



การตรวจสอบความถูกต้องฟังก์ชันผนังสำหรับแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดสองสมการของ  
ซอฟต์แวร์ OpenFOAM

VALIDATION OF WALL FUNCTIONS FOR TWO-EQUATION TURBULENCE MODELS OF  
OpenFOAM

กิตติพศ โลกสุภไพบูรณ์<sup>1</sup> และ ชاکริต สุวรรณจรรย์<sup>2,3\*</sup>

<sup>1</sup>นักศึกษาระดับปริญญาเอก, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

<sup>2</sup>รองศาสตราจารย์, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

<sup>3</sup>รองศาสตราจารย์, ห้องปฏิบัติการกลศาสตร์เชิงคอมพิวเตอร์เพื่อการออกแบบ (LCMD)

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

\*Corresponding Author: chakrit.suv@mahidol.ac.th

บทคัดย่อ

แบบจำลองความปั่นป่วนจะใช้ทำนายการไหลได้ถูกต้องในการไหลปั่นป่วนสมบูรณ์เพียงเท่านั้น ซึ่งบริเวณชั้นขีดผิวจะมีตัวเลขเรย์โนลด์ต่ำและทำให้แบบจำลองความปั่นป่วนแสดงผลได้ไม่ดี ฟังก์ชันผนังสามารถนำมาใช้จำลองบริเวณชั้นขีดผิวได้อย่างมีประสิทธิภาพ แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดสองสมการส่งผ่าน ประกอบด้วย แบบจำลอง  $k - \epsilon$  แบบจำลอง  $k - \omega$  แบบจำลอง  $k - \omega$  SST และแบบจำลอง RNG  $k - \epsilon$  ในซอฟต์แวร์ OpenFOAM ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์โอเพนซอร์สที่ไม่มีค่าลิขสิทธิ์การใช้งาน และเปิดให้แก้ไขโค้ด (Code) ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันผนังเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของการไหล การจำลองการไหลผ่านร่องรูปทรงสี่เหลี่ยม 3 มิติ ด้วยแบบจำลองความปั่นป่วนได้ถูกสร้างขึ้นเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ฟังก์ชันผนังได้นำมาประยุกต์ใช้บนผนังโครงสร้างเซลล์ของแต่ละการจำลองการไหล ผลการเปรียบเทียบพบว่าแบบจำลอง RNG  $k - \epsilon$  ซึ่งใช้ฟังก์ชันผนังของชั้นขีดย่อยหนืด ( $y^+ = 5$ ) สามารถแสดงพฤติกรรมการไหลภายในแบบจำลองร่องรูปทรงสี่เหลี่ยม 3 มิติ ได้ใกล้เคียงกับผลการทดลองมากที่สุด

คำสำคัญ: ฟังก์ชันผนัง, แบบจำลองความปั่นป่วน, OpenFOAM

ABSTRACT

The turbulence models are only valid in the turbulence flow which fully developed. Near walls, the turbulence Reynolds number is low and turbulence models do not perform well. The wall functions can be used to model the near wall region efficiently. The two-equation turbulence models compose of  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - \omega$  SST, and RNG  $k - \epsilon$  models in OpenFOAM which is the open

Kittipos Loksupapaiboon<sup>1</sup> and Chakrit Suvanjumrat<sup>2,3\*</sup>

<sup>1</sup>PhD Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Mahidol University.

<sup>2</sup>Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Mahidol University.

<sup>3</sup>Associate Professor, Laboratory of Computer Mechanics for Design (LCMD), Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Mahidol University.

source software without the license cost and opening to edit codes had been applied with the wall functions for the flow validation. The 3-D lid-driven cavity flow models by turbulence models were developed to compare with the experiment. The wall function was applied on walls of the cell structure of each flow model. The comparison shown that the RNG  $k - \epsilon$  model with the wall function of viscous sub-layer ( $y^+ = 5$ ) could represent flow behaviour inside the 3-D lid-driven cavity models correctly with the experimental results.

**KEYWORD:** wall function, turbulence model, OpenFOAM

## 1. บทนำ

การเฉลี่ยเชิงเวลาสมการนาเวียร์-สโตกส์ เพื่อจำลองการไหลแบบปั่นป่วนจะทำให้เกิดพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ (Reynolds Stress) ขึ้น แบบจำลองความปั่นป่วน (Turbulence Model) ได้มีการพัฒนาเพื่อประมาณพจน์ความเค้นเรย์โนลด์นี้ แบบจำลองความปั่นป่วนที่ได้มีการพัฒนา เช่น แบบจำลองศูนย์สมการ หนึ่งสมการ สองสมการ และเจ็ดสมการ เป็นต้น [1] แบบจำลองความปั่นป่วนได้ถูกพัฒนาขึ้นมาด้วยวิธีปริมาตรจำกัด และนำไปแก้ปัญหการไหลปั่นป่วนต่างๆ Altinisik [2] ได้ใช้ซอฟต์แวร์ STAR-CCM+ วิเคราะห์การไหลผ่านพื้นผิวภายนอกด้านบนของรถยนต์นั่งส่วนบุคคลยี่ห้อ FIAT รุ่น Linea การจำลองการไหลของอากาศไหลผ่านรถยนต์รุ่นดังกล่าวได้ใช้แบบจำลอง  $k - \epsilon$  ขนาดของเซลล์บริเวณผิวจะทำให้มี  $y^+ \geq 0$  และทำให้ต้องใช้เซลล์รูปทรงปริซึมจำนวนมากถึง  $50 \times 10^6$  เซลล์ ผลการจำลองได้นำไปเปรียบเทียบกับผลการทดสอบพบว่าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้าน (Drag Coefficient) ของแบบจำลองจะมีค่าน้อยกว่าการทดสอบจริง 5.3% - 7.8% Hassaan *et al.* [3] ได้วิเคราะห์การไหลของอากาศผ่านรถขนส่งที่มีรูปร่างแบบ boat-tail คือ มีด้านท้ายรถเล็กกว่ากลางรถโดยการใช้ซอฟต์แวร์ ANSYS FLUENT แบบจำลอง  $k - \omega SST$  ถูกนำมาใช้คำนวณความปั่นป่วนของการไหลผ่านรถขนส่งดังกล่าวโดยใช้เซลล์จำนวน  $7.42 \times 10^6$  เซลล์ เพื่อให้มี  $y^+ < 5$  บริเวณผิวของรถ และพบว่าแรงต้านจากการไหลของอากาศผ่านรูปร่างแบบนี้จะมีค่าลดลง 50% จากรถที่มีรูปร่างเท่ากันตลอดทั้งคัน Muiruri *et al.* [4] ได้ทำการเปรียบเทียบการจำลองการไหลผ่านใบพัดกังหันลมด้วยแบบจำลองความปั่นป่วน  $k - \omega SST$  แบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  แบบจำลอง  $r - k - \epsilon$  และแบบจำลอง Spalart-Allmaras ( $S - A$ ) แบบจำลองการไหลทั้งหมดถูกสร้างด้วยซอฟต์แวร์ ANSYS FLUENT โดยกำหนดให้โหนดของเซลล์ติดผนังใบพัดกังหันอยู่ในชั้นย่อยหนืด (Viscous Sub-Layer) พบว่าการใช้แบบจำลอง  $k - \omega SST$  กับโครงสร้างเซลล์ที่มีเซลล์ทั้งหมด  $15.812 \times 10^6$  เซลล์ ให้ผลใกล้เคียงกับข้อมูลที่นำมาเปรียบเทียบมากที่สุด Kurec *et al.* [5] ได้ศึกษาการไหลของอากาศผ่านสปอยเลอร์รถยนต์นั่งส่วนบุคคลซึ่งทำให้เพิ่มแรงกด (Downforce) ให้กับตัวรถได้ การศึกษานี้ได้ใช้ซอฟต์แวร์ ANSYS FLUENT จำลองการไหลปั่นป่วนของอากาศผ่านรถยนต์ที่ติดตั้งสปอยเลอร์ด้วยแบบจำลอง  $realizable k - \epsilon (r - k - \epsilon)$  แบบจำลอง  $k - \omega SST$  แบบจำลอง  $k - k_L - \omega$  และแบบจำลอง  $transition SST$  บริเวณชั้นขีดผิวรถยนต์จะทำให้  $y^+ < 1$  จึงทำให้ต้องใช้เซลล์มากถึง  $5.3 \times 10^7$  เซลล์ ผลการจำลองได้นำไปตรวจสอบความแม่นยำกับผลการทดสอบแบบจำลองของรถยนต์ในอุโมงค์ลมพบว่าแบบจำลอง  $r - k - \epsilon$  และ  $k - k_L - \omega$  มีผลการคำนวณใกล้เคียงกับการทดลองมากที่สุด Tomboulides *et al.* [6] ได้นำเสนอฟังก์ชันผนัง (Wall Function) รูปแบบใหม่สำหรับแบบจำลอง  $k - \omega$  แบบจำลองชั้นขีดผิวนี้ได้ประยุกต์ใช้ในซอฟต์แวร์ Nek5000 กับปัญหา Backward Facing Step และปัญหาของไหลอุณหภูมิแตกต่างกันไหลมาผสมกันภายในข้อต่อรูปตัวที ซึ่งพบว่าฟังก์ชันผนังที่ได้นำเสนอทำให้สามารถใช้  $y^+$  มากกว่า 2 วิเคราะห์การไหลโดยทำให้ผลการคำนวณใกล้เคียงกับการใช้ฟังก์ชันผนังเดิมที่มีค่า  $y^+ \approx 1$

แบบจำลองความปั่นป่วนเพื่อการคำนวณพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ที่ได้ถูกพัฒนาและประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรมต่างๆ อนึ่งการประยุกต์ใช้งานที่ได้สืบค้นเหล่านี้จำเป็นต้องใช้ซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ซึ่งมีค่าลิขสิทธิ์ใช้งานสูงจึงทำให้ถูกจำกัดการใช้งานเฉพาะองค์กร อีกทั้งการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมที่มีรูปร่างซับซ้อนจะต้องกำหนดให้มีค่า  $y^+$  น้อยมากทำให้ต้องใช้เซลล์จำนวนมากในการสร้างโครงสร้างเซลล์ ฟังก์ชันผนังจะทำให้แบบจำลองความปั่นป่วนสามารถทำนายการไหลบริเวณชั้นขีดยาวได้ดี และไม่จำเป็นต้องกำหนดให้โครงสร้างเซลล์วิเคราะห์การไหลมีค่า  $y^+ \leq 1$  เสมอไป จึงทำให้มีการใช้เซลล์จำนวนน้อยลงเพื่อสร้างโครงสร้างเซลล์สำหรับวิเคราะห์การไหล งานวิจัยนี้ได้นำฟังก์ชันผนังมาใช้กับแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดสองสมการส่งผ่านในซอฟต์แวร์ OpenFOAM ที่เป็นซอฟต์แวร์โอเพนซอร์ส ซึ่งไม่มีค่าลิขสิทธิ์การใช้งาน เพื่อทำการตรวจสอบความถูกต้อง และทำให้เกิดความมั่นใจที่จะนำฟังก์ชันผนังไปใช้กับแบบจำลองความปั่นป่วนเหล่านี้ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมได้ต่อไป

## 2. แบบจำลองความปั่นป่วน

แบบจำลองความปั่นป่วนได้มีการพัฒนาขึ้นเพื่อนำมาประมาณพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ การประมาณค่าของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ของแต่ละแบบจำลองความปั่นป่วนจำเป็นต้องใช้สมการการส่งผ่าน (Transport Equation) แบบจำลองสองสมการ (Two-Equation Model) เป็นแบบจำลองที่มีสมการการส่งผ่านจำนวน 2 สมการ ซอฟต์แวร์ OpenFOAM มีแบบจำลองสองสมการ ได้แก่ แบบจำลอง  $k - \epsilon$  แบบจำลอง  $k - \omega$  แบบจำลอง  $k - \omega SST$  และแบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  ตามลำดับ

### 2.1 แบบจำลอง $k - \epsilon$

แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดที่ต้องใช้สมการการส่งผ่านจำนวนสองสมการซึ่งเป็นที่รู้จักและได้รับความนิยมนำมาใช้งานอย่างกว้างขวาง ได้แก่ แบบจำลอง  $k - \epsilon$  สาเหตุที่แบบจำลอง  $k - \epsilon$  ได้รับความนิยมจำลองการไหลแบบปั่นป่วนเนื่องมาจากเป็นแบบจำลองที่สามารถใช้งานได้ง่าย แบบจำลอง  $k - \epsilon$  จะประกอบด้วยสมการพลังงานจลน์ปั่นป่วน (Turbulence Kinetic Energy) และสมการอัตราการกระจาย (Dissipation Rate) ดังแสดงด้วยสมการ (1) และ (2) ตามลำดับ [7]

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div}(\rho k \bar{U}) = \text{div} \left( \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \cdot \nabla k \right) + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \epsilon \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \text{div}(\rho \epsilon \bar{U}) = \text{div} \left( \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \cdot \nabla \epsilon \right) + C_1 \frac{\epsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2)$$

โดย

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_i} \right) \quad (3)$$

$$\overline{U'_i U'_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k - \frac{2\mu_t S_{ij}}{\rho} \quad (4)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5)$$

เมื่อ  $C_\mu = 0.09$ ,  $\sigma_k = 1.00$ ,  $\sigma_\epsilon = 1.30$ ,  $C_1 = 1.44$  และ  $C_2 = 1.92$

## 2.2 แบบจำลอง $k - \omega$

แบบจำลอง  $k - \omega$  เป็นแบบจำลองที่มีสมการการส่งผ่านจำนวนสองสมการเช่นเดียวกับแบบจำลอง  $k - \varepsilon$  Wilcox [8, 9] ได้พัฒนาแบบจำลอง  $k - \omega$  ซึ่งประกอบด้วยสมการพลังงานจลน์ปั่นป่วน และสมการการส่งผ่านของความถี่ปั่นป่วน (Turbulence Frequency) ดังสมการ (6) และ (7) ตามลำดับ

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div}(\rho k \bar{U}) = \text{div} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \cdot \nabla k \right) + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \delta_{ij} - \beta^* \rho k \omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \text{div}(\rho \omega \bar{U}) = \text{div} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \cdot \nabla \omega \right) + \gamma_1 \left( 2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} \delta_{ij} \right) - \beta \rho \omega^2 \quad (7)$$

โดย

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (8)$$

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k} \quad (9)$$

เมื่อ  $\sigma_k = 2.00$ ,  $\sigma_\omega = 2.00$ ,  $\gamma_1 = 0.553$ ,  $\beta = 0.075$  และ  $\beta^* = 0.09$

## 2.3 แบบจำลอง $k - \omega$ SST

แบบจำลอง  $k - \omega$  SST ได้ถูกพัฒนาโดย Menter [10] ซึ่งประกอบด้วยสมการพลังงานจลน์ปั่นป่วน และสมการการส่งผ่านของความถี่ปั่นป่วนดังสมการ (10) และ (11) ตามลำดับ

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div}(\rho k \bar{U}) = \text{div} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \cdot \nabla k \right) + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} \delta_{ij} - \beta^* \rho k \omega \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \text{div}(\rho \omega \bar{U}) = \text{div} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 1}} \right) \cdot \nabla \omega \right) + \gamma_1 \left( 2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} \delta_{ij} \right) - \beta \rho \omega^2 + \frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial X_k} \frac{\partial \omega}{\partial X_k} \quad (11)$$

โดย

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega, \sqrt{2S_{ij} S_{ij} F_2})} \quad (12)$$

เมื่อ  $\sigma_k = 1.00$ ,  $\sigma_{\omega 1} = 2.00$ ,  $\sigma_{\omega 2} = 1.17$ ,  $\gamma_1 = 0.44$ ,  $\beta = 0.083$  และ  $\beta^* = 0.09$

## 2.4 แบบจำลอง $RNG k - \varepsilon$

แบบจำลอง Renormalization Group (RNG)  $k - \varepsilon$  หรือแบบจำลอง  $RNG k - \varepsilon$  ถูกพัฒนาเพื่อใช้กับการไหลที่มีค่าตัวเลขเรย์โนลด์สูงๆ โดย Yakhot *et al.* [11] หรือแบบจำลอง  $RNG k - \varepsilon$  จะประกอบด้วยสมการความปั่นป่วนของพลังงานจลน์ และสมการการอัตราการกระจายซึ่งแสดงด้วยสมการ (13) และ (14) ตามลำดับ

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div}(\rho k \bar{U}) = \text{div} \left( \alpha_k \left( \mu + \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla k \right) - \tau_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \bar{U}) = \text{div} \left( \alpha_\varepsilon \left( \mu + \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon \right) - C_{\varepsilon 1} \rho \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \cdot S_{ij} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (14)$$

โดย

$$\tau_{ij} = \overline{U'_i U'_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k - \frac{2\mu_t S_{ij}}{\rho} \quad (15)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (16)$$

เมื่อ  $C_\mu = 0.0845$ ,  $\alpha_k = 1.39$ ,  $\alpha_\varepsilon = 1.39$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1.42$  และ  $C_{\varepsilon 2} = 1.68$

### 3. ฟังก์ชันผนัง

การจำลองการไหลด้วยแบบจำลองความปั่นป่วนจะทำได้ดีในบริเวณการไหลปั่นป่วนสมบูรณ์ (Fully Developed Turbulent Flow) ซึ่งอยู่ห่างออกมาจากผนัง การกำหนดชั้นของการไหลชิดกับผนังจะใช้ค่า  $y^+$  ซึ่งแสดงด้วยสมการ (17)

$$y^+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (17)$$

เมื่อ  $y$  คือ ระยะห่างจากผนังของโหนดภายในเซลล์ซึ่งติดกับผนัง

$\tau_w$  คือ ความเค้นเฉือนของผนัง (Wall Shear Stress)

$\nu$  คือ ความหนืดไดนามิกของของไหล

$\rho$  คือ ความหนาแน่นของของไหล

บริเวณใกล้ผนังจะถูกแบ่งเป็นสามชั้นย่อยด้วย  $y^+$  ประกอบด้วย ก) ชั้นย่อยหนืด (Viscous Sub-Layer) ข) ชั้นย่อยกันชน (Buffer Sub-Layer) และ ค) ชั้นย่อยเฉื่อย (Inertial Sub-Layer)

ชั้นย่อยหนืดจะมีค่า  $y^+ < 5$  ภายในชั้นย่อยหนืดนี้ความปั่นป่วนจะไม่มีผลกระทบต่อกรไหล ชั้นย่อยกันชนจะมีค่า  $y^+$  อยู่ระหว่าง 5 ถึง 30 ( $5 < y^+ < 30$ ) ส่วนชั้นย่อยเฉื่อยจะมีค่า  $y^+$  อยู่ระหว่าง 30 ถึง 200 ( $30 < y^+ < 200$ ) แบบจำลองความปั่นป่วนซึ่งถูกนำไปใช้ประมาณพจน์เรย์โนลด์จะใช้คำนวณการไหลในชั้นย่อยกันชนได้ยาก ดังนั้นการใช้แบบจำลองความปั่นป่วนให้เกิดประสิทธิผลจึงทำได้ 2 วิธี ก) การสร้างโหนดของเซลล์ที่ติดกับผนังให้มีระยะห่างจากผนังอยู่ในชั้นย่อยหนืด ( $y^+ \leq 1$ ) และ ข) การใช้ฟังก์ชันผนัง อนึ่งฟังก์ชันผนังจะมีหน้าที่ในการเชื่อมต่อระหว่างการไหลที่ชั้นชิดผิวและบริเวณที่มีการไหลปั่นป่วนสมบูรณ์ การใช้ฟังก์ชันผนังให้เกิดประสิทธิผลจำเป็นต้องให้ระยะห่างจากผนังของโหนดภายในเซลล์ซึ่งติดกับผนังมีระยะอยู่ในช่วงชั้นย่อยที่ถูกต้อง

ในกรณีที่ค่า  $y^+$  ของเซลล์ตกในชั้นย่อยเฉื่อยความหนืดบริเวณใกล้ผนังจะใช้ฟังก์ชันผนังของความหนืดปั่นป่วนไคเนมาติก (Kinematic Turbulent Viscosity) ซึ่งแสดงได้ดังสมการ (18)

$$\nu_t = \nu \left( \frac{\kappa y^+}{\ln(Ey^+)} - 1 \right) \quad (18)$$

#### 3.1 แบบจำลอง $k - \varepsilon$

ภายในชั้นย่อยหนืด ( $y^+ < 5$ ) ความเค้นเฉือนของของไหลมีค่าใกล้เคียงกับความเค้นเฉือนของผนังซึ่งแสดงได้ดังสมการ (19)

$$\tau(y) = \mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \cong \tau_w \quad (19)$$

เมื่อกำหนดให้  $\bar{U} = 0$  ที่ตำแหน่ง  $y = 0$  จะทำให้

$$\bar{U} = \frac{\tau_w y}{\mu} \quad (20)$$

เมื่อกำหนดให้

$$u^+ = \frac{\bar{U}}{u_\tau} \quad (21)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (22)$$

ดังนั้น

$$u^+ = y^+ \quad (23)$$

การกำหนดสถานะขอบเขตของค่า  $k$  และ  $\varepsilon$  โดยทั่วไปแล้วจะมีค่าแสดงได้ดังสมการ (24) และ (25) ตามลำดับ

$$k = u_\tau^2 C_\mu^{-1/2} \quad (24)$$

$$\varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\kappa y} = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} \quad (25)$$

เมื่อ  $\kappa$  คือ ค่าคงที่ Karman (0.41)

$l$  คือ ขนาดความกว้างของเซลล์

ถ้าหากการไหลภายในโครงสร้างเซลล์ที่มีโหนดของเซลล์ซึ่งติดกับผนังมีระยะห่างจากผนังอยู่ในชั้นย่อยเฉื่อย ( $30 < y^+ < 200$ ) จะต้องกำหนดฟังก์ชันผนังแสดงดังสมการ (26)-(28)

$$u^+ = \frac{\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (26)$$

$$k = u_\tau^2 C_\mu^{-1/2} \quad (27)$$

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (28)$$

เมื่อ  $\kappa$  คือ ค่าคงที่ Karman (0.41)

$E$  คือ ค่าความขรุขระ (สำหรับผิวเรียบมีค่า 0.98)

### 3.2 แบบจำลอง $k - \omega$

การกำหนดฟังก์ชันผนังสำหรับการจำลองการไหลแบบปั่นป่วนด้วยแบบจำลอง  $k - \omega$  ในบริเวณชั้นย่อยหนืดโดยการจัดการกับสมการพลังงานจลน์ปั่นป่วน และสมการการส่งผ่านของความถี่ปั่นป่วนให้เป็นรูปแบบอย่างง่ายดังแสดงในสมการ (30) และ (31)

$$-C_\mu \omega^+ k^+ + \frac{d^2 k^+}{(dy^+)^2} = 0 \quad (30)$$

$$-\beta (\omega^+)^2 + \frac{d^2 \omega^+}{(dy^+)^2} = 0 \quad (31)$$

เมื่อ

$$k^+ = \frac{k}{(u_\tau)^2}$$

$$\omega^+ = \frac{v\omega}{(u_\tau)^2}$$

จากสมการ (30) และ (31) เมื่อ  $y^+$  อยู่ในบริเวณชั้นย่อยหนืดจะทำให้  $\omega^+$  มีค่าแสดงได้ดังสมการ (32)

$$\omega^+ = \frac{6}{\beta (y^+)^2} \quad (32)$$

และ  $\beta$  มีค่าเท่ากับ 0.075

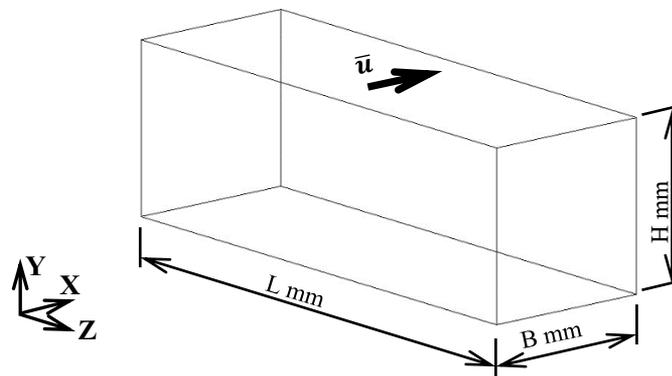
สำหรับบริเวณชั้นย่อยเฉื่อย ความถี่ปั่นป่วนจะมีค่าแสดงดังสมการ (33)

$$\omega^+ = \frac{1}{\kappa \sqrt{C_\mu} y^+} \quad (33)$$

เมื่อ  $\kappa$  คือ ค่าคงที่ Karman

#### 4. การตรวจสอบความถูกต้อง

โดเมนการไหลของน้ำผ่านร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมี 3 ขนาด ขนาดความกว้างของร่องสี่เหลี่ยมเท่ากับ 150 mm ร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมทั้ง 3 ขนาดจะมีความกว้างเท่ากับ ความสูงทั้งหมด แต่จะแตกต่างกันที่ขนาดของความยาวซึ่งจะมีขนาดเป็นอัตราส่วนกับความกว้าง (Spanwise Aspect Ratio) ประกอบด้วย  $L/B = 0.5/1$ ,  $L/B = 1/1$  และ  $L/B = 3/1$  ตามลำดับ ขนาดของโดเมนการไหลจะแสดงได้ดังรูปที่ 1 น้ำเป็นของไหลไม่อัดตัว (Incompressible Fluid) ซึ่งใช้ในการวิเคราะห์จะมีความหนาแน่น  $997.05 \text{ kg/m}^3$  และมีความหนืดไคน์มาติกเท่ากับ  $0.89 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  การไหลของน้ำจะเกิดขึ้นด้านบนร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมโดยใช้การหมุนของสายพานซึ่ง



รูปที่ 1 โดเมนการไหลของน้ำผ่านด้านบนของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยม

ติดตั้งด้านบนของร่องน้ำรูปทรงสี่เหลี่ยมทำให้น้ำไหลในทิศทางขนานกับความกว้างของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมด้วยความเร็วคงที่  $0.05953 \text{ m/s}$  ความกว้างของร่องน้ำจะเป็นความยาวเฉพาะ (Characteristic Length) ของการไหล และการไหลของน้ำในลักษณะนี้จะทำให้การไหลภายในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมีค่าตัวเลขเรย์โนลด์เท่ากับ  $1 \times 10^4$  ซึ่งทำให้เป็นการไหลปั่นป่วน

โครงสร้างเซลล์ของการวิเคราะห์การไหลภายในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมถูกสร้างด้วยวิธีปริมาตรจำกัด [12] จากการนำเซลล์สี่เหลี่ยมหกหน้า (Hexahedron) มาแบ่งโดเมนการไหลจนกระทั่งระยะ โหนดของเซลล์ที่ติดกับผนังทำให้มีค่า  $y^+$  เท่ากับ 5 ดังนั้นจะทำให้โครงสร้างเซลล์ที่มี  $L/B = 0.5/1$ ,  $L/B = 1/1$  และ  $L/B = 3/1$  มีเซลล์หกเหลี่ยมขนาด  $2.5 \times 2.5 \times 2.5 \text{ mm}$  กระจายอย่างสม่ำเสมอเป็นจำนวน  $60 \times 30 \times 60$ ,  $60 \times 60 \times 60$  และ  $60 \times 180 \times 60$  เซลล์ ตามลำดับ สมการผนังทุกด้านของโครงสร้างเซลล์จะกำหนดให้มีสภาวะขอบเขตเป็น No-Slip ซึ่งมี  $\vec{U} = 0$  ยกเว้นผนังด้านบนจะกำหนดความเร็วตามแนวความกว้าง สภาวะขอบเขตเริ่มต้นของความดันจะกำหนดให้มีค่าความชันความดันเท่ากับศูนย์ ( $\nabla p = 0$ ) ทุกด้านของผนัง ยกเว้นด้านบนจะกำหนดให้มีค่าความดันเท่ากับศูนย์ สภาวะขอบเขตของ  $k, \epsilon$  และ  $\omega$  จะกำหนดให้ใช้ฟังก์ชันผนังตามสมการในหัวข้อที่ 3

#### 5. ผลการทดลองและวิจารณ์

การจำลองการไหลภายในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมทั้ง 3 ขนาดเป็นการคำนวณไม่คงที่กับเวลาโดยจะเริ่มต้นที่ 0 วินาที จนกระทั่งถึงเวลา 120 วินาที ผลการคำนวณ แบบจำลองร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด  $L/B = 3/1$  จะเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Koseff และ Street [13] ในขณะที่แบบจำลองร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด  $L/B = 1/1$  และ  $0.5/1$  จะเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Prasad และ Koseff [14] การแสดงผลการคำนวณการไหลของแบบจำลองทั้งหมดจะแสดงการเกิดเส้นกระแสบนหน้าตัดที่ตำแหน่ง

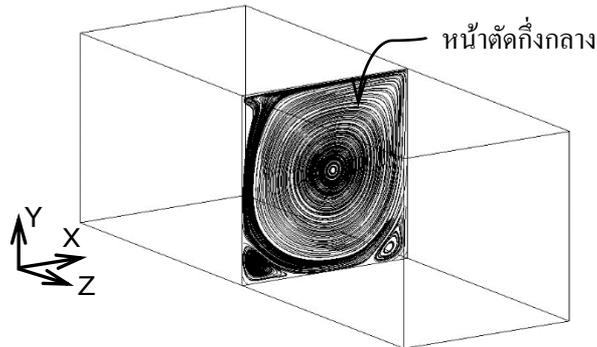
กึ่งกลางความยาว  $L$  ของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมคางหมูแสดงในรูปที่ 2 เส้นกระแสบนหน้าตัดร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมของแต่ละแบบจำลองจะเกิดกระแสหมุนวน (Eddy Stream) ที่เวลาแตกต่างกัน ตัวอย่างเช่นแบบจำลองร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด  $L/B = 3/1$  หากใช้แบบจำลอง  $k - \varepsilon$  และแบบจำลอง  $RNG k - \varepsilon$  พบว่าที่เวลา 40, 80 และ 120 วินาที กระแสหมุนวนของแต่ละแบบจำลองจะแตกต่างกันดังรูปที่ 3 แบบจำลอง  $k - \varepsilon$  จะไม่สามารถแสดงกระแสหมุนวนย่อย (Downstream Secondary Eddy) ณ ตำแหน่งมุมบนซ้ายที่เวลาตั้งแต่ 120 วินาทีได้ สาเหตุเนื่องมาจากการใช้แบบจำลอง  $k - \varepsilon$  จำเป็นต้องกำหนด  $y^+$  ให้มีค่าน้อยกว่า 1 เพื่อจำลองการไหลปั่นป่วนขนาดเล็กบริเวณใกล้ผิว [15] รูปที่ 4 เปรียบเทียบกระแสหมุนวนของแบบจำลอง  $k - \omega$  และ  $k - \omega SST$  ของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด  $L/B = 3/1$  ที่เวลา 40, 80 และ 120 วินาที การไหลของแบบจำลองทั้งสองจะมีกระแสหมุนวนย่อยตั้งแต่เวลา 80 วินาที และจะหายไปเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นเนื่องมาจากการไหลเข้าสู่ภาวะสมบูรณ์ (Fully Developed Condition) แบบจำลอง  $RNG k - \varepsilon$  และฟังก์ชันผนังในชั้นย่อยหนืดสามารถจำลองการไหลปั่นป่วนที่มีกระแสวนขนาดเล็กบริเวณใกล้ผนังได้ดี

รูปที่ 5 แสดงให้เห็นผลกระทบของผนังด้านข้างต่อการเกิดเส้นกระแสการไหลของน้ำภายในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยม พบว่าเมื่อความยาวของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมีค่าลดลงความเค้นเฉือน (Shear Stress) บนผนังจะรบกวนการไหลซึ่งทำให้สังเกตเห็นว่ากระแสวนย่อยที่ตำแหน่งมุมบนซ้ายของแบบจำลอง  $RNG k - \varepsilon$  จะไม่เกิดขึ้นภายในแบบจำลองร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด  $L/B = 0.5/1$  กระแสหมุนวนย่อยจะมีลำดับการเกิดเริ่มตั้งแต่มุมล่างขวา มุมล่างซ้าย และมุมบนซ้ายซึ่งสอดคล้องกับการทดลองของ Rhee *et al.* [16] และการจำลองของ Isaev *et al.* [17] ดังนั้นเมื่อผนังของร่องสี่เหลี่ยมมีระยะเข้าใกล้หน้าตัดผ่านกึ่งกลางความยาวก็จะส่งผลให้เกิดแรงเฉือนต่อการไหลหมุนวนเพิ่มขึ้น กระแสหมุนวนย่อยที่ตำแหน่งมุมบนซ้ายจะปรากฏเป็นลำดับสุดท้ายซึ่งหมายความว่าต้องใช้พลังจลน์ปั่นป่วนที่หลงเหลือจากการหมุนของกระแสหมุนวนย่อยมุมล่างขวาและซ้าย เมื่อแรงเฉือนจากผนังซึ่งเลื่อนเข้าใกล้หน้าตัดกึ่งกลางมีอิทธิพลต่อการลดพลังงานจลน์ปั่นป่วนจึงทำให้พลังงานจลน์ปั่นป่วนมีไม่เพียงพอต่อการเกิดกระแสหมุนวนย่อยที่ตำแหน่งมุมบนซ้าย และทำให้ไม่มีกระแสหมุนวนย่อยตำแหน่งมุมบนซ้ายเกิดขึ้นในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด  $L/B = 0.5/1$  นั่นเอง

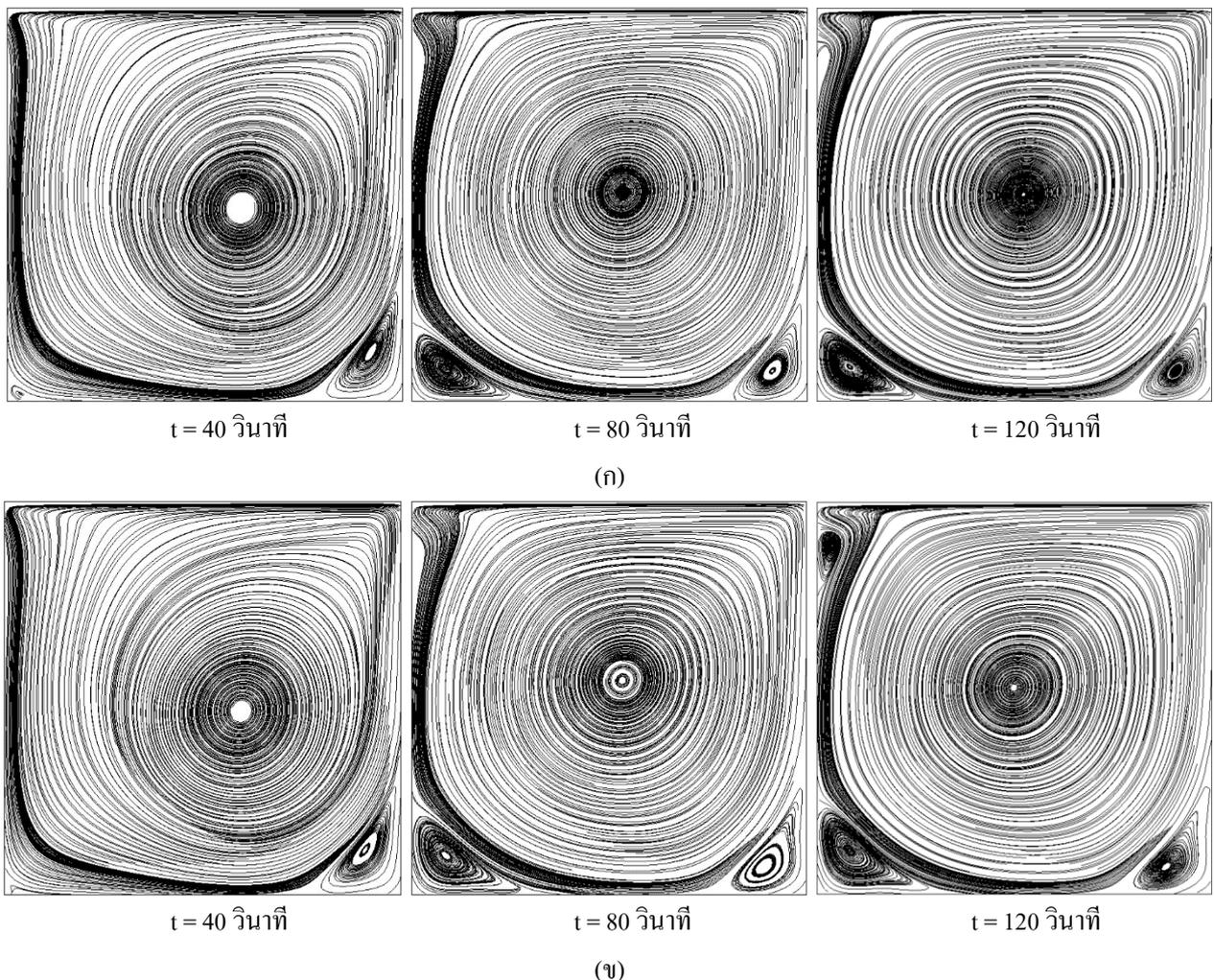
พฤติกรรมการไหลวนของน้ำภายในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมเมื่อจำลองด้วยแบบจำลองความปั่นป่วน  $RNG k - \varepsilon$  ที่มีการใช้ฟังก์ชันผนังในชั้นย่อยหนืดโดยจำลองโครงสร้างเซลล์ให้มีค่า  $y^+ = 5$  จะสอดคล้องกับผลการทดลองของ Rhee *et al.* [16] ซึ่งพบว่ากระแสหมุนวนย่อยจะก่อตัวจนครบสามตำแหน่งที่เวลา 90 วินาที เป็นต้นไป

การเปรียบเทียบความแม่นยำของแบบจำลองความปั่นป่วนและฟังก์ชันผนังจะใช้ค่าความเร็วเฉลี่ย  $\bar{U}$  และ  $\bar{V}$  ลากผ่านจุดกึ่งกลางบนหน้าตัดของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมที่ได้ทำการวิเคราะห์ผล เนื่องจากกระแสหมุนวนของแต่ละแบบจำลองและแต่ละขนาดของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมจะมีความสมบูรณ์ที่เวลา 60 วินาที ดังนั้นจึงนำความเร็วเฉลี่ย  $\bar{U}$  และ  $\bar{V}$  ผ่านจุดกึ่งกลางบนหน้าตัดของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองซึ่งวัดด้วย Laser-Doppler Anemometer ที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.1% [13] รูปที่ 6 แสดงกราฟเปรียบเทียบของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด  $L/B = 3/1, 1/1$  และ  $0.5/1$  ตามลำดับ ผลการเปรียบเทียบด้วยความเร็วเฉลี่ยภายในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมพบว่าแบบจำลองความปั่นป่วนทั้งสี่ซึ่งใช้คำนวณร่วมกับฟังก์ชันผนังสามารถแสดงความเร็วเฉลี่ยได้ใกล้เคียงกับผลการทดลอง ซึ่งพบว่าความเร็วใกล้ผนังด้านในของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมจะมีค่ามากกว่าบริเวณกึ่งกลางของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมผนังด้านข้างขวาน้ำจะไหลลงด้วยความเร็ว  $\bar{V}/U_B$  อยู่ในช่วง 0.2-0.3 ที่ตำแหน่ง  $x/B = 0.45$  พื้นด้านล่างความเร็ว  $\bar{U}/U_B$  ของน้ำไหลไปทางซ้ายมืออยู่ในช่วง 0-0.2 ที่ตำแหน่ง  $y/D = 0.45$  และที่ผนังด้านข้างซ้ายน้ำจะไหลขึ้นข้างบนด้วยความเร็ว  $\bar{V}/U_B$  อยู่ในช่วง 0.2-0.3 ที่ตำแหน่ง  $x/B = 0.45$  ตามลำดับ ค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองความปั่นป่วนแต่ละแบบของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมทั้งสามขนาดแสดงรายละเอียดในตารางที่ 1 ซึ่งพบว่าแบบจำลอง  $RNG k - \varepsilon$  ซึ่งใช้ฟังก์ชันผนัง  $k$  และ  $\varepsilon$  ในชั้นย่อยหนืด

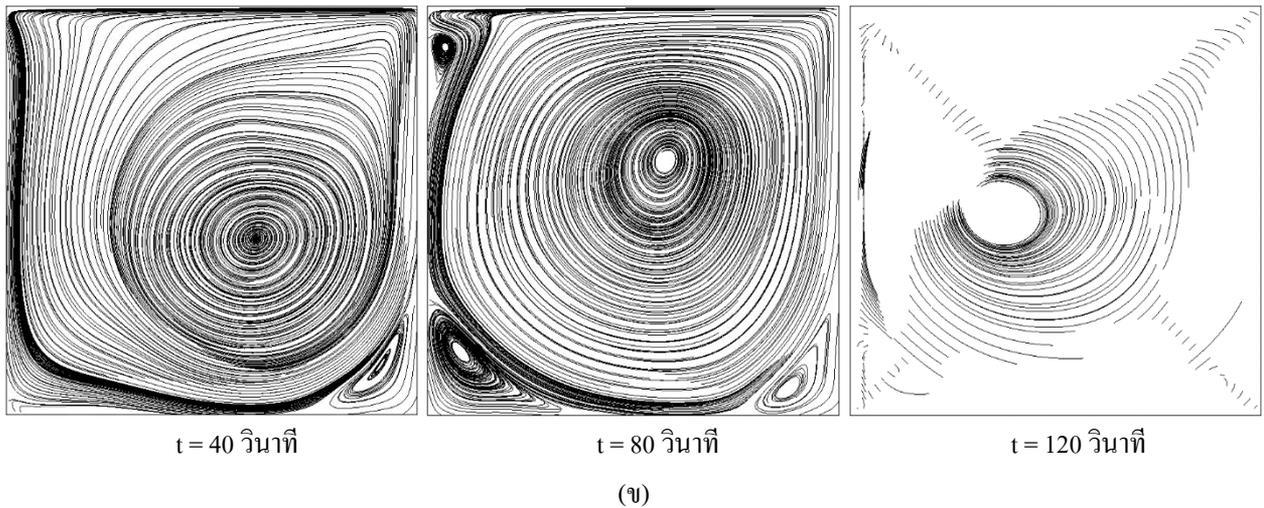
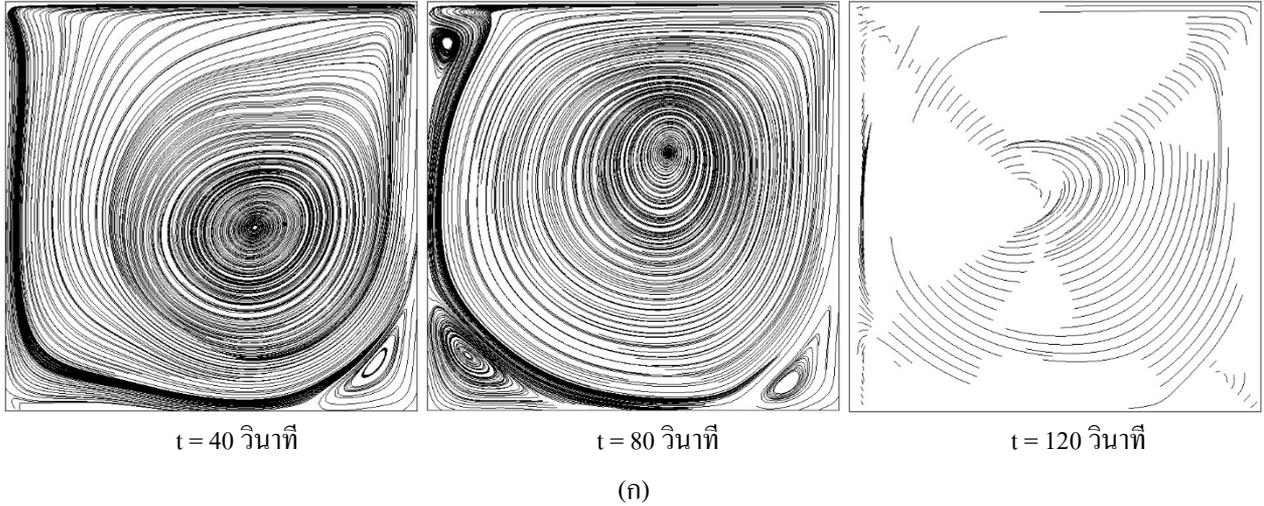
มีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยจากผลการทดลองน้อยกว่า 66.14% อนึ่งเนื่องมาจากค่าตัวเลขส่วนของการคิดความเร็วคลาดเคลื่อนร้อยละมีค่าน้อยมากดังนั้นค่าความเร็วคลาดเคลื่อนจะมีค่ามาก แต่แท้ที่จริงแล้วแบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  จะมีความเร็วคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเพียง 0.040151 เท่านั้น



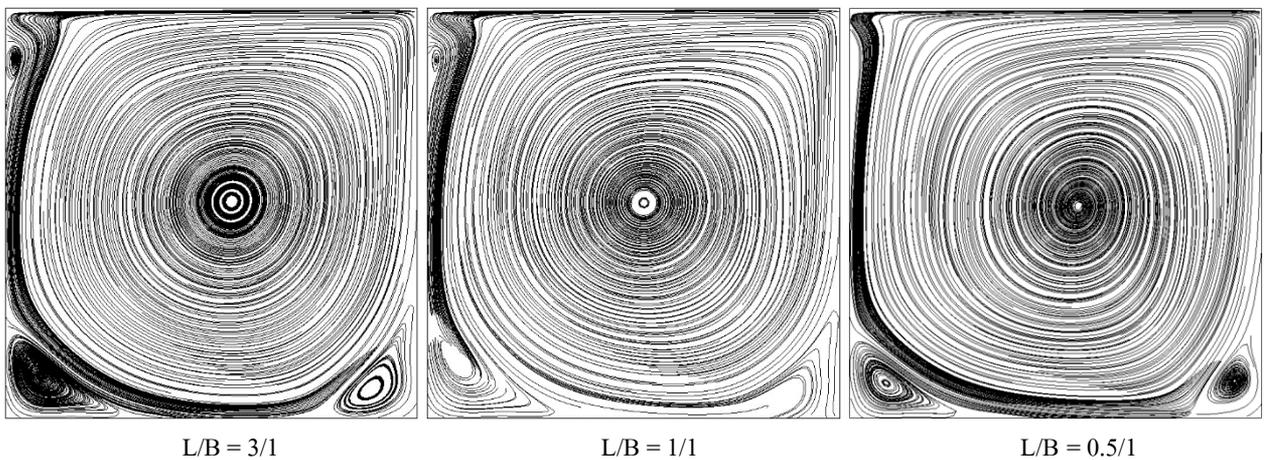
รูปที่ 2 เส้นกระแสการไหลของน้ำบนหน้าตัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของความยาวรูปทรงสี่เหลี่ยม



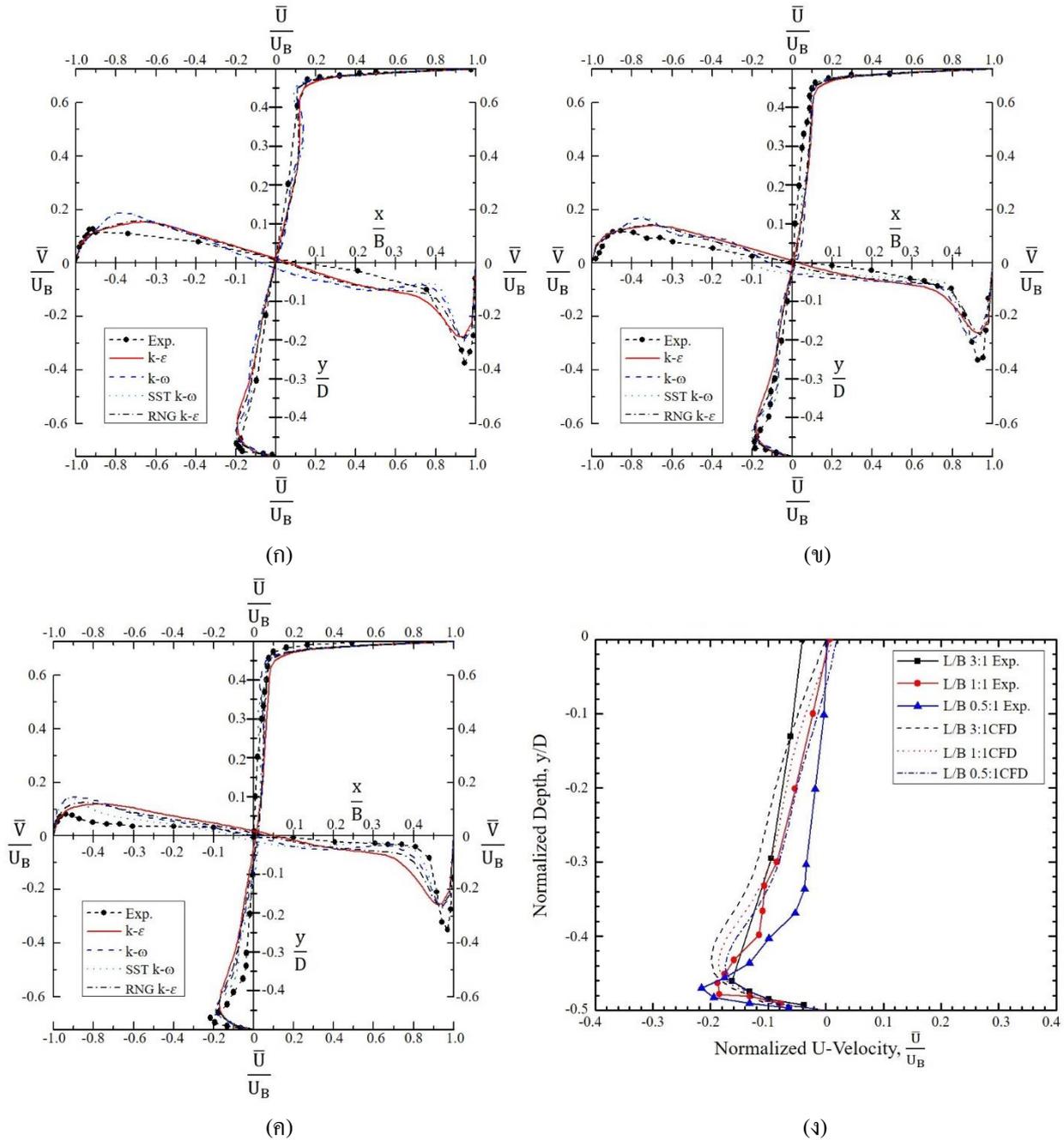
รูปที่ 3 เส้นกระแสการไหลของน้ำบนหน้าตัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของความยาวรูปทรงสี่เหลี่ยมของแบบจำลอง (ก)  $k - \epsilon$  และ (ข)  $RNG k - \epsilon$



รูปที่ 4 เส้นกระแสการไหลของน้ำบนหน้าตัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของความยาวรูปทรงสี่เหลี่ยมของแบบจำลอง (ก)  $k - \omega$  และ (ข)  $k - \omega SST$



รูปที่ 5 เส้นกระแสการไหลของน้ำบนหน้าตัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของความยาวรูปทรงสี่เหลี่ยมของแบบจำลอง RNG  $k - \epsilon$  ที่เวลา 90 วินาที



รูปที่ 6 กราฟความเร็วเฉลี่ย  $\bar{u}$  และ  $\bar{v}$  ลากผ่านจุดกึ่งกลางบนหน้าตัดของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด (ก)  $L/B = 3/1$  (ข)  $L/B = 1/1$  (ค)  $L/B = 0.5/1$  ที่เวลา 60 วินาที และ (ง) กราฟความเร็วเฉลี่ย  $\bar{U}/U_B$  ของการทดลองและแบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  ลากผ่านจุดกึ่งกลางจนถึงพื้นด้านล่างของร่องสี่เหลี่ยมทั้งสามขนาดความยาว

ตารางที่ 1 ร้อยละของความเร็วกาลเคลื่อน

แบบจำลอง	ความเร็วกาลเคลื่อน (%)						ค่าเฉลี่ย (%)
	L/B = 3/1		L/B = 1/1		L/B = 0.5/1		
	$\bar{V}/U_B$	$\bar{U}/U_B$	$\bar{V}/U_B$	$\bar{U}/U_B$	$\bar{V}/U_B$	$\bar{U}/U_B$	
$k - \epsilon$	47.62778	56.11521	65.91074	39.61359	114.3958	125.0481	74.7852
$k - \omega$	59.16809	35.12534	91.97651	47.56626	98.92591	99.05188	71.9690
$k - \omega SST$	61.97384	34.98659	90.11705	36.9118	78.28547	98.3599	66.7724
$RNG k - \epsilon$	46.77204	45.07096	64.74179	35.0167	94.55245	110.707	66.1435

แบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  สามารถแสดงผลกระทบของแรงเฉือนจากผนังสอดคล้องกับการทดลองได้ดีเพียงระดับหนึ่ง ดังจะสังเกตได้จากการพล็อตกราฟในรูปที่ 6(ง) ความเร็วบริเวณใกล้ๆ ผิวของพื้นด้านล่างจะมีค่ามากขึ้นเมื่อความยาวของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมีขนาดลดลง อนึ่งแบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  จะมีความคลาดเคลื่อนสูงเมื่อร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมีขนาด  $L/B = 0.5/1$  แต่ยังคงมีความแม่นยำที่ร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมขนาด  $L/B = 3/1$  และ  $L/B = 1/1$  ตามลำดับ

## 6. สรุปผล

การจำลองการไหลไม่คงที่กับเวลาภายในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยม โดยใช้แบบจำลองความปั่นป่วนและฟังก์ชันผนังของซอฟต์แวร์ OpenFOAM พบว่าแบบจำลอง  $k - \epsilon$  แบบจำลอง  $k - \omega$  แบบจำลอง  $k - \omega SST$  และแบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  สามารถคำนวณความเร็วของกระแสการไหลได้ใกล้เคียงกับผลการทดลอง โดยที่แบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  ที่ใช้ฟังก์ชันผนังในชั้นย่อยหนืดที่มีค่า  $y^+ = 5$  จะแสดงพฤติกรรมการไหลได้ใกล้เคียงกับการทดลองมากที่สุด การไหลของน้ำผ่านด้านบนของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมไม่คงที่กับเวลาซึ่งมีค่าตัวเลขเรย์โนลด์  $10^4$  จะพบว่ากระแสการไหลของน้ำภายในร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมจะเกิดการไหลวนบนหน้าตัดกึ่งกลางความยาวของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยม โดยจะเกิดการแยกของกระแสหมุนวนย่อยที่ตำแหน่งมุมล่างขวา มุมล่างซ้าย และมุมบนซ้าย ตามลำดับ การลดขนาดความยาวของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมจนมีขนาดความยาวต่อความกว้างเท่ากับ 0.5/1 ทำให้พบว่ากระแสไหลวนบนหน้าตัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมจะมีผลกระทบของแรงเฉือนที่ผนังด้านข้าง ทำให้การไหลบริเวณใกล้พื้นด้านล่างของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมีความเร็วเพิ่มมากขึ้น และพบว่าแบบจำลอง  $RNG k - \epsilon$  ที่ใช้ฟังก์ชันผนังในชั้นย่อยหนืดที่มีค่า  $y^+ = 5$  ไม่สามารถคำนวณความเร็วที่ตำแหน่งใกล้ๆ พื้นนี้ได้ การปรับปรุงแบบจำลองการไหลผ่านร่องรูปทรงสี่เหลี่ยมให้มีความแม่นยำเพิ่มขึ้นสามารถทำได้โดยการลดค่า  $y^+$  บริเวณผนังของร่องรูปทรงสี่เหลี่ยม หรือการปรับปรุงฟังก์ชันผนังให้มีประสิทธิภาพการคำนวณได้แม่นยำยิ่งขึ้นในงานวิจัยต่อไป

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Versteeg, H. K. and Malalasekera, D. C. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*, 2nd ed. England: Prentice Hall, 2007.
- [2] Altinisik, A. Aerodynamics coastdown analysis of a passenger car for various configurations. *International Journal of Automotive Technology*, 2017, 18 (2), pp. 245-254.

- [3] Hassaan, M. *et al.* On the effect of boat-tails on a simplified heavy vehicle geometry. *Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*, 2018, 183, pp. 172-186.
- [4] Muiruri, P. I. *et al.* A comparative study of RANS-based turbulence models for an upscale wind turbine blade. *SN Applied Sciences*, 2019, 1(5), pp. 1-237.
- [5] Kurec, K. *et al.* Flow control for a car-mounted rear wing. *Mechanical Sciences*, 2019, 152, pp. 384-399.
- [6] Tomboulides, A. *et al.* A novel numerical treatment of the near-wall regions in the  $k - \omega$  class of RANS models. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2018, 72, pp. 186-199.
- [7] Launder, B. E. and Spalding, D. B. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, 3(2), pp. 269-289.
- [8] Wilcox, D. C. *Turbulence modeling for CFD*, 3rd ed. California: DCW Industries, 2006.
- [9] Wilcox, D. C. Formulation of the  $k - \omega$  turbulence model revisited. *AIAA Journal*, 2008, 46(11), pp. 2823-2838.
- [10] Menter, F. R. Zonal two equation  $k - \omega$  turbulence models for aerodynamic flows. In: *Proceedings of 23<sup>rd</sup> fluid dynamics, plasmadynamics, and laser conference*, Orlando, 6-9 July 1993.
- [11] Yakhot, V. *et al.* Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1992, 4(7), pp. 1510-1520.
- [12] ชاکริต สุวรรณจรัส. พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณด้วยวิธีปริมาตรจำกัด. นครปฐม: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยมหิดล, 2561.
- [13] Koseff, J. R. and Street, R. L. The lid-driven cavity flow: a synthesis of qualitative and quantitative observations. *Transactions of the ASME*, 1984, 106, pp. 390-398.
- [14] Prasad, A. K. and Koseff, J. R. Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1989, 1(2), pp. 208-218.
- [15] Hajefsndiari, H. *et al.* Size-dependent fluid dynamics with application to lid-driven cavity flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, 223, pp. 98-115.
- [16] Rhee H. S. *et al.* Flow visualization of a recirculating flow by rheoscopic liquid and liquid crystal techniques. *Experiments in Fluids*, 1984, 2, pp. 57-64.
- [17] Isaev S. A. *et al.* Numerical analysis of vortex dynamics and unsteady turbulent heat transfer in lid-driven square cavity. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2008, 15(3), pp. 463-475.

