบ Upwind scheme ได้ดังนี้

$$U^{t+1} = U^t - \gamma \left[\Delta E_{i+1/2}^N + \Delta E_{i-1/2}^N \right] - (\Delta t) S_i^t \quad (17)$$

โดยที่ฟลักซ์เชิงตัวเลข E^N (Numerical fluxes) ใด ๆ เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} E_{i\pm 1/2}^N &= 0.5(E_i + E_{i\pm 1}) \\ &- 0.5 \sum_{k=1}^2 \left| \tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^k \right| \tilde{\alpha}_{i\pm 1/2}^k \tilde{e}_{i\pm 1/2}^k \end{aligned} \quad (18)$$

ค่า $\tilde{\alpha}$ $\tilde{u}$ และ $\tilde{c}$ คำนวณได้จาก

$$\tilde{\alpha}_{i+1/2}^{1,2} = \frac{I}{2\tilde{c}} \left[\pm \Delta Q_{i+1/2} + (\tilde{c} \mp \tilde{u}) \Delta A_{i+1/2} \right] \quad (19)$$

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \frac{\sqrt{(A_i)} u_i + \sqrt{(A_{i+1})} u_{i+1}}{\sqrt{A_i} + \sqrt{A_{i+1}}} \quad (20)$$

$$\tilde{c}_{i+1/2} = \begin{cases} g \frac{F_{h_{i+1}} - F_{h_i}}{A_{i+1} + A_i} & \text{if } A_{i+1} - A_i \neq 0 \\ c_i^2 = c_{i+1}^2 & \text{if } A_{i+1} - A_i = 0 \end{cases} \quad (21)$$

ค่าประมาณ Jacobian A ที่ได้นั้นพบว่าก่อให้เกิดความแปรปรวนของสภาวะความไม่เท่ากัน (Inequality condition) ของ Entropy ในการคำนวณ ซึ่งความแปรปรวนของสภาวะความไม่เท่ากันของ Entropy นั้นสามารถแก้ไขโดยการปรับแก้ค่าไอเกน Yee [15] ได้เสนอโมดูลัสปรับแก้ค่าไอเกนซึ่งได้นำมาใช้ในการศึกษานี้ สามารถแสดงได้ตามสมการที่ (22)

$$\left| \lambda_{i\pm 1/2}^k \right| = \max(\delta, \left| \lambda_{i\pm 1/2}^k \right|) \quad (22)$$

โดยที่ δ เป็น ค่าบวกที่มีจำนวนน้อย ๆ ($\delta = 0.1 \sim 1.0$)

2.3 สมการแบบ Lax-Wendroff scheme

สมการของกระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Lax-Wendroff scheme ของเวลา $t+1$ ใด ๆ เขียนได้เป็น

$$E_{i+1/2}^N = 0.5(E_i + E_{i+1}) - 0.5\gamma A^2(U_{i+1} - U_i) \quad (23a)$$

$$E_{i-1/2}^N = 0.5(E_i + E_{i-1}) - 0.5\gamma A^2(U_i - U_{i-1}) \quad (23b)$$

เนื่องจากสมการแบบ Lax-Wendroff scheme มีความแม่นยำลำดับที่ 2 จึงทำให้เกิดการแกว่งไกวบริเวณหน้าตัดที่ไม่ต่อเนื่องและอาจทำให้ผลการคำนวณคลาดเคลื่อนจากค่าที่แท้จริง Sweby [16] ได้เสนอเซตจำกัดฟลักซ์ ϕ (Flux limiter) เพื่อปรับแก้การแกว่งไกวนี้ เมื่อนำมาประยุกต์กับสมการแบบ Lax-Wendroff สมการที่ (23) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E_{i\pm 1/2}^N = & 0.5(E_i + E_{i\pm 1}) \\ & - 0.5 \sum_{k=1}^2 \left| \tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^k \right| \tilde{\alpha}_{i\pm 1/2}^k \tilde{e}_{i\pm 1/2}^k \\ & + 0.5 \sum_{k=1}^2 \phi(r_{i\pm 1/2}^k) \left| \tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^k \right| \\ & \times \left[1 - \left(\gamma \left| \tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^k \right| \right) \right] \tilde{\alpha}_{i\pm 1/2}^k \tilde{e}_{i\pm 1/2}^k \end{aligned} \quad (24)$$

โดยที่ค่าเซตจำกัดฟลักซ์ ϕ ทำหน้าที่ควบคุมไม่ให้เกิดการแกว่งไกวบริเวณหน้าตัดที่มีความลาดมากหรือเกิด Shock ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการไร้งานเส้นใต้ตามสมการที่ (25) ดังนี้

$$r_{i\pm 1/2}^k = \frac{\tilde{\alpha}_{i\pm 1/2}^k - \text{sign}(\tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^k)}{\tilde{\alpha}_{i\pm 1/2}^k} \quad (25)$$

โดยที่ sign เป็น สัญลักษณ์แสดงทิศทางของค่าไอเกน λ ค่า r สามารถแสดงเป็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชันได้หลายรูปแบบ ได้แก่ เซตจำกัดฟลักซ์ Superbee ของ Roe แบบอัตราความลาดของ van Leer และ minmod (Minimum-modulus) ของ Sweby ซึ่งเขียนได้ตามสมการที่ (26-28) ตามลำดับ

$$\phi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] \quad (26)$$

$$\phi(r) = \frac{r + |r|}{1 + r} \quad (27)$$

$$\phi(r) = \min \text{mod}(1, br) \quad (28)$$

การเลือกใช้นั้นสามารถเลือกแบบไหนก็ได้ โดยที่เซตจำกัดฟลักซ์ Superbee ของ Roe จะมีลักษณะเข้มนวดที่สุดและได้ถูกนำมาใช้ในการศึกษา

2.4 สภาพเริ่มต้นและขอบเขตรอบนอก

การคำนวณเชิงตัวเลขของสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สามารถหาค่าปริมาณต่าง ๆ ในพื้นที่การไหลได้โดยตรงแต่ไม่สามารถประยุกต์ใช้กับส่วนที่เป็นขอบเขตรอบนอก เมื่อแก้สมการในส่วนที่เป็นขอบเขตรอบนอกจำเป็นต้องทราบค่าข้อมูลที่จำเป็นของขอบเขตรอบนอกของพื้นที่การไหลก่อนและจะให้เป็นข้อมูลป้อนเข้า ซึ่งข้อมูลเหล่านี้หาได้จาก การเก็บข้อมูลในสนามหรือกำหนดขึ้นหรือวิธีการอื่น ๆ ส่วนสภาพเริ่มต้นซึ่งเป็นค่าเริ่มแรกในการคำนวณจะถูกป้อนโดยตรง

ในการศึกษานี้ได้ประยุกต์สมการ Compatibility มาใช้ในการคำนวณค่าของสภาพขอบเขตรอบนอก โดยการนำเอาข้อมูลการไหลที่ถูกส่งผ่านเส้นโค้ง Characteristics จากด้านเหนือน้ำหรือท้ายน้ำเข้าสู่พื้นที่การคำนวณผ่านไปยังระยะนาบของเวลาใหม่มาใช้ สามารถสร้างสมการโดยการดูส่วนกลับไอเกนเวกเตอร์เข้าไปในสมการ Compatibility ผลลัพธ์ที่ได้เป็นดังนี้

$$e^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + a e^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} + e^{-1} S = 0 \quad (29)$$

เสถียรภาพของการคำนวณสมการแบบ Explicit scheme ถูกจำกัดโดยสภาพของ CFL (Courant-Friedrichs-Levy) ดังนี้

$$C_r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(u + \sqrt{gh}) \quad (30)$$

โดยที่ C_r เป็น Courant number ($C_r \leq 1$)

เมื่อกำหนดค่า C_r ก็จะสามารถหาขนาดช่วงเวลาการคำนวณ Δt ได้ จากสมการที่ (30)

3. การประยุกต์และผลการคำนวณ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวข้างต้นได้นำมาประยุกต์แก้ปัญหาการไหลแบบเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วสามตัวอย่างได้แก่ ปัญหาน้ำกระโดด ปัญหาการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิดประตูน้ำแบบฉับพลันและปัญหาเขื่อนแตก โดยทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณของการแก้สมการแบบ Roe (สมการที่ (17)) และ Lax-Wendroff scheme (สมการที่ (24)) กับผลการทดลองและคำตอบเชิงวิเคราะห์ (Analytical solution) ของ Stoker [1] พร้อมทั้งทดสอบความสามารถของเซตจำกัดแบบต่าง ๆ ผลการศึกษาทั้งสามตัวอย่างสรุปได้ดังนี้

ตัวอย่างแรกเป็นกรณีศึกษาปัญหาน้ำกระโดดโดยทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลการศึกษาของ Gharangik และ Chaudhry [13] ซึ่งพวกเขาได้ผลการทดลองกับผลการคำนวณซึ่งแกสมการแบบ Two-Four scheme โดยนำเอาพจน์ของ Boussinesq มาพิจารณาด้วย รูปที่ 1 แสดงสภาพเริ่มต้นและขอบเขตของการคำนวณมีขนาด 0.46 ม. $\times$ 14.0 ม. ระดับน้ำเริ่มแรกด้านเหนือน้ำสูง 0.043 ม. แล้วค่อย ๆ ลาดสูงเพิ่มขึ้นทางด้านท้ายน้ำสูง 0.222 ม. ความเร็วของกระแส น้ำ 2.737 ม./วินาที และ Froude number เท่ากับ 4.23 ค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ $\Delta x = 0.10$ ม. $C_r = 1.0$ จากรูปที่ 2 พบว่าสมการแบบ Roe และ Lax-Wendroff scheme จากการศึกษานี้ได้ค่าความลึกของน้ำกระโดดใกล้เคียงกันและสามารถทำนายตำแหน่งของน้ำกระโดดได้แม่นยำกว่าสมการแบบ Two-four scheme โดยที่ผลการคำนวณแบบหลังนั้นพบว่าที่บริเวณหน้าตัดน้ำกระโดดมีลักษณะเกิดการกระจายบริเวณหน้าตัดด้านเหนือน้ำและเกิดการแกว่งไกวเชิงจำนวนด้านท้ายน้ำด้านท้ายน้ำเล็กน้อย Gharangik และ Chaudhry [13] กล่าวว่าสมการแบบ MacCormack นั้นเกิดการการแกว่งไกวเชิงจำนวนบริเวณหน้าตัดน้ำกระโดดไม่มีความเหมาะสมในกรณีที่ Froude number มีค่าสูง ๆ

ตัวอย่างที่สองเป็นปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิดบานประตูน้ำแบบฉับพลัน (Sudden closed gate) การศึกษากระทำโดยเปรียบเทียบผลการคำนวณกับค่าตอนเชิงวิเคราะห์ สภาพเริ่มต้นและขอบเขตของการคำนวณเป็นทางน้ำเปิดกว้างหนึ่งเมตรมีความยาว 1,000 ม. ระดับน้ำเริ่มแรกสูง 6.0 ม. ความเร็วของกระแสน้ำ 3.125 ม./วินาที (ดังแสดงตามรูปที่ 3) ประตูนํ้าด้านท้ายน้ำจะถูกปิดอย่างทันทีทันใดเมื่อเริ่มต้นการคำนวณที่เวลา 0.0 วินาที ค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ $\Delta x = 10.0$ ม. $C_r = 1.0$ และ $\delta = 0.1$ รูปที่ 4 แสดงคลื่นน้ำ (Bore) เมื่อเกิดการปะทะกับบานประตูนํ้าด้านท้ายน้ำแล้วเคลื่อนตัวกลับมายังด้านเหนือน้ำหลังจากเวลาผ่านไป $50 + \Delta t$ วินาที (Δt มีค่าประมาณ 0.1-0.5 วินาที ขึ้นอยู่กับค่า C_r) จะเห็นว่าผลการคำนวณสอดคล้องกับค่าตอนเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างดี และพบว่าผลการคำนวณของสมการแบบ Roe scheme บริเวณหน้าตัดไม่ค่อยมีลักษณะการกระจายเชิงจำนวนเล็กน้อย

รูปที่ 5 แสดงสภาพเริ่มต้นและขอบเขตของการคำนวณของกรณีศึกษาปัญหาเขื่อนแตกในอุดมคติ (Idealized dam break problem) ความยาวการไหลมีขนาด 4,000 ม. ระดับน้ำเริ่มแรกในอ่างเก็บน้ำ (h_r) สูง 100.0 ม. ด้านท้ายน้ำ (h_b) 50.0, 1.0 ม. ($h_r/h_b = 0.5, 0.01$) ตำแหน่งของเขื่อนอยู่ที่ระยะ 2000 ม. จากด้านเหนือน้ำ ค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ $\Delta x = 10.0$ ม. $C_r = 1.0$ และ $\delta = 0.8$ โดยสภาพเริ่มแรกน้ำในอ่างเก็บน้ำและท้ายน้ำจะนิ่งสงบ แล้วเขื่อนจะพังทลายอย่างทันทีทันใดที่เวลา 0.0 วินาที รูปที่ 6 แสดงผลการคำนวณเมื่อเวลา $50 + \Delta t$ วินาทีของกรณีทั้งสองตามลำดับ พบว่าผลการคำนวณของสมการทั้งสองแบบสอดคล้องเป็นอย่างดีกับค่าตอนเชิงวิเคราะห์ ณ ตำแหน่งหน้าตัด Shock front ผลการคำนวณไม่มีลักษณะการกระจายและ/หรือเกิดการแกว่งไกวเชิงจำนวนแต่ผลการคำนวณของสมการแบบ Lax-Wendroff

scheme จะเคลื่อนที่เร็วกว่าค่าตอนเชิงวิเคราะห์ 1 ช่วงกริด ค่าความคลาดเคลื่อนของ Mass balance errors น้อยกว่า 6.2×10^{-5} สำหรับขีดความสามารถของสมการทั้งสองคำนวณค่าอัตราส่วน h_r/h_b ได้น้อยถึง 1.0×10^{-5} (ดังแสดงในรูปที่ 9)

4. สรุป

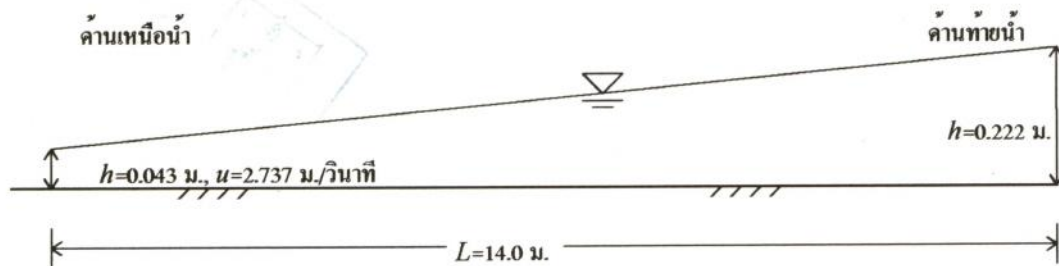
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แกสมการน้ำตื้นชนิดหนึ่งมิติโดยใช้ระบบการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Roe และ Lax-Wendroff scheme บนพื้นฐาน Flux difference splitting และสภาพขอบเขตรอบนอกคำนวณโดยประยุกต์วิธีเส้นโค้ง Characteristics ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อคำนวณระดับน้ำและการเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำของการไหลในทางน้ำเปิด ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองนี้สามารถนำไปแก้ปัญหาน้ำกระโดด ปัญหาการเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำและปัญหาเขื่อนแตกในอุดมคติได้อย่างแม่นยำ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการทั้งสองแบบมีความเหมาะสมในการนำไปประยุกต์ใช้คำนวณปัญหาการไหลในทางน้ำเปิดได้เป็นอย่างดี

เอกสารอ้างอิง

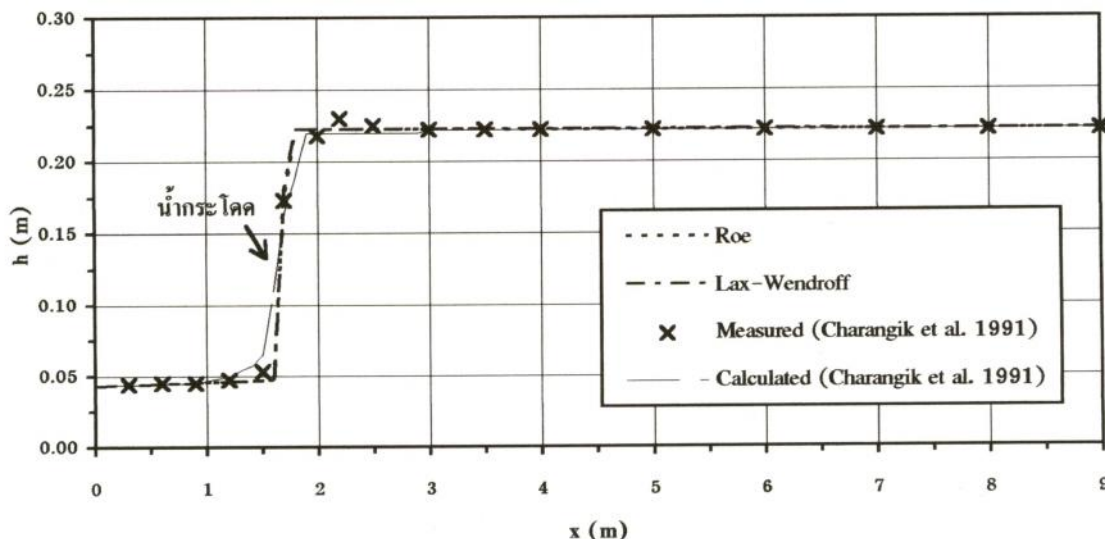
- [1] Stoker, J.J., 1957, *Water Waves*, Interscience Publisher, Inc., Wiley and Sons, New York.
- [2] de St. Venant, B., 1871, "Theorie du Movement Non Permanent des Eaux, Avec Application aux Crues de Rivières et a l'introduction des Marées Dans Leur Lit", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Vol.73, pp.147-157.
- [3] Mahmood, K. and Yevjevich, V., eds., 1975, *Unsteady Flow in Open Channels*, Water Resources Publications, Fort Collins, CO.
- [4] Abbott, M.B., 1979, *Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free-surface Flows*, Pitman Publishing Limited, London.
- [5] Fennema, R.J. and Chaudhry, M.H., 1987, "Simulation of One-Dimensional Dam-Break Flows", *Journal of Hydraulics Research*, Vol.25, No.1, pp.41-51.
- [6] Glaister, P., 1988, "Approximate Riemann Solutions of the Shallow Water", *Journal of Hydraulics Research*, Vol.26, No.3, pp.293-306.
- [7] Roe, P., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol.43, pp.357-372.
- [8] Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P. and Saviron, J.M., 1992, "Flux Difference Splitting for 1D Open Channel Flow Equations",

International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.4, pp.1009-1018.

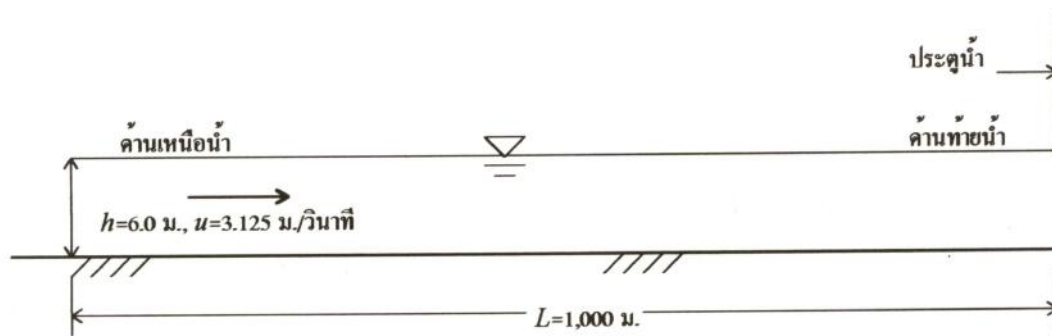
- [9] Garcia-Navarro, P., Alcrudo, F., and Saviron, J.M., 1992, "1-D Open-Channel Flow Simulation Using TVD-McCormack Scheme", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.118, No.10, pp.1359-1372.
- [10] Jha, A.K., Akiyama, J., and Ura, M., 1995, "First- and Second-Order Flux Difference Splitting Schemes for Dam-Break Problem", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.121, No.12, pp.877-884.
- [11] Jha, A.K., Akiyama, J., and Ura, M., 1994, "Modeling Unsteady Open-Channel Flows-Modification to Beam and Warming Scheme", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.120, No.4, pp.461-476.
- [12] Jha, A.K., 1995, *Characteristic Based Numerical Schemes for 1-D Transient Free Surface Flows*, Thesis Presented to the Kyushu Institute of Technology, in Partial Fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy.
- [13] Gharangik, A.M., and Chaudhry, 1991, "Numerical Simulation of Hydraulic Jump", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.117, No.9, pp.1195-1211.
- [14] Meselhe, E.A., Sotiropoulos, F., and Holly, F.M., 1997, "Numerical Simulation of Transcritical Flow in Open Channels", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.123, No.9, pp. 461-476.
- [15] Yee, H.C., 1989, "A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock Capturing Methods", *NASA-TM 101088*, U.S.A.
- [16] Sweby, P.K., 1984, "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.21, pp.995-1101.



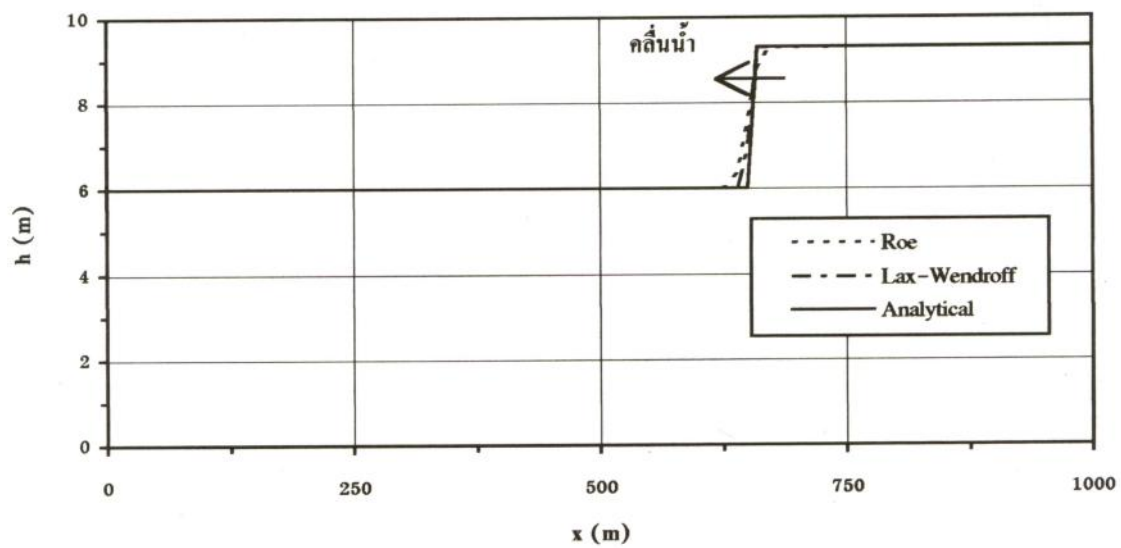
รูปที่ 1 ขอบเขตและสภาพเริ่มต้นกรณีปัญหาน้ำกระโดด



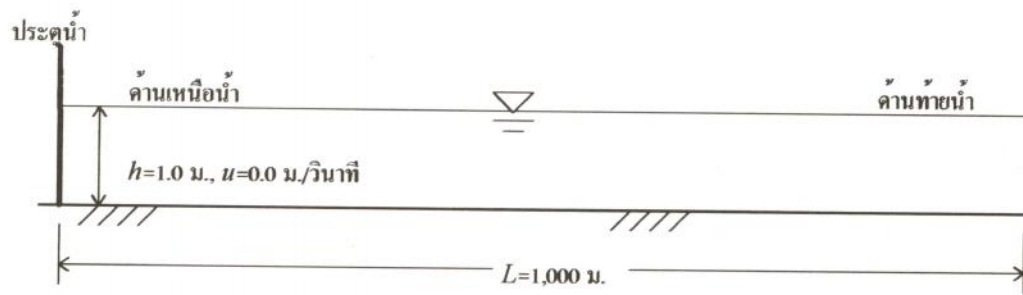
รูปที่ 2 ผลการคำนวณกรณีปัญหาน้ำกระโดด



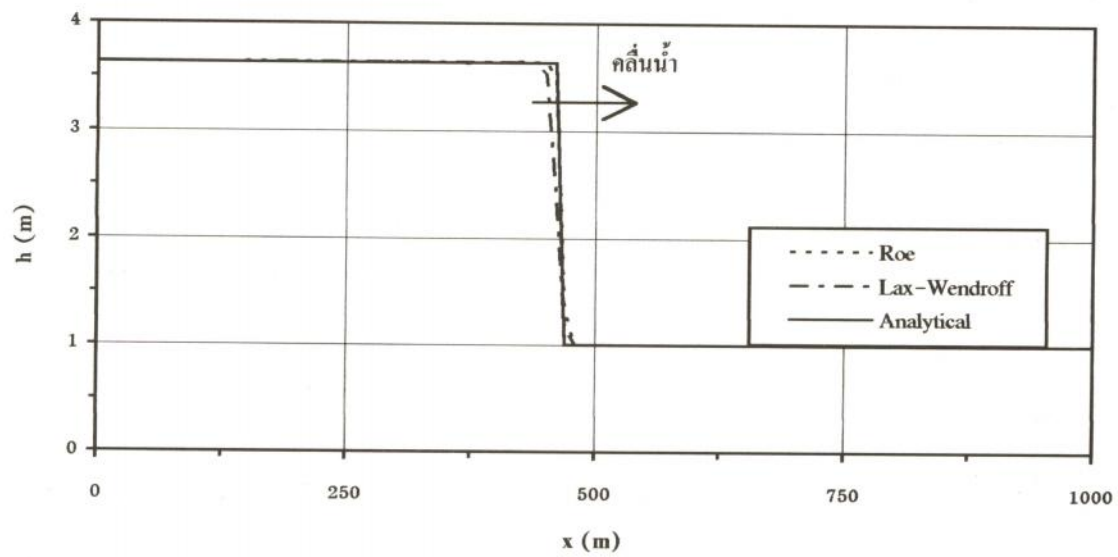
รูปที่ 3 ขอบเขตและสภาพเริ่มต้นกรณีปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิดประตูแบบฉับพลัน



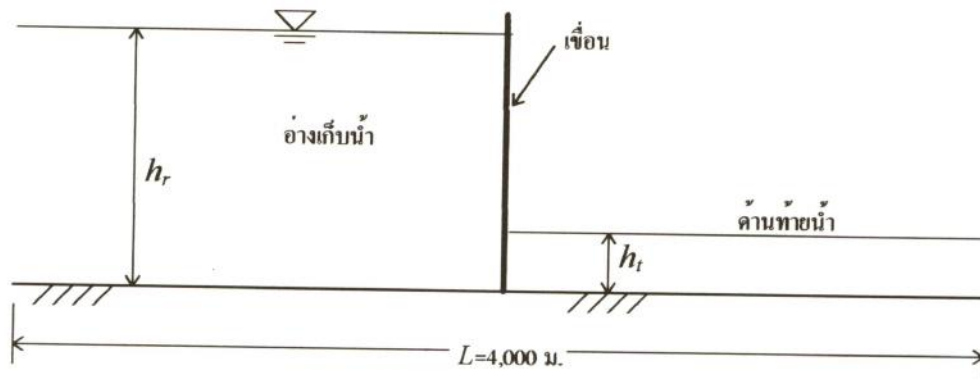
รูปที่ 4 ผลการคำนวณกรณีปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิดประตูแบบฉับพลันเมื่อเวลาผ่านไป $50+\Delta t$ วินาที



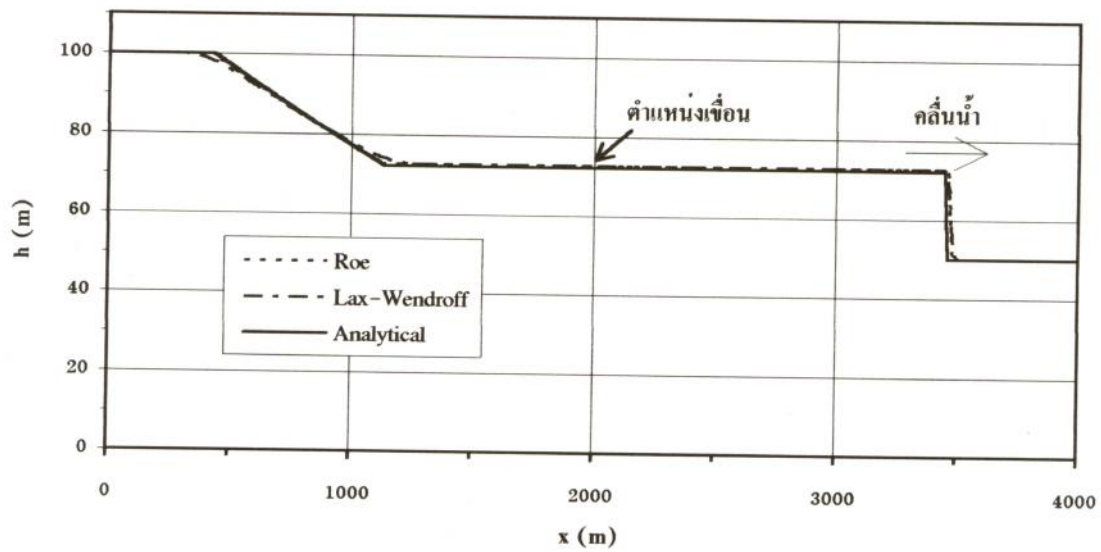
รูปที่ 5 ขอบเขตและสภาพเริ่มต้นกรณีปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการเปิดประตูแบบจับปล้น



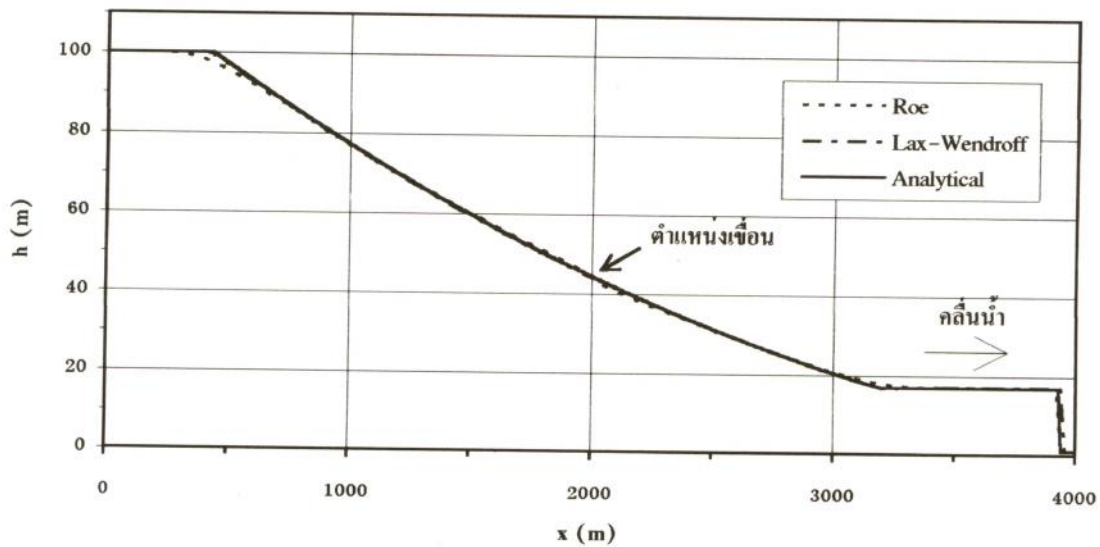
รูปที่ 6 ผลการคำนวณกรณีปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการเปิดประตูแบบจับปล้นเมื่อเวลาผ่านไป $50+\Delta t$ วินาที



รูปที่ 7 ขอบเขตและสภาพเริ่มต้นกรณีปัญหาเขื่อนแตก

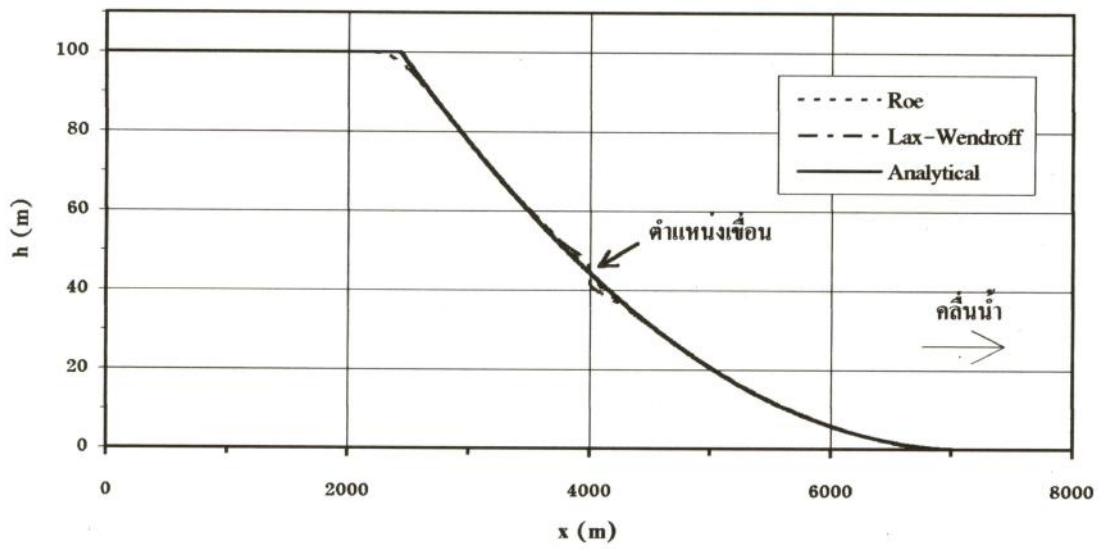


(a) อัตราส่วน $h_r/h_t = 0.5$



(b) อัตราส่วน $h_r/h_t = 0.01$

รูปที่ 8 ผลการคำนวณกรณีปัญหาเขื่อนแตกในอุดมคติเมื่อเวลาผ่านไป $50+\Delta t$ วินาที



รูปที่ 9 ผลการคำนวณกรณีปัญหาเขื่อนแตกในอุดมคติเมื่อเวลาผ่านไป $50 + \Delta t$ วินาที (อัตราส่วน $h_r/h_r = 0.00001$)