

วิธีการปรับขนาดไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์โครงสร้างแผ่น
Adaptive Finite Element Method for Analysis
of Plate Structures

ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ อีรวัฒน สว่างบุตร

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพฯ 10330

Pramote Dechaumphai and Teeravat Suvangbutr

Mechanical Engineering Department
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Bangkok 10330

บทคัดย่อ

บทความนี้ อธิบายระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณการเสียรูปและความเค้น อันเนื่องมาจากแรงภายนอกที่กระทำบนโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยแผ่นบาง เอลิเมนต์ตามตำแหน่งต่างๆ ที่ใช้จำลองรูปแบบของโครงสร้างจะถูกปรับขนาดโดยอัตโนมัติ เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กจะถูกสร้างขึ้นในบริเวณซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงจากการคำนวณ ในขณะที่เดียวกัน เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่จะถูกสร้างขึ้นตามบริเวณซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นต่ำ เพื่อลดจำนวนตัวไม่รู้ค่าและเวลาที่ใช้ไปในการคำนวณ ผลจากการวิเคราะห์ได้แสดงถึงประสิทธิภาพของวิธีการปรับขนาดไฟไนต์เอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าวใน 3 มิติ ซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงขึ้นและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลง

ABSTRACT

Finite element analysis of plate structures consisting of thin plates subjected to the applied forces is presented. The plate structures are discretized by finite elements that adapt themselves automatically to the solution behaviors of the problems. Small elements are constructed and placed in the regions of large changes in the stress gradients to provide accurate analysis solution. Larger elements are used in other regions where the changes in the stress are small to reduce number of unknowns and computational time. Results from the analysis demonstrates the effectiveness of the adaptive finite element method for the analysis of three-dimensional plate structures.

บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขระเบียบวิธีหนึ่งที่ได้รับการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ เช่น ปัญหาความแข็งแรงของโครงสร้าง ปัญหาการถ่ายเทความร้อน ปัญหาลักษณะการไหลของของเหลวรวมทั้งปัญหาทางด้านอื่นๆ อีกเป็นจำนวนมาก ในปัจจุบันระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันโดยแพร่หลายเนื่องจากสามารถจำลองรูปแบบของปัญหาที่มีลักษณะซับซ้อนได้โดยสะดวกเมื่อเปรียบเทียบกับการใช้ระเบียบวิธีอื่นๆ หลักการที่เป็นขั้นตอนโดยทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ เริ่มต้นจากการแบ่ง (discretization) รูปแบบของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (elements) จากนั้นจึงทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ (element equations) ที่แบ่งชิ้นมานี้ให้สอดคล้องกับชนิดของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์นั้น แล้วจึงค่อยนำสมการเหล่านี้มารวมเข้าด้วยกันซึ่งเปรียบเสมือนนำเอลิเมนต์ย่อยๆ นั้นมารวมกันเข้าเป็นรูปแบบจำลองของปัญหาที่แท้จริง การรวมตัวกันของสมการย่อยเหล่านี้ ก่อให้เกิดระบบสมการรวม (system of equations) ซึ่งหลังจากทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่เหมาะสมแล้ว จึงแก้ระบบสมการรวมนั้นเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณตามตำแหน่งต่างๆ ของปัญหานั้น

ความถูกต้องเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้โดยทั่วไปแล้ว จะขึ้นอยู่กับขนาดของเอลิเมนต์ กล่าวคือ หากต้องการค่าความถูกต้องเที่ยงตรงสูง จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมาก ยิ่งใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กลงมากเท่าใด จะได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นเท่านั้นแต่ในขณะเดียวกันจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ใช้ในการจำลองแบบของปัญหานั้นจะเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งอาจจะเกินขนาดของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่

มีอยู่ หรืออาจจะใช้เวลาในการคำนวณมากจนเกินความจำเป็น

วิธีหนึ่งที่จะช่วยผ่อนปรนความยากลำบากของปัญหาดังกล่าวแต่ในขณะเดียวกันยังคงให้ค่าความถูกต้องสูง คือการใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตามบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูง และใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ตามบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ต่ำ หลักการของวิธีการดังกล่าว ก่อให้เกิดอุปสรรคในการสร้างรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ กล่าวคือ : (1) การจัดเอลิเมนต์ซึ่งมีขนาดไม่เท่ากันแต่ต้องการให้มีความต่อเนื่องอย่างค่อยเป็นค่อยไปนั้นทำได้ค่อนข้างลำบาก และ (2) สำหรับปัญหาทั่วไปในทางปฏิบัติ ลักษณะของผลลัพธ์นั้น จะไม่สามารถทราบได้ก่อนล่วงหน้า ดังนั้นจึงเป็นการยากลำบากที่จะตัดสินใจใช้เอลิเมนต์ขนาดเท่าใดลงตามตำแหน่งใด ๆ บนรูปแบบของปัญหานั้น

บทความนี้จะอธิบายถึงการสร้างและปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสำหรับปัญหาทั่วไปที่ยังไม่ทราบลักษณะของผลลัพธ์ล่วงหน้ามาก่อน จะเป็นการแสดงขั้นตอนโดยใช้ตัวอย่างของปัญหาโครงสร้างใน 3 มิติที่ประกอบด้วยแผ่นบางภายใต้แรงกระทำ ซึ่งยังผลให้เกิดการเสียรูปและความเค้นที่มีขนาดต่างๆ กันเกิดขึ้นตามมา เอลิเมนต์ขนาดเล็กจะถูกสร้างขึ้นโดยอัตโนมัติตามตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสูงเพื่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง ในขณะที่เดียวกันเอลิเมนต์ขนาดใหญ่จะถูกสร้างขึ้นตามตำแหน่งอื่น ๆ เพื่อลดจำนวนตัวไม่รู้ค่า (unknowns) และลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ผลลัพธ์ที่ได้จะนำมาเปรียบเทียบกับวิธีการแบบอื่นอีกวิธีการหนึ่งซึ่งไม่ได้ใช้การปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ในช่วงแรกของบทความนี้ จะอธิบายระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่ประกอบด้วยแผ่นบาง จากนั้นจะเป็นการอธิบาย

วิธีการสร้างเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างๆ กันตามตำแหน่งต่างๆ ของปัญหาคงที่ได้กล่าวไว้โดยสังเขป ขั้นตอนการสร้างเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างๆ กันนี้สามารถนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาทางด้านอื่น ๆ เช่น ปัญหาทางด้านการไหล ซึ่งโดยปกติแล้วลักษณะของผลลัพธ์นั้นจะไม่สามารถทราบได้ล่วงหน้าก่อนทำการคำนวณ

การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการเชิงอนุพันธ์

การเสียรูปของแผ่นบางที่วางตัวอยู่ในแนวระนาบ x-y ประกอบด้วย : (1) การเสียรูปเนื่องจากการเคลื่อนตัวในแนวระนาบ x-y และ (2) การเสียรูปในแนวตั้งฉากกับแนวระนาบ x-y ของแผ่นบางนั้น

การเสียรูปเนื่องจากการเคลื่อนตัวในแนวระนาบ x-y สามารถคำนวณได้จากสมการของความสมดุล (equilibrium equations) ดังแสดงในเอกสารอ้างอิง [1] ซึ่งคือ :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1b)$$

โดย σ_x, σ_y แทนความเค้นในแกน x,y ตามลำดับ และ τ_{xy} แทนความเค้นเฉือน ความเค้นเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเครียดโดยใช้ความสัมพันธ์ตามกฎของฮุค (Hooke's law) ซึ่งคือ

$$\{\sigma\} = [C_m] \{\epsilon\} \quad (2)$$

โดย

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}] \quad (3)$$

ดรรชนีบน T ในสมการ (3) นี้แทนการสลับเปลี่ยน (transpose) ของเมตริกซ์ และ $[C_m]$ เป็นเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของแผ่นในแนวระนาบ (membrane) ดังนี้

$$[C_m] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

โดย E แทนโมดูลัสของความยืดหยุ่น และ ν แทนอัตราส่วนของปัวส์ซง (Poisson's ratio) ส่วนเวกเตอร์ของความเครียด $\{\epsilon\}$ ทางด้านขวาของสมการ (2) นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนตัว u และ v ในแนวแกน x และ y ได้ดังนี้

$$\{\epsilon\}^T = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (4)$$

การเสียรูปในแนวตั้งฉากกับแนวระนาบ x-y ของแผ่นบางสามารถคำนวณได้จากสมการความสมดุลในแนวตั้งฉากกับแผ่น (equilibrium equation of plate) ซึ่งคือ :

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x,y) \quad (5)$$

โดย D แทนความแข็งเกร็งของการโก่ง (bending rigidity) ของแผ่น ดังนี้

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

ในที่นี้ t แทนความหนาของแผ่น และ p(x,y) แทนแรงต่อหน่วยพื้นที่ที่กระทำตั้งฉากกับแผ่นซึ่งอาจเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง x และ y

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนตัวในแนวระนาบ

x-y ดังแสดงในสมการ (1)-(4) และการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากกับแนวระนาบ x-y ดังแสดงในสมการ (5) สามารถสร้างขึ้นโดยวิธีการแปรผัน (variational method) หรือโดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) ขั้นตอนของระเบียบวิธีทั้งสองนี้ ได้อธิบายโดยละเอียดในเอกสารอ้างอิง [1] ซึ่งจะขอละไว้ในที่นี้ เพื่อให้บทความนี้ได้กระชับขึ้น

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนตัวในแนวระนาบ x-y ดังแสดงในสมการ (1) คือ

$$[K_m] \{\delta_m\} = \{F_m\} \quad (7)$$

โดยดรรชนีล่าง m แทนแนวระนาบ (membrane) และเวกเตอร์ $\{\delta_m\}$ ประกอบด้วยค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในแนวระนาบ x-y ของแผ่นนั้น ยกตัวอย่างเช่น หากใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อและแต่ละจุดต่อประกอบด้วยค่าเคลื่อนตัวในแกน x และ y นั้นหมายความว่าเอลิเมนต์ดังกล่าว จะประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าในแนวระนาบ x-y ทั้งหมด 6 ค่า เป็นต้น เมตริกซ์ของความแข็งเกร็งซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายของสมการ (7) นั้น อยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ A ของเอลิเมนต์ ซึ่งคือ

$$[K_m] = \int_A [B_m]^T [C_m] [B_m] dx dy \quad (8)$$

โดย $[B_m]$ คือเมตริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเครียดกับค่าการเคลื่อนตัวซึ่งสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อดังกล่าว เมตริกซ์นี้จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์นั้นและจะมีค่าคงที่ ดังนั้น เอลิเมนต์ชนิดนี้ ในบางครั้งจึงถูกเรียกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่ (Constant Strain Triangle-CST) ซึ่งมีประโยชน์ต่อการคำนวณหาค่าเมตริกซ์ของความแข็งเกร็งในสมการ (8) กล่าวคือ ไม่จำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข

(numerical integration) ซึ่งจะช่วยท่นเวลาในการคำนวณและหลีกเลี่ยงความคลาดเคลื่อน (error) ที่อาจเกิดขึ้นจากการอินทิเกรตเชิงตัวเลข ส่วนเวกเตอร์ $\{F_m\}$ ซึ่งอยู่ทางด้านขวาของสมการ (7) ประกอบด้วยแรงกระทำที่จุดต่อในแนวระนาบ x-y ของเอลิเมนต์นั้น

ในทำนองเดียวกัน สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการโก่งในแนวตั้งฉากกับแนวระนาบของแผ่นบางนั้น สามารถประดิษฐ์ขึ้นมาได้และอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$[K_b] \{\delta_b\} = \{F_b\} \quad (9)$$

โดยดรรชนีล่าง b แทนการการโก่ง (bending) ส่วนเวกเตอร์ $\{\delta_b\}$ ประกอบด้วยค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในแนวตั้งฉาก (transverse deflection) กับแนวระนาบและมุมของการบิดตัว (rotation) รอบแกน x และแกน y ดังนั้นสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ เวกเตอร์ $\{\delta_b\}$ นี้จะประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด 9 ค่า เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อซึ่งได้นำมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณนี้เรียกว่า เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์ (Discrete Kirchhoff Triangle - DKT) คุณสมบัติของเอลิเมนต์ดังกล่าวได้อธิบายในเอกสารอ้างอิง [2-3] ข้อดีของเอลิเมนต์ชนิดนี้ซึ่งนอกจากจะให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงดังแสดงในเอกสารอ้างอิงดังกล่าวแล้ว ยังก่อให้เกิดเมตริกซ์ของความแข็งเกร็งในรูปแบบดังนี้

$$[K_b] = \int_A [B_b]^T [C_b] [B_b] dx dy \quad (10)$$

เมตริกซ์ของความแข็งเกร็งนี้ไม่จำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขในลักษณะเช่นเดียวกันกับที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ชนิด CST ที่ได้แสดงในสมการ (8) ทำให้การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณนั้นทำได้โดยสะดวก ส่วนทางด้านขวาของสมการเอลิเมนต์ (9)

นั้น เวกเตอร์ $\{F_b\}$ ประกอบด้วยแรงกระทำที่จุดต่อในแนวตั้งฉากกับแผ่นระนาบ ซึ่งอาจเกิดจากความดัน $p(x,y)$ ในสมการ (5) หรือแรงภายนอกอื่นๆ ที่มากระทำในทิศตั้งฉากกับแผ่นระนาบนั้น

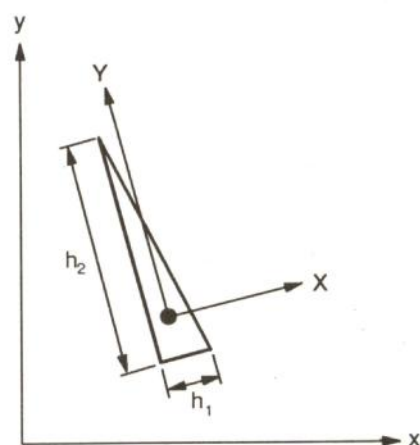
สำหรับแผ่นระนาบในแนวระนาบ $x-y$ ซึ่งอาจวางตัวอยู่ในทิศทางใดๆ ใน 3 มิติของระบบแกนรวมใหญ่ $X-Y-Z$ เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ ดังแสดงในสมการ (7) ถึง (10) ซึ่งสร้างขึ้นมาจากสมมุติฐานของแผ่นราบที่วางตัวอยู่ในแนวระนาบย่อย $x-y$ นั้น จำเป็นต้องถูกแปลง (transform) ให้ไปอยู่ในรูปแบบที่สอดคล้องกับระบบแกนรวมใหญ่ $X-Y-Z$ ทั้งนี้เนื่องจากเหตุผลที่ว่า ที่จุดต่อใดจุดต่อหนึ่งจะมีค่าเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ นั้นหนึ่งค่าและมุมของการบิดตัวรอบแกน x และแกน y ของระนาบ $x-y$ นั้นอีก 2 ค่า ดังนั้น จึงมีตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด 3 ค่าที่จุดต่อใดๆ แต่เนื่องจากแนวระนาบ $x-y$ ของแผ่นบางนี้อาจวางตัวในแนวเอียงใดๆ ในระบบแกนรวมใหญ่ดังที่ได้กล่าวไว้ ดังนั้นที่จุดต่อใดๆ จึงมีค่าเคลื่อนตัว 3 ค่าในแนวแกน X, Y และ Z และมุมของการบิดตัวอีก 3 ค่ารอบแกน X, Y และ Z นั้นหมายความว่า แต่ละจุดต่อจะประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด 6 ค่า ดังนั้นแต่ละเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ จะประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าทั้งหมดถึง 18 ค่า ขั้นตอนในการแปลงเมตริกซ์ต่างๆ ของสมการ (7) ถึง (10) เหล่านี้ได้อธิบายในเอกสารอ้างอิง[1] ซึ่งจะขอละไว้ในที่นี้เพื่อทำให้บทความนี้มีความกระชับมากยิ่งขึ้น

การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในการแก้ปัญหาโดยทั่วไป ผู้แก้ปัญหาโดยปรกติจะไม่สามารถทราบได้ก่อนล่วงหน้าว่าลักษณะของผลลัพธ์ของปัญหานั้นๆ จะเป็นเช่นไร เช่นการกระจายของความเค้นทั่วทั้งรูปแบบของปัญหาที่กำหนดมาให้จะมีลักษณะอย่างไร การที่จะได้ผลลัพธ์ที่มีค่าเที่ยงตรงสูง ผู้แก้ปัญหาจำเป็นต้อง

สร้างเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเป็นจำนวนมากให้อยู่ในบริเวณที่ค่าของผลลัพธ์มีการเปลี่ยนแปลงสูง และในขณะเดียวกันผู้แก้ปัญหาควรใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ตามบริเวณอื่นๆ เพื่อช่วยลดจำนวนตัวไม่รู้ค่าทั้งหมดที่ใช้ในการจำลองรูปแบบของปัญหานั้น ซึ่งจะเป็นการลดเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณตลอดจนปริมาณของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ลงไปด้วย และที่สำคัญที่สุด กระบวนการดังกล่าวที่ควรเกิดขึ้นได้โดยอัตโนมัติโดยผู้แก้ปัญหาไม่จำเป็นต้องรู้คำตอบ และตำแหน่งที่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ล่วงหน้ามาก่อนที่จะทำการคำนวณ ลำดับขั้นตอนของกระบวนการดังกล่าวสามารถอธิบายได้โดยสังเขปดังต่อไปนี้

รูปที่ 1 แสดงแนวคิดสำหรับการสร้างขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม สมมุติว่าที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งของปัญหานั้นมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเค้น σ ในแนวทิศ X ที่ค่อนข้างมาก เมื่อเปรียบเทียบกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวทิศ Y ดังนั้นสามเหลี่ยมดังกล่าวจึงควรมีความกว้าง h_1 ในทิศแกน X ที่ค่อนข้างสั้นเมื่อเปรียบเทียบกับความสูง h_2 ในทิศแกน Y ทั้งนี้ก็เพื่อที่จะก่อให้เกิดผลลัพธ์จากการคำนวณที่มีความเที่ยงตรงสูงในทิศแกน X ได้ ซึ่งหมายถึงว่าสิ่งจำเป็นที่จะต้องคำนวณหาคือ ทิศแกน X และ Y รวมทั้งขนาด h_1 และ h_2 ที่เหมาะสมสำหรับสามเหลี่ยมนั้น



รูปที่ 1 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมบนระนาบ $x-y$

ที่ตำแหน่งใดๆ บนระนาบ x-y ดังแสดงในรูปที่ 1 นี้ ทิศแกน X และ Y รวมทั้งขนาดของสามเหลี่ยม h_1 และ h_2 ที่เหมาะสม สามารถคำนวณได้โดยใช้หลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stresses) และทิศทางของแนวแกนหลักเหล่านี้จากแนวคิดของกลศาสตร์สำหรับของแข็ง (solid mechanics) กล่าวคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเค้นที่ตำแหน่งดังกล่าวบนระนาบ x-y นี้จะประกอบด้วย $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}$ และ $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}$ ซึ่งจาก 3 ค่านี้เองอัตราเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวแกนหลัก X-Y ซึ่งคือ $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2}$ และ $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial Y^2}$ รวมทั้งทิศทางของแนวแกนหลัก X และ Y นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้แนวคิดดังอธิบายในสมการ (11) โดยมีรายละเอียดในเอกสารอ้างอิง [4] นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวแกนหลัก X-Y ที่คำนวณได้นี้ จะนำไปคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ h_1 และ h_2 ที่ตำแหน่งของจุดต่อนั้นโดยใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right| h_1^2 = \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right| h_2^2 = \text{คงที่} = \lambda_{\max} h_{\min}^2 \quad (12)$$

โดย $\lambda_{\max} = \max \left(\left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right| \right)$ ของจุดต่อ

ทุกจุดในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น และ $h_{\min}$ เป็นค่าขนาดความกว้างของเอลิเมนต์ที่สั้นที่สุดที่จะใช้ในการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ต่อไป ขั้นตอนการคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับ

สองต่างๆ ในสมการ (11) และ (12) ได้อธิบายโดยละเอียดในเอกสารอ้างอิง [4]

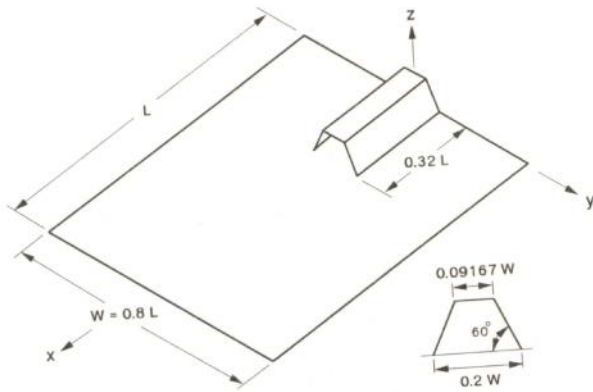
หลังจากที่คำนวณขนาดของเอลิเมนต์ h_1 และ h_2 ใหม่ตามตำแหน่งต่างๆ ของปัญหาได้แล้ว การสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดใหม่นี้จึงเริ่มขึ้นได้ ขั้นตอนในการสร้างนั้นสามารถอธิบายโดยสังเขปได้ดังนี้ (รายละเอียดลักษณะที่เกิดขึ้นจะแสดงในตัวอย่างของการวิเคราะห์ในหัวข้อต่อไป) เช่น หากมีแผ่นชิ้นงานที่มีรูปร่างลักษณะใดๆ อยู่ชิ้นหนึ่ง ขั้นตอนแรกจะเป็นการสร้างเอลิเมนต์ตามขอบรอบนอกของชิ้นงานนั้นที่มีขนาดตามผลของการคำนวณจากสมการ (12) จากนั้นเอลิเมนต์จะถูกสร้างขึ้นตามบริเวณที่ถัดจากขอบนั้นเข้ามายังพื้นที่ส่วนในของชิ้นงาน กระบวนการสร้างจะสิ้นสุดลงต่อเมื่อเอลิเมนต์ได้ถูกสร้างจนเต็มพื้นที่ของชิ้นงานนั้น

อนึ่งสำหรับปัญหาโดยทั่วไปอัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้นย่อย σ_x , σ_y และ τ_{xy} ที่มีค่าสูงนั้น อาจจะอยู่ตามตำแหน่งต่างๆ ที่แตกต่างกันออกไป ดังนั้นเพื่อสามารถสร้างเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กลงในทุกๆ ตำแหน่งที่มีค่าความเค้นย่อยต่างๆ เหล่านี้ ค่าความเค้นที่จะนำมาใช้ในสมการ (11) จึงควรเป็นค่าความเค้นเพียงค่าเดียวที่เป็นผลมาจาก ค่าความเค้นย่อยเหล่านี้ ค่าความเค้นดังกล่าว คือค่าความเค้นแบบพอนมิสเสส (von Mises stress) ดังนี้

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2} \quad (13)$$

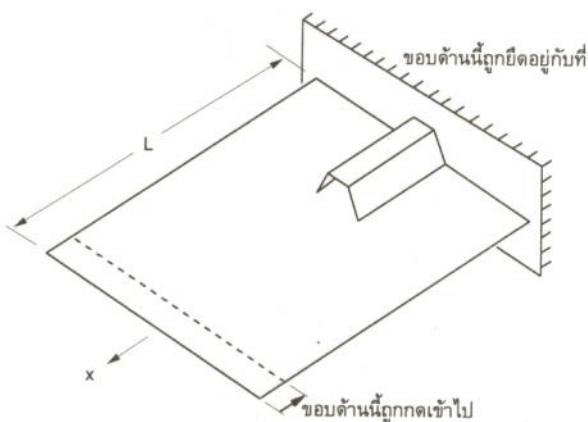
ตัวอย่างการวิเคราะห์

ปัญหาที่จะนำมาเป็นตัวอย่าง เพื่อแสดงประสิทธิภาพของการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเป็นปัญหาทางด้านโครงสร้าง โดยโครงสร้างที่ใช้เป็นโครงสร้างใน 3 มิติ ซึ่งประกอบขึ้นด้วยวัสดุแผ่นหลายชิ้นต่อเข้าด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 ลักษณะโครงสร้างแผ่นที่ใช้ในการวิเคราะห์

โครงสร้างนี้มีปลายด้านหนึ่งถูกยึดให้อยู่กับที่ ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งนั้นถูกกดให้หดตัวเข้าไปในทิศทางสวนกับแนวแกน x เป็นระยะทางเท่ากันตลอดทั้งขอบ โดยกำหนดให้การหดตัวดังกล่าวมีค่าเท่ากับ 10% ของความยาว L ดังแสดงในรูปที่ 3

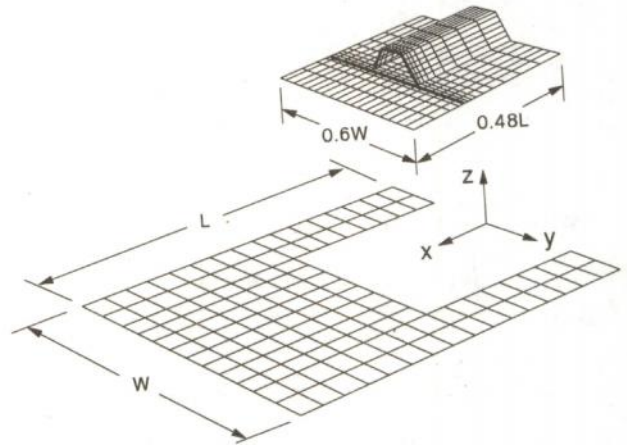


รูปที่ 3 เงื่อนไขขอบเขตของโครงสร้างแผ่น

ในการวิเคราะห์ จะทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบจำลองเริ่มแรกที่ใช้เอลิเมนต์ซึ่งมีขนาดเท่าๆ กันและรูปแบบจำลองที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ซึ่งรับการปรับขนาดแล้ว นอกจากนั้นจะทำการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากเอกสารอ้างอิง [5] ซึ่งวิเคราะห์ปัญหาเดียวกันแต่ใช้วิธีการอื่นที่ไม่ได้ทำการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในเอกสารอ้างอิง [5] นั้น โครงสร้างเดียวกันนี้ได้ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเล็กๆ

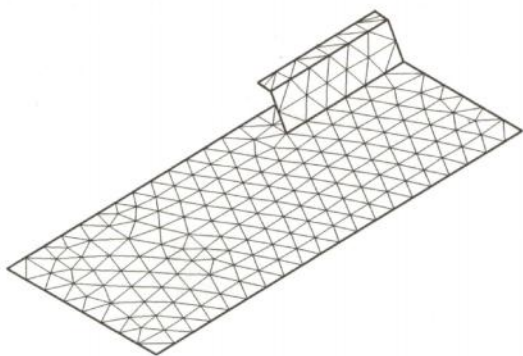
โดยมีจำนวนจุดต่อทั้งหมด 2,829 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 4 ขนาดของเอลิเมนต์ดังกล่าวถูกจัดขึ้นโดยพยายามใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กบริเวณรอยต่อของโครงสร้าง



รูปที่ 4 การแบ่งเอลิเมนต์ในเอกสารอ้างอิง [5] ซึ่งประกอบด้วย 2,829 จุดต่อ

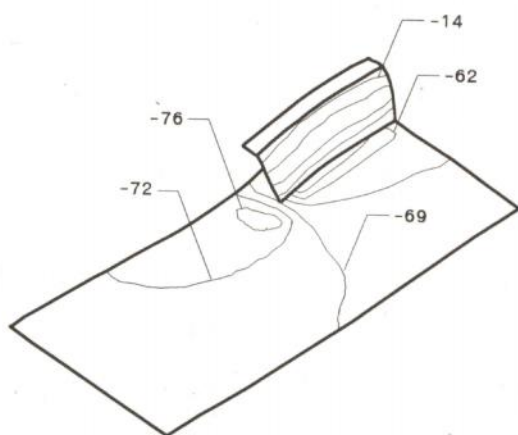
ปัญหาโครงสร้างแผ่นปัญหาเดียวกันนี้จะนำมาวิเคราะห์เพื่อหาผลลัพธ์ของการเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้น โดยใช้หลักการตามที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ 2 กล่าวคือ ใช้สมการความสมดุลในแนวระนาบของแผ่นและสมการความสมดุลในการโก่งของแผ่นเพื่อทำการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นจึงใช้วิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้น ในการวิเคราะห์เพื่อหาผลลัพธ์ เนื่องจากปัญหามีความสมมาตรตลอดแนวแกน x กล่าวคือผลลัพธ์ตลอด 2 ด้านของแนวแกน x จะมีลักษณะเช่นเดียวกัน ดังนั้นจึงสามารถทำการวิเคราะห์เพียงครึ่งหนึ่งของปัญหาทั้งหมดได้

ในขั้นแรก จะเป็นการสร้างเอลิเมนต์ที่มีขนาดเท่าๆ กันและค่อนข้างใหญ่ขึ้นมาก่อน ดังแสดงในรูปที่ 5 รูปแบบจำลองนี้ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 378 เอลิเมนต์ และจุดต่อทั้งหมด 222 จุดต่อ



รูปที่ 5 การแบ่งเอลิเมนต์เริ่มต้นของโครงสร้างแผ่น
ซึ่งประกอบด้วย 222 จุดต่อ

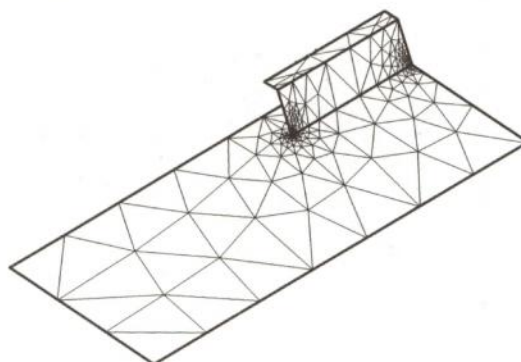
จากนั้นจึงทำการคำนวณตามขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่ได้อธิบายภายในหัวข้อการวิเคราะห์ ซึ่งจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ประกอบด้วย การเสียรูปของโครงสร้างและการกระจายความเค้น รูปที่ 6 แสดงตัวอย่างของการกระจายของความเค้นในแกน x ที่คำนวณได้โดยใช้เส้นระดับ (contour lines) บนลักษณะของการเสียรูปของโครงสร้างแผ่นนี้



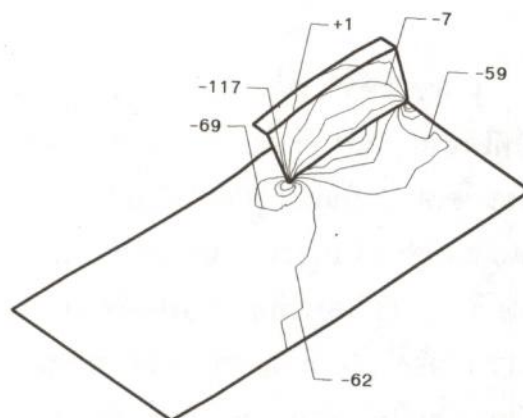
รูปที่ 6 การกระจายความเค้น (MPa) บนลักษณะการเสียรูปของโครงสร้างแผ่น

การเสียรูปของโครงสร้างแผ่น จากการพิจารณาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นดังแสดงในรูปที่ 6 จะเห็นว่าความเค้นในบริเวณรอยต่อระหว่างโครง

สร้างแผ่นเอียงบนและแผ่นใหญ่ล่างนั้นมีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างมาก ดังนั้นจึงสามารถคาดเดาล่วงหน้าว่า หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว เอลิเมนต์ในบริเวณนี้จะมีขนาดเล็กกว่าบริเวณอื่นๆ จากการใช้ขั้นตอนการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จะก่อให้เกิดรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสูงและเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นๆ ดังแสดงในรูปที่ 7 รูปแบบจำลองของไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่นี้ประกอบด้วย 461 เอลิเมนต์ และ 249 จุดต่อ จากนั้นจึงใช้รูปแบบจำลองนี้เพื่อคำนวณการเสียรูปและความเค้นผลลัพธ์ของความเค้นในแนวแกน x ที่เกิดขึ้นได้แสดงบนโครงสร้างที่เสียรูป ดังแสดงในรูปที่ 8

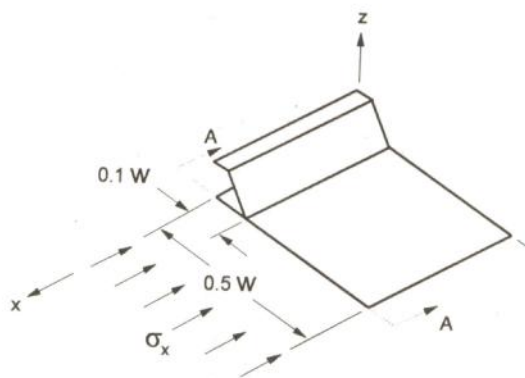


รูปที่ 7 ลักษณะเอลิเมนต์ที่ได้ปรับขนาดแล้วบนโครงสร้างแผ่น ซึ่งประกอบด้วย 249 จุดต่อ

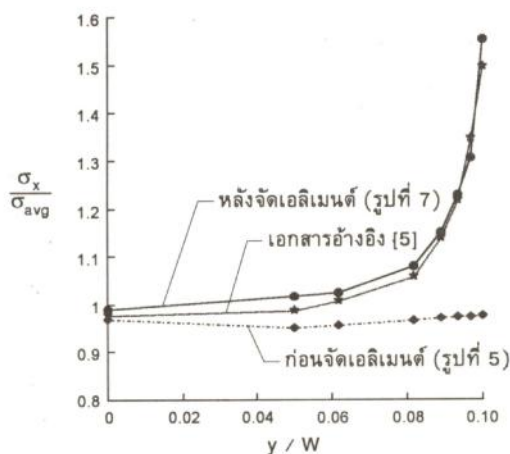


รูปที่ 8 การกระจายความเค้น (MPa) บนลักษณะการเสียรูปของโครงสร้างแผ่น

เพื่อที่จะแสดงให้เห็นถึงความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่เพิ่มมากขึ้นจากการใช้วิธีการปรับเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เราจะนำผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งก่อนทำการปรับขนาดเอลิเมนต์และหลังทำการปรับขนาดเอลิเมนต์มาเปรียบเทียบกับกัน นอกจากนี้จะนำผลลัพธ์จากเอกสารอ้างอิง [5] มาร่วมในการเปรียบเทียบกับ โดยทำการเปรียบเทียบความเค้นในทิศแกน x ตลอดแนว A-A ดังแสดงในรูปที่ 9 ผลลัพธ์จากการเปรียบเทียบความเค้นในทิศแกน x ตลอดแนว A-A นี้ได้แสดงในรูปที่ 10 ซึ่งแสดงลักษณะของการกระจายของความเค้นที่อยู่ในรูปแบบของอัตราส่วนของความเค้นในทิศแกน x และความเค้นเฉลี่ยตลอดขอบ $x = L$



รูปที่ 9 ภาคตัด A-A เพื่อใช้แสดงการกระจายของความเค้นในรูปที่ 10



รูปที่ 10 การเปรียบเทียบการกระจายความเค้นในทิศแกน x ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ต่าง ๆ กัน

รูปที่ 10 แสดงให้เห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนได้รับการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมนั้นมีความเที่ยงตรงต่ำ แต่หลังจากการใช้วิธีการปรับเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติแล้ว รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสูง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจึงมีความเที่ยงตรงสูงขึ้น ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากเอกสารอ้างอิง [5] พบว่าต่างมีความใกล้เคียงกันมาก แต่เมื่อเปรียบเทียบจำนวนจุดต่อที่ใช้ จะเห็นได้ว่ารูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ในเอกสารอ้างอิง [5] นั้น (รูปที่ 4) ใช้จำนวนจุดต่อถึง 2,825 จุดต่อ ในขณะที่รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้รับการปรับเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้น ประกอบด้วยจุดต่อเพียง 249 จุดต่อ ซึ่งลดจำนวนจุดต่อที่จำเป็นต้องใช้ในการคำนวณลงได้ถึง 91%

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปที่ใช้ในเอกสารอ้างอิง[5]และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังอธิบายในบทความนี้ มีทั้งข้อดีและข้อเสียที่ต่างกัน ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในเอกสารอ้างอิง [5] นั้นมีข้อดีที่สามารถให้ผลลัพธ์ได้โดยตรงจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (รูปที่ 4) ที่สร้างขึ้นมาโดยทำการคำนวณเพียงครั้งเดียว ส่วนข้อเสียของระเบียบวิธีดังกล่าวก็คือผู้สร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ จำเป็นต้องทราบตำแหน่งที่จะเกิดค่าความเค้นสูงได้โดยล่วงหน้า จึงจะสามารถจัดวางเอลิเมนต์ขนาดเล็กลงตามตำแหน่งต่าง ๆ อย่างถูกต้องเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความมีความเที่ยงตรงสูงได้ นอกจากนี้ความไม่ต่อเนื่องกันของจุดต่อ (ตลอดขอบระหว่างรูปบนและรูปล่างในรูปที่ 4) จะก่อให้เกิดความยุ่งยากในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ส่วนสำหรับวิธีการปรับเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังแสดงในรูปที่ 5-8 นั้น ต้องทำการคำนวณสองครั้ง อย่างไรก็ตามเวลาที่ใช้ในการคำนวณในแต่ละครั้งนั้นน้อยกว่าเวลาที่ใช้ในระเบียบวิธีการที่ใช้ในเอกสารอ้างอิง [5] เนื่องจากจำนวนจุดต่อ

นั้นน้อยกว่ามาก แต่ประโยชน์ที่สำคัญที่ได้รับจากระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังอธิบายในบทความนี้คือ ผู้ออกแบบไม่จำเป็นต้องทราบตำแหน่งที่จะเกิดความเค้นสูงล่วงหน้าก่อนทำการคำนวณ ซึ่งโดยปกติจะเกิดขึ้นในทางปฏิบัติ กล่าวคือผู้แก้ปัญหาไม่สามารถทราบลักษณะของผลลัพธ์ได้ล่วงหน้าสำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนโดยทั่วไป ระบบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้ จึงช่วยก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงได้ และในขณะเดียวกันจะช่วยลดจำนวนตัวไม่รู้ค่า ซึ่งช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณรวมทั้งลดหน่วยความจำที่จะต้องใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ลงไปด้วย

สรุป

วิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสามารถช่วยเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยระบบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นอกจากนั้นสำหรับปัญหาโดยทั่วไป เช่นปัญหาโครงสร้างแผ่นดัดที่ได้ยกขึ้นมาเป็นตัวอย่างในบทความนี้ ผู้ออกแบบจะไม่ทราบลักษณะของผลลัพธ์ว่าจะเป็นเช่นใดก่อนลงมือทำการคำนวณ ดังนั้นจึงทำให้ไม่สามารถทราบขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมเพื่อจะวางลงตามตำแหน่งต่างๆ ของปัญหานั้นได้ ขั้นตอนของการคำนวณเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงโดยวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเท่าๆ กันทั้งโครงสร้าง ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากการใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มแรกนี้จะนำไปสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ต่อไป อันประกอบด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างๆ กัน โดยมีการวางตัวในตำแหน่งที่เหมาะสม ซึ่งก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น ผลลัพธ์จากปัญหาโครงสร้างแผ่นที่ได้นี้ได้ นำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นแบบธรรมดาและพบว่า แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้รับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดย

อัตโนมัติให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงขึ้น และในขณะเดียวกัน ใช้จำนวนจุดต่อน้อยกว่า ทำให้ตัวไม่รู้ค่ามีจำนวนน้อยลง ดังนั้นจึงช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ตลอดจนลดหน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ให้น้อยลงตามไปด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ มุลนิธิกระจกเงา ชาติ แห่งประเทศญี่ปุ่น ซึ่งได้สนับสนุนส่วนหนึ่งของงานวิจัยและพัฒนา

เอกสารอ้างอิง

1. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2537.
2. Batoz, J.L., Bathe, K.J. and Ho, L.W., "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1980, pp. 1771-1812.
3. Jeyachandrabose, C. and Kirkhope, J., "Alternative Explicit Formulation for the DKT Plate-Bending Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 1985, pp. 1289-1293.
4. Dechaumphai, P., "Evaluation of an Adaptive Unstructured Remeshing Technique for Integrated Fluid-Thermal-Structural Analysis," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 5, No. 4, 1991, pp. 599-606.
5. T.Krishnamurthy and I.S. Raju., "An Independent Refinement and Integration Procedure in Multiregion Finite Element Analysis," The AIAA 33rd. Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Dallas, Texas, April 13-15, 1992, AIAA Paper No. 92-2290.