

8

การใช้เทคนิคสัมประสิทธิ์ความซึมผ่านประดิษฐ์ในการวิเคราะห์การไหลของ น้ำผ่านเขื่อนดิน โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

THE USE OF FICTITIOUS COEFFICIENT OF PERMEABILITY TECHNIQUE IN THE ANALYSIS OF SEEPAGE THROUGH EARTH DAM BY FEM

วัชรินทร์ กาสลัก

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยขอนแก่น

Watcharin Gasaluck

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering

Khon Kaen University

บทคัดย่อ

เทคนิคสัมประสิทธิ์ความซึมผ่านประดิษฐ์ถูกนำมาใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดิน ซึ่งเขียนโดยใช้ทฤษฎีการไหลตามกฎของดาร์ซี ทำให้โปรแกรมสามารถวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดินในเงื่อนไขต่างๆ ได้ แม้แต่การไหลที่ไม่เป็นไปตามกฎของดาร์ซีในเขื่อนดินที่ประกอบไปด้วยดินหลายชนิด (Non-homogeneity) คุณสมบัติในการไหลของน้ำในดินไม่เหมือนกันในแต่ละทิศทาง (Anisotropy)

ABSTRACT

The so-called fictitious coefficient of permeability technique was utilized as a supplement to the analysis of seepage problems by finite element computer program based on Darcy's law. With the help of the technique, this program could solve seepage problems on various conditions, even non-Darcy flow in anisotropic non-homogeneous earth dam.

บทนำ

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) เป็นวิธีคำนวณที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรมปฐพีอย่างกว้างขวาง รวมทั้งวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดิน การคำนวณกระทำโดยแบ่งแบบจำลองของปัญหาเป็นชิ้นส่วน (element) เล็กๆ จำนวนมาก เพื่อคำนวณหาค่าทางวิศวกรรมปฐพีในแต่ละชิ้นส่วน ทำให้มีปริมาณงานคำนวณมาก โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึงเป็นสิ่งจำเป็น

ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดิน

Segerlind [11] ได้สรุปสมการที่ใช้วิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดินไว้ดังนี้

$$[K] \{\phi\} = \{F\} \quad (1)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E (K^{(e)})$$

$$= \sum_{e=1}^E \left(\int_V (e) [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \right) \quad (2)$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^E (F^{(e)})$$

$$= \sum_{e=1}^E \left(\int_V (e) [N^{(e)}]^T Q dV - \int_S (e) [N^{(e)}]^T q dS \right) \quad (3)$$

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

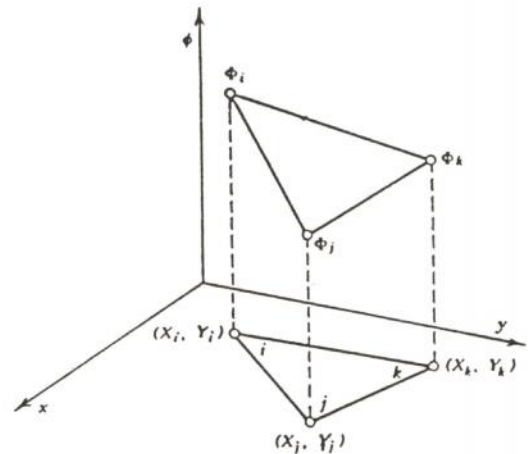
$$[N^{(e)}] = [N_i^{(e)} \ N_j^{(e)} \ N_k^{(e)}] \quad (6)$$

โดย ϕ คือ ค่าศักย์ (potential) ที่จุดใด ๆ ในตัวกลาง

E คือ จำนวนของชิ้นส่วน (element)

$N_i^{(e)}$ $N_j^{(e)}$ และ $N_k^{(e)}$ คือ ฟังก์ชันของรูปร่าง (shape function) ของชิ้นส่วนหมายเลข e

ในกรณีของการไหลใน 2 มิติ นั้น ค่าฟังก์ชันหาได้โดยอาศัยรูปที่ 1



รูปที่ 1 การหาค่าฟังก์ชันของรูปร่าง

จุด i, j และ k ในรูปที่ 1 เป็นจุดที่มุมของชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีค่าศักย์เป็น ϕ_i, ϕ_j และ ϕ_k ตามลำดับ ค่าศักย์ของจุดใด ๆ (x, y) ซึ่งอยู่ภายในชิ้นส่วนนี้มีค่าเป็น

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \quad (7)$$

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (8)$$

$$\text{โดย} \begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases}$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \quad (9)$$

$$\text{โดย} \begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k \\ b_j = Y_k - Y_i \\ c_j = X_i - X_k \end{cases}$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad (10)$$

$$\text{โดย} \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k = Y_i - Y_j \\ c_k = X_j - X_i \end{cases}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} \quad (11)$$

Q และ q ในสมการที่ 3 คืออัตราการไหลของน้ำเข้าสู่ชั้นส่วนและอัตราการไหลของน้ำออกโดยผ่านขอบเขตของชั้นส่วนตามลำดับ

k_x และ k_y ในสมการที่ 5 คือค่าสัมประสิทธิ์ของการซึมผ่านได้ของน้ำในดิน (coefficient of permeability) ในแนวราบและแนวดิ่งตามลำดับ

จากสมการที่ 2 ถึง 11 จะได้

$$[K^{(e)}] = \frac{k_x}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{และ} \quad \{F^{(e)}\} = \frac{QA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - q \frac{\zeta_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

โดยที่ ζ_{ij} คือ ความยาวของด้านของชั้นส่วนรูปสามเหลี่ยม ซึ่งน้ำไหลออกผ่านด้านนี้ และเป็นด้านที่อยู่ระหว่างจุด i และ j ในกรณีของน้ำไหลผ่านเขื่อนดินนั้น สมการที่ 13 ของศูนย์

จากเงื่อนไขที่ขอบเขต (boundary condition) ของน้ำไหลผ่านเขื่อนดินนั้น ค่าศักย์มีค่าดังแสดงในสมการที่ 14 ถึง 18 [2] ซึ่งความหมายของตัวแปรในสมการเหล่านี้ได้จากรูปที่ 2

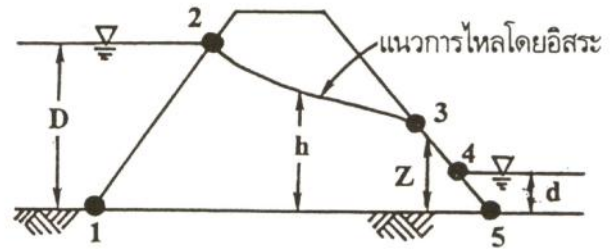
$$\phi = D \text{ บนแนว 1-2} \quad (14)$$

$$\phi = h \text{ บนแนว 2-3} \quad (15)$$

$$\phi = Z \text{ บนแนว 3-4} \quad (16)$$

$$\phi = d \text{ บนแนว 4-5} \quad (17)$$

$$\text{และ } \frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0 \text{ บนแนว 1-5} \quad (18)$$



รูปที่ 2 เงื่อนไขการไหลของขอบเขต

สมการที่ 14 ถึง 18 เป็นข้อมูลซึ่งต้องป้อนให้กับโปรแกรมและจะเป็นค่าคงที่ตลอดการคำนวณ สมการที่ 15 และ 18 เป็นเงื่อนไขที่ใช้ในการคำนวณหาตำแหน่งของแนวการไหลโดยอิสระ (free surface) ในทางปฏิบัตินั้นจะใช้ค่า $\frac{\partial \phi}{\partial Z}$ ที่มีค่าใกล้เคียงศูนย์แทนที่จะใช้ศูนย์ เพื่อประหยัดเวลาในการคำนวณของคอมพิวเตอร์ (CPU time)

จากสมการการไหล จะเห็นว่า ตัวแปรที่สำคัญคือ ค่าสัมประสิทธิ์ความซึมผ่านของดิน (k_x และ k_y) ซึ่งต้องเป็นค่าคงที่เท่านั้น กล่าวอีกอย่างได้ว่า สมการการไหลเหล่านี้ใช้ได้เฉพาะการไหลที่มีความสัมพันธ์ระหว่างลาดระดับน้ำ (hydraulic gradient) และความเร็วของการไหล (discharge velocity) เป็นเชิงเส้นตรง (linear) ซึ่งก็คือการไหลต้องเป็นไปตามกฎของดาร์ซี (Darcy's law) เท่านั้น

มีนักวิจัยหลายท่าน เช่น Ping [10], Gill [5], Swartzendruber [12], Miller and Low [8] และ Basak [1] ได้แสดงผลงานวิจัยที่ระบุว่า การไหลของน้ำในดินใกล้เคียงแต่ไม่ไปเป็นตามกฎของดาร์ซี นอกจากนี้ยังระบุว่า มีขีดจำกัดของลาดระดับน้ำ (threshold hydraulic gradient) ซึ่งเป็นค่าต่ำสุดที่ทำให้เกิดการไหลอีกด้วย

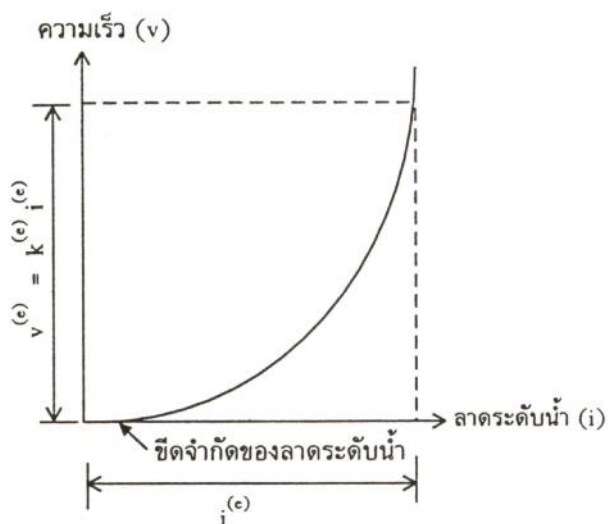
ข้อสมมติฐานของกฎของดาร์ซีที่สำคัญก็คือ ดินมีความอิ่มตัว (saturated soils) ซึ่งเป็นสภาพที่เกิดขึ้นยากในเขื่อนดินจริง เพราะแม้แต่การทดลองในห้อง

ปฏิบัติการยังต้องให้ความดัน (back pressure) แก่ตัวอย่างดินเพื่อช่วยให้ดินอัดตัว และยังคงระมัดระวังการรักษาความดันให้คงอยู่อย่างสม่ำเสมอตลอดการทดลอง [3]

ถ้าการไหลของน้ำผ่านเขื่อนดินไม่เป็นไปตามกฎของดาร์ซีด้วยเหตุผลที่กล่าวมาแล้ว สมการที่ 1 ถึง 12 ก็ไม่อาจนำมาใช้วิเคราะห์การไหลได้ [7] ถึงแม้ว่า Volker [13] และ Neuman [19] ได้เสนอบทความแนะนำวิธีการวิเคราะห์การไหลที่ไม่เป็นไปตามกฎของดาร์ซีไว้ก็ตาม แต่วิธีการดังกล่าวยุ่งยากซับซ้อนมาก

เทคนิคสัมประสิทธิ์ความซึมผ่านประดิษฐ์

Kazda [6] ได้แนะนำเทคนิคสัมประสิทธิ์ความซึมผ่านประดิษฐ์ (fictitious coefficient of permeability) สำหรับการใช้อิทธิพลในดอเลลิเมนต์ในการวิเคราะห์การไหลของน้ำในดิน ซึ่งสมการการไหลไม่เป็นไปตามกฎของดาร์ซี ดังแสดงในรูปที่ 3 เทคนิคนี้ยังคงใช้สมการที่ 1 ถึง 12 ในการวิเคราะห์ ทำให้ไม่เกิดความยุ่งยากในการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและลาดระดับน้ำที่ไม่เป็นไปตามกฎของดาร์ซี

สมการที่ Kazda แนะนำเป็นดังนี้

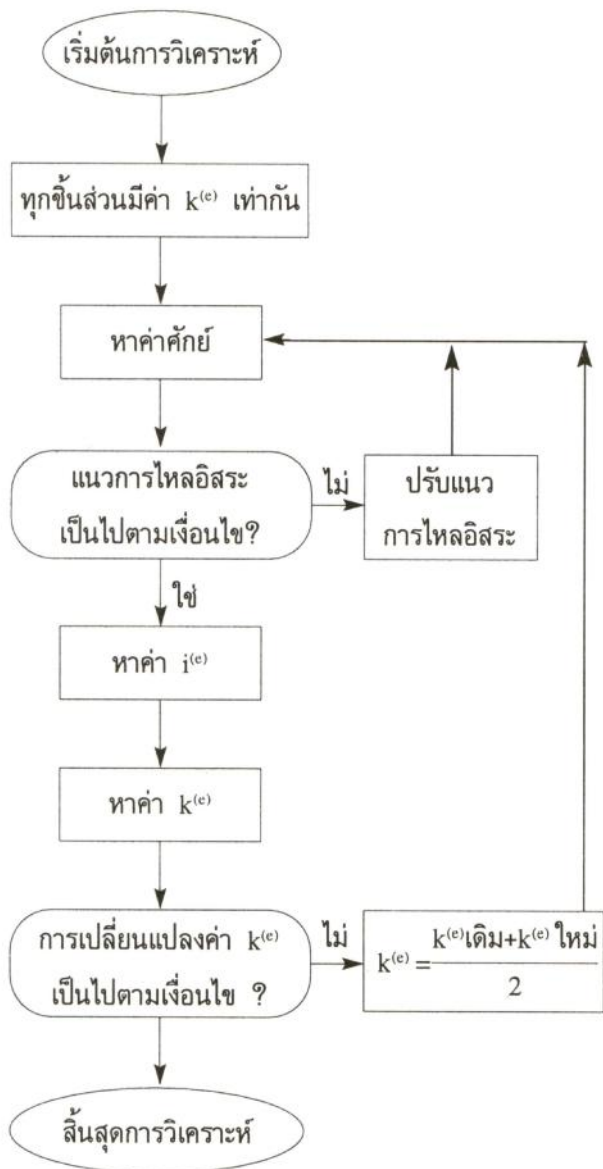
$$k^{(e)} = \frac{v^{(e)}}{i^{(e)}} \quad (19)$$

โดย $k^{(e)}$ = สัมประสิทธิ์ความซึมผ่านประดิษฐ์ ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์เฉพาะของชั้นส่วน e ซึ่งมีค่าความลาดระดับน้ำเป็น $i^{(e)}$ ค่าของ $k^{(e)}$ จะเป็นศูนย์ ถ้า $i^{(e)}$ ต่ำกว่าขีดจำกัดของลาดระดับน้ำ

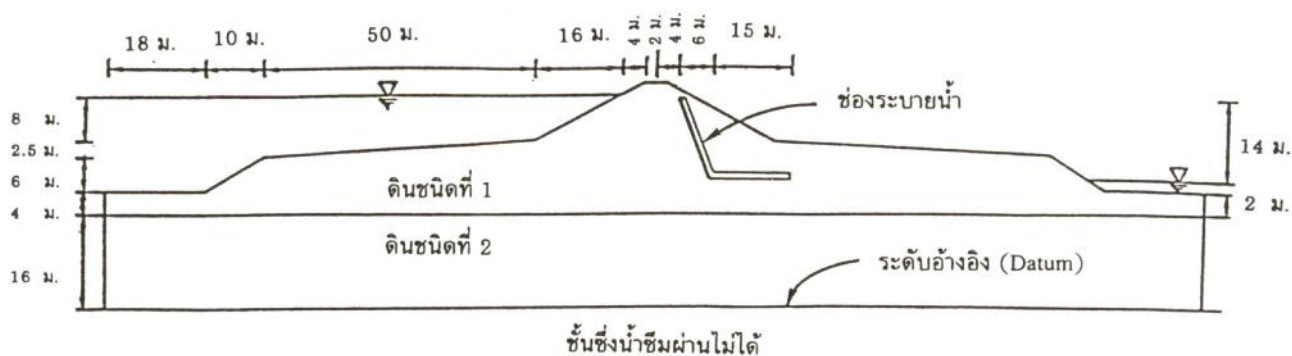
$v^{(e)}$ = ความเร็วของการไหลในชั้นส่วน e ซึ่งมีค่าความลาดระดับน้ำเป็น $i^{(e)}$

ค่า $k^{(e)}$ นี้ใช้เป็นค่าคงที่แทนค่า k ในสมการการไหลแบบดาร์ซี แต่เนื่องจากค่า $k^{(e)}$ จะเปลี่ยนไปตามค่า $i^{(e)}$ ดังนั้น ขั้นตอนการคำนวณจึงซับซ้อนกว่าการวิเคราะห์การไหลที่เป็นแบบดาร์ซี

เมื่อเริ่มต้นการวิเคราะห์จะไม่สามารถทราบค่า $i^{(e)}$ ในแต่ละชั้นส่วน ทำให้ไม่สามารถหาค่า $k^{(e)}$ ได้ จึงให้ทุกชั้นส่วนมีค่า $k^{(e)}$ เท่ากัน เมื่อการวิเคราะห์สิ้นสุดลงกล่าวคือ คำนวณหาแนวการไหลอิสระและหาค่าศักย์ของทุกจุดในแบบจำลองได้แล้ว จึงหาค่า $i^{(e)}$ ของแต่ละชั้นส่วนซึ่งไม่เท่ากัน ทำให้ค่า $k^{(e)}$ ไม่เท่ากันด้วย นอกจากนั้นจึงเริ่มวิเคราะห์อีกครั้ง ซึ่งยอมได้ค่า $i^{(e)}$ เปลี่ยนไปจากการวิเคราะห์ครั้งแรกและส่งผลให้ค่า $k^{(e)}$ เปลี่ยนอีก จึงต้องวิเคราะห์ซ้ำจนกว่าค่า $k^{(e)}$ จะคงที่หรือเปลี่ยนแปลงน้อยมาก แผนผังการคำนวณเป็นไปตามรูปที่ 4



รูปที่ 4 แผนผังการคำนวณตามเทคนิคสัมประสิทธิ์
ความซึมผ่านประดิษฐ์



รูปที่ 5 แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์

ตัวอย่างการวิเคราะห์

แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์แสดงในรูปที่ 5 เป็นเขื่อนดินประกอบด้วยดิน 2 ชนิด วางอยู่บนชั้นดิน ซึ่งน้ำซึมผ่านไม่ได้

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในการไหลและลาดระดับน้ำของดินแต่ละชนิดนั้นได้มาจากการทดลองของ Gasaluck et al. [4] ซึ่งทดลองให้น้ำไหลผ่านดินในแบบสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ (cube mold) ใน 2 ทิศทางซึ่งตั้งฉากกัน ความเร็วในการไหล ณ ค่าลาดระดับน้ำหนึ่งๆ ถูกบันทึก เพื่อนำมาสร้างความสัมพันธ์ในรูปสมการ เนื่องจากความสัมพันธ์ที่ได้ใกล้เคียงแต่ไม่ใช่เชิงเส้นตรง จึงสร้างสมการโดยวิธี least square ได้ ดังนี้

ดินชนิดที่ 1 :

$$v_x = 0.0381i^{-0.14} - 0.627 + 1.035i + 0.052i^2$$

ชม./วัน

โดยมีขีดจำกัดของลาดระดับน้ำเป็น 0.5506

$$v_y = -1.21 \times 10^{-50}i^{-52} - 0.0015 + 0.021i + 0.00039i^2$$

ชม./วัน

โดยมีขีดจำกัดของลาดระดับน้ำเป็น 0.1250

ดินชนิดที่ 2 :

$$v_x = 0.0260i^{-0.32} - 0.131 + 1.785i + 0.062i^2$$

ชม./วัน

โดยมีขีดจำกัดของลาดระดับน้ำเป็น 0.0273

$$v_y = 0.0026 i^{-1.03} - 0.114 + 0.737 i + 0.026 i^2 \text{ ซม./วัน}$$

โดยมีขีดจำกัดของลาดระดับน้ำเป็น 0.1239

โดย v_x และ v_y คือความเร็วในการไหลในแนวราบและแนวตั้งตามลำดับ และถ้าลาดระดับน้ำของการไหลเท่ากับหรือต่ำกว่าขีดจำกัดของลาดระดับน้ำแล้วความเร็วในการไหลจะเป็นศูนย์ นอกจากนี้เพื่อให้เห็นชัดเจนถึงความแตกต่างของความเร็วในการไหล จึงสร้างสมการเชิงเส้นตรงโดยวิธี linear regression ได้ดังนี้

ดินชนิดที่ 1 :

$$v_x = 1.093 i \text{ ซม./วัน}$$

$$v_y = 0.022 i \text{ ซม./วัน}$$

ดินชนิดที่ 2 :

$$v_x = 1.978 i \text{ ซม./วัน}$$

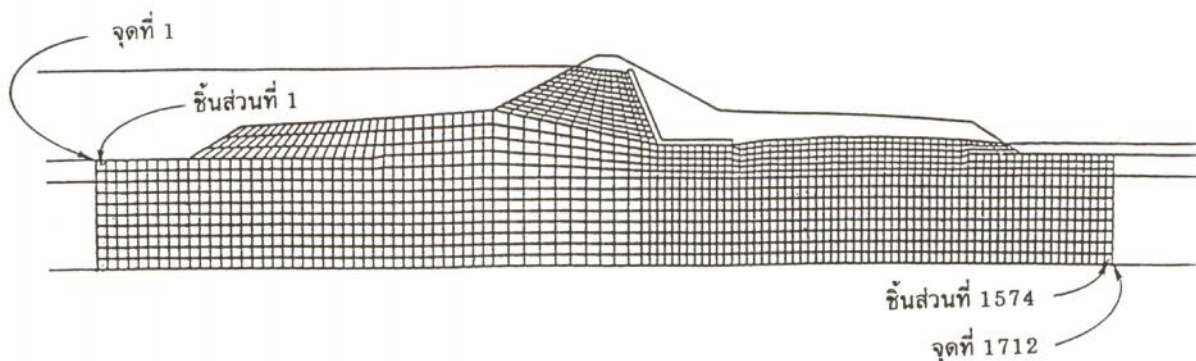
$$v_y = 0.803 i \text{ ซม./วัน}$$

สมการที่ได้จากวิธี least square ย่อมแสดงความสัมพันธ์ที่ถูกต้องตามผลการทดลองมากกว่า จึง

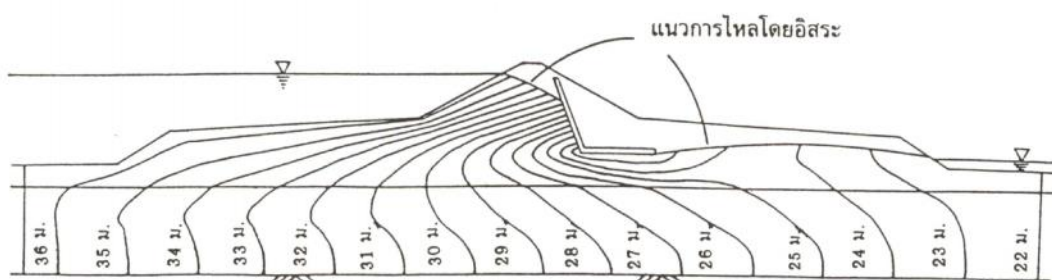
นำมาใช้ในการวิเคราะห์ อย่างไรก็ตาม สมการที่นำมาใช้นี้เป็นเพียงตัวอย่างหนึ่งของการใช้เทคนิคสัมประสิทธิ์ความซึมผ่านประดิษฐ์เท่านั้น สมการการไหลในรูปแบบใด ๆ ที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรงก็สามารถนำมาใช้การวิเคราะห์โดยอาศัยเทคนิคนี้ได้

แบบจำลองตามรูปที่ 5 ถูกแบ่งออกเป็น 1574 ชิ้นส่วน (element) และ 1712 จุด (node) ดังแสดงในรูปที่ 6 ข้อมูลชิ้นส่วนที่ถูกป้อนเข้าโปรแกรมนั้นเป็นข้อมูลของรูปสี่เหลี่ยมแต่โปรแกรมจะหาค่าเฉลี่ยของค่าพิกัดทั้ง 4 จุด เป็นจุดกึ่งกลางรูปสี่เหลี่ยมแล้วแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยม 1 ชิ้นส่วน เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 4 ชิ้นส่วน

การคำนวณตามขั้นตอนในรูปที่ 4 นั้น การตั้งเงื่อนไขการเปลี่ยนแปลงค่า $k^{(c)}$ ว่าน้อยขนาดไหนหรือไม่เปลี่ยนแปลงเลย จึงจะหยุดทำงานนั้นเป็นสิ่งที่ทำได้ยาก เพราะจากการทดลองวิเคราะห์แบบจำลองหลายๆ แบบ พบว่า ค่า $k^{(c)}$ เปลี่ยนแปลงไปมา อาจไม่สามารถบรรลุเงื่อนไขที่ตั้งไว้ให้กับโปรแกรม วิธีการ



รูปที่ 6 การแบ่งแบบจำลองเป็นชิ้นส่วนและจุด



รูปที่ 7 เส้นสมมติที่ได้จากการวิเคราะห์

ที่เหมาะสมคือ ให้โปรแกรมคำนวณไปเรื่อย ๆ และ รายงานผลการเปลี่ยนแปลงค่า $k^{(c)}$ ให้ผู้ใช้โปรแกรม พิจารณาเพื่อตัดสินใจว่า ควรให้โปรแกรมคำนวณที่ รอบจึงหยุดการทำงาน

จากแบบจำลองและสมการการไหลที่ใช้ หลังจากใช้โปรแกรมคำนวณไป 68 รอบ พบว่ารอบที่ 26 มีการเปลี่ยนแปลงค่า $k^{(c)}$ น้อยที่สุด คือค่าเฉลี่ยการเปลี่ยนแปลงค่า $k^{(c)}$ ใน 1574 ชั้นส่วน สำหรับดินชนิด ที่ 1 เป็น 0.01289 และ 0.00076 ซม./วัน สำหรับ k_x และ k_y ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นการ เปลี่ยนแปลงที่น้อยมาก อนึ่งจากการทดลองใช้วิธีนี้กับ หลายๆ แบบจำลอง พบว่า ค่า $k^{(c)}$ มีการเปลี่ยนแปลง สูงที่ไม่เกิน 5 รอบแรกของการคำนวณ หลังจากนั้น การเปลี่ยนแปลงจะลดลงต่ำมาก

ผลการวิเคราะห์สามารถแสดงได้ในหลายรูปแบบ ได้แก่ ค่าศักย์ที่จุดต่างๆ ค่าลาดระดับน้ำในชั้นส่วน ต่างๆ ซึ่งในที่นี้ได้นำค่าศักย์มาแสดงในรูปของเส้น สมะศักย์ (equipotential line) ดังรูปที่ 7

ลักษณะของเส้นสมะศักย์ที่แสดงในรูปที่ 7 มีข้อ สังเกตคือ ไม่มีการหักเหตรงรอยต่อระหว่างดิน 2 ชนิด ทั้งนี้ เนื่องจากบริเวณนั้นมีค่าลาดระดับน้ำต่ำมาก i_x มีค่าประมาณ 0.05 ถึง 0.15 และ i_y มีค่าประมาณ 0.25 ที่บริเวณต้นน้ำ ถึง 0.65 ที่บริเวณใต้ช่องระบาย น้ำ ค่าลาดระดับน้ำที่ต่ำทำให้ค่า $k^{(c)}$ มีค่าต่ำมาก และใกล้เคียงกัน ไม่ว่าจะเป็นสมการการไหลของน้ำใน ดินชนิดใดก็ตาม

สรุป

เทคนิคสัมประสิทธิ์ความซึมผ่านประดิษฐ์ ช่วยให้ การวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านเขื่อนดินเป็นไปได้โดย ง่าย ถึงแม้ว่าสมการการไหลจะไม่ใช่มุมการเชิงเส้นตรง ก็ตาม โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้วิเคราะห์การไหลที่มี สมการเชิงเส้นตรง หรือการไหลที่เป็นไปตามกฎของ ดาร์ซี สามารถปรับปรุงให้นำมาใช้ ได้โดยการเพิ่ม

ขั้นตอนการทำงานที่สำคัญ 2 ขั้นตอนเท่านั้น คือ ค่า สัมประสิทธิ์ความซึมผ่าน ไม่ใช่ค่าคงที่แต่เปลี่ยนไปตาม ค่าลาดระดับน้ำ และมีการตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ ความซึมผ่านให้เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Basak P., "Non-Darcy Flow and Its Implication to Seepage Problems", J. of the Irrigation and Drainage D., IR 4, Dec. 1977, pp. 459-473.
- [2] Desai C.S., "Numerical Method in Geotechnical Engineering", McGraw-Hill, USA., 1977, Chap. 14.
- [3] Dun R.J. and Mitchell J.K., "Fluid Conductivity Testing of Fine-Grained Soils", J. of Geo. Eng. 110, 1984, pp. 1648-1655.
- [4] Gasaluck W., Ato M., Ohno K. and Kondo T., "On the Non-Linearity and Anisotropy of Seepage Flow in Compacted Soils", Trans. of JSIDRE No. 180, Dec. 1995, pp. 1-10.
- [5] Gill M.A., "Analysis of Permeameter Data to Obtain Parameters of Non-Darcy's Flow", J. of Hydrology 32, 1977, pp. 165-173.
- [6] Kazda L., "Finite Element Techniques in Groundwater Flow Studies", Elsevier, Czechoslovakia, 1990, Chap. 5.
- [7] Kovacs G., "Development in Water Science 10: Seepage Hydraulic", Elsevier, Hungary, 1981, Chap.3.
- [8] Miller R.J. and Low P.F., "Threshold Gradient for Water in Clay Systems",

- Proc. Soil Sci. Soc. Am. 27, 1963, pp. 605-609.
- [9] Neuman S.P., "Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements", J. of the Hydraulic Div. HY12, Dec. 1973, pp. 2233-2250.
 - [10] Ping L.S., "Measuring Extremely Low Flow Velocity of Water in Clays", J. Soil Sci. 95, 1963, pp.410-413.
 - [11] Segerlind L.J., "Applied Finite Element Analysis 2nd Ed.", John Wiley and Sons, USA., 1984, Chap. 5-10.
 - [12] Swartzendruber D., "Non-Darcy Flow Behavior in Liquid-Saturated Porous Media", J. Geophysical Research 67, No.13, 1962, pp. 5205-5213.
 - [13] Volker R.E., "Non linear Flow in Porous Media by Finite Elements", J. of the Hydraulic Div. HY6, Nov. 1969, pp. 2093-2114.