



การประยุกต์วิธี Covariance Driven Stochastic Subspace Identification

สำหรับการระบุค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของอาคารสูง

SYSTEM IDENTIFICATION OF DYNAMIC PROPERTIES OF A TALL TOWER

BY COVARIANCE DRIVEN STOCHASTIC SUBSPACE IDENTIFICATION TECHNIQUE

เกรียงไกร ไชยเย็น¹ และ นคร กูวโรดม^{2*}

¹นิสิตปริญญาโท, ^{2*}รองศาสตราจารย์, ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

*Corresponding author, E-Mail: pnakhorn@engr.tu.ac.th

บทคัดย่อ

คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างประกอบด้วย ความถี่ธรรมชาติ รูปร่างการสั่นไหว และความหน่วง เป็นข้อมูลสำคัญที่ใช้ในการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างภายใต้แรงกระทำต่าง ๆ การระบุค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์สามารถทำได้จากการวิเคราะห์ผลตอบสนองของโครงสร้างจากการตรวจวัดจริง การระบุคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างทางวิศวกรรมโยธามีข้อจำกัดหลายประการ ได้แก่ เครื่องมือตรวจวัดที่มีจำนวนน้อย ผลการตอบสนองของโครงสร้างมีค่าต่ำ และไม่สามารถตรวจวัดแรงกระตุ้นที่กระทำกับโครงสร้างซึ่งมักมีลักษณะสุ่มตามธรรมชาติได้ จากข้อจำกัดดังกล่าวเพื่อให้ได้ผลของคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ที่ถูกต้องจึงจำเป็นต้องมีวิธีการวิเคราะห์ที่มีประสิทธิภาพ งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการนำวิธี Covariance Driven Stochastic Subspace Identification (SSI-COV) มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ และปรับปรุงความแม่นยำในการการระบุคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างอาคาร วิธี SSI-COV เป็นวิธีที่มีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่องและเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตามความถูกต้องของผลค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ขึ้นอยู่กับทางเลือกขนาดของเมทริกซ์โทเพลิตซ์ (Toeplitz Matrix) ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่ใช้ในกระบวนการวิเคราะห์ หากใช้ขนาดของ Toeplitz Matrix ที่เล็กเกินไปจะไม่สามารถวิเคราะห์คำตอบได้ และหากใช้ขนาดของ Toeplitz Matrix ที่ใหญ่เกินไปจะทำให้มีโหมดครบถ้วนเพิ่มขึ้นมา และอาจไม่สามารถวิเคราะห์ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างได้ งานวิจัยนี้ได้นำเสนอกระบวนการที่สามารถให้ผลคำตอบที่แม่นยำสูงโดยอัตโนมัติและไม่ต้องการตัดสินใจจากผู้วิเคราะห์ ด้วยการวิเคราะห์ข้อมูลจากการใช้ขนาดของเมทริกซ์โทเพลิตซ์ที่แตกต่างกันหลาย ๆ ขนาด และหาผลคำตอบที่ดีที่สุดจากการเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีตัวอย่างการศึกษา คือ การจำลองผลการตอบสนองของระบบมวลรวมที่มีระดับชั้นความถี่เท่ากับ 5 และการตอบสนองของอาคารที่ได้จากสัญญาณการโยกตัวของอาคารสูงจากข้อมูลการตรวจวัดจริง และพบว่าวิธี SSI-COV สามารถวิเคราะห์ให้ผลคำตอบที่มีเสถียรภาพ สามารถวิเคราะห์คำตอบในโหมดที่สูงขึ้น และสามารถวิเคราะห์ค่าความหน่วงได้ ผลการศึกษางานวิจัยนี้ได้แสดงถึงประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้เทคนิควิธี SSI-COV ในการวิเคราะห์ผลโดยอัตโนมัติจากการตรวจวัดต่อเนื่องซึ่งเป็นประโยชน์ในการตรวจสอบสมรรถนะระยะยาวของโครงสร้าง

คำสำคัญ: คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์; การสั่นไหวตามธรรมชาติ; การระบุคุณสมบัติของระบบ; การตรวจวัดการสั่นสะเทือน

ABSTRACT

Dynamic properties of structure such as natural frequency, mode shape and damping ratio are important parameters for understanding of structural responses under loads. They can be identified by analyzing dynamic responses measured from the structure. Identification of these parameters in civil engineering structures has several constraints due to the small number of sensors, low power vibration responses, and the input excitation is unknown and always random in nature. Therefore, an efficient identification scheme is required for accurate results. The objective of this research is to apply the Covariance Driven Stochastic Subspace (SSI-COV) Identification technique to improve an accuracy of dynamic property identification of structures. This technique has been developed as an efficient tool for system identification technique. However, the accuracy of the result is mainly dependent on selection of the size of an operating matrix called Toeplitz Matrix. SSI-COV method would fail to yield accurate results if the size of the Toeplitz Matrix is too small. On the contrary, if the size of the Toeplitz Matrix was set too large, the obtained results would be contaminated with some false modes and lead to difficulty in the identification. This study proposes a technique to yield the accurate result automatically by analysis of data using different matrix sizes and the solution is determined from the weighted average based on the frequency of occurrence of the result. Two examples are presented; simulated responses of 5 degree-of-freedom system and vibration responses from continuous measurement of a slender cylindrical shaped tower. The advantages of SSI-COV technique are; accurate and stable results, higher mode identification, and damping identification. The results also demonstrate the potential of an application of SSI-COV technique for an automatic identification of continuous measurement which could be useful for long-term structural health monitoring.

KEYWORDS: dynamic properties; ambient vibration; system identification; vibration monitoring

1. บทนำ

คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างที่สำคัญประกอบด้วย ความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) รูปร่างการสั่นไหว (Vibration mode shape) และ ความหน่วง (Damping) เป็นข้อมูลสำคัญที่ใช้ในการพิจารณาการสั่นแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ เพื่อศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างภายใต้น้ำหนักบรรทุกต่างๆ และสามารถใช้เป็นค่าอ้างอิงสำหรับการติดตามการเปลี่ยนแปลง คุณสมบัติของโครงสร้างในระยะยาวได้ การระบุค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์สามารถทำได้จากการวิเคราะห์ผลตอบสนองของ โครงสร้างจากการตรวจวัดโครงสร้างจริง ซึ่งวิธีที่นิยมใช้วิเคราะห์คือการพิจารณาผลตอบสนองในพิสัยความถี่ (Frequency domain) ผ่านการแปลงสัญญาณด้วยการวิเคราะห์ฟูริเยร์ (Fourier analysis) อย่างไรก็ตามวิธีดังกล่าวมีข้อจำกัดในเรื่องความถูกต้องของผลการ วิเคราะห์ จึงได้มีการพัฒนาวิธีการวิเคราะห์ผลตอบสนองในพิสัยเวลา (Time domain) มาอย่างต่อเนื่องถึงปัจจุบัน อันมีวิธี Covariance driven stochastic subspace identification (SSI-COV) เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพสูง โดยแนวคิดของวิธีดังกล่าวคือการใช้ สัญญาณผลตอบสนองตามเวลาวิเคราะห์ค่าสหสัมพันธ์ของข้อมูล (Covariance) และใช้ค่าสหสัมพันธ์ของข้อมูล เป็นตัวแทนของ ผลการตอบสนองอิสระที่มีค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์เป็นพารามิเตอร์สำคัญ และนำไปวิเคราะห์ด้วยหลักการ Singular Value Decomposition (SVD) และการวิเคราะห์ Eigenvalue ตามลำดับ อย่างไรก็ตาม เนื่องจากการประยุกต์ใช้วิธีดังกล่าวกับ โครงสร้างขนาดใหญ่และมีจำนวนตำแหน่งที่มีสัญญาณผลตอบสนองจำนวนน้อยอันเป็นลักษณะของปัญหาด้านวิศวกรรมโยธา ยังขาดการวิจัยศึกษา ถึงประสิทธิภาพ และรายละเอียดของการเลือกใช้พารามิเตอร์สำหรับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีรายละเอียดภายในวิธีนี้ อย่าง ชัดเจน งานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการประยุกต์วิธี Covariance Driven Stochastic Subspace Identification (SSI-COV)

มาใช้ในการวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างอาคาร โดยมีตัวอย่างที่ใช้ศึกษาคือ การวิเคราะห์ผลการตอบสนองจากแบบจำลองที่ทราบค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์เพื่อศึกษากระบวนการทางคณิตศาสตร์ของวิธี SSI-COV และ การวิเคราะห์ผลการตอบสนองของอาคารสูงที่ได้จากสัญญาณการโยกตัวของอาคารแบบสุ่มจากข้อมูลการตรวจวัดจริง เพื่อศึกษาประสิทธิภาพและแนวทางการประยุกต์ใช้งานที่เหมาะสม

2. วิธี Covariance driven stochastic subspace identification

วิธี Covariance Driven Stochastic Subspace Identification (SSI-COV) ถูกเสนอโดย Van Overchee ในปี ค.ศ.1996 และ Peeters ในปี ค.ศ.2001 วิธีนี้พัฒนามาจากวิธี Eigensystem Realization Algorithm (ERA) ซึ่งวิธี SSI-COV ได้รับความนิยมในการนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีเพียงแค่ผลตอบสนองเพียงอย่างเดียว (output-only) ซึ่งเหมาะสมกับลักษณะของโครงสร้างทางวิศวกรรมโยธา และ วิธีนี้สามารถแสดงแผนภาพสำหรับโหมดเสถียร (stabilization diagrams) เพื่อประกอบการแสดงผลวิเคราะห์และเลือกคำตอบอย่างเหมาะสมได้

2.1 ทฤษฎีสำหรับ SSI-COV และ stabilization diagrams

วิธี SSI-COV เป็นวิธีวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์โดยอาศัยทฤษฎีแบบจำลอง Stochastic state space ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ไม่ต่อเนื่องและใช้สมมติฐานของแรงกระตุ้นมีลักษณะสุ่มแบบ white noise โดยสมการพื้นฐานคือ [1]

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A \cdot x_k + w_k \\ y_k &= C \cdot x_k + v_k\end{aligned}\tag{1}$$

โดยที่ x_k คือเวกเตอร์สถานะ (Discrete-time state vector) ณ เวลา k , y_k คือเวกเตอร์ผลการตอบสนองที่ได้จากการตรวจวัด (Sampled outputs vector), A เป็นเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะที่แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของระบบอย่างสมบูรณ์ด้วยค่าลักษณะเฉพาะ (Discrete state matrix), C คือ เมทริกซ์ผลตอบสนอง (Discrete output matrix) และ w_k , v_k คือ เวกเตอร์ที่แทนสัญญาณที่เกิดจากการรบกวน เกิดจากการสร้างแบบจำลองไม่ถูกต้อง หรือเกิดจากความผิดพลาดของการตรวจวัด

ขั้นตอนแรกของวิธี SSI-COV เริ่มจากการวิเคราะห์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ (Covariance matrices) ที่ได้จากสัญญาณการตอบสนองของโครงสร้าง โดยพิจารณาจากค่าความแปรปรวนของข้อมูล ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$R_i = \frac{1}{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-1} y_{k+i} \cdot y_k^T\tag{2}$$

โดยที่ N คือ จำนวนจุดข้อมูลที่ตรวจวัดได้ และ T หมายถึง ทรานสโพส ซึ่งในแต่ละค่าที่คำนวณได้สมการดังกล่าวถูกนำมาจัดให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์โทพลิทซ์ (Toeplitz matrix) ดังนี้

$$T_{||i} = \begin{bmatrix} R_i & R_{i-1} & \cdots & R_1 \\ R_{i+1} & R_i & \cdots & R_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{2i-1} & R_{2i-2} & \cdots & R_i \end{bmatrix}\tag{3}$$

ความสัมพันธ์ของคุณสมบัติการแยกตัวประกอบจากสมการที่ (1) จะได้เมทริกซ์และองค์ประกอบดังสมการที่ (4)

$$T_{1|i} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{i-1}G & \dots & AG & G \end{pmatrix} \downarrow n = O_i \Gamma_i \quad (4)$$

$\leftrightarrow n$

โดยที่ O_i คือ Observability matrix และ Γ_i คือ Stochastic controllability matrix ขนาดของเมทริกซ์ $T_{1|i}$ มีขนาดแถวและหลักเท่ากับ n

จากสมการที่ 4 สังเกตเห็นว่า เมทริกซ์ A และ C เป็นองค์ประกอบของเมทริกซ์โทพลิตซ์ ($T_{1|i}$) และ เมทริกซ์ A และ C ถูกจัดให้อยู่ในรูปของ Observability matrix (O_i) และ Stochastic controllability matrix (Γ_i)

$$T_{1|i} = \begin{bmatrix} R_i & R_{i-1} & \dots & R_1 \\ R_{i+1} & R_i & \dots & R_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{2i-1} & R_{2i-2} & \dots & R_i \end{bmatrix} = O_i \Gamma_i \quad (5)$$

ดังนั้นจึงสามารถแปลงเมทริกซ์โทพลิตซ์ให้อยู่ในรูปของ O_i และ Γ_i ด้วยวิธีการแยกค่าเอกฐาน หรือ Singular Value Decomposition (SVD) ดังรูปที่ 1(ก.)

อัลกอริทึมของวิธีนี้ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของระบบสโต-แคสติกโดยตรง [2] Singular Value Decomposition ของเมทริกซ์โทพลิตซ์ถูกแยกให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ ดังสมการที่ (6)

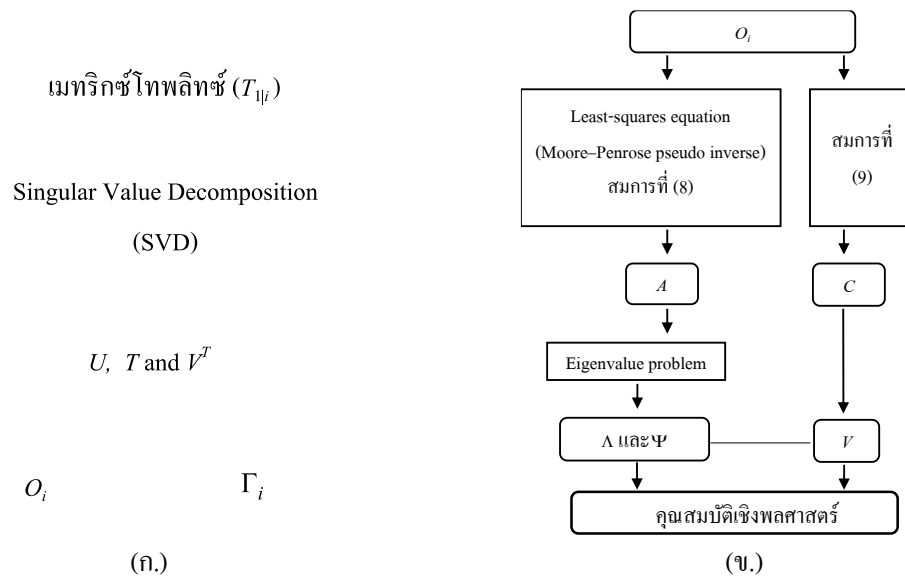
$$T_{1|i} = USV^T \quad (6)$$

โดยที่ U และ V คือ เมทริกซ์คุณสมบัติ (Orthonormal matrices) และ S คือ เมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนที่มีค่าบวกใดๆ (Diagonal matrix) สามารถหา Observability matrix และ Stochastic controllability matrix ได้จากสมการที่ (7) และสมการที่ (8) ตามลำดับ

$$O_i = US^{1/2}T \quad (7)$$

$$\Gamma_i = T^{-1}S^{1/2}V^T \quad (8)$$

โดยที่เมทริกซ์ T มีคุณสมบัติเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-singular matrix) เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณสามารถพิจารณาเมทริกซ์ T เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ($T=I$)



รูปที่ 1 หลักการวิเคราะห์เมตริกซ์ (ก.) วิเคราะห์เมตริกซ์โทพลิตซ์ให้อยู่ในรูปของ O_i และ Γ_i (ข.) วิเคราะห์ state space model

จากรูปที่ 1(ข.) จาก O_i และ Γ_i สามารถใช้ O_i คำนวณหาเมตริกซ์ A โดยใช้สมการ least-squares (คำนวณโดยใช้ Moore-Penrose pseudo inverse) ส่วนเมตริกซ์ C เป็นองค์ประกอบแถวแรกของ O_i การวิเคราะห์เมตริกซ์คุณสมบัติ A และ C เรียกว่าการวิเคราะห์ state space model สามารถวิเคราะห์เมตริกซ์คุณสมบัติ A และ C ของระบบได้ดังสมการที่ (9) และ สมการที่ (10) ตามลำดับ

$$A = (O_i(1:l(i-1)))^\dagger (O_i(n-l(i-1)+1:n)) \quad (9)$$

$$C = O_i(1:l) \quad (10)$$

โดยที่ $()^\dagger$ คือ Moore-Penrose pseudo inverse ของเมตริกซ์, l คือ จำนวนช่องสัญญาณ หรือ Degree of Freedom ของโครงสร้าง และ n มีค่าเท่ากับ $l \times i$

หลังจากการวิเคราะห์ State space model สามารถหาค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ได้จาก A และ C [3] ด้วยวิธี Eigenvalue Problem ดังสมการที่ (11)

$$\begin{aligned} A &= \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} \\ V &= C \Psi \end{aligned} \quad (11)$$

โดยที่ Λ และ Ψ คือ Eigenvalues และ Eigenvectors ตามลำดับ โดยความถี่ และ ความหน่วงสามารถคำนวณได้จาก Eigenvalues และรูปร่างการสั่นไหว (V) สามารถคำนวณจาก Eigenvectors

การวิเคราะห์ state space model มีตัวแปรที่สำคัญ คือ ลำดับของแบบจำลอง (order of the model) ซึ่งการระบุ order ที่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์อย่างแม่นยำไม่มีคำตอบที่แน่นอน ในงานวิจัยนี้จึงใช้วิธีคำนวณหลาย ๆ order เพื่อเปรียบเทียบ order ที่ให้คำตอบซ้ำ ๆ กัน จึงเปรียบเสมือนจำนวนรอบในการวิเคราะห์ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ ในงานวิจัยนี้กำหนด order ที่ใช้ในการคำนวณเท่ากับ 100 หากใช้จำนวน order ที่มีค่าสูงจะทำให้ผลการวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์มีโหมดตัวเลข (numerical modes)

หรือ โหมดรบกวน (noise modes) เพิ่มขึ้น ซึ่งไม่ใช่โหมดการสั่นของโครงสร้าง การแยกโหมดการสั่นของโครงสร้าง กับ โหมดรบกวน เป็นขั้นตอนที่สำคัญของการวิเคราะห์ ทำให้มีการสร้างแผนภาพ stabilization diagram ดังรูปที่ 4 เพื่อใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการแยกโหมดดังกล่าว stabilization diagram ใช้แสดงการประมาณค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ โดยแกน x แสดงความถี่โหมดต่าง ๆ จากการวิเคราะห์ และ แกน y แสดง order ในการวิเคราะห์ โดยที่ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์หนึ่ง ๆ ที่วิเคราะห์ได้ เรียกว่า pole ซึ่ง pole ที่มีคุณสมบัติเป็นไปตามเกณฑ์การวิเคราะห์ที่กำหนดเรียกว่า stable pole โดยจาก stabilization diagram สามารถสังเกตเห็น stable pole ที่คำนวณได้ซ้ำ ๆ กันใน order ที่เพิ่มขึ้น และหากมีคุณสมบัติของค่าคำตอบเป็นไปตามเกณฑ์ตรวจสอบจะถือว่าโหมดนั้นเป็นโหมดเสถียร ทำให้สามารถเห็นแนวโน้มของคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้าง ส่วน pole ที่คำนวณได้เพียงในบาง order จะถือว่าเป็นความถี่รบกวน

เกณฑ์การระบุโหมดเสถียรในงานวิจัยนี้ประกอบด้วย ความแตกต่างของความถี่ธรรมชาติน้อยกว่า 2%, ความแตกต่างของความหน่วงน้อยกว่า 2% และค่าสัมประสิทธิ์ความสั่นของรูปร่างโหมด (MAC) มีค่ามากกว่า 0.95 (MAC เป็น 1 เมื่อรูปร่างโหมดการสั่นโหนดมีความสัมพันธ์กันสมบูรณ์ และ MAC เป็น 0 เมื่อรูปร่างโหมดการสั่นโหนดไม่มีความสัมพันธ์กัน) ในวิธี SSI-COV จำนวนแถวของบล็อกเมทริกซ์โทพลิตซ์ (i ในสมการที่ (3)) ที่ใช้ในการวิเคราะห์มีผลอย่างมากต่อคุณภาพของ stabilization diagram ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงมีวิธีการแก้ปัญหาการกำหนดค่าจำนวนแถวของบล็อกเมทริกซ์ ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อวิธีการศึกษา

2.2 วิธีการระบุค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์จาก stabilization diagram

2.2.1 การระบุค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์โดยอัตโนมัติ

Scionti (2003) ได้นำเทคนิคการระบุค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์มาทดสอบกับข้อมูลที่ตรวจวัดได้จาก flight flutter เทคนิคนี้ได้ทำการเลือกคอดัชนีแนวตั้งของ stable poles โดยใช้ฮิสโตแกรมและใช้เทคนิคการวิเคราะห์ Euclidian distance เพื่อพิจารณาจัดข้อมูลที่นำเสนอในแผนภาพโหมดเสถียรให้เป็นกลุ่มโหมด (Cluster) ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้เทคนิควิธีดังกล่าวในการพิจารณาแยกโหมดของข้อมูล [4]

2.2.2 Cluster analysis

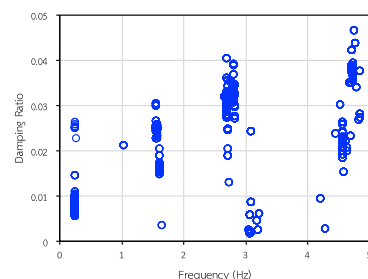
Cluster analysis คือเทคนิคการวิเคราะห์การจัดกลุ่มของข้อมูล ซึ่งการจัดกลุ่มนี้ใช้ Euclidian distance ในการจำแนกกลุ่มของข้อมูล กลุ่มข้อมูลจะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของข้อมูล ซึ่งผลลัพธ์กลุ่มข้อมูลจะมีคุณสมบัติเหมือนกันภายในกลุ่มข้อมูลเดียวกัน [5]

ในกรณีการจัดกลุ่มของข้อมูลจาก stabilization diagram มีวัตถุประสงค์เพื่อจัดกลุ่มโหมดที่มีคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์เป็นโหมดเดียวกัน ซึ่งความเป็นโหมดเดียวกันประกอบด้วยค่าความถี่ธรรมชาติ ค่าความหน่วง และรูปร่างการสั่นโหนด ที่เหมือนกัน ซึ่งใช้ค่าระยะระหว่างสองโหมด (i และ j) ที่สามารถคำนวณได้ตามสมการดังต่อไปนี้

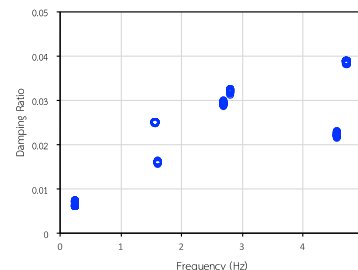
$$d_{i-j} = \left| \frac{f_i - f_j}{f_j} \right| + (1 - MAC_{i,j}) \quad (12)$$

โดยที่ f_i คือ ความถี่ธรรมชาติของโหมด i และ $MAC_{i,j}$ คือ ค่าความสัมพันธ์ของรูปร่างการสั่นโหนด (modal assurance criterion) ระหว่างโหมด i และ j ถ้าค่าระยะระหว่างโหมดมีค่าน้อย (เกณฑ์ค่าระยะ อยู่ที่ประมาณ 0.02) แสดงว่าทั้งสองโหมดมีความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นโหนดที่เหมือนกัน ดังนั้นทั้งสองโหมดอาจจะเป็นโหมดเดียวกัน และจะถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มข้อมูลกลุ่มเดียวกัน เมื่อตรวจสอบครบทุก ๆ ค่าโหมดแล้ว โหมดที่ไม่เกี่ยวข้องจะถูกตัดออกไป

ขั้นตอนถัดมาคือขั้นตอน Cluster analysis เป็นขั้นตอนของการเลือกกลุ่มข้อมูลเพื่อระบุค่าเป็นคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ โดยจะพิจารณาจาก Euclidian distance โดยนำข้อมูลที่จะเป็นโหมดทั้งหมดในขั้นตอนก่อนหน้านี้ มาพิจารณา Euclidian distance ที่ใกล้เคียงกันจะจัดอยู่ในกลุ่ม Cluster เดียวกัน และ Cluster ในกลุ่มนั้น ๆ หากมีจำนวนโหมดที่มากพอตามเกณฑ์ (โหมดนั้น ๆ สามารถคำนวณได้ในหลาย ๆ order หรือ หลาย ๆ รอบ จนมีจำนวนโหมดมากพอ) จะถือว่าเป็นโหมดของโครงสร้าง ในทางตรงกันข้าม หาก Cluster กลุ่มนั้น ๆ มีจำนวนโหมดน้อย จะถือว่าเป็นโหมดรบกวน (noise mode) จะถูกคัดออก เพื่อป้องกันความผิดพลาดในกรณีโหมดของโครงสร้างจะไม่ถูกเลือก ในงานวิจัยนี้จึงใช้เกณฑ์จำนวนโหมดต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 5 โหมด เมื่อได้โหมดของโครงสร้างแล้ว จะเปลี่ยนค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของกลุ่มโหมดต่าง ๆ การใช้ค่าระยะที่น้อยเกินไปจะทำให้โหมดที่เป็นโหมดเดียวกันแยกออกเป็นหลาย ๆ กลุ่ม โดยทั่วไประยะควรน้อยกว่า 1 แต่การใช้ระยะค่าน้อยถือว่าการเลือกกลุ่มที่ดีและมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น หากใช้ระยะมากเกินไปอาจจะทำให้โหมดของโครงสร้างที่มีความถี่ใกล้เคียงกัน รวมกันเป็น Cluster กลุ่มเดียวกันได้ และหากข้อมูลที่ได้จากการตรวจวัดมีสัญญาณรบกวนค่อนข้างมาก ควรปรับค่าระยะในการแยกกลุ่มเพิ่มขึ้นตามไปด้วย



(ก.)



(ข.)

รูปที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่าง ความถี่ กับ ความหน่วง (ก.) ก่อนขั้นตอน Cluster analysis (ข.) หลังขั้นตอน Cluster analysis

รูปที่ 3(ก.) แสดงค่าความหน่วงที่ได้จากการคำนวณทุก ๆ โหมด ก่อนการวิเคราะห์ Cluster analysis และ รูปที่ 3(ข.) แสดงความหน่วงที่ได้หลังจากการวิเคราะห์ตามขั้นตอน Cluster analysis ซึ่งแสดงว่าสามารถกำจัดโหมดที่ไม่เกี่ยวข้องได้ และให้ข้อมูลความหน่วงที่เกาะกลุ่มกันมากขึ้น

3. ตัวอย่างการศึกษา

3.1 แบบจำลอง 5 DOF

ตัวอย่างศึกษาแรกคือแบบจำลองมวลรวม 2 มิติ ใช้จำลองอาคาร 5 ชั้น เป็นระบบที่มีระดับขั้นความเสรี (Degree-of-freedom) เท่ากับ 5 ค่ามวลทุก ๆ ชั้นมีค่าเท่ากับ 50,000 กิโลกรัม ค่าสติฟเนสในแต่ละชั้นมีค่าดังนี้ ชั้นบนสุดมีค่า $K_5 = 2 \times 10^6 \text{ N/m}$ และชั้นอื่น ๆ มีค่า $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 4 \times 10^7 \text{ N/m}$ และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง $C_1 = 6 \times 10^4$, $C_2 = C_3 = C_4 = 5 \times 10^4$ และ $C_5 = 3 \times 10^4 \text{ N/(m}\cdot\text{s)}$ จากนั้นทำการคำนวณผลการตอบสนองโดยวิธีเชิงตัวเลขทีละขั้น (Step-by-Step Integration) ภายใต้แรงกระทำแบบสุ่ม เพื่อสร้างเป็นสัญญาณการสั่นสะเทือนของแต่ละชั้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ด้วยวิธี SSI-COV ต่อไป

3.2 อาคารสูง

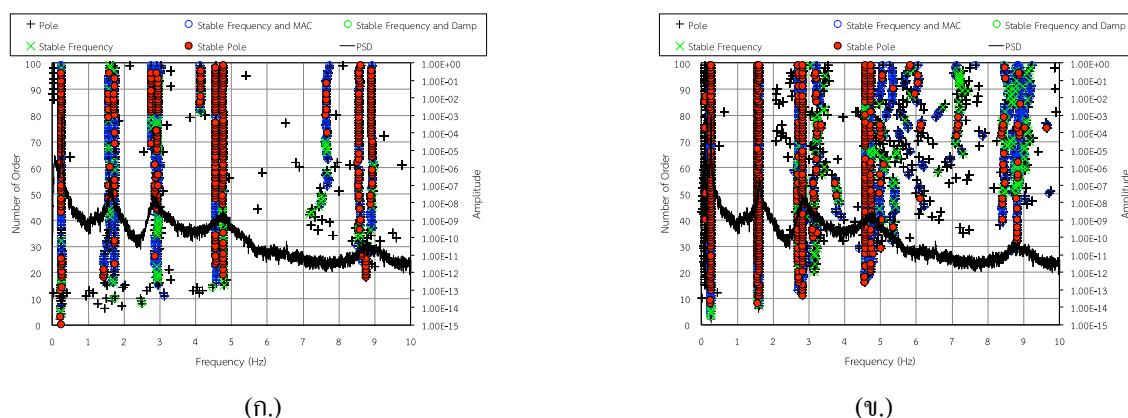
ตัวอย่างศึกษาที่สองคือสัญญาณการสั่นไหวจริงของอาคารสูงที่มีลักษณะโครงสร้างเป็นหอทรงกระบอกจะสูง มีความสูงประมาณ 140 เมตร มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกประมาณ 14 เมตร แกนของโครงสร้างเป็นวงแหวนคอนกรีตเสริมเหล็ก เส้นผ่านศูนย์กลาง 7.6 เมตร และหนา 0.7 เมตร ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต (E) โดยประมาณ 3.04×10^{12} นิวตันต่อตารางเมตร และมีมวล (m) ประมาณ 40,112 กิโลกรัมต่อเมตร จากคุณสมบัติและลักษณะของโครงสร้างคล้ายกันขึ้น จึงสามารถคำนวณความถี่ในโหมดลำดับต่าง ๆ ของโครงสร้างเพื่อประเมินค่าเบื้องต้นได้จากสูตรการคำนวณสำหรับแท่งหน้าตัดสม่ำเสมอ

3.3 วิธีการตรวจวัดผลตอบสนอง

เครื่องมือที่ใช้ในการตรวจวัดผลการตอบสนอง คือ เครื่องมือวัดความเร็วของการสั่นสะเทือน (Velocity sensor) ตรวจวัดผลตอบสนอง 2 แกน x และ y โดยมีอัตราการเก็บข้อมูลเท่ากับ 100 ข้อมูลต่อวินาที การเก็บข้อมูลจาก velocity sensor ที่ถูกติดตั้งอยู่ที่ระดับความสูง 124.40 เมตร กำหนดทิศทางสมมติ X และ Y ตั้งฉากกันในแนวราบ เมื่อได้ผลการตอบสนองจากเครื่องมือทั้งสอง นำสัญญาณข้อมูลที่ได้มาแปลงเป็นสัญญาณของโครงสร้าง ณ จุดศูนย์กลาง ได้เป็นสัญญาณ x, y และการบิด ซึ่งเป็นตัวแทนสัญญาณของโครงสร้าง

3.4 วิธีการประยุกต์ใช้วิธี SSI-COV ในระบบคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์

วิธี SSI-COV เป็นวิธีวิเคราะห์ที่ต้องอาศัยผลการตอบสนองของโครงสร้าง ซึ่งวิธี SSI-COV มีพารามิเตอร์ที่สำคัญคือ จำนวนแถวของบล็อกเมทริกซ์โทพลิตซ์ (Toeplitz matrix) จำนวนแถวดังกล่าวมีผลในการวิเคราะห์อย่างมาก การหาขนาดแถวของบล็อกเมทริกซ์โทพลิตซ์ที่เหมาะสมเป็นเรื่องยาก ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงทำการวิเคราะห์โดยใช้จำนวนแถวของบล็อกเมทริกซ์โทพลิตซ์หลาย ๆ ขนาดในการคำนวณ



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่าง ความถี่ กับ Order (ก.) $i=50$ (ข.) $i=110$

จากรูปที่ 4(ก.) สังเกตเห็นว่า เมทริกซ์ขนาดเล็กให้ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ในโหมดที่มีค่าความถี่ค่อนข้างสูง ส่วนเมทริกซ์ขนาดใหญ่ให้ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ในโหมดที่มีความถี่ต่ำ ๆ และมีโหมดครบถ้วนเกิดขึ้นดังรูปที่ 4(ข.) ดังนั้นจึงประยุกต์ใช้การคำนวณเมทริกซ์โทพลิตซ์หลาย ๆ ขนาด และนำค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของการคำนวณทั้งหมดมาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก โดยน้ำหนัก

ที่ใช้คือจำนวนโหมดที่เกิดขึ้นในแต่ละรอบของการคำนวณด้วยขนาดขนาดเมทริกซ์นั้น ๆ การประยุกต์ใช้การคำนวณเมทริกซ์โทพลิตซ์หลาย ๆ ขนาดให้ผลการวิเคราะห์ที่ดีกว่าการเลือกขนาดเมทริกซ์โทพลิตซ์เพียงค่าใดค่าหนึ่ง

4. ผลการศึกษาและการอภิปราย

4.1 แบบจำลอง 5 DOF

ผลของค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์จากการวิเคราะห์ผลตอบสนองของแบบจำลองด้วยวิธี SSI-COV เปรียบเทียบกับคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ที่ถูกต้องของแบบจำลองแสดงดังตารางที่ 1

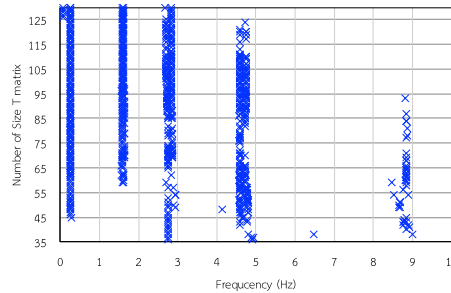
ตารางที่ 1 ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของระบบ 5DOF

Mode	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
f (Hz) (Exact)	0.88841	1.75175	4.54112	6.91067	8.46337
ξ (%) (Exact)	3.07135	2.76760	2.26720	2.93891	3.38670
Mode Shape (Exact)	1.00000	-0.49741	-0.05576	-0.01706	-0.00642
	0.22261	1.00000	1.00000	0.66834	0.35562
	0.17501	0.92247	0.03664	-0.87265	-0.88319
	0.12060	0.70540	-0.96589	-0.35673	1.00000
	0.06150	0.38158	-0.98327	1.00000	-0.65169
f (Hz) (SSI-COV)	0.88684	1.75363	4.53764	6.89002	8.43887
ξ (%) (SSI-COV)	2.96573	2.83960	2.28392	2.97603	3.44454
Mode Shape (SSI-COV)	1.00000	-0.69772	-0.22022	0.00640	-0.01437
	0.22727	1.00000	1.00000	0.69990	0.34730
	0.17887	0.94667	0.12050	-0.84925	-0.91750
	0.12338	0.73416	-0.89657	-0.34468	1.00000
	0.06296	0.39868	-0.92772	1.00000	-0.69453
Error of f (%)	-0.17704	0.10726	-0.07647	-0.29879	-0.28946
Error of ξ (%)	-3.43888	2.60171	0.73734	1.26294	1.70783
MAC (%)	100	99	99	100	100

จากตารางที่ 1 ผลการวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติ ความหน่วง และ ลักษณะการสั่นไหว จากผลการตอบสนองของแบบจำลองอาคารที่ถูกกระตุ้นด้วยแรงกระทำแบบสุ่ม วิธี SSI-COV สามารถวิเคราะห์ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยมีความผิดพลาดของการประมาณความถี่ธรรมชาติไม่เกิน 0.3% และความผิดพลาดของการประมาณอัตราส่วนความหน่วง ไม่เกิน 3.5% และค่า MAC สูงถึง 99-100%

4.2 ผลของขนาดเมทริกซ์โทพลิตซ์ต่อการวิเคราะห์สัญญาณจากการตรวจวัดอาคาร

การวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างอาคารจริงมีพารามิเตอร์ที่สำคัญคือขนาดของเมทริกซ์โทพลิตซ์ โดยงานวิจัยนี้วิเคราะห์จากขนาดเมทริกซ์โทพลิตซ์หลาย ๆ ขนาด ให้ผลการวิเคราะห์ดังรูปที่ 5

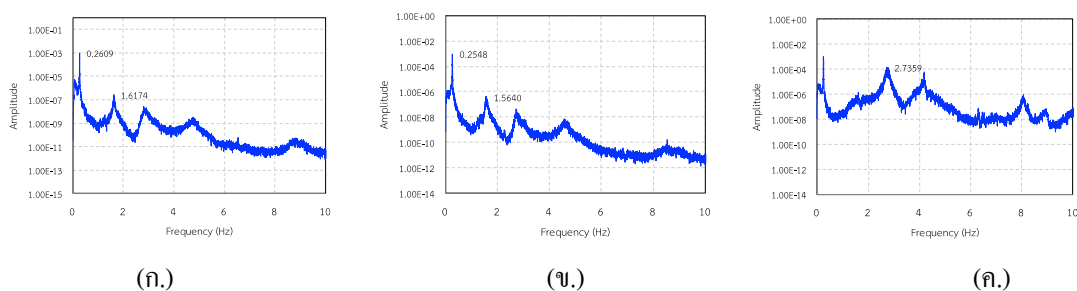


รูปที่ 5 ผลของขนาดเมทริกซ์ต่อการวิเคราะห์

รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่าง ความถี่ กับ ขนาดของเมทริกซ์โทพลิตซ์ แสดงให้เห็นค่าความถี่ที่สามารถวิเคราะห์ได้จากเมทริกซ์โทพลิตซ์หลาย ๆ ขนาด ซึ่งพบว่าเมื่อขนาดของเมทริกซ์โทพลิตซ์มีขนาดเล็ก วิธี SSI-COV จะสามารถวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ได้ในโหมดที่มีความถี่สูง แต่ไม่สามารถวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ในโหมดที่มีความถี่ต่ำ ในทางตรงกันข้าม เมื่อขนาดของเมทริกซ์โทพลิตซ์มีขนาดใหญ่ จะสามารถวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ได้ในโหมดที่มีความถี่ต่ำ แต่ไม่สามารถวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ในโหมดที่มีความถี่สูง

4.3 ผลการวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของอาคารสูง

ผลของค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากวิธีที่นิยมทั่วไปในพีชคณิตคือวิธี peak picking โดยเลือกจุดสูงสุดของความถี่จากกราฟ power spectral density (PSD) ซึ่งผลการวิเคราะห์สัญญาณจากการตรวจวัดในการศึกษานี้ให้ค่าความถี่ธรรมชาติหลักในทิศทาง X, Y และ Torsion ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสามารถในการระบุจุดสูงสุดจากกราฟ PSD โดยทิศทาง X ความถี่โหมด 1 คือ 0.2609 และ ความถี่โหมด 2 คือ 1.6174 ดังรูปที่ 6(ก.) ทิศทาง Y ความถี่โหมด 1 คือ 0.2548 และ ความถี่โหมด 2 คือ 1.5640 ดังรูปที่ 6(ข.) ความถี่โหมด Torsion คือ 2.7359 ดังรูปที่ 6(ค.) โดยจุด peak อื่น ๆ ที่ไม่ได้ระบุไว้เนื่องจากไม่สามารถยืนยันได้ว่าเป็นโหมดของโครงสร้างหรือไม่ เนื่องจากไม่สอดคล้องกับค่าที่คำนวณจากการประมาณ หรือค่ามีความแปรปรวนได้มากจากการเลือกจุด peak ของกราฟ



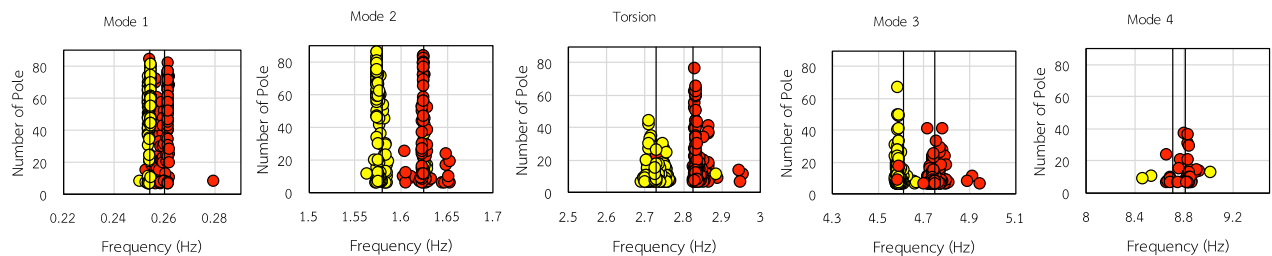
รูปที่ 6 PSD ของช่องสัญญาณทิศทางสมมติ (ก.) ทิศทาง X (ข.) ทิศทาง Y (ค.) Torsion

ความถี่ธรรมชาติ ความหน่วง และ ลักษณะการสั่นไหวจากการวิเคราะห์ด้วยวิธี SSI-COV ได้จากการคำนวณเมทริกซ์โทพลิตซ์หลาย ๆ ขนาด ในการวิเคราะห์เมทริกซ์โทพลิตซ์แต่ละขนาดให้ผลคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ และ ให้ผลจำนวน stable pole จาก stabilization diagram 1 ชุดข้อมูล (ผลของคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของแต่ละโหมดเฉลี่ยจากจำนวน stable pole ที่แสดงบน stabilization diagram) เมื่อปรับเปลี่ยนขนาดเมทริกซ์โทพลิตซ์ จะได้ผลคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ และ ผลจำนวน stable pole หลาย ๆ ชุด จากนั้นนำผลคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ทั้งหมด มาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก ตามสมการที่ (13)

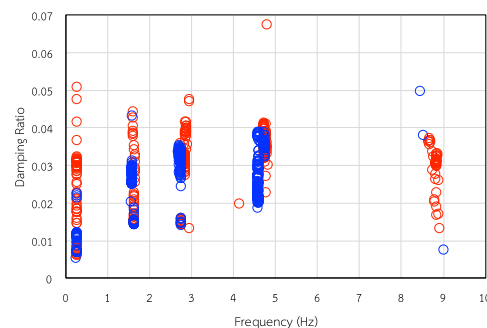
$$X_m = \frac{\sum_{i=n}^N W_i X_i}{\sum_{i=n}^N W_i} \quad (13)$$

โดยที่ n คือ ขนาดของเมทริกซ์โทพลิตซ์เริ่มต้น, N คือขนาดของเมทริกซ์โทพลิตซ์, W คือ จำนวน stable pole ของแต่ละโหมด, m คือ เลขประจำโหมด และ X คือ ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์

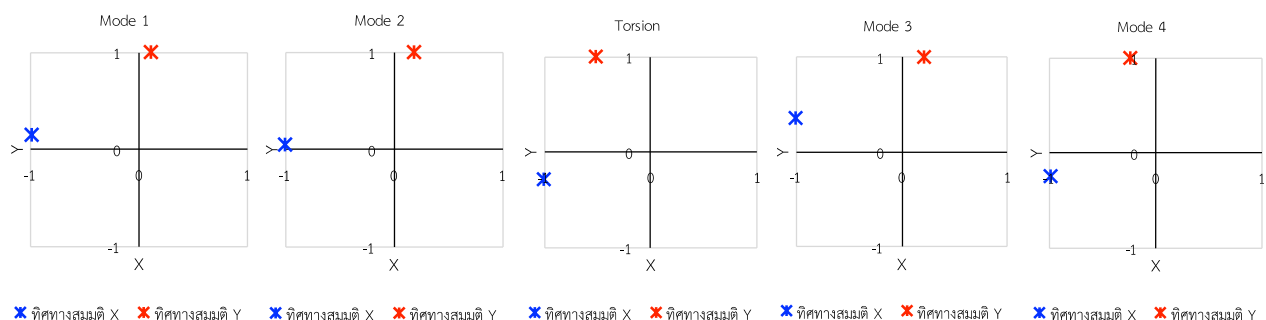
เนื่องจากค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ที่ได้จากเมทริกซ์โทพลิตซ์แต่ละขนาด และ จำนวน stable pole มีค่าแตกต่างกันจึงใช้จำนวน stable pole ในการเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ที่ได้จะมีแนวโน้มตามค่าที่มีจำนวน stable pole สูง ๆ ผลค่าความถี่ และความหน่วง จากการวิเคราะห์เมทริกซ์โทพลิตซ์หลายๆ ขนาด แสดงดังรูปที่ 7 และ รูปที่ 8



รูปที่ 7 stable pole ของแต่ละโหมดความถี่



รูปที่ 8 ผลค่าความหน่วงประจำโหมด



รูปที่ 9 ลักษณะการเคลื่อนที่ตามทิศ X และ Y ประจำโหมด

รูปที่ 7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความถี่ กับ จำนวนของ stable pole โดยที่ ● คือข้อมูลในทิศทางสมมติ X และ ● คือข้อมูลในทิศทางสมมติ Y พบว่าผลการวิเคราะห์ได้ค่าความถี่ที่แตกต่างกันออกไป ในโหมดที่มีความถี่ต่ำพบการเกาะกลุ่มของผลการวิเคราะห์ได้ชัดเจน และ มีจำนวน stable pole ค่อนข้างสูง จากรูปที่ 8 ○ คือ ค่าความหน่วงในทิศทางสมมติ X และ ○ คือค่าความหน่วงในทิศทางสมมติ Y ผลของค่าความหน่วงที่ได้จากการวิเคราะห์เมทริกซ์โทพลิตซ์หลายขนาด ค่อนข้างมีการกระจายตัว รูปที่ 9 แสดงลักษณะการสั่นไหวของโครงสร้างอาคารที่ได้จากการเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก ซึ่งแสดงถึงทิศทางการเคลื่อนที่หลักในแต่ละแกนที่ระบุได้

จากผลการวิเคราะห์เมทริกซ์โทพลิตซ์หลายขนาด ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ทั้ง ความถี่ ความหน่วง และ ลักษณะการสั่นไหว จึงสามารถระบุได้จากการเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ที่มีจำนวน stable pole สูง จะถูกให้ความสำคัญมากกว่าค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ที่มีจำนวน stable pole ต่ำ ผลการวิเคราะห์ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างอาคารสูงสรุปได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์

Mode	Direction	Frequency (Hz)			Damping Ratio
		สมการอย่างง่าย	FFT	SSI-COV	SSI-COV
1	X	0.2485	0.2609	0.2601	0.0144
	Y		0.2548	0.2543	0.0093
2	X	1.5576	1.6174	1.6249	0.0168
	Y		1.5640	1.5799	0.0252
Tor		N.A.	2.7359	2.7767	0.0321
3	X	4.3614	N.A.	4.7457	0.0365
	Y		N.A.	4.6114	0.0279
4	X	8.5467	N.A.	8.8125	0.0288
	Y		N.A.	8.7049	0.0289

จากตารางที่ 2 วิธี SSI-COV สามารถคำนวณค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ในโหมดสูงได้ดีกว่าวิธี peak picking อีกทั้งวิธี SSI-COV ยังสามารถคำนวณค่าความหน่วงประจำโหมดได้ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่องานที่ต้องการใช้ค่าความหน่วงของโครงสร้าง

5. สรุป

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาการระบุคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ด้วยวิธี Covariance Driven Stochastic Subspace Identification (SSI-COV) เพื่อประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างอาคารสูง โดยดำเนินการศึกษาประสิทธิภาพและแนวทางในการนำไปใช้งานอย่างเหมาะสม ตัวอย่างศึกษาประกอบด้วยแบบจำลองทางตัวเลข และข้อมูลจากการตรวจวัดอาคารสูง โดยใช้ผลการตอบสนองจากการตรวจวัดจริงในการวิเคราะห์ ผลการศึกษาพบว่า วิธี SSI-COV มีประสิทธิภาพในการใช้งานสูง สามารถระบุคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ได้อย่างถูกต้องทั้งค่าความถี่ธรรมชาติ อัตราส่วนความหน่วง และรูปร่างการสั่นไหว อีกทั้งยังให้ผลของคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ในโหมดการสั่นลำดับสูงได้ดีกว่าวิธีในพิสัยความถี่ ปัจจัยที่สำคัญที่พบในการวิจัยครั้งนี้คือ ขนาดของเมทริกซ์โทพลิตซ์ (Toeplitz Matrix) ซึ่งเป็นปัจจัยที่มีผลอย่างเห็นได้ชัดต่อการวิเคราะห์ หากใช้ขนาดของ Toeplitz

Matrix ที่น้อยเกินไปทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์พารามิเตอร์ได้ และหากใช้ขนาดของ Toeplitz Matrix ที่มากเกินไปทำให้เกิดโหมดรบกวนขึ้น และทำให้เกิดความยากในการวิเคราะห์ค่าคุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างได้

งานวิจัยนี้นำเสนอกระบวนการที่สามารถประยุกต์ใช้กับการตรวจวัดโครงสร้างอย่างต่อเนื่องเพื่อให้ผลคำตอบที่แม่นยำสูงโดยอัตโนมัติ และไม่ต้องใช้การตัดสินใจของผู้วิเคราะห์ ด้วยการวิเคราะห์ข้อมูลจากการใช้ขนาดของ Toeplitz Matrix หลายแบบ และหาคำตอบที่ดีที่สุดจากการเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก ผลการศึกษาได้แสดงถึงวิธีการประยุกต์ใช้เทคนิควิธีนี้ SSI-COV ในการวิเคราะห์ผลการตรวจวัดต่อเนื่องซึ่งเป็นประโยชน์ในการตรวจสอบสมรรถนะระยะยาวของโครงสร้าง (long-term structural health monitoring) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

- [1] J.-N. Juang. *Applied System Identification*. New jersey: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1994.
- [2] P. Van Overschee. And B. De Moor. *Subspace Identification for Linear Systems*. London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [3] B. Peeters. *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*. Ph. D Dissertation, Department of Civil Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 2000.
- [4] M. Scionti, J. Lanslots, I. Goethals, A. Vecchio, et al. Tool to improve detection of structural changes from in-flight flutter data. *Proceedings of the Eighth International Conference on recent advances in Structural Dynamics*, Southampton, UK, 14-16 July 2003.
- [5] Hair J., Anderson R., Tatham R. and Black W. *Multivariate Data Analysis*. New jersey: Prentice-Hall, 1998.

