

การคำนวณ UNSTEADY BOUNDARY LAYER โดยใช้ FIRST-ORDER CLOSURE MODEL CALCULATION OF UNSTEADY BOUNDARY LAYER USING THE FIRST-ORDER CLOSURE MODEL

เสรี ศุภราทิตย์, เอช. ทานากา และ เอน-ชูโต
Seree Suparathit, H. Tanaga and N. Shuto

นักศึกษามหาบัณฑิตวิทยาลัย อาจารย์ ศาสตราจารย์
มหาวิทยาลัยโตโฮคุ, ญี่ปุ่น

Graduate Student Lecturer Professor
Tohokru University, Japan.

บทคัดย่อ

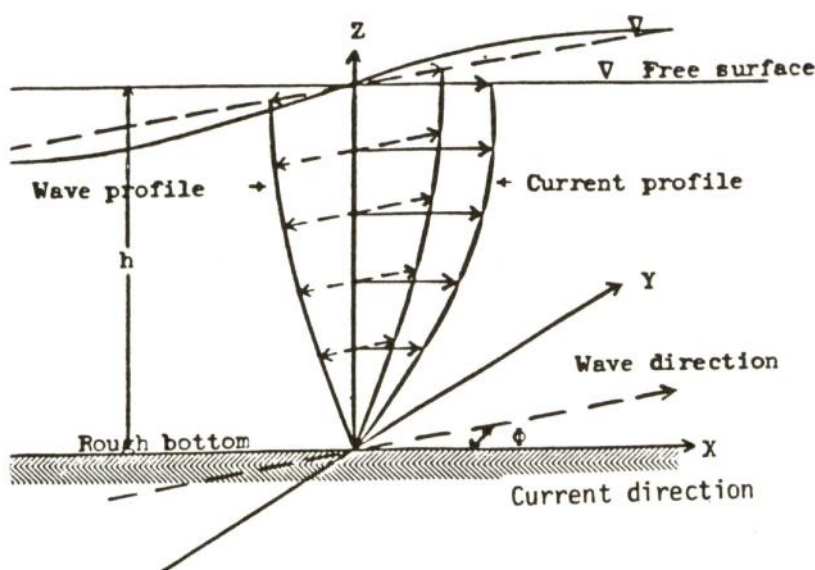
FDM ที่สะดวกมีประสิทธิภาพและถูกต้องได้ถูกนำมาใช้เพื่อหาคำตอบจากสมการ Unsteady boundary layer วิธีการดังกล่าวคือ Zero – และ One – equation model การแก้ปัญหาได้ครอบคลุมถึงการใช้สมการการเคลื่อนที่ของมวลในแนวราบ สมการ Turbulent energy ประกอบกับการใช้ Closure assumptions ซึ่งบ่งถึงความสัมพันธ์ระหว่าง Eddy viscosity และ Reynolds stress ผลจากการคำนวณได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลจากทฤษฎีและผลจากการทดลองตามลำดับ

ABSTRACT

A relatively simple, yet efficient and accurate finite difference method is developed for the solution of the unsteady boundary layer equations, namely, zero and one-equation models. The formulation of the problems involves the governing horizontal momentum, turbulent kinetic energy equations and the closure assumptions which using an eddy viscosity formulation to model the Reynolds stress terms. The results are then compared with the exact analytical solutions and experimental data.

1. บทนำ

Turbulent transport ของการรวมตัวระหว่างคลื่นกับกระแสน้ำ (Wave-current combined flow รูปที่ 1) เป็นสิ่งที่วิศวกรได้ให้ความสนใจเป็นอย่างยิ่งโดยเฉพาะการเปลี่ยนแปลงของสภาพปากแม่น้ำ (river mouth) ยิ่งนับวันยิ่งมีผลกระทบต่อสภาพภูมิประเทศข้างเคียง เช่น กรณีของการสร้างท่าเทียบเรือขนส่งสินค้าบริเวณปากแม่น้ำ เป็นต้น ลักษณะของการไหลของกระแสน้ำตามธรรมชาติบริเวณปากแม่น้ำจัดเป็นการไหลแบบ rough turbulent ซึ่งสามารถที่จะศึกษาได้จากสมการ boundary layer วิวัฒนาการทางด้าน oscillatory boundary layer ได้มีมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2511 โดยเริ่มจาก KAJIURA ได้ใช้ eddy viscosity concept ในการแก้ปัญหาต่อมาทฤษฎีของเขาถูกเรียกว่า three-layer model การศึกษาทางด้านนี้ต่อมาได้ถูกนำมาใช้กับกรณีของ Combined flow โดยยึดหลักการคล้ายคลึงกับทฤษฎีของ KAJIURA ปี พ.ศ. 2527 TANAKA et al. ได้เสนอ one-และ two-layer model สำหรับ combined flow โดยสมมติ time-invariant eddy viscosity แปรเปลี่ยนไปตามความลึกของค่าสูงสุดของแรงเสียดทานพื้นท้องน้ำ คำตอบที่ได้จาก TANAKA et al. ค่อนข้างจะ overestimate เมื่อเทียบกับผลการทดลองปี พ.ศ. 2528 JONSSON et al. ได้เสนอ two-layer model โดยปรับปรุงทฤษฎีของ GRANT MADSON และ TANAKA et al. ทำให้ได้คำตอบซึ่งให้ผลใกล้เคียงกับการทดลอง และเหมาะสำหรับการนำไปใช้งาน



รูปที่ 1 Definition sketch

ที่กล่าวมาแล้วล้วนแต่เป็นการวิเคราะห์หาคำตอบด้วยการสมมติ time-invariant eddy viscosity (analytical solution) ซึ่งโดยแท้ที่จริงค่า eddy viscosity ไม่ได้ขึ้นกับความลึกของท้องน้ำแต่อย่างใด และยังแปรผันไปกับเวลา (time-varying) ดังนั้นการหาคำตอบทาง numerical ได้ถูกนำมาใช้งานโดยเริ่มจาก BAKKER (2517) และ JOHN (2518) ทฤษฎีของ BAKKER และ JOHN มีลักษณะคล้ายคลึงกันคือ ใช้ทฤษฎีของ PRANDTL'S mixing length มาอธิบายลักษณะการเกิด turbulent boundary layer ต่อมา DAVIES et al. (2530) ได้นำเอาสมการ turbulent energy มาอธิบายลักษณะการเกิด turbulent boundary layer แทนการใช้ทฤษฎีของ PRANDTL'S Mixing length

บทความนี้ได้พิจารณาเปรียบเทียบผลจากการใช้ทฤษฎี Mixing length model (zero-equation model) กับผลจากการใช้สมการ turbulent energy (one-equation model) โดยใช้ CRANK-NICHOLSON FINITE DIFFERENCE SCHEME การ model เทอมต่าง ๆ ได้ดัดแปลงเพื่อให้เหมาะสมกับลักษณะของการรวมตัวกันระหว่างคลื่นกับกระแสน้ำที่กระทำในทิศต่าง ๆ กัน

2. วิธีคำนวณ

สมการ incompressible, unsteady, ensemble averaged turbulent boundary layer (ตัด convection term, coriolis force และ tidal force) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \frac{\nu}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2} - \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} + \frac{\nu}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial z^2} - \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} = \frac{\alpha \nu}{\partial z} \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial z} - \frac{\langle u'w' \rangle}{\partial z} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - \frac{\langle v'w' \rangle}{\partial z} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} - \langle \epsilon \rangle \quad (3)$$

โดยที่ (u,v) = ความเร็วในแนวราบ ν = molecular viscosity
t = เวลา ν_t = eddy viscosity
z = ความสูงวัดจากท้องน้ำ k = turbulent energy
p = ความกดดันเฉลี่ย ϵ = dissipation energy
 u', v', w' = fluctuating velocity Components ในแนวแกน x,y และ z
สถานะเริ่มต้น (t=0) และสถานะขอบเขตสามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \langle u \rangle(0, t) &= 0 & \langle v \rangle(0, t) &= 0 & \langle k \rangle(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}(h, t) &= 0 & \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z}(h, t) &= 0 & \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial z}(h, t) &= 0 \\ \langle u \rangle(z, 0) &= U(z) & \langle v \rangle(z, 0) &= V(z) & \langle k \rangle(z, 0) &= K(z) \end{aligned}$$

โดย U(z), V(z), K(z) = known function

เทอม pressure gradient ($-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x}$) และ closure assumption สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} &= \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} e + P_s & -\langle u'w' \rangle &= \nu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} & -\langle v'w' \rangle &= \nu_t \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} &= \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} e & \nu_t &= C_0 L k^{1/2} & \langle \epsilon \rangle &= \frac{C_1 k^3}{L} \end{aligned}$$

โดยที่ P_s = steady pressure gradient ในแนวแกน X

C_0, C_1 = ค่าคงที่ ($C_0=0.463$, $C_1=0.099$)

สมการที่ 1 ถึง 3 สามารถเขียนได้ในเทอมไร้หน่วย (dimensionless term) ดังนี้คือ

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \omega U_0 \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{t}} + \tilde{P}_s + \left(\frac{1}{S_Q}\right)^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}} + \left(\frac{\tilde{v}}{S_Q}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}^2} - \frac{P \partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}} \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = \omega U_0 \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial \tilde{t}} + \left(\frac{1}{S_Q}\right)^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}} + \left(\frac{\tilde{v}}{S_Q}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}^2} - \frac{P \partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}} \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{t}} = \left(\frac{1}{S_Q}\right)^2 \tilde{v}_t \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}}\right)^2 \right] + \alpha \left(\frac{1}{S_Q}\right)^2 \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{\eta}} + \tilde{v}_t \left(\frac{\partial^2 \tilde{k}}{\partial \tilde{\eta}^2} - \frac{P \partial \tilde{k}}{\partial \tilde{\eta}} \right) \right] - \tilde{\epsilon} \quad (6)$$

โดย

$$\tilde{u} = \frac{\langle u \rangle}{U_0} \quad \tilde{v} = \frac{\langle v \rangle}{U_0} \quad \tilde{k} = \frac{\langle k \rangle}{U_0^2} \quad \tilde{t} = \omega t$$

$$-\tilde{u}'\tilde{w}' = -\frac{\langle u'w' \rangle}{U_0^2} \quad -\tilde{v}'\tilde{w}' = -\frac{\langle v'w' \rangle}{U_0^2}$$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\langle \epsilon \rangle}{\omega U_0^2} \quad \tilde{v} = \frac{v \omega}{U_0^2} \quad \tilde{v}_t = \frac{v_t \omega}{U_0^2} \quad \tilde{L} = \frac{L \omega}{U_0}$$

$$\tilde{u}_e = \frac{\langle u_e \rangle}{U_0} \quad \tilde{v} = \frac{\langle v \rangle}{U_0} \quad \tilde{z} = \frac{z}{h}$$

เมื่อ U_0 = ขนาดของความเร็วของคลื่นนอก boundary layer

U_c = ความเร็วเฉลี่ยของ steady current

W = fundamental oscillation ของคลื่นบริเวณปากแม่น้ำ

S, P, Q = dimensionless constants defined by

$$S = Wh/U_0 \quad P = \ln h/Z_0 \quad Q = P Z_0 (h/Z_0)^n$$

เมื่อ Z_0 = roughness length

$$\eta = \text{logarithmic depth transformation defined by } \eta = \frac{\ln \tilde{z}/\tilde{z}_0}{\ln h/z_0}$$

สมการไร้หน่วย 4 ถึง 6 สามารถแก้ด้วย FDM โดยใช้ THOMAS ALGORITHM ซึ่งสามารถรวบรวมสภาวะขอบเขตต่าง ๆ ได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว โดยที่ในกรณีของ zero-equation model ค่าของ eddy viscosity ถูกแทนด้วยค่าที่จุดสมดุล (equilibrium condition) ของสมการ turbulent energy กล่าวคือ จากสมการที่ 6 ถ้าหากเราตัดเทอมแรก (Rate of change term) และเทอมที่ 3 (diffusive term) ออก ผลที่ได้ก็คือ

$$\tilde{v}_t = \left(\frac{1}{S_Q}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

บทความนี้ได้ทดลองใช้ค่าของ L (turbulent length scale) ต่าง ๆ กันดังต่อไปนี้คือ (ดูรูปที่ 2)

$$1 \ L = 0.4z(\text{PRANDTL, 1925})$$

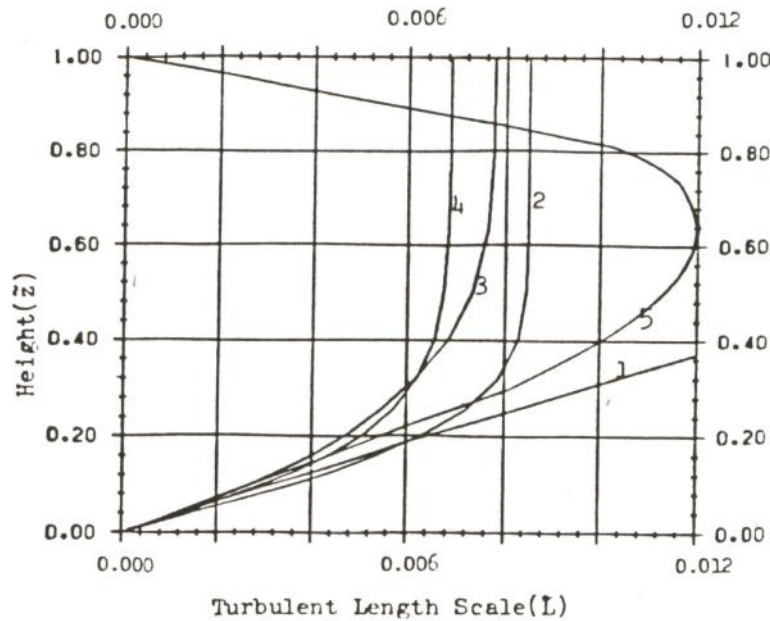
$$2 \ L = 0.105 \text{herf}(4z/h)(\text{SMITH, 1978})$$

$$3 \ L = 0.096h(1 - (1 - z/h)^{4.16})(\text{ORANDI, 1979})$$

$$4 \quad L = 0.085h \tanh(0.4z/h/0.085) \text{ (COUSTEIX, 1979)}$$

$$5 \quad L = 0.4z(1 - z/h)^{0.5} \text{ (Obtained from steady flow)}$$

ผลการคำนวณที่จะกล่าวต่อไป ได้แสดงเฉพาะผลจากการใช้สูตรที่ 2



รูปที่ 2 turbulent length scale

3. ผลจากการคำนวณ

3.1 เปรียบเทียบกับผลจากการวิเคราะห์ (analytical solution) โดย constant eddy viscosity เพื่อเป็นการหาขนาดของ Δz , Δt ที่เหมาะสมและประหยัด computer time ผู้เขียนจึงได้ทดลองใช้ model นี้ คำนวณผลจากการทดลองของ JONSSON et al. (1976) เคยสมมุติ $v^l =$ ค่าคงที่เพื่อที่จะได้เปรียบเทียบกับผลจากการวิเคราะห์ (analytical solution)

รูปที่ 3 เป็นผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ Logarithmic depth transform 25 ช่วง และ time step (Δt) 0.004 sec จะเห็นได้ว่าทั้ง Numerical และ Analytical ให้ผลที่ใกล้เคียงกันไม่ว่าจะเป็น velocity หรือ Reynolds stress distribution อนึ่งผลที่ได้จากการวิเคราะห์ หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\tilde{u} = -\cos \tilde{t} + \exp(-\beta(\tilde{z} - \tilde{z}_0)) \cos(\tilde{t} - \beta(\tilde{z} - \tilde{z}_0)) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -\langle \tilde{u}' \tilde{w}' \rangle &= (\tilde{v}_t \beta / S) \exp(-\beta(\tilde{z} - \tilde{z}_0)) [\sin(\tilde{t} - \beta(\tilde{z} - \tilde{z}_0)) \\ &\quad - \cos(\tilde{t} - \beta(\tilde{z} - \tilde{z}_0))] \end{aligned} \quad (9)$$

เมื่อ $\beta = [1/2\tilde{v}_t]^{1/2}$

3.2 เปรียบเทียบกับผลการทดลองโดยใช้ full turbulence scheme (pure periodic motion)

กรณีนี้ผู้เขียนได้ใช้ model คำนวณผลจากการทดลองของ JONSSON et al. (1976) เช่นกันโดยใช้ทั้ง zero-และ one-equation model พร้อมกันนี้ได้เปรียบเทียบกับผลของการทดลองดังรูปที่ 4 ถึง 6 อนึ่ง

ความเร็วนอก Boundary layer จากการทดลองได้ถูกนำมาทำ Harmonic analysis ก่อนป้อนเข้าสู่ model ดังสมการ

$$u_e = A_0 + \sum_{i=1}^{12} (A_i \cos i\tau + B_i \sin i\tau) \quad (10)$$

เมื่อ A, B = harmonic coefficient

สำหรับกรณีของ Velocity distribution ทั้ง zero-และ one-equation model ให้ผลที่ใกล้เคียงกับการทดลอง กรณีของ Reynolds stress distribution จะสังเกตเห็นได้ว่า One-equation model ให้ผลที่ดีกว่า zero-equation model ส่วน eddy viscosity distribution จะต้องมีการศึกษาต่อไป แต่เป็นที่น่าสังเกตว่า eddy viscosity ที่ได้จากการทดลอง มิได้มาจากการวัดจริง ๆ แต่ได้มาจากการคำนวณทางอ้อมโดยใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\nu_t = \frac{\tau/\rho}{\partial u/\partial z}$$

ซึ่งผลจากการคำนวณโดยสมการดังกล่าวไม่ค่อยให้ความหมายของ Physical กล่าวคือ ผลที่ได้มักจะติดลบหรือไม่ก็ไม่สามารถหาค่าได้ (Undefined) ซึ่งตรงข้ามกับความเป็นจริงของ turbulent process

สำหรับกรณีของ turbulent energy distribution เป็นที่น่าสังเกตว่า turbulent energy ได้ dissipated ไปหมดในช่วงเริ่มแรกของ acceleration phase

นอกเหนือจากการใช้ individual parameter เพื่อ input ใน model เพื่อให้ใช้ได้กับเทอมไรหน่วย 2 เทอม ซึ่งควบคุมสภาวะการไหลแบบ rough turbulent เทอมที่ว่านั้นคือ ความหยาบสัมพัทธ์ (relative roughness a_{im}/k_s และอัตราส่วนระหว่างความลึกต่อ roughness length, h/z_0 รูปที่ 7 เป็นผลการคำนวณสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน (friction coefficient) จาก model โดยใช้ค่า $h/z_0 = 10,000$ และ $a_{im}/k_s = 1-1,000$ พร้อมนี้ได้เปรียบเทียบกับ empirical curve ต่าง ๆ ผลที่ได้เป็นที่น่าพอใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงของ $10 \times a_{im}/k_s \times 1,000$ (physically interesting ranges)

3.3 ผลจากการคำนวณกรณี combined flow (wave + current)

ผู้เขียนได้ใช้ one-equation model ในการคำนวณสภาวะการไหลของ combined flow โดยใช้ data จากการทดลองของ VAN DOORN (1981) และสมมุติ free stream velocity แปรเปลี่ยนตามเวลาแบบ sinusoidal รูปที่ 8, 9, 10 และ 11 แสดงผลจากการคำนวณจะสังเกตได้ว่า ขนาดของความเร็วของ mean flow น้อยกว่า steady current โดยเฉพาะบริเวณใกล้ ๆ ท้องน้ำ นั้นเป็นผลจากการเพิ่มของแรงเสียดทาน เมื่อมีคลื่นมากระทำ อัตราการเพิ่มของแรงเสียดทานขึ้นกับลักษณะขนาดและทิศทางของคลื่นที่มากระทำ การที่ mean flow profile ตัดกับ steady current profile ณ จุด $z/h = 0.5$ (สำหรับ $U_c = 0.1$ m/s) และ $z/h = 0.6$ (สำหรับ $U_c = 0.2$ m/s) แสดงให้เห็นว่า เหนือระดับดังกล่าวสภาวะการไหลของ combined flow สามารถอธิบายได้ด้วยผลที่เกิดจาก steady flow แต่เพียงลำพัง

นอกจากนี้ บริเวณใกล้ท้องน้ำค่าของ Reynolds stress, eddy viscosity และ energy ของ combined flow จะมากกว่าของ steady current ซึ่งเป็นผลจากการที่มีคลื่นมากระทำ นำมาซึ่งการเพิ่มของแรงเสียดทานและ turbulent energy ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

สรุป

บทความนี้ได้ใช้วิธีการ FDM ในการหาคำตอบจากสมการเคลื่อนที่ของมวลและสมการ turbulent energy ก่อนการนำไปใช้งาน model ได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลของการวิเคราะห์ในกรณี $t =$ คงที่จากการใช้สูตรต่าง ๆ ของ turbulent length scale แสดงให้เห็นว่า ไม่มีผลต่อ model เนื่องจากว่าสูตรต่าง ๆ ให้ค่าของ turbulent length scale ใกล้เคียงกัน ณ บริเวณใกล้ท้องน้ำ ซึ่งถ้าหากว่า turbulent length scale มีค่าถูกต้องบริเวณใกล้ท้องน้ำ ผลของการคำนวณจะไม่เปลี่ยนไปในบริเวณที่ห่างจากท้องน้ำไปยังผิวน้ำ ผลการคำนวณสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานจาก model เป็นที่น่าพอใจ โดยเฉพาะบริเวณช่วงสภาวะการไหลแบบ rough turbulence

สำหรับกรณี combined flow พฤติกรรมของ mean flow เป็นสิ่งที่วิศวกรเราให้ความสนใจเมื่อมีคลื่นมากระทำต่อกระแสน้ำ เป็นผลให้ mean flow ถูกต้านทานด้วยแรงเสียดทานที่เพิ่มขึ้นซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะขนาดและทิศทางของคลื่นที่มากระทำ

บทความนี้มีประโยชน์อย่างยิ่งในการที่จะศึกษาถึงสภาพการเปลี่ยนแปลงของท้องน้ำ โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณปากแม่น้ำที่มีคลื่นมากระทำในทิศทางที่ไม่แน่นอน ผลจากการคำนวณสามารถนำไปศึกษาการเคลื่อนตัวของตะกอน แรงที่มากระทำต่อโครงสร้างบริเวณนั้นเป็นต้น ก่อนที่จะทำ model นี้ไปใช้งานต้องคำนึงถึงข้อจำกัดหรือข้อสมมุติต่าง ๆ ต่อไปนี้คือ

1. isotropic eddy viscosity
2. ระดับน้ำบริเวณนั้นค่อนข้างคงที่
3. ไม่มีแรงเสียดทานต่อผิวน้ำ coriolis และ tidal force
4. พื้นท้องน้ำค่อนข้างราบ
5. roughness length = คงที่

เอกสารอ้างอิง

1. BAKKER, W.T. (1974) Sand concentration in an oscillatory flow Proc. 14th Conf. on Coastal Engg., Copenhagen.
2. COUSTEIX, J. et al. (1979) Résultats expérimentaux et méthodes de calcul relatifs aux couches limites turbulentes en écoulement instationnaire, ONERA T.P. No. 1977, 134.*
3. DAVIES, A.G., SOULSBY, R.L. and KING, H.L. (1988) A numerical model of the combined wave and current bottom boundary layer, J. Geophys. Res., Vol. 93, No. C1, pp. 491-508.
4. DOORN, TH. VAN (1981) Experimental investigation of near-bottom velocities in water waves without and with current, Report no. m. 1423, Delft Hydraulic Laboratory.
5. GRANT, et al. (1977) Bottom friction under wave in the presence of a weak current: Its relationship to coastal sediment transport, Sc.D. thesis, 275 pp., M.I.T., Cambridge, Mass.
6. KAJIURA (1967) A model of the bottom boundary layers in water waves, Bulletin of the Earthquake Res. Inst., 46, pp. 75-123.
7. KAMPHUIS, J.W. (1975) Friction factors under oscillatory waves, Proc. A.S.C.E. J. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, 101, No. WW2, pp. 135-144.
8. JONSSON, I.G. (1966) Wave boundary layer and friction factors, Proc. 10th on Coastal Engg., pp. 127-148.
9. JONSSON, I.G. and CARLSEN, N.A. (1976) Experimental and theoretical investigations in an oscillatory turbulent boundary layer, J. Hydraulic Res., Vol. 14, No. 1, pp. 45-60.

10. ORLANDI, P. (1979) Unsteady adverse pressure gradient turbulent boundary layer. Unsteady turbulent shear flow, Springer-Verlag, Berlin, 159-170.
11. PRANDTL, L. (1925) Bericht uber untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. Math. Mech. 5, pp. 136.
12. SMITH, J.J. and DYER, K.R. (1978) Mathematical modeling of circulation and mixing in estuaries. Inst. of Maths. and its Applications, Conf. on Turbulent Diffusion in Environment.

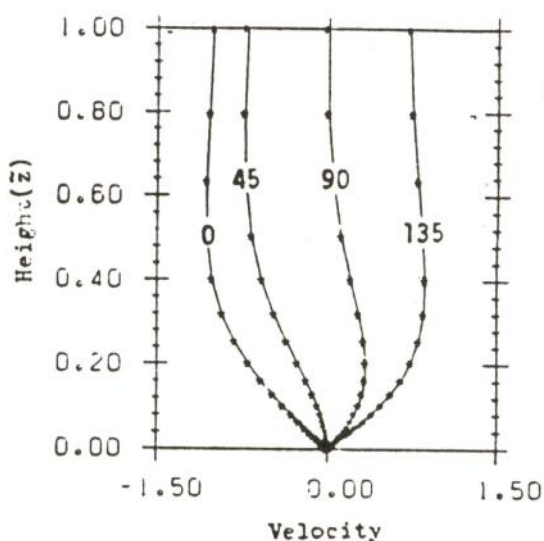
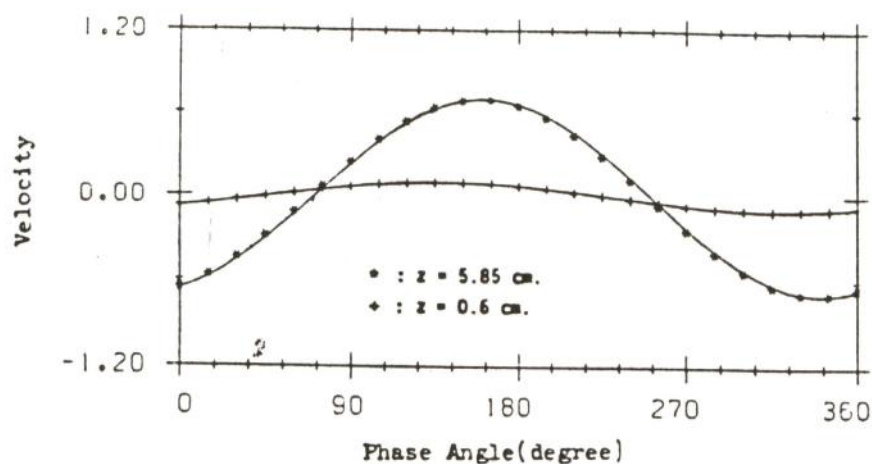
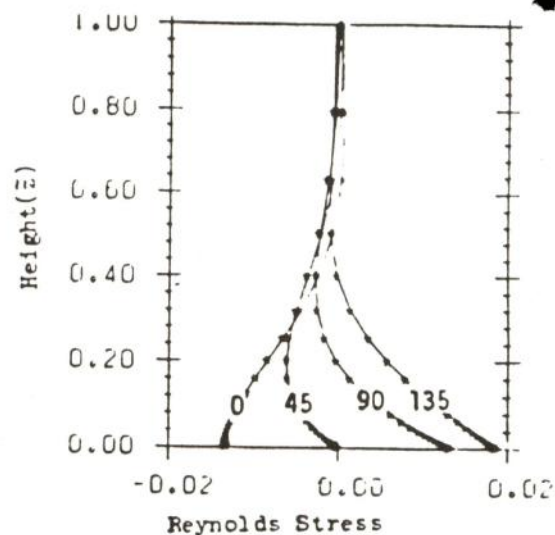
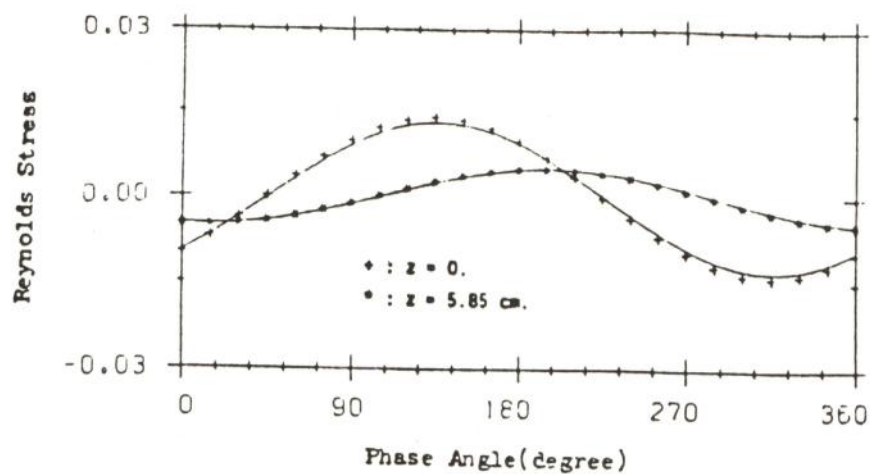


Fig. 3 Velocity and Reynolds stress using constant eddy viscosity (mark : analytical solution)

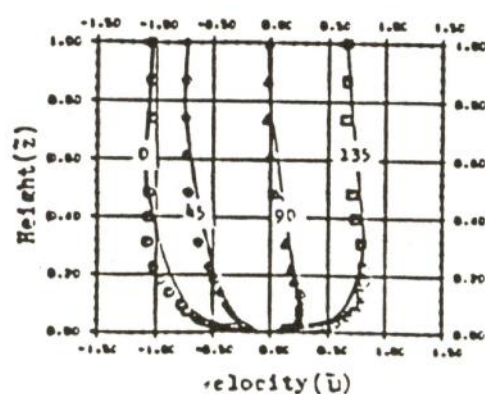
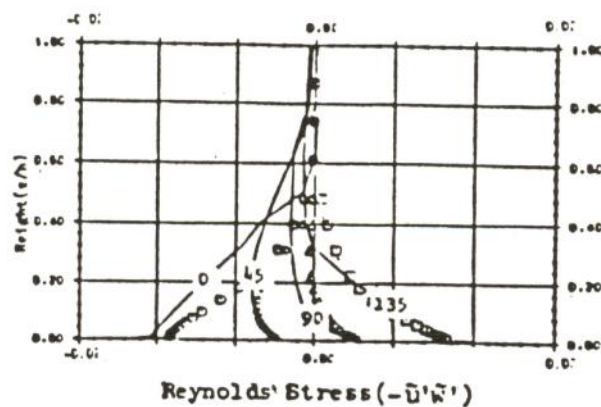
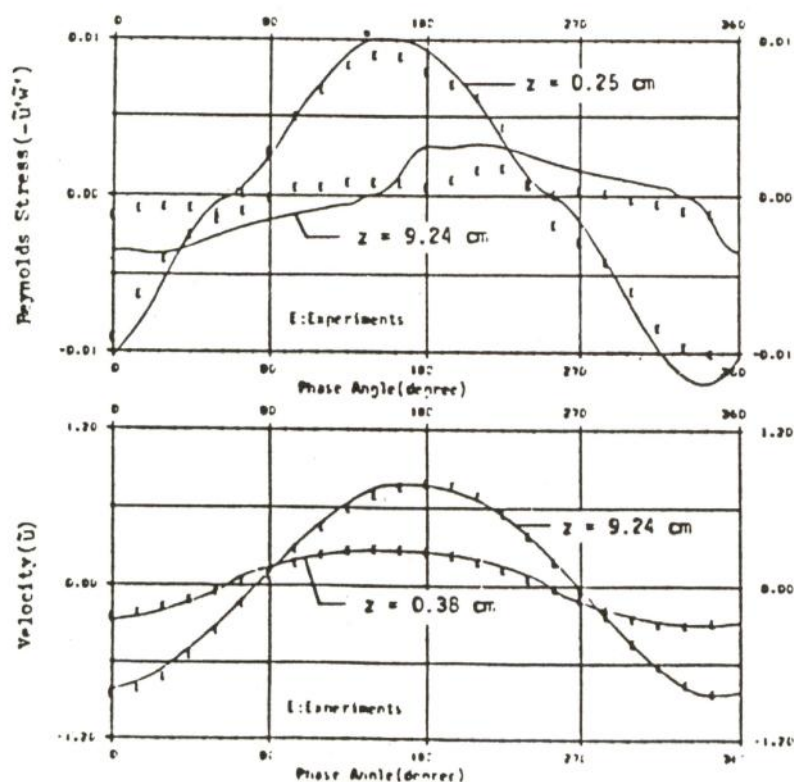


Fig. 3 Results from Zero-Equation Model

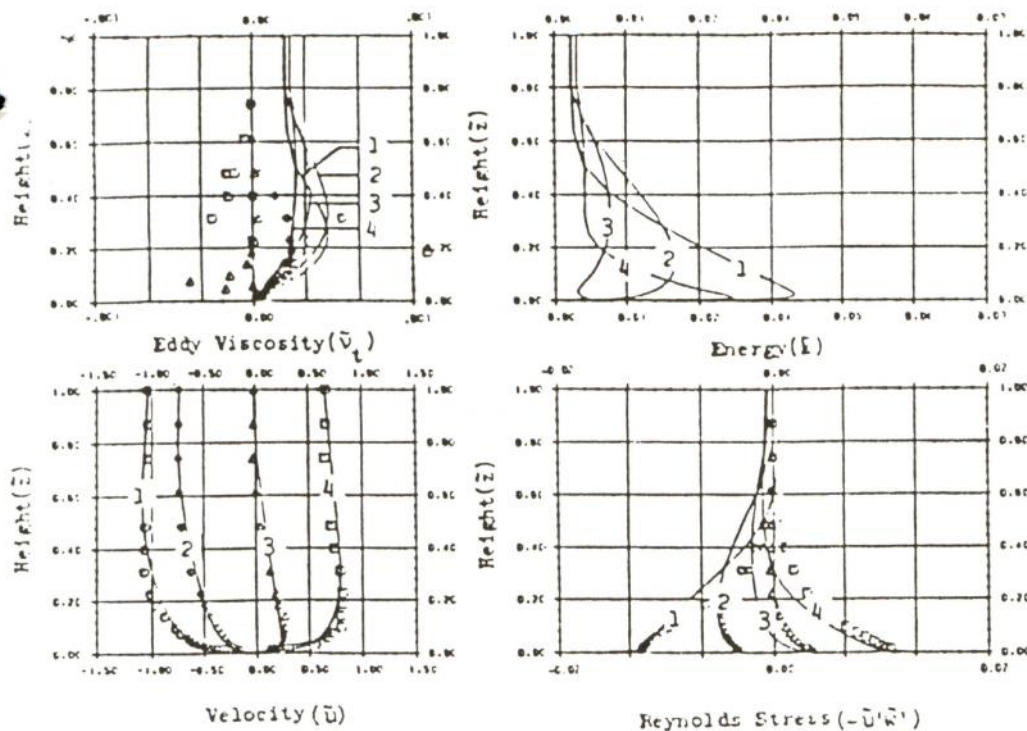


Fig. 5 Results from One-Equation Model

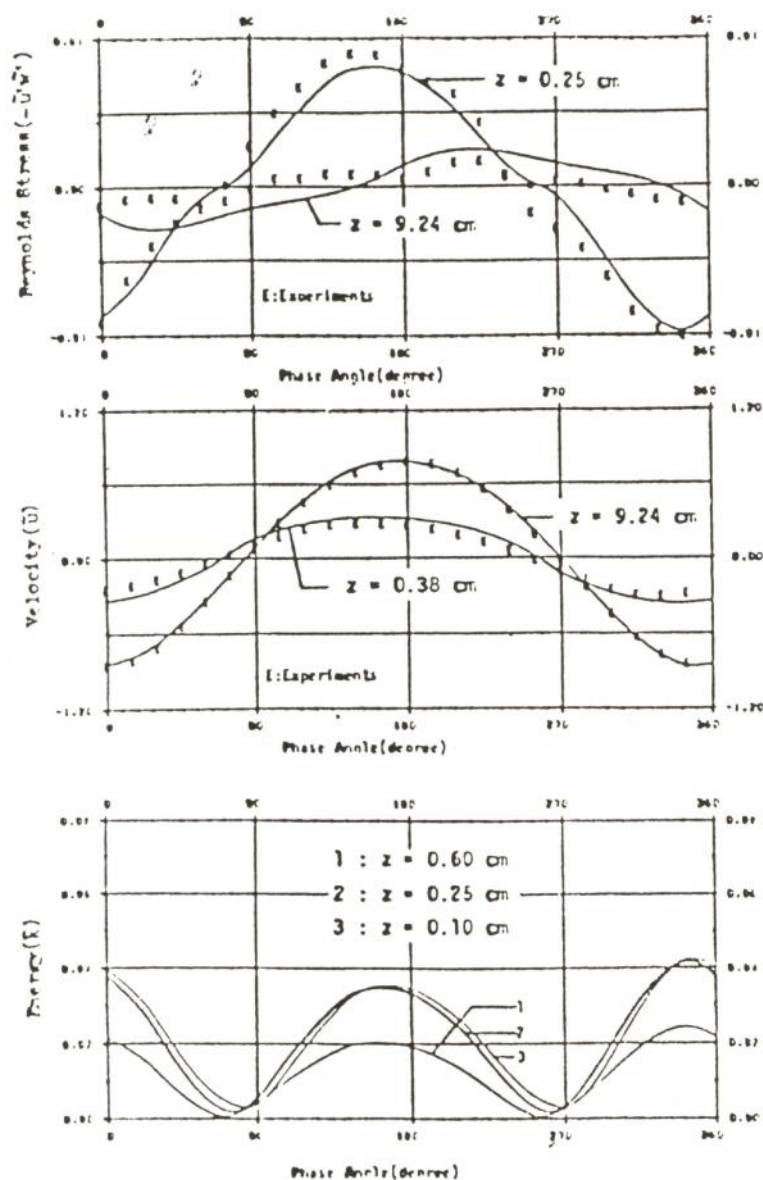


Fig. 6 Results from One-Equation Model

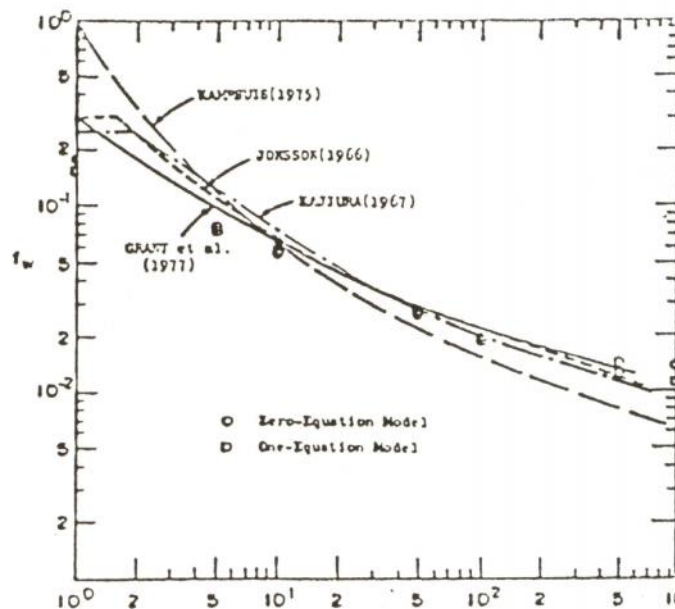


Fig. 7 Friction coefficient

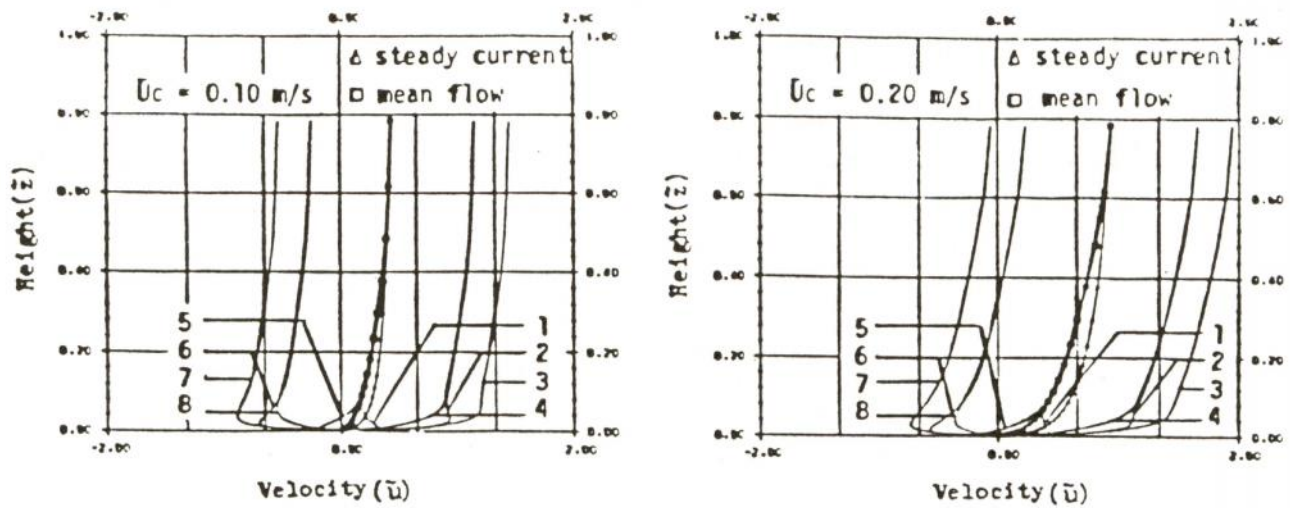


Fig. 8 Velocity profiles for co-directional flow (1:0°, 2:45°, 3:90°, 4:135°, 5:180°, 6:225°, 7:270°, 8:315°)

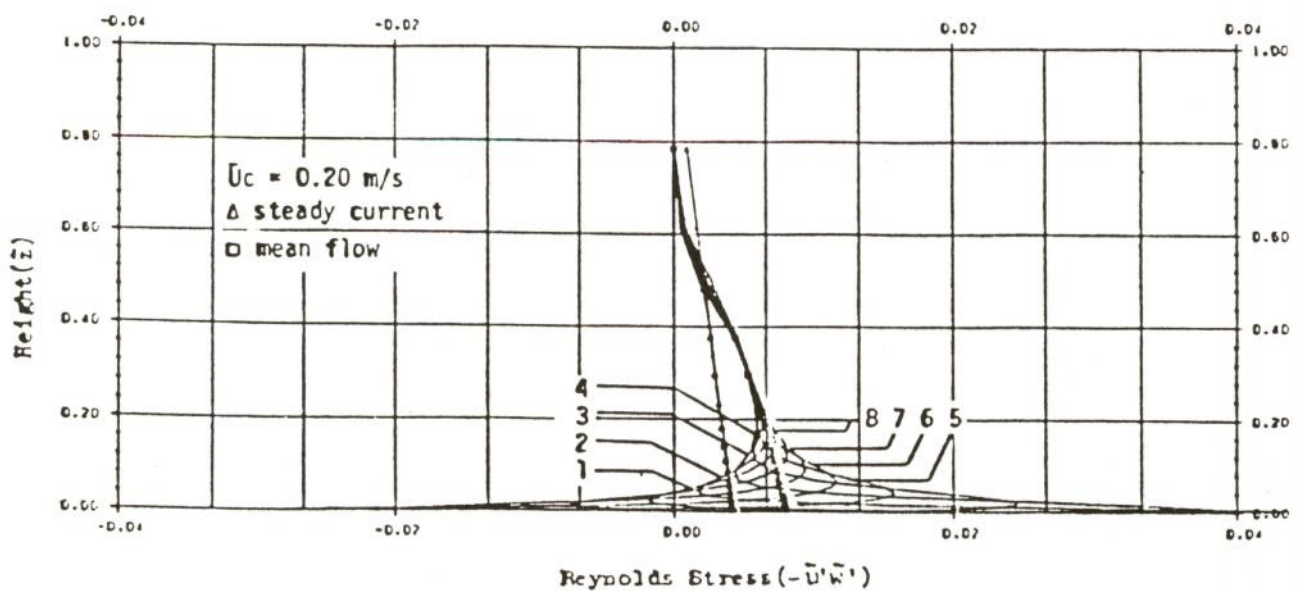
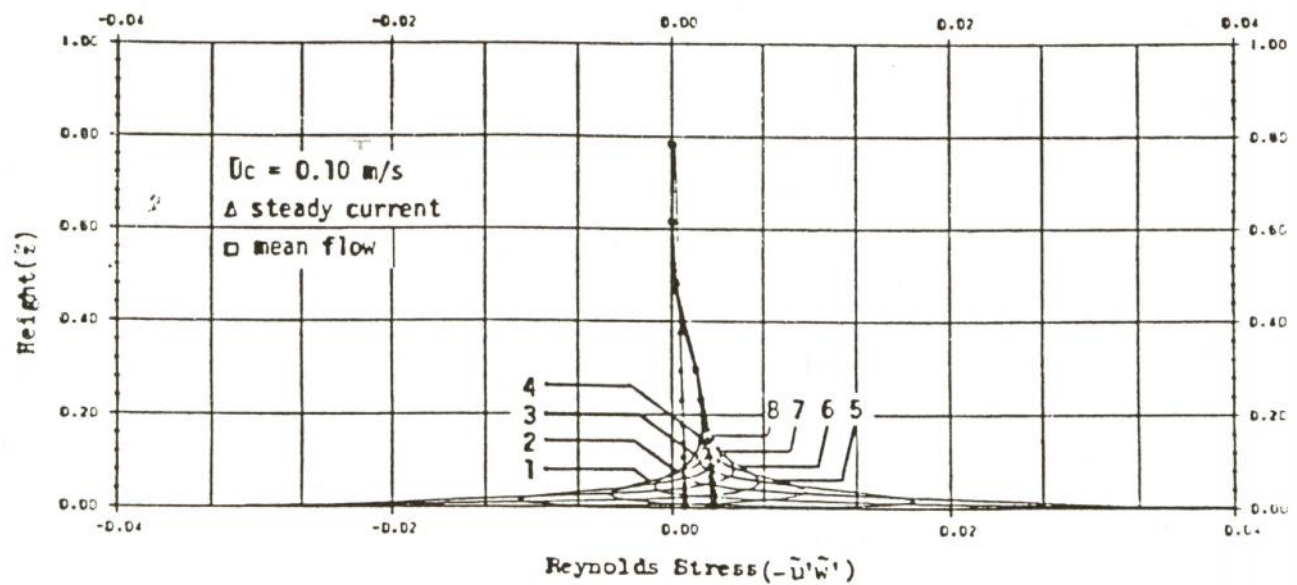


Fig. 9 Reynolds stress profiles for co-directional flow (1:0°, 2:45°, 3:90°, 4:135°, 5:180°, 6:225°, 7:270°, 8:315°)

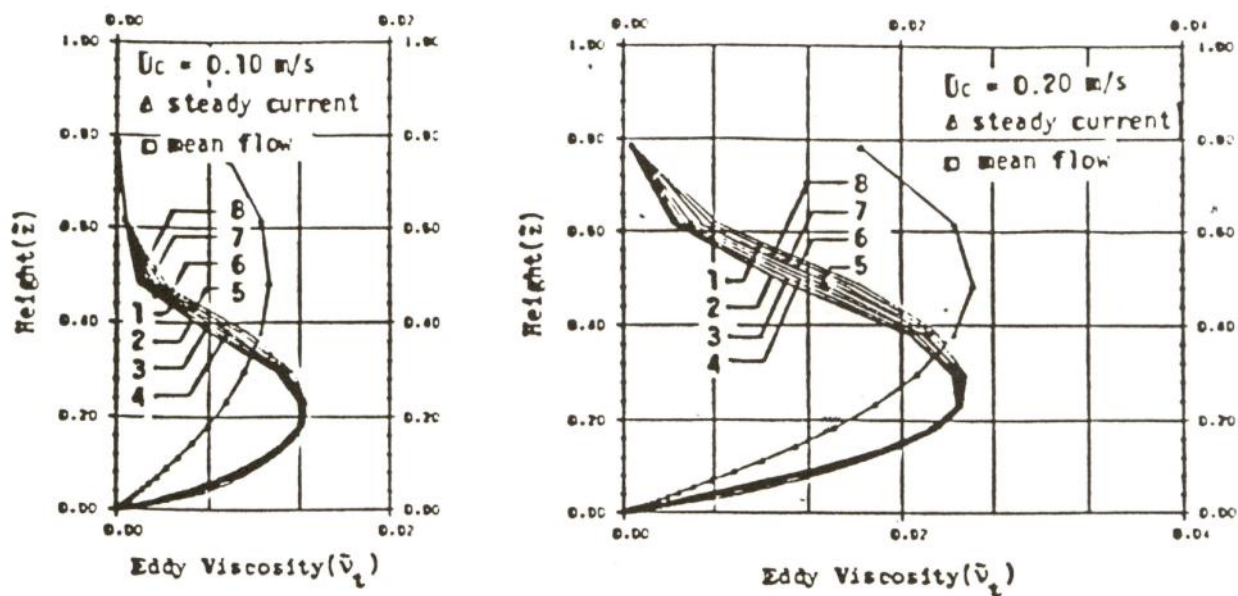


Fig. 10 Eddy viscosity profiles for co-directional flow (1:0°,2:45°,3:90°,4:135°,5:180°,6:225°,7:270°,8:315°)

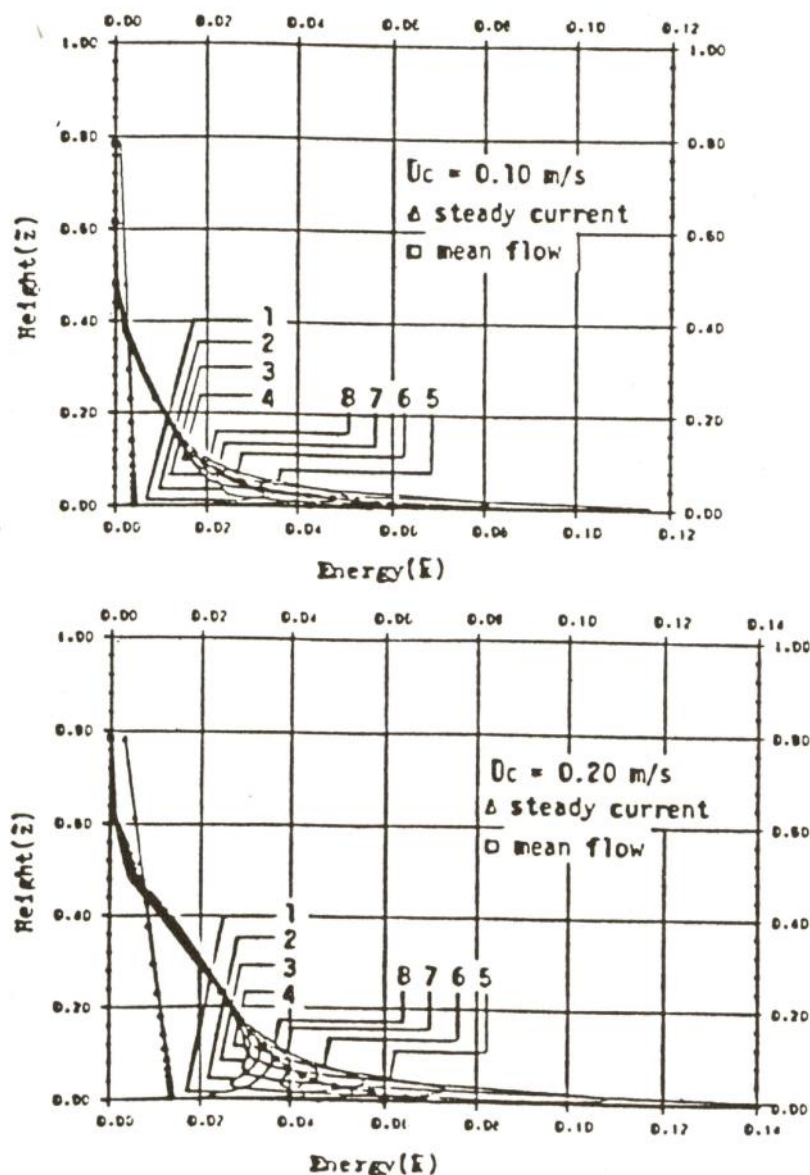


Fig. 11 Energy profiles for co-directional flow (1:0°,2:45°,3:90°,4:135°,5:180°,6:225°,7:270°,8:315°)