



การประยุกต์ใช้อัลกอริทึมการค้นหาคำของอิก้าสำหรับการออกแบบที่เหมาะสมของโครงข้อแข็งเหล็ก APPLICATION OF CROW SEARCH ALGORITHM FOR OPTIMUM DESIGN OF STEEL FRAMES

สิทธิศักดิ์ อันสนั่น¹, เรืองรุทธิ์ ชีระโรจน์^{2*}

¹นิสิต, สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

²รองศาสตราจารย์, สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

*Corresponding author, E Mail: raungrut.c@msu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการประยุกต์ใช้อัลกอริทึมการค้นหาคำของอิก้า (CSA) สำหรับออกแบบที่เหมาะสมของโครงข้อแข็งเหล็กตามมาตรฐาน AISC วิธี LRFD ซึ่งในการออกแบบเลือกใช้หน้าตัดเหล็กปีกกว้างจากตารางเหล็กมาตรฐานของ AISC โดยอัลกอริทึม CSA มีการทำงานเลียนแบบพฤติกรรมของอิก้าที่เก็บซ่อนอาหารส่วนเกินในที่ต่างๆ และนำกลับมาเมื่อมันต้องการอาหาร สำหรับในการพัฒนาอัลกอริทึมจะใช้โปรแกรม Visual Studio 2015 และทำการทดสอบกับตัวอย่างโครงข้อแข็งเหล็ก 2 ตัวอย่าง เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการออกแบบด้วยอัลกอริทึม CSA จากนั้นทำการเปรียบเทียบผลการทดสอบที่ได้กับอัลกอริทึมแบบอื่นจากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึม CSA มีประสิทธิภาพสูงมากในการค้นหาคำตอบที่เหมาะสมและมีผลการทดสอบทางสถิติที่ดีกว่าอัลกอริทึมแบบอื่นที่ถูกนำมาเปรียบเทียบ

คำสำคัญ: อัลกอริทึมการค้นหาคำของอิก้า; การออกแบบโครงข้อแข็งเหล็ก; การออกแบบที่เหมาะสม

ABSTRACT

This research presents the application of Crow search algorithm (CSA) to design the optimal steel frames according LRFD method by AISC standard. W-shaped sections is selected from the standard tables of steel sections specified by the AISC. The CSA works based on this idea that crows store their excess food in hiding places and retrieve it when the food is needed. The algorithm is developed by Visual Studio 2015. In order to indicate the efficiency of CSA will test by steel frames 2 examples and compare the result of CSA with the result of other algorithms from literature. The result indicate CSA is high performance and has statistical results better than other algorithms that were compared.

KEYWORDS: Crow search algorithm; Design of steel frames; Optimum design

1. บทนำ

ในช่วงทศวรรษที่ผ่านมาเทคนิคการหาค่าที่เหมาะสมจำนวนมากถูกพัฒนาสำหรับการออกแบบโครงสร้าง ซึ่งเมตาฮิวริสติกอัลกอริทึม (Metaheuristic algorithm) ก็เป็นหนึ่งในเทคนิคเหล่านั้นที่ได้รับการยืนยันแล้วว่ามีประสิทธิภาพที่สูง [1] โดยได้แนวคิดบันดาลใจจากปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ พฤติกรรมของสัตว์ หรือแนวคิดการวิวัฒนาการของธรรมชาติ [2] เช่น อัลกอริทึมวัวจักร

Sittisak Ansanant¹, Raungrut Cheerarot^{2*}

¹Student, Field of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Mahasarakham University

²Associate Professor, Field of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Mahasarakham University

ของน้ำ (WCA) [3] อัลกอริทึมการหาค่าที่เหมาะสมแบบอาณานิคมมด (ACO) [4] และอัลกอริทึมเชิงพันธุกรรม (GA) [5] ซึ่งเมตาฮิวริสติกอัลกอริทึมมีหลักการการทำงานเริ่มจากสร้างคำตอบเริ่มต้นให้กับประชากร โดยการสุ่มและจากนั้นจะค่อยๆปรับปรุงคำตอบของแต่ละประชากรอย่างเป็นระบบ [1] และด้วยหลักการการทำงานที่เป็นแบบสุ่มนี้จึงทำให้สามารถหลบหลีกค่าคำตอบที่เหมาะสมเฉพาะแห่ง (Local optimum) ได้ดี [2] จึงเหมาะสำหรับแก้ปัญหาในการออกแบบที่เหมาะสมทางวิศวกรรมที่มีความซับซ้อน ซึ่งมีค่าที่เหมาะสมเฉพาะแห่งหลายตำแหน่ง โดยเฉพาะตัวแปรการออกแบบที่ไม่มีความต่อเนื่อง

อัลกอริทึมการค้นหาค้างของอีกา (Crow search algorithm, CSA) เป็นหนึ่งในเมตาฮิวริสติกอัลกอริทึมที่เลียนแบบพฤติกรรมการออกหาอาหารและเก็บซ่อนอาหารของอีกา [6] ซึ่ง Oliva และคณะ [7] ใช้อัลกอริทึม CSA ในการแบ่งข้อมูลภาพของสมองที่ถ่ายด้วยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (Magnetic resonance) โดยผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึม CSA ให้ผลลัพธ์ด้านคุณภาพและความสม่ำเสมอที่ดีกว่าอัลกอริทึมแบบอื่น นอกจากนี้ Liu และคณะ [8] ได้นำอัลกอริทึม CSA เข้ามาใช้ในการหาค่าน้ำหนักที่เหมาะสมในชั้นนำเข้าข้อมูล (Input weights) และในชั้นซ่อน (Hidden-layer) ของแบบจำลอง ELM (Extreme Learning Machine) เพื่อใช้ประเมินคุณภาพน้ำใต้ดิน จากผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่าการประเมินความแม่นยำและความสามารถทั่วไปของแบบจำลองอยู่ในระดับสูง ต่อมา Sultana และคณะ [9] ได้ทำนากาลังรับแรงอัดและแรงดึงสูงสุดและหาค่าตัวแปรที่เหมาะสมที่สุดของคอนกรีตเสริมเส้นใยปอ โดยใช้อัลกอริทึม CSA ร่วมกับ วิธีพื้นผิวการตอบสนอง (Response Surface Methodology)

จากงานวิจัยที่ผ่านมาแสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึม CSA สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมที่มีความซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ และยังไม่พบว่าอัลกอริทึม CSA เคยถูกใช้สำหรับออกแบบโครงสร้างเชิงเหล็กที่เหมาะสม ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงนำเสนอการประยุกต์ใช้อัลกอริทึม CSA สำหรับออกแบบโครงสร้างเชิงเหล็ก ตามมาตรฐาน AISC วิธีคำนวณความต้านทานและน้ำหนักบรรทุก (LRFD) [10] ที่มีความซับซ้อนและมีตัวแปรการออกแบบที่ไม่มีความต่อเนื่อง เพื่อหาน้ำหนักรวมของโครงสร้างที่น้อยที่สุด โดยเลือกใช้ตัวอย่างในการทดสอบจำนวน 2 ตัวอย่างจากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง [4, 5, 11] และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของผลการออกแบบที่เหมาะสมของอัลกอริทึม CSA กับอัลกอริทึมแบบอื่นๆ

2. อัลกอริทึมการค้นหาค้างของอีกา

อีกามีพฤติกรรมออกหาอาหารและเก็บซ่อนอาหารที่เหลือของพวกมันไว้ในบางแห่ง และนำมาใช้เมื่อยามจำเป็น นอกจากนี้อีกายังมีพฤติกรรมแอบติดตามอีกาตัวอื่นเพื่อที่จะขโมยอาหาร การหาแหล่งอาหารของอีกาตัวอื่นที่ถูกซ่อนไว้นั้นไม่ใช่เรื่องง่าย เพราะหากมันพบว่าอีกาอีกตัวกำลังตามมา มันจะพยายามหาอาหารโดยไปที่ตำแหน่งอื่น สำหรับการย้ายสถานที่เก็บซ่อนอาหารของพวกมันจะทำให้หลีกเลี่ยงการถูกขโมย โดยพวกมันจะใช้ประสบการณ์ของพวกมันในการทำนายพฤติกรรมของอีกาตัวอื่นๆที่จะมาขโมยอาหารและสามารถกำหนดเส้นทางที่ปลอดภัยที่สุดเพื่อป้องกันสถานที่เก็บอาหารของพวกมันจากการถูกขโมย

อัลกอริทึมการค้นหาค้างของอีกา (Crow search algorithm, CSA) ถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Askarzadeh [6] ในปี ค.ศ. 2016 ซึ่งเป็นการจำลองพฤติกรรมที่ชาญฉลาดของอีกาในการจัดการอาหาร โดยพฤติกรรมหลักของอีกามีดังนี้คือ

- อีกาเป็นสัตว์ที่อาศัยอยู่กันเป็นฝูง
- อีกามีพฤติกรรมเก็บซ่อนอาหารและสามารถจดจำตำแหน่งของสถานที่ที่เก็บซ่อนอาหารของพวกมันได้
- อีกามีพฤติกรรมขโมยอาหารกันเอง โดยอีกาจะแอบตามอีกาตัวอื่นเพื่อที่จะขโมยอาหาร
- อีกาจะปกป้องสถานที่ที่ซ่อนอาหารของมันจากการถูกขโมยโดยใช้หลักการความน่าจะเป็น

โดยอัลกอริทึมการค้นหาค้างของอีกามีขั้นตอนดังต่อไปนี้

2.1 การสร้างตำแหน่งและหน่วยความจำของอิก้าเริ่มต้น

ตำแหน่งเริ่มต้นของอิก้าจะถูกสร้างโดยการสุ่มทั่วพื้นที่การค้นหา โดยอิก้าแต่ละตัวจะถือว่าเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหา และมีตัวแปรในการตัดสินใจจำนวนใดๆ ซึ่งในรอบการทำซ้ำเริ่มต้นอิก้าจะไม่มีประสบการณ์ในการเก็บอาหาร ดังนั้นจึงทำการสมมุติให้พวกมันเก็บซ่อนอาหารไว้ในตำแหน่งเริ่มต้นใดๆ

2.2 การสร้างตำแหน่งใหม่

ตำแหน่งใหม่ของอิก้าจะมี 2 กรณี คือ เมื่อสัญลักษณ์ i แทนอิก้าที่กำลังไปขโมยอาหาร และ j แทนอิก้าตัวที่กำลังไปยังสถานที่เก็บซ่อนอาหาร โดยในกรณีที่ 1 อิก้าตัวที่ j ไม่รู้ว่าอิก้าตัวที่ i ตามมาดังนั้นจึงทำให้อิก้าตัวที่ i ขยับเข้าใกล้สถานที่เก็บซ่อนอาหารของอิก้าตัวที่ j สำหรับกรณีที่ 2 อิก้าตัวที่ j รู้ว่าอิก้าตัวที่ i ตามมา ดังนั้นเพื่อเป็นการป้องกันสถานที่เก็บซ่อนอาหารของมันไม่ให้ อิก้าตัวที่ i มาขโมยอาหาร อิก้าตัวที่ j จะหลอกให้อิก้าตัวที่ i ไปยังตำแหน่งอื่น ซึ่งทั้ง 2 กรณีที่กล่าวมานี้จะถูกแบ่งโดยใช้พารามิเตอร์ความรู้ของอิก้า (AP) หาก $AP \geq \text{random} [0,1]$ ตำแหน่งใหม่ของอิก้าตัวที่ i จะถูกสร้างโดยใช้สมการที่ 1 ซึ่งหมายถึง อิก้าตัวที่ j ไม่รู้ว่าอิก้าตัวที่ i ตามมา (กรณีที่ 1) แต่ถ้านอกเหนือจากเงื่อนไขที่กล่าวมา ตำแหน่งใหม่ของอิก้าตัวที่ i จะถูกสร้างโดยการสุ่มดังสมการที่ 2 (กรณีที่ 2)

$$x^{i,iter+1} = x^{i,iter} + r_i fl^{i,iter} (m^{j,iter} - x^{i,iter}) \quad (1)$$

$$x^{i,iter+1} = a \text{ random position} \quad (2)$$

เมื่อ $x^{i,iter+1}$ คือ ตำแหน่งใหม่ของอิก้าตัวที่ i $x^{i,iter}$ คือ ตำแหน่งปัจจุบันของอิก้าตัวที่ i r_i คือ ค่าสุ่มแบบกระจายมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 $m^{j,iter}$ คือ ตำแหน่งที่อิก้าตัวที่ j เก็บซ่อนอาหารของมันเอาไว้ $fl^{i,iter}$ คือ ค่าพารามิเตอร์ระยะทางในการบินของอิก้าตัวที่ i และ $iter$ รอบการทำซ้ำปัจจุบัน

2.3 การแทนที่หน่วยความจำของอิก้า

ถ้าหากอิก้าตัวที่ i พบแหล่งซ่อนอาหารใหม่ที่ดีกว่าแหล่งเดิมโดยพิจารณาจากค่าความเหมาะสม (Fitness) หน่วยความจำของอิก้าจะถูกแทนที่ด้วยตำแหน่งใหม่ของแหล่งซ่อนอาหาร

3. มาตรฐานการออกแบบ AISC- LRFD

ในการออกแบบโครงสร้างของโครงข้อแข็งเหล็กจะพิจารณาออกแบบเพื่อรับแรงตามแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด โดยโครงสร้าง คาน-เสา เป็นการรวมโครงสร้างที่รับแรงตามแนวแกนและรับโมเมนต์ดัดเข้าด้วยกัน ซึ่งพฤติกรรมการรับแรงจะมีการรวมผลของโมเมนต์ลำดับสอง ($P\Delta$ effect) ดังนั้นการวิบัติของคาน-เสาส่วนใหญ่จึงเป็นแบบการโก่งด้านข้าง ซึ่งเป็นผลมาจากโครงสร้างนั้นต้องรับโมเมนต์ดัดเพิ่มขึ้นมากกว่าเดิม โดยมาตรฐาน AISC [10] ได้กำหนดสมการสำหรับการคำนวณออกแบบโครงสร้างคาน-เสาไว้ดังสมการที่ 3

$$\frac{P_u}{2\phi P_n} + \left(\frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi_b M_{ny}} \right) \leq 1 \quad \text{ถ้า} \quad \frac{P_u}{\phi P_n} \geq 0.2$$

$$\frac{P_u}{\phi P_n} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi_b M_{ny}} \right) \leq 1 \quad \text{ถ้า} \quad \frac{P_u}{\phi P_n} < 0.2 \quad (3)$$

เมื่อ P_u คือ แรงตามแนวแกนประลัย (แรงดึงหรือแรงอัด) ที่รวมผลของโมเมนต์ลำดับสองแล้ว P_n คือ กำลังรับแรงตามแนวแกนของหน้าตัด ϕ คือ ตัวคูณลดกำลังมีค่าเท่ากับ 0.85 สำหรับชิ้นส่วนรับแรงอัดและเท่ากับ 0.9 สำหรับชิ้นส่วนรับแรงดึง M_{ux} และ M_{uy} คือ โมเมนต์ดัดประลัยที่รวมผลของโมเมนต์ลำดับสองแล้ว M_{nx} และ M_{ny} คือ กำลังรับโมเมนต์ดัดของหน้าตัด ϕ_b คือ ตัวคูณลดกำลังสำหรับโมเมนต์ดัดเท่ากับ 0.9 ส่วนกำลังรับแรงดึงและกำลังรับแรงอัดของหน้าตัดมีค่าดังสมการที่ 4 และ 5 ตามลำดับ

$$P_n = F_y A_g \quad (4)$$

$$P_n = F_{cr} A_g \quad (5)$$

เมื่อ A_g คือพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน F_y คือหน่วยแรงครากของชิ้นส่วน F_{cr} คือหน่วยแรงอัดวิกฤตซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ 6

$$\begin{aligned} F_{cr} &= 0.877 F_e & \text{ถ้า } KL/r > 4.71 \sqrt{E/F_y} \\ F_{cr} &= 0.658 \left(\frac{F_y}{F_e} \right) F_y & \text{ถ้า } KL/r \leq 4.71 \sqrt{E/F_y} \end{aligned} \quad (6)$$

ซึ่ง E คือค่าโมดูลัสยืดหยุ่น L คือ ความยาวของชิ้นส่วน F_e คือ หน่วยแรงอัดอีลาสติกจากสมการของออยเลอร์มีค่าเท่ากับ $\pi^2 E / (KL/r)^2$ K คือ สัมประสิทธิ์ความยาวประสิทธิผลของโครงข้อแข็งที่มีการเคลื่อนที่ด้านข้างสามารถประมาณได้ดังสมการที่ 7 ซึ่งสมการนี้ถูกพัฒนาขึ้น โดย Dumonteil [12] ซึ่งมีความแม่นยำตั้งแต่ร้อยละ -1 ถึง 2 ของค่าที่ได้จาก Alignment charts ตามมาตรฐาน AISC

$$K = \sqrt{\frac{1.6 G_A G_B + 4.0 (G_A + G_B) + 7.5}{G_A + G_B + 7.5}} \quad (7)$$

เมื่อ G_A และ G_B เป็นอัตราส่วนระหว่างผลรวมสถิติเอนสของเสากับผลรวมสถิติเอนสของคานโดยสัญลักษณ์ A และ B ใช้แทนตำแหน่งปลายเสาทั้งสองข้าง ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\sum (EI/L)_c / \sum (EI/L)_b$ เมื่อ I คือ โมเมนต์อินเนอร์เซียของเสาและคาน L คือ ความยาวของเสาและคาน

โมเมนต์ดัดและแรงตามแนวแกนประลัยที่รวมผลของโมเมนต์ลำดับสองแล้ว คำนวณได้ตามมาตรฐาน AISC-LRFD ดังสมการที่ 8 และ 9

$$M_u = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (8)$$

$$P_u = P_{nt} + B_2 P_{lt} \quad (9)$$

เมื่อ M_{nt} และ P_{nt} คือ โมเมนต์ดัดและแรงอัดตามแนวแกนปรับค่าลำดับหนึ่งเมื่อโครงข้อแข็งไม่มีการเคลื่อนตัวด้านข้าง ส่วน M_{lt} และ P_{lt} คือ โมเมนต์ดัดและแรงอัดตามแนวแกนปรับค่าลำดับหนึ่งเมื่อโครงข้อแข็งมีการเคลื่อนตัวด้านข้าง B_1 คือ ตัวคูณขยายค่าโมเมนต์ดัดในโครงข้อแข็งที่ไม่มีการเคลื่อนตัวด้านข้าง ซึ่งคำนวณได้ดังสมการที่ 10

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - P_u / P_{e1}} \quad (10)$$

โดย P_{cl} คือ หน่วยแรงอัดอีลาสติกจากสมการของออยเลอร์ ซึ่ง $K=1$ C_m คือ ค่าสัมประสิทธิ์ที่ใช้คู่กับโมเมนต์คำนวณได้ดังสมการที่ 11

$$C_m = 0.6 - 0.4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \quad (11)$$

สำหรับ B_2 คือ ตัวคูณขยายค่าโมเมนต์ดัดในโครงข้อแข็งที่มีการเคลื่อนตัวด้านข้าง ซึ่งคำนวณได้ดังสมการที่ 12

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{0.85} \frac{\Delta h}{h} \frac{P_{story}}{H}} \quad (12)$$

เมื่อ Δh คือ ระยะเคลื่อนที่ในแนวราบระหว่างชั้นลำดับหนึ่ง (first-order inter-story drift) h คือ ความสูงของชั้นที่พิจารณา H คือ แรงเฉือนในทิศทางการเคลื่อนที่ของชั้นที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่เป็นระยะ Δh และ P_{story} คือ ผลรวมของน้ำหนักกระทำในแนวดิ่งของเสาทุกต้นในชั้นที่พิจารณา

4. วิธีดำเนินงานวิจัย

4.1 ขอบเขตของงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ใช้ภาษา Visual Basic ในโปรแกรม Visual Studio 2015 สำหรับพัฒนาโปรแกรมการออกแบบโครงข้อแข็งเหล็กที่เหมาะสม ซึ่งจะเลือกใช้เหล็กรูปพรรณหน้าตัดเหล็กปีกกว้าง (Wide flange) จากฐานข้อมูล AISC จำนวน 267 หน้าตัด โดยจัดเรียงลำดับตามพื้นที่หน้าตัดจากน้อยไปหามาก โดยเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการทดสอบใช้ระบบปฏิบัติการวินโดวส์ 10 หน่วยประมวลผลกลาง (CPU) Intel Core i3-7100 @ 3.90 GHz และหน่วยความจำ (RAM) 8.00 GB

4.2 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ในการออกแบบโครงข้อแข็งเหล็กโดยทั่วไปฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของการออกแบบที่เหมาะสม คือ ผลรวมของน้ำหนักที่น้อยที่สุดของโครงสร้าง ซึ่งมีค่าเป็นไปตามสมการที่ 13

$$\text{minimize } W = \sum_{i=1}^{nm} A_i \rho_i L_i \quad (13)$$

เมื่อ W คือ น้ำหนักรวมของโครงสร้าง A คือ พื้นที่หน้าตัดของเหล็ก ρ คือ หน่วยน้ำหนักของเหล็ก L คือ ความยาวของชิ้นส่วน nm คือ จำนวนชิ้นส่วนในโครงข้อแข็ง ซึ่งในการออกแบบโครงข้อแข็งเหล็กข้อจำกัดของการออกแบบจะต้องเป็นไปตามมาตรฐาน AISC-LRFD [10] โดยประกอบด้วย ค่ารับน้ำหนักและระยะการเคลื่อนที่ด้านข้าง ซึ่งในงานวิจัยนี้จะเปลี่ยนจากการหาค่าที่เหมาะสมแบบมีข้อจำกัดเป็นแบบไม่มีข้อจำกัดโดยใช้ฟังก์ชันการปรับโทษเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ดังสมการที่ 14

$$F = W(1 + C)^\varepsilon \quad (14)$$

เมื่อ W คือ น้ำหนักรวมของโครงสร้าง ε คือ เลขยกกำลังของฟังก์ชันการปรับโทษซึ่งมีค่ามากกว่า 1 และ C คือ ผลรวมของค่าคงที่การละเมิดข้อจำกัดซึ่งคำนวณได้ดังสมการที่ 15

$$C = \sum_{i=1}^{ns} C_i^d + \sum_{i=1}^{nm} C_i^I \quad (15)$$

เมื่อ ns คือ จำนวนชั้นในโครงข้อแข็ง และ nm คือ จำนวนของชิ้นส่วนในโครงข้อแข็ง C_i^d คือ ค่าคงที่การละเมิดข้อจำกัดของการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ $\left| \frac{d_i}{d_i^a} \right| - 1$ และจะต้องมีค่าไม่น้อยกว่า 0 โดยที่ d_i คือ ระยะการเคลื่อนที่เกิดขึ้น d_i^a คือ ระยะการเคลื่อนที่ที่ยอมให้และ C_i^I คือ ค่าคงที่การละเมิดข้อจำกัดของสมการ Interaction สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ 16 และต้องมีค่าไม่น้อยกว่า 0

$$C_i^I = \frac{P_u}{2\phi P_n} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi_b M_{ny}} \right) - 1 \quad \text{สำหรับ } \frac{P_u}{\phi P_n} \geq 0.2$$

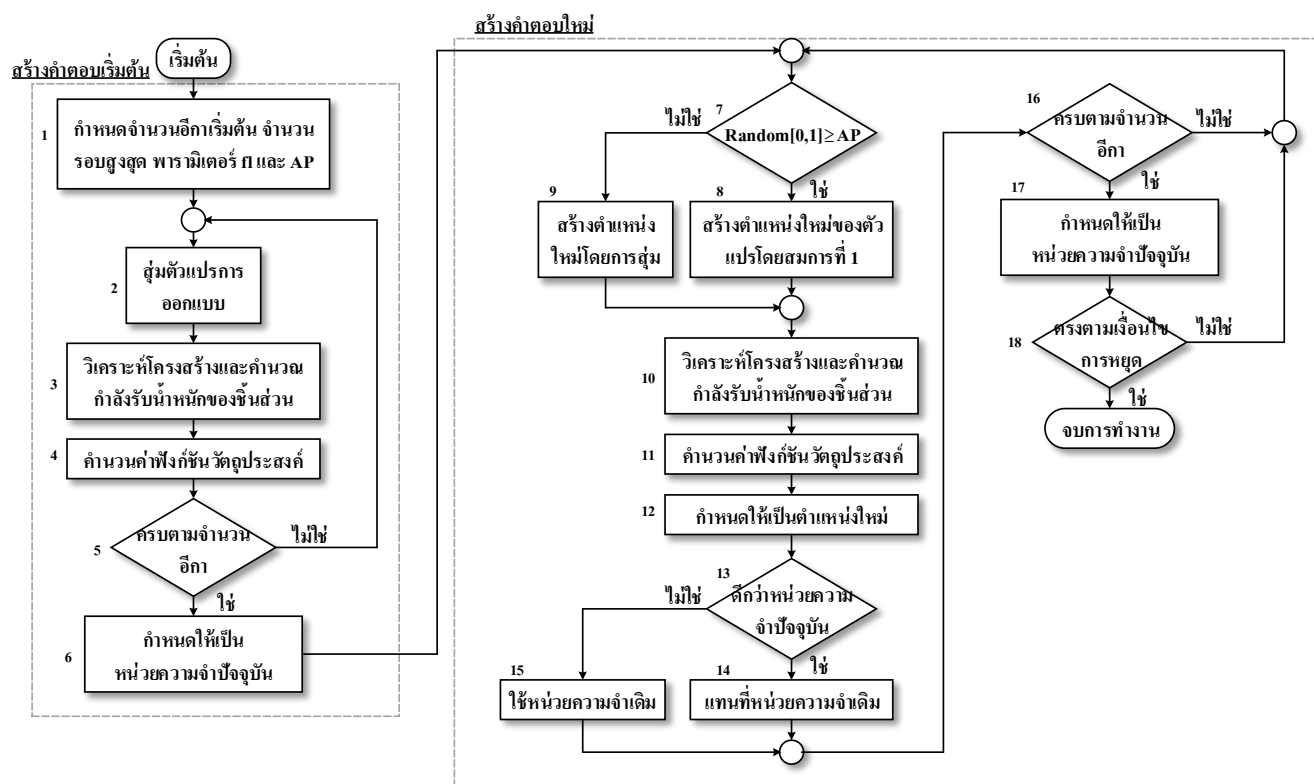
$$C_i^I = \frac{P_u}{\phi P_n} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi_b M_{ny}} \right) - 1 \quad \text{สำหรับ } \frac{P_u}{\phi P_n} < 0.2 \quad (16)$$

4.3 ขั้นตอนการประยุกต์ใช้อัลกอริทึม CSA ในการออกแบบโครงข้อแข็งเหล็กที่เหมาะสม

ในการออกแบบโครงข้อแข็งเหล็กที่เหมาะสมโดยอัลกอริทึม CSA แสดงในรูปที่ 1 ซึ่งสามารถอธิบายเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

- กำหนดจำนวนของอิก้าเริ่มต้น จำนวนรอบสูงสุด รวมทั้งพารามิเตอร์ η (พารามิเตอร์ระยะทางในการบินของอิก้า) และ AP (พารามิเตอร์ความรู้ของอิก้า)
- สุ่มตัวแปรการออกแบบที่อยู่ภายในขอบเขตการค้นหาจากตารางหลักรูปพรรณหน้าตัดเหล็กปีกกว้าง (Wide flange)
- ทำการวิเคราะห์โครงสร้างและคำนวณกำลังรับน้ำหนักของชิ้นส่วน
- คำนวณค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (ฟังก์ชันการปรับโทษ)
- ตรวจสอบจำนวนของคำตอบว่าครบตามจำนวนอิก้าที่กำหนดไว้หรือไม่ ถ้าไม่ครบให้ทำซ้ำในขั้นตอนที่ 2 อีกครั้ง
- กำหนดคำตอบที่ได้ให้เป็นหน่วยความจำปัจจุบันของอิก้า
- สุ่มค่าระหว่าง 0 ถึง 1 และตรวจสอบว่ามีค่ามากกว่าหรือเท่ากับพารามิเตอร์ AP หรือไม่
- ถ้าค่าสุ่มในขั้นตอนที่ 7 มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับพารามิเตอร์ AP จะทำการสร้างตำแหน่งใหม่ของตัวแปรการออกแบบโดยใช้สมการที่ 1
- ในกรณีที่ค่าสุ่มในขั้นตอนที่ 7 น้อยกว่าพารามิเตอร์ AP จะทำการสร้างตำแหน่งใหม่ของตัวแปรการออกแบบโดยการสุ่มตัวแปรการออกแบบจากตารางหลักอีกครั้ง
- ทำการวิเคราะห์โครงสร้างและคำนวณกำลังรับน้ำหนักของชิ้นส่วน
- คำนวณค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (ฟังก์ชันการปรับโทษ)
- กำหนดคำตอบที่ได้ให้เป็นตำแหน่งใหม่ของตัวแปรการออกแบบ
- ตรวจสอบว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของตำแหน่งใหม่ดีกว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์หน่วยความจำปัจจุบันหรือไม่
- ถ้าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของตำแหน่งใหม่มีค่าดีกว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของหน่วยความจำปัจจุบัน จะทำการแทนที่ตัวแปรการออกแบบของหน่วยความจำปัจจุบันโดยตัวแปรการออกแบบของตำแหน่งใหม่
- ในกรณีที่ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของตำแหน่งใหม่มีค่าไม่ดีกว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของหน่วยความจำปัจจุบัน จะใช้ตัวแปรการออกแบบของหน่วยความจำปัจจุบันเดิม
- ตรวจสอบจำนวนของคำตอบว่าครบตามจำนวนอิก้าที่กำหนดไว้หรือไม่ ถ้าไม่ครบให้ทำซ้ำในขั้นตอนที่ 7 อีกครั้ง

17. กำหนดหน่วยความจำใหม่ให้เป็นหน่วยความจำปัจจุบัน
18. ตรวจสอบเงื่อนไขการหยุด ซึ่งอัลกอริทึมจะหยุดทำงานเมื่อครบตามจำนวนรอบสูงสุดที่กำหนด ถ้าไม่ครบจะทำซ้ำในขั้นตอนที่ 7 อีกครั้ง

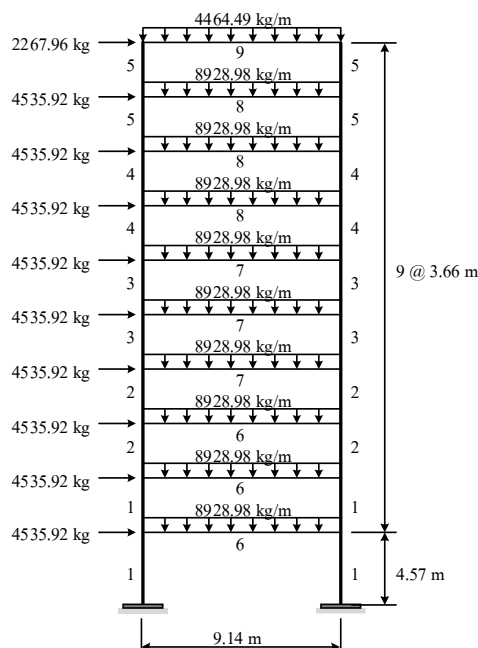


รูปที่ 1 ขั้นตอนการออกแบบ โครงสร้างเชิงหลักที่เหมาะสมของอัลกอริทึม CSA

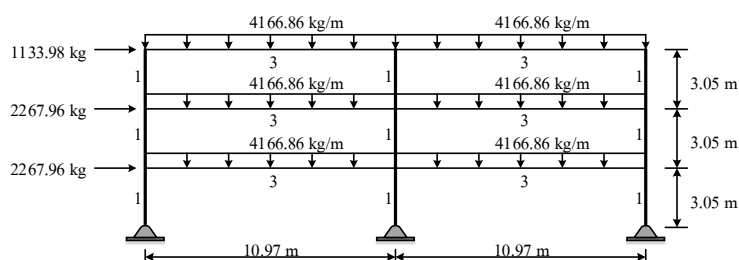
5. ตัวอย่างและผลการทดสอบ

ในงานวิจัยนี้เลือกใช้ตัวอย่างการทดสอบจากงานวิจัยอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง [4, 5, 11] จำนวน 2 ตัวอย่าง ซึ่งประกอบด้วย โครงสร้างแข็ง 1 ช่วง 10 ชั้น และโครงสร้างแข็ง 2 ช่วง 3 ชั้น ดังรูปที่ 2 (ก) และ 2 (ข) โดยเลขยกกำลังของฟังก์ชันการปรับโทษ (ε) กำหนดให้เท่ากับ 2 ในทุกๆ ตัวอย่าง และทำการทดสอบในแต่ละตัวอย่างจำนวน 30 ครั้ง เพื่อหาค่าสถิติของการออกแบบที่เหมาะสม

สำหรับจำนวนประชากรของอิก้าในทั้ง 2 ตัวอย่างจะกำหนดเท่ากับ 20 ตัว และกำหนดจำนวนรอบสูงสุดในแต่ละตัวอย่างที่ 1 เท่ากับ 700 รอบ และเท่ากับ 30 รอบ ในตัวอย่างที่ 2 และเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับการออกแบบ โครงสร้างแข็งหลักได้ทำการทดสอบอัลกอริทึมกับตัวอย่างที่ 1 โครงสร้างแข็ง 1 ช่วง 10 ชั้น โดยกำหนดพารามิเตอร์ AP เท่ากับ 0.1 และ 0.2 พารามิเตอร์ Π เท่ากับ 1.4 1.6 1.8 และ 2.0 ซึ่งผลการทดสอบแสดงในตารางที่ 1 โดยพบว่าทุกชุดของพารามิเตอร์สามารถค้นพบคำตอบที่เหมาะสมเท่ากันและยังพบว่าเมื่อ $AP = 0.1$ และ $\Pi = 1.8$ ให้ผลการทดสอบทางสถิติโดยรวมที่ดีที่สุด ดังนั้นจึงใช้พารามิเตอร์นี้กับทุกตัวอย่างการทดสอบ



(ก) ตัวอย่างที่ 1 โครงข้อแข็ง 1 ช่วง 10 ชั้น



(ข) ตัวอย่างที่ 2 โครงข้อแข็ง 2 ช่วง 3 ชั้น

รูปที่ 2 ตัวอย่าง โครงข้อแข็ง

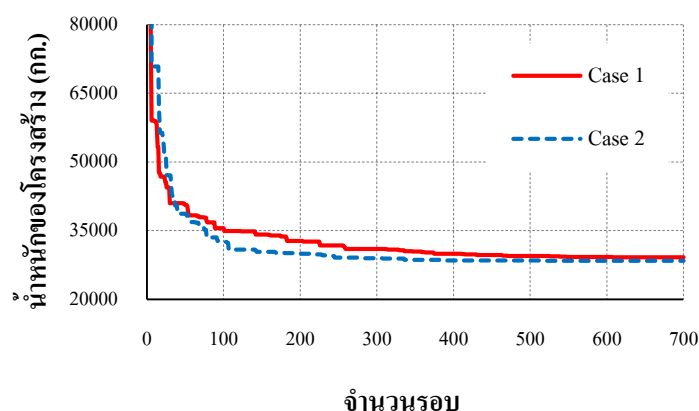
ตารางที่ 1 ผลการทดสอบการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของอัลกอริทึม CSA

ค่าพารามิเตอร์/ ผลทางสถิติ	AP=0.1				AP=0.2			
	$\eta=1.4$	$\eta=1.6$	$\eta=1.8$	$\eta=2.0$	$\eta=1.4$	$\eta=1.6$	$\eta=1.8$	$\eta=2.0$
น้ำหนักที่น้อยที่สุด (กก.)	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53
น้ำหนักที่มากที่สุด (กก.)	33017.11	30515.36	30356.25	29792.98	56195.59	57014.59	30515.36	30140.45
น้ำหนักเฉลี่ย (กก.)	29703.98	29369.25	29292.86	29330.36	30732.58	30350.31	29389.91	29595.98
ค่ามัธยฐาน (กก.)	29326.64	29167.53	29167.53	29181.25	29439.11	29326.64	29312.92	29560.72
ค่าฐานนิยม (กก.)	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53	29167.53	29551.58
ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (กก.)	876.63	434.26	255.64	199.01	4882.17	5047.71	314.59	251.21
ร้อยละการค้นพบคำตอบที่ เหมาะสม	46.67	66.67	66.67	36.67	33.33	40	36.67	6.67

5.1 ตัวอย่างที่ 1 โครงข้อแข็ง 1 ช่วง 10 ชั้น

ตัวอย่างที่ 1 เป็นการออกแบบโครงข้อแข็ง 1 ช่วง จำนวน 10 ชั้น ซึ่งมีขนาดและแรงกระทำในแต่ละชั้นดังรูปที่ 2(ก) โดยมี โมดูลัสยืดหยุ่น (E) เท่ากับ 2.04×10^6 กก./ตร.ซม. และ หน่วยแรงครากเท่ากับ 2531.05 กก./ตร.ซม. ค่าสัมประสิทธิ์ความยาว ประสิทธิภาพ (K_y) ที่มีการเคลื่อนที่ด้านข้างของเสาแต่ละต้นมีค่าน้อยกว่า 1 ซึ่งคำนวณได้จากสมการของ Dumonteil [13] และ กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความยาวประสิทธิภาพรอบแกน Y (K_y) เท่ากับ 1 ซึ่งเสาแต่ละต้นถูกกำหนดให้ไม่มีการยัดตั้งตลอดช่วงความ ยาวและสำหรับคานถูกกำหนดให้มีการยัดตั้งตลอดระยะ 1/5 ของความยาว โดยจัดกลุ่มของโครงสร้างเสาและคานออกเป็น 5 และ 4 กลุ่ม ตามลำดับ และกำหนดหน้าตัดสำหรับออกแบบคานทั้ง 4 กลุ่ม จากตารางเหล็กปีกกว้างจำนวน 267 หน้าตัด และกำหนดหน้า ตัดสำหรับออกแบบเสาคือ W360 และ W310 จำนวน 66 หน้าตัด โดยมีคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด 6.36×10^{18} คำตอบ ซึ่งใน ตัวอย่างนี้การควบคุมการเคลื่อนที่ด้านข้างในงานวิจัยที่ผ่านมามี 2 กรณี โดยกรณีที่ 1 Pezeshk [5] ควบคุมการเคลื่อนที่ด้านข้างของ แต่ละชั้น (Interstory drift) ต้องมีค่าน้อยกว่า ความสูงของชั้น/300 และ กรณีที่ 2 Camp [4] และ Togan [11] ควบคุมการเคลื่อนที่ ด้านข้างของชั้นหลังคา (Displacement) ต้องมีค่าน้อยกว่า ความสูงของโครงสร้าง/300 ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะทำการศึกษาทั้งสอง กรณีและเปรียบเทียบผลการออกแบบที่เหมาะสมกับงานวิจัยที่ผ่านมา

ผลการออกแบบที่เหมาะสมแสดงดังตารางที่ 2 โดยในกรณีที่ 1 พบว่าอัลกอริทึม CSA ค้นพบคำตอบที่เหมาะสมกว่า อัลกอริทึม GA [5] โดยมีร้อยละความแตกต่างเท่ากับ 1.32 แต่อัลกอริทึม CSA ใช้รอบการค้นหามากกว่า และในกรณีที่ 2 อัลกอริทึม CSA ค้นพบคำตอบที่เหมาะสมได้เท่ากับกับอัลกอริทึม ACO [4] และ TLBO [11] โดยอัลกอริทึม CSA มีคำตอบที่เหมาะสมเฉลี่ย และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ต่ำกว่าอัลกอริทึม ACO โดยมีร้อยละความแตกต่างของคำตอบเฉลี่ยเท่ากับ 1.00 แต่อัลกอริทึม CSA ใช้จำนวนรอบการการวิเคราะห์มากกว่า ซึ่งลักษณะการลู่เข้าหาคำตอบที่เหมาะสมของอัลกอริทึม CSA สำหรับกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 แสดงดังรูปที่ 3 โดยจากรูปแสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึม CSA มีอัตราการลู่เข้าหาคำตอบอย่างรวดเร็ว โดยในกรณีที่ 1 อัลกอริทึม CSA เริ่มค้นพบคำตอบที่เหมาะสมในรอบที่ 608 และในกรณีที่ 2 อัลกอริทึม CSA เริ่มค้นพบคำตอบที่เหมาะสมในรอบที่ 522



รูปที่ 3 การลู่เข้าหาคำตอบที่เหมาะสมของอัลกอริทึม CSA ในตัวอย่างที่ 1 โครงข้อแข็ง 1 ช่วง 10 ชั้น

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลการออกแบบที่เหมาะสมของตัวอย่างที่ 1 โครงข้อแข็ง 1 ช่วง 10 ชั้น

กลุ่ม	กรณีที่ 1		กรณีที่ 2		
	GA [5]	CSA (งานวิจัยนี้)	ACO [4]	TLBO [11]	CSA (งานวิจัยนี้)
1 (เสา ชั้น 1-2)	W360X347	W360X347	W360X347	W360X347	W360X347
2 (เสา ชั้น 3-4)	W360X262	W360X262	W360X262	W360X262	W360X262
3 (เสา ชั้น 5-6)	W360X237	W360X216	W360X216	W360X216	W360X216
4 (เสา ชั้น 7-8)	W360X147	W360X147	W360X147	W360X147	W360X147
5 (เสา ชั้น 9-10)	W310X117	W310X97	W310X97	W310X97	W310X97
6 (คานา ชั้น 1-3)	W840X176	W840X176	W760X161	W760X161	W760X161
7 (คานา ชั้น 4-6)	W760X134	W760X147	W760X134	W760X134	W760X134
8 (คานา ชั้น 7-9)	W690X125	W690X125	W690X125	W690X125	W690X125
9 (คานา ชั้น 10)	W610X82	W530X66	W530X66	W530X66	W530X66
น้ำหนัก (กก.)	29557.07	29167.53	28399.44	28399.44	28399.44
น้ำหนักเฉลี่ย (กก.)	-	29292.86	28716.03	-	28431.26
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (กก.)	-	255.64	310.26	-	64.73
จำนวนรอบการวิเคราะห์ (รอบ)	3000	14000	8300	4000	14000
ร้อยละความแตกต่างของน้ำหนัก	+1.32	0.00	0.00	0.00	0.00
ร้อยละความแตกต่างของน้ำหนักเฉลี่ย	-	0.00	+1.00	-	0.00

5.2 ตัวอย่างที่ 2 โครงข้อแข็ง 2 ช่วง 3 ชั้น

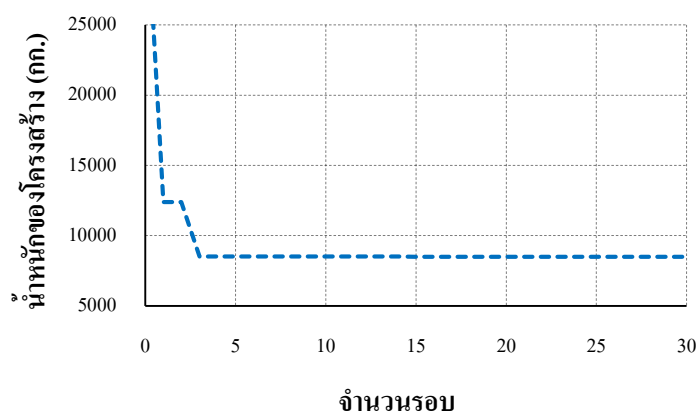
ตัวอย่างที่ 2 เป็นการออกแบบโครงข้อแข็ง 2 ช่วง จำนวน 3 ชั้น ซึ่งมีขนาดและแรงกระทำในแต่ละชั้นดังรูปที่ 2(ข) โดยมี โมดูลัสยืดหยุ่น (E) เท่ากับ 2.04×10^6 กก./ตร.ซม. และ หน่วยแรงครากเท่ากับ 2531.05 กก./ตร.ซม. ซึ่งจัดกลุ่มเสาและคานาเป็นอย่า ละ 1 กลุ่ม โดยกำหนดหน้าตัดสำหรับออกแบบคานาจากตารางเหล็กรูปตัว I จำนวน 267 หน้าตัด และหน้าตัดสำหรับออกแบบเสา คือ W250 จำนวน 18 หน้าตัด สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ความยาวประสิทธิผล (K_x) ที่มีการเคลื่อนที่ด้านข้างของเสาแต่ละต้น คำนวณได้จากสมการของ Dumonteil [13] และ กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความยาวประสิทธิผลรอบแกน Y (K_y) เท่ากับ 1 ซึ่ง กำหนดให้เสาแต่ละต้นไม่มีการยึดตรึงตลอดช่วงความยาวและสำหรับคานากำหนดให้มีการยึดตรึงตลอดระยะ 1/6 ของความยาว เพื่อให้สอดคล้องกับงานวิจัยที่นำมาเปรียบเทียบ โดยมีคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด 4806 คำตอบ ซึ่งในตัวอย่างนี้ไม่คำนึงถึงข้อจำกัด ด้านการเคลื่อนที่ด้านข้าง

จากการค้นหาคำตอบที่เหมาะสมโดยการแทนค่าหน้าตัดเหล็กทุกหน้าตัด พบว่าคำตอบที่เหมาะสมของโครงข้อแข็ง 2 ช่วง 3 ชั้นคือ 8504.01 กก. [4] โดยผลการออกแบบที่เหมาะสมแสดงดังตารางที่ 3 ซึ่งอัลกอริทึม CSA GA [5] และ ACO [4] สามารถ ค้นพบคำตอบที่เหมาะสมที่สุดได้เช่นกัน เมื่อทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการค้นหาคำตอบจากผลการทดสอบทางสถิติ พบว่าอัลกอริทึม CSA มีคำตอบที่เหมาะสมเฉลี่ยน้อยกว่าอัลกอริทึม GA และ ACO โดยมีร้อยละความแตกต่างเท่ากับ 16.41 และ

1.03 ตามลำดับ เมื่อพิจารณาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานพบว่าอัลกอริทึม CSA มีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานน้อยกว่าอัลกอริทึม GA และ ACO และสำหรับโอกาสในการค้นพบคำตอบที่เหมาะสมพบว่าอัลกอริทึม CSA มีโอกาสในการค้นพบร้อยละ 83 โดยใช้จำนวนรอบการวิเคราะห์เพียง 500 รอบ ซึ่งมากกว่าอัลกอริทึม GA ที่มีโอกาสในการค้นพบเพียงร้อยละ 20 โดยใช้จำนวนรอบการวิเคราะห์ 900 รอบ แต่น้อยกว่าอัลกอริทึม ACO ที่มีโอกาสในการค้นพบร้อยละ 84 โดยใช้จำนวนรอบการวิเคราะห์ 880 รอบ ซึ่งลักษณะการดูเข้าหาคำตอบที่เหมาะสมของอัลกอริทึม CSA แสดงดังรูปที่ 4 ซึ่งพบว่าอัลกอริทึม CSA ดูเข้าหาคำตอบอย่างรวดเร็วและเริ่มค้นพบคำตอบที่เหมาะสมในรอบที่ 15

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบผลการออกแบบที่เหมาะสมของตัวอย่างที่ 2 โครงข้อแฉ่ง 2 ช่วง 3 ชั้น

กลุ่ม	คำตอบที่เหมาะสม [4]	GA [5]	ACO [4]	CSA (งานวิจัยนี้)
1 (เสา)	W250x89	W250x89	W250x89	W250x89
2 (คาน)	W610x92	W610x92	W610x92	W610x92
น้ำหนัก (กก.)	8504.01	8504.01	8504.01	8504.01
น้ำหนักเฉลี่ย (กก.)	-	10015.32	8692.19	8602.83
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (กก.)	-	2639	767.93	224.75
จำนวนรอบการวิเคราะห์ (รอบ)	-	900	880	500
ร้อยละความแตกต่างของน้ำหนักเฉลี่ย (%)	-	+16.41	+1.03	0.00



รูปที่ 4 การดูเข้าหาคำตอบที่เหมาะสมของ CSA ในตัวอย่างที่ 2 โครงข้อแฉ่ง 2 ช่วง 3 ชั้น

6. สรุปผลการทดลอง

ในงานวิจัยนี้เสนอการประยุกต์ใช้อัลกอริทึม CSA ในการออกแบบ โครงข้อแฉ่งเหล็กที่เหมาะสมโดยใช้น้ำหนักของโครงสร้างเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ โดยมีการทดสอบเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับออกแบบ โครงข้อแฉ่งเหล็ก ซึ่งจากผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึม CSA มีประสิทธิภาพมากในการค้นหาคำตอบที่เหมาะสม โดยเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าอัลกอริทึม CSA ค้นพบคำตอบที่เหมาะสมและมีผลการทดสอบทางสถิติที่ดีกว่า และจากการทดสอบค่าพารามิเตอร์สำหรับออกแบบ โครงข้อแฉ่งเหล็ก พบว่า $AP = 0.1$ และ $\sigma = 1.8$ มีโอกาสการค้นพบคำตอบที่เหมาะสมและผลการทดสอบด้าน

สถิติที่ดีที่สุด ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าอัลกอริทึม CSA สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการออกแบบโครงข้อแข็งเหล็กที่เหมาะสมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณห้องวิจัยคอนกรีตและคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม ที่ให้การสนับสนุนงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Farshchin, M., Maniat, M., Camp, C. V., and Pezeshk, S. School based optimization algorithm for design of steel frames. *Engineering Structures*, 2018, 171, pp. 326-335.
- [2] Mirjalili, S., Mirjalili, S. M., and Lewis, A. Grey wolf optimizer. *Advances in engineering software*, 2014, 69, pp. 46-61
- [3] Eskandar, H., Sadollah, A., Bahreininejad, A., and Hamdi, M. Water cycle algorithm–A novel metaheuristic optimization method for solving constrained engineering optimization problems. *Computers & Structures*, 2012, 110, pp. 151-166.
- [4] Camp, C. V., Bichon, B. J., and Stovall, S. P. Design of steel frames using ant colony optimization. *Journal of structural engineering*, 2005, 131 (3), pp. 369-379.
- [5] Pezeshk, S., Camp, C., and Chen, D. Design of nonlinear framed structures using genetic optimization. *Journal of structural engineering*, 2000, 126 (3), pp. 382-388.
- [6] Askarzadeh, A. A novel metaheuristic method for solving constrained engineering optimization problems: crow search algorithm. *Computers & Structures*, 2016, 169, pp. 1-12.
- [7] Oliva, D., Hinojosa, S., Cuevas, E., Pajares, G., Avalos, O., and Gálvez, J. Cross entropy based thresholding for magnetic resonance brain images using Crow Search Algorithm. *Expert Systems with Applications*, 2017, 79, pp. 164-180.
- [8] Liu, D., Liu, C., Fu, Q., Li, T., Imran, K. M., Cui, S., and Abrar, F. M. ELM evaluation model of regional groundwater quality based on the crow search algorithm. *Ecological Indicators*, 2017, 81, pp. 302-314.
- [9] Sultana, N., Hossain, S. Z., Alam, M. S., Hashish, M., and Islam, M. An experimental investigation and modeling approach of response surface methodology coupled with crow search algorithm for optimizing the properties of jute fiber reinforced concrete. *Construction and Building Materials*, 2020, 243, pp. 118216.
- [10] American Institute of Steel Construction.. *Manual of steel construction, load and resistance factor design*, 3rd Edition. Chicago: LRFD-AISC, 2001
- [11] Togan, V. Design of planar steel frames using teaching–learning based optimization. *Engineering Structures*, 2012, 34, pp. 225-232.
- [12] Dumonteil, P. Simple equations for effective length factors. *Engineering Journal American Institute of Steel Construction*, 1992, 29 (3), pp. 111-115