



วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ ม.อบ.
UBU Engineering Journal

บทความวิจัย

พฤติกรรมการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบครอสพลาเยที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ

Bending Behavior of Cross-Ply Composite Plate with Three Clamped Edges and One Free Edge

ธวัชชัย อุ่นใจจอม^{1*} กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข¹ อนุชา ตาน้อย¹ อนุชิต เกตุทะจักร์¹

¹ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50300

Thawatchai Ounjaijom^{1*} Kullasup Phongsrisk¹ Anucha Tanoi¹ Anuchit Kettajuk¹

¹ Department of Mechanical Engineering, Rajamangala University of Technology Lanna, Chiang Mai 50300

* Corresponding author.

E-mail: tounjaijom@rmutl.ac.th; Telephone: 0 5392 1444

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาพฤติกรรมการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบครอสพลาเย ที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ รับภาระกระจายแบบสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น แผ่นวัสดุเชิงประกอบมีอัตราส่วนทางเรขาคณิตตั้งแต่ 1:1 ถึง 7:1 มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$, $[90]_4$, $[0/90]_5$ และ $[90/0]_5$ จากผลการศึกษาพบว่ารูปร่างการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบไม่ขึ้นอยู่กับ การเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิต แต่ระยะการแอ่นและความเค้นดัดจะขึ้นอยู่กับ การเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิต โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเหมือนกันแต่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตต่างกัน ระยะการแอ่นและความเค้นดัดจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยต่างกันแต่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากัน การเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ จะมีระยะการแอ่นและความเค้นดัดสูงสุดที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตน้อย ในทางตรงกันข้ามที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตมากการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$ จะมีระยะการแอ่นและความเค้นดัดสูงสุด นอกจากนี้ยังสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่น ความเค้นดัดและอัตราส่วนทางเรขาคณิตให้อยู่ในรูปของสมการพหุนามมีลําดับที่ 10

คำสำคัญ

ระยะการแอ่น ความเค้นดัด อัตราส่วนทางเรขาคณิต แผ่นวัสดุเชิงประกอบ

Abstract

The purpose of this research is to study the bending behavior of cross-ply composite plate having three clamped edges and one free edge. The composite plate was subjected to a uniformly distributed load acting in normal direction to the plate. The geometric ratios of the composite plates used in this study were varied from 1:1 to 7:1. The fiber orientations were $[0]_4$, $[90]_4$, $[0/90]_5$ and $[90/0]_5$. The results show that the deflection shape is independent to the fiber orientations and the geometric ratios. In contrast the deflections and bending stresses depend upon the fiber orientations

and the geometric ratios. The deflections and bending stresses for the composite plate with the same fiber orientations but different geometric ratios were found to increase directly to the geometric ratios. For the plate having different fiber orientations but the same geometric ratios, the maximum deflection and bending stress was found to occur for the smallest geometric ratio with the fiber orientations $[90]_4$. On the other hands, the fiber orientations $[0]_4$ resulted maximum deflection and bending stress at the largest geometric ratio. Moreover, the relationship between the deflections, bending stresses and geometric ration can be formulated in terms of 10^{th} power polynomial equation.

Keywords

deflection; bending stress; geometric ratio; composite plate

1. บทนำ

วัสดุเชิงประกอบ คือ การรวมกันของวัสดุตั้งแต่สองชนิดขึ้นไป โดยที่วัสดุทั้งสองชนิดไม่ละลายเข้าด้วยกัน [1] วัสดุเชิงประกอบที่ได้จะมีน้ำหนักเบา มีความแข็งแรงสูง ทนต่อการกัดกร่อนและการสึกหรอ จึงทำให้วัสดุเชิงประกอบมีบทบาทสำคัญในงานทางด้านวิศวกรรมยานยนต์ วิศวกรรมการบิน และวิศวกรรมอวกาศ ซึ่งต้องการโครงสร้างที่มีความแข็งแรงสูงเมื่อเทียบกับน้ำหนัก เนื่องจากการบริโภคน้ำมันเชื้อเพลิงเกี่ยวข้องโดยตรงกับน้ำหนักของโครงสร้าง การลดน้ำหนักของโครงสร้างจึงช่วยปรับปรุงการบริโภคน้ำมันเชื้อเพลิงให้มีปริมาณลดลงได้

วัสดุเชิงประกอบถูกนำมาใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมในรูปแบบของแผ่น โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบจะถูกนำมาใช้รับภาระและเงื่อนไขขอบแบบต่าง ๆ เพื่อให้ตรงตามวัตถุประสงค์ของงาน บางครั้งแผ่นวัสดุเชิงประกอบอาจถูกนำมาใช้รับภาระกระจายแบบสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น ซึ่งจะทำให้แผ่นวัสดุเชิงประกอบเกิดการแอ่น และหากภาระที่กระทำนี้ทำให้ความเค้นที่เกิดขึ้นมากกว่าความต้านทานแรงสูงสุดของวัสดุ จะทำให้แผ่นวัสดุเชิงประกอบเกิดความเสียหาย ดังนั้นการศึกษาระยะการแอ่นและความเค้นที่เกิดขึ้นในแผ่นวัสดุเชิงประกอบจะทำให้การนำแผ่นวัสดุเชิงประกอบไปใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมมีความปลอดภัยมากยิ่งขึ้น

ระยะการแอ่นและความเค้นที่เกิดขึ้นในแผ่นสามารถหาได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential

equations: PDEs) ด้วยวิธีการแม่นยำตรง (exact method) ซึ่งคำตอบที่ได้จะอยู่ในรูปของสูตร ที่ทำให้ทราบระยะการแอ่นและความเค้นที่เกิดขึ้น แม้แผ่นจะมีการเปลี่ยนแปลงสมบัติเชิงกล ภาระที่กระทำ และอัตราส่วนทางเรขาคณิต แต่การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยวิธีการแม่นยำตรงนั้นยังจำกัดอยู่ที่แผ่นที่มีเงื่อนไขขอบสี่ด้านรองรับแบบอย่างง่าย หรือขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบอย่างง่าย [2]

วิธีการประมาณ (approximate method) เป็นแนวทางหนึ่งที่นิยมใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแผ่นที่มีการรองรับแบบอื่น แต่คำตอบที่ได้จากวิธีการประมาณไม่ได้อยู่ในรูปของสูตร จึงทำให้ในทางปฏิบัติซึ่งมีการนำแผ่นวัสดุที่มีสมบัติเชิงกล ภาระที่กระทำ และอัตราส่วนทางเรขาคณิตต่าง ๆ มาใช้งานนั้นยังไม่มีความสะดวกมากนัก ปัจจุบันจึงได้มีงานวิจัยที่หาวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแผ่นวัสดุที่มีสมบัติเชิงกลเป็นแบบไอโซทรอปิก (isotropic material) ที่มีขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น (CCCC) หรือขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกสองด้านรองรับแบบยึดแน่นและแบบอย่างง่าย (CFSF) หรือขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกสองด้านรองรับแบบอย่างง่าย (SFSF) [3] และแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตรขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น (CCCC) [4] ที่รับภาระกระจายแบบสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่นโดยวิธีการประมาณค่า จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นกับอัตราส่วนทาง

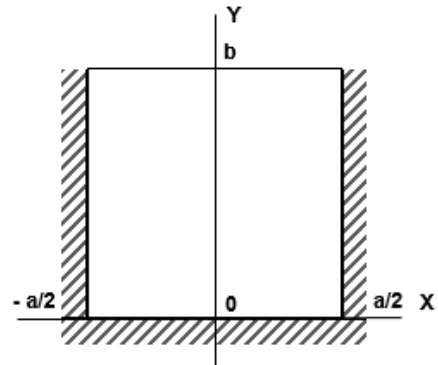
เรขาคณิต โดยสมการแสดงความสัมพันธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียล ซึ่งทำให้ในทางปฏิบัติการคำนวณการแอ่นและความเค้นที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตต่างๆ ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสี่ด้านรองรับแบบต่าง ๆ มีความสะดวกมากขึ้น

สำหรับแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ (CCCF) เป็นอีกหนึ่งเงื่อนไขขอบที่มีการนำแผ่นวัสดุเชิงประกอบมาใช้งานทางด้านวิศวกรรม งานวิจัยนี้จึงมีความสนใจที่จะแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ รับภาระกระจายแบบสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น โดยใช้วิธีคันทอโรวิชซึ่งเป็นวิธีการประมาณ จากนั้นทำการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิตและการเรียงตัวของเส้นใย เพื่อศึกษาผลของอัตราส่วนทางเรขาคณิตและการเรียงตัวของเส้นใยที่มีต่อพฤติกรรมการณ์การแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ และทำการหาความสัมพันธ์ระหว่างการแอ่น ความเค้นที่เกิดขึ้นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิตโดยใช้วิธีวิเคราะห์แบบถดถอย เพื่อให้ได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต อันจะเป็นประโยชน์ต่อการนำแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระไปใช้ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตต่าง ๆ ในทางปฏิบัติ

2. ทฤษฎี

2.1 วิธีคันทอโรวิช (The Kantorovich Method)

วิธีคันทอโรวิชเป็นหนึ่งในวิธีการประมาณที่ใช้สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย [5] โดยอาศัยการสมมุติผลเฉลยให้อยู่ในรูปผลเฉลยแบบแยกตัวแปรได้ (separable solution) จากนั้นแทนผลเฉลยแบบแยกตัวแปรได้ในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ทำให้สามารถลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิง



รูปที่ 1 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกด้านปล่อยอิสระ

อนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equations: ODEs) ซึ่งสามารถหาผลเฉลยโดยวิธีแน่นอนตรงได้ และในการทำให้ผลเฉลยที่ได้จากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบสามารถใช้วิธีการคำนวณแบบทำซ้ำ (iteration calculation) ผลเฉลยที่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบจะถูกนำมาหาค่าระยะการแอ่นและความเค้นดัดของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ

ระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบครอสพาย ขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ ดังแสดงในรูปที่ 1

เมื่อแผ่นวัสดุเชิงประกอบรับภาระกระจายแบบสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น จะทำให้เกิดงานภายนอก (external work) และงานภายใน (internal work) หรือพลังงานความเครียด (strain energy) [5] ทำให้สามารถเขียนสมการพลังงานศักย์รวมของแผ่นวัสดุเชิงประกอบได้ดังสมการที่ (1)

$$\Pi = U + V \quad (1)$$

โดยที่ Π คือ พลังงานศักย์รวม U คือ พลังงานความเครียด และ V คือ งานภายนอก

พลังงานความเครียดและงานภายนอกของแผ่นวัสดุเชิงประกอบสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2) และ (3) ตามลำดับ

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2)$$

$$V = - \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} q w dx dy \quad (3)$$

เมื่อใช้หลักการพลังงานศักย์รวมต่ำสุด (principle of minimum total potential energy) สามารถเขียนสมการที่

- (1) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย [5] ดังแสดงในสมการที่ (1) นั่นคือ

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} q w dx dy \right\} = 0 \quad (4)$$

โดยที่ a คือ ความกว้างด้าน x , b คือ ความกว้างด้าน y , D_{ij} คือ สติฟเนสของวัสดุเชิงประกอบ, i คือ 1, 2, 3, ..., 6, j คือ 1, 2, 3, ..., 6, w คือ ระยะเวลาอ่อนในแนวแกน X และ Y , และ q คือ แรงกระจายสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น

กำหนดผลเฉลยให้อยู่ในรูปผลเฉลยแบบแยกตัวแปรได้ $w(x,y) = X(x)Y(y)$ โดยที่ $X(x)$ คือ ระยะเวลาอ่อนในแนวแกน X และ $Y(y)$ คือระยะเวลาอ่อนตามแนวแกน Y จากนั้นแทนผลเฉลยในสมการที่ (4) จะได้

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right) \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right) + D_{26} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right] dx dy - \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} q X Y dx dy \right\} = 0 \quad (5)$$

ใช้วิธีแปรผัน (variation method) และการอินทิเกรตแยกส่วน (integration by part) ในสมการที่ (5) โดยพิจารณา $X(x)$ สามารถเขียนสมการควบคุม สมการแรงเฉือนรวม และสมการโมเมนต์ดัดในทางแกน y ได้ดังสมการที่ (6)–(8) ตามลำดับ ดังนี้

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} + 2k_1 \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2 Y = q_y \quad (6)$$

$$V_y = S_{3x} D_{22} \frac{d^3 Y}{dy^3} + (S_{2x} D_{12} - 4S_{4x} D_{66}) \frac{dY}{dy} - 2S_{5x} D_{16} Y \quad (7)$$

$$M_y = S_{3x} D_{22} \frac{d^2 Y}{dy^2} + 2S_{6x} D_{26} \frac{dY}{dy} + S_{2x} D_{12} Y \quad (8)$$

โดย V_y คือ แรงเฉือนรวมทางด้าน y , M_y คือ โมเมนต์ดัดทางด้าน y และ

$$k_1 = \left(\frac{S_{2x} D_{12} - 2S_{4x} D_{66}}{S_{3x} D_{22}} \right) \quad (9)$$

$$k_2 = \frac{S_{1x} D_{11}}{S_{3x} D_{22}} \quad (10)$$

$$q_y = \frac{S_{7x} q}{S_{3x} D_{22}} \quad (11)$$

$$S_{1x} = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (12)$$

$$S_{2x} = \int_{-a/2}^{a/2} \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) dx \quad (13)$$

$$S_{3x} = \int_{-a/2}^{a/2} X^2 dx \quad (14)$$

$$S_{4x} = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 dx \quad (15)$$

$$S_{5x} = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) dx \quad (16)$$

$$S_{6x} = \int_{-a/2}^{a/2} X \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) dx \quad (17)$$

$$S_{7x} = \int_{-a/2}^{a/2} X dx \quad (18)$$

สามารถเขียนผลเฉลยสมการที่ 6) กรณีที่ $k_1 > 0$ และ $(k_1^2 - k_2) > 0$ ได้ดังสมการที่ 19)

$$Y(y) = C_{1y} \sin(q_1 y) + C_{2y} \cos(q_1 y) + C_{3y} \sin(q_2 y) + C_{4y} \cos(q_2 y) + \frac{q_y}{k_2} \quad (19)$$

โดยที่

$$q_1 = \left(k_1 + \sqrt{k_1^2 - k_2} \right)^{1/2} \quad (20)$$

$$q_2 = \left(k_1 - \sqrt{k_1^2 - k_2} \right)^{1/2}$$

กรณีที่ $k_1 < 0$ หรือ $k_1 > 0$ และ $(k_1^2 - k_2) < 0$ สามารถเขียนผลเฉลยสมการที่ 6) ได้ดังสมการที่ 21)

$$Y(y) = \left[C_{1y} \cos(q_2 y) + C_{2y} \sin(q_2 y) \right] \cosh(q_1 y) + \left[C_{3y} \cos(q_2 y) + C_{4y} \sin(q_2 y) \right] \sinh(q_1 y) + \frac{q_y}{k_2}$$

โดยที่

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k_2} - k_1 \right)^{1/2} \quad (22)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k_2} + k_1 \right)^{1/2}$$

ส่วนกรณีที่ $k_1 < 0$ และ $0 < k_2 < k_1^2$ สามารถเขียนผลเฉลยสมการที่ 6) ได้ดังสมการที่ 23)

$$Y(y) = C_{1y} \sinh(q_1 y) + C_{2y} \cosh(q_1 y) + C_{3y} \sinh(q_2 y) + C_{4y} \cosh(q_2 y) + \frac{q_y}{k_2} \quad (23)$$

โดยที่

$$q_1 = \left(-k_1 + \sqrt{k_1^2 - k_2} \right)^{1/2} \quad (24)$$

$$q_2 = \left(-k_1 - \sqrt{k_1^2 - k_2} \right)^{1/2}$$

ในทำนองเดียวกันสมการที่ (5) เมื่อพิจารณา $Y(y)$ สามารถเขียนสมการควบคุม สมการแรงเฉือนรวมและสมการโมเมนต์ดัดในทางแกน x ได้ดังสมการที่ (25)–(27) ตามลำดับ

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + 2k_3 \frac{d^2 X}{dx^2} + k_4 X = q_x \quad (25)$$

$$V_x = S_{3x} D_{11} \frac{d^3 X}{dx^3} + (S_{2y} D_{12} - 4S_{4y} D_{66}) \frac{dX}{dx} - 2S_{5y} D_{26} X \quad (26)$$

$$M_x = S_{3y} D_{11} \frac{d^2 X}{dx^2} + 2S_{6y} D_{16} \frac{dX}{dx} + S_{2y} D_{12} X \quad (27)$$

โดย V_x คือ แรงเฉือนรวมทางด้าน x , M_x คือ โมเมนต์ดัดทางด้าน x และ

$$k_3 = \left(\frac{S_{2y} D_{12} - 2S_{4y} D_{66}}{S_{3y} D_{11}} \right) \quad (28)$$

$$k_4 = \frac{S_{1y} D_{22}}{S_{3y} D_{11}} \quad (29)$$

$$q_x = \frac{S_{7y} q}{S_{3y} D_{11}} \quad (30)$$

$$S_{1y} = \int_0^b \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 dy \quad (31)$$

$$S_{2y} = \int_0^b \left(Y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) dy \quad (32)$$

$$S_{3y} = \int_0^b Y^2 dy \quad (33)$$

$$S_{4y} = \int_0^b \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 dy \quad (34)$$

$$S_{5y} = \int_0^b \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) dy \quad (35)$$

$$S_{6y} = \int_0^b Y \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) dy \quad (36)$$

$$S_{7y} = \int_0^b Y dy \quad (37)$$

สามารถเขียนผลเฉลยสมการที่ 25) ได้เป็นสมการที่ 38)–40) ตามลำดับดังนี้

$$X(x) = C_{1x} \cos(p_1x) + C_{2x} \cos(p_2x) + \frac{q_x}{k_4} \quad (38)$$

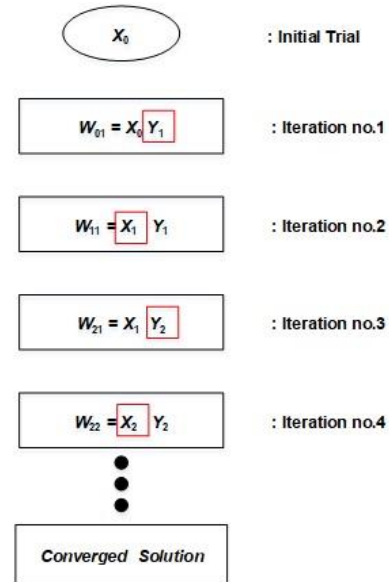
$$X(x) = C_{1x} \cos(p_2x) \cosh(p_1x) + C_{2x} \sin(p_2x) \sinh(p_1x) + \frac{q_x}{k_4} \quad (39)$$

$$X(x) = C_{1x} \cosh(p_1x) + C_{2x} \cosh(p_2x) + \frac{q_x}{k_4} \quad (40)$$

โดยที่ p_1 และ p_2 คือค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับกรณีของ k_3 และ k_4

เพื่อให้ผลเฉลยสมการที่ (19) (21) และ (23) มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่นหนึ่งด้าน และอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ และผลเฉลยสมการที่ (38)–(40) มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่นทั้งสองด้าน จะทำการคำนวณแบบทำซ้ำ [6] ตามวิธีการที่แสดงในรูปที่ 2 ดังนี้

- 1) กำหนดสมการเริ่มต้นสำหรับการคำนวณแบบทำซ้ำ โดยสมการเริ่มต้นอาจไม่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ แต่ถ้าสมการเริ่มต้นมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ การคำนวณแบบทำซ้ำจะมีการรู้เข้าของผลเฉลยเร็วขึ้น [6] ในกรณีสมการเริ่มต้นเป็น $X(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน x ให้คำนวณค่า k_1 และ k_2
- 2) เลือกสมการผลเฉลยที่ (19) (21) และ (23) ตามกรณีของ k_1 และ k_2
- 3) แทนสมการผลเฉลยที่ได้จากข้อ 2) ในเงื่อนไขขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่นหนึ่งด้านและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ จะทำให้ได้ฟังก์ชัน $Y(y)$ จากนั้นคำนวณระยะการแอ่นจากสมการ $w(x,y) = X(x)Y(y)$
- 4) คำนวณค่า k_3 และ k_4 จากฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่ได้จากข้อ (3)
- 5) เลือกสมการผลเฉลยที่ (38)–(40) ตามกรณีของ k_3 และ k_4



รูปที่ 2 ลำดับขั้นการทำซ้ำ

- 6) แทนสมการผลเฉลยที่ได้จากข้อ 5) ในเงื่อนไขขอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่นทั้งสองด้าน จะทำให้ได้ฟังก์ชัน $X(x)$ จากนั้นคำนวณระยะการแอ่นจากสมการ $w(x,y) = X(x)Y(y)$
- 7) เปรียบเทียบระยะการแอ่นที่ได้จากข้อ 3) และข้อ 6) หากค่าความคลาดเคลื่อนไม่อยู่ในเกณฑ์ที่กำหนดให้ทำการคำนวณแบบทำซ้ำต่อไป โดยในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเท่ากับร้อยละ 0

แทนผลเฉลยสมการที่ (19) (21) (23) (38) (39) และสมการที่ (40) ที่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบในสมการโมเมนต์ดัดสมการที่ (8) และ (27) ตามลำดับ จากนั้นนำค่าโมเมนต์ดัดทางด้าน y และ x แทนในสมการที่ (41) และ (42) ตามลำดับ เพื่อหาความเค้นดัดสูงสุดทางด้าน y และ x [7] ที่เกิดขึ้น นั่นคือ

$$\sigma_y = \pm \frac{6M_y}{h^2} \quad (41)$$

$$\sigma_x = \pm \frac{6M_x}{h^2} \quad (42)$$

โดย σ_y คือ ความเค้นดัดทางด้าน y σ_x คือ ความเค้นดัดทางด้าน x และ h คือ ความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ

2.2 วิธีวิเคราะห์แบบถดถอย

ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิตจะใช้วิธีวิเคราะห์แบบถดถอย โดยอัตราส่วนทางเรขาคณิตจะเป็นตัวแปรอิสระ (independent variable) ซึ่งเป็นตัวแปรที่ทราบค่า ส่วนระยะการแอ่นและความเค้นดัดจะเป็นตัวแปรตาม (dependent variable) ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า โดยตัวแปรอิสระจะมีผลต่อตัวแปรตามที่ต้องการหาความสัมพันธ์ [8]

ในงานวิจัยนี้ตัวแปรตามมีความสัมพันธ์ไม่เชิงเส้นกับตัวแปรอิสระ จึงใช้สมการถดถอยแบบพหุนามอันดับที่ p ซึ่งเป็นสมการถดถอยไม่เชิงเส้น (nonlinear regression) เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระ ดังแสดงในสมการที่ (43) นั่นคือ

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_p x_i^p + \varepsilon_i \quad (43)$$

โดย y_i คือ ตัวแปรตาม x_i คือ ตัวแปรอิสระ β_i คือ ค่าพารามิเตอร์ของสมการ และ ε_i คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

อันดับที่เหมาะสมสำหรับสมการถดถอยแบบ พหุนาม จะพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ดังแสดงในสมการที่ (44) โดยจะพิจารณาอันดับของสมการถดถอยแบบพหุนามที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจที่มีค่าเข้าใกล้ 1 นั่นคือ

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (44)$$

โดย R^2 คือ ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ซึ่งมีค่า $0 \leq R^2 \leq 1$

3. วิธีการศึกษา

ในการศึกษาพฤติกรรมของการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบครอสพาย ขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ ทำการคำนวณระยะการแอ่นและความเค้นดัดของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0]_4$, $[90]_4$, $[0/90]_5$ และ $[90/0]_5$ ที่รับภาระกระจายแบบ

สม่ำเสมอขนาด 1 N/m^2 กระทำตั้งฉากกับแผ่นด้วยวิธีคันโตโรวิช โดยทำการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิตด้าน ต่อด้าน ตั้งแต่ $1.0:1.0$ ถึง $7.0:1.0$ เพิ่มขึ้นทีละ 0.1 จากนั้นพลอตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับขนาดด้าน x และ y ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตต่าง ๆ ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0]_4$, $[90]_4$, $[0/90]_5$ และ $[90/0]_5$ ตามลำดับเพื่อศึกษาผลของการเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่มีต่อพฤติกรรมของการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ จากนั้นสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิตโดยวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย

สำหรับแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่นำมาใช้ในงานวิจัยครั้งนี้ทำจากเคพลาร์ (Kevlar) ที่มีสมบัติทางกลดังนี้

$$E_1 = 138 \text{ GPa} \quad E_2 = 8.96 \text{ GPa} \quad G_{12} = 7.1 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 2.82 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.3 \quad \text{และ} \quad \nu_{23} = 0.59$$

โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบแต่ละชั้นมีความหนา 2.5 mm [9]

4. ผลการศึกษา

- 1) ผลของการแปรผันการเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่มีต่อรูปร่างการแอ่น พบว่ารูปร่างการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคพลาร์ ที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 3

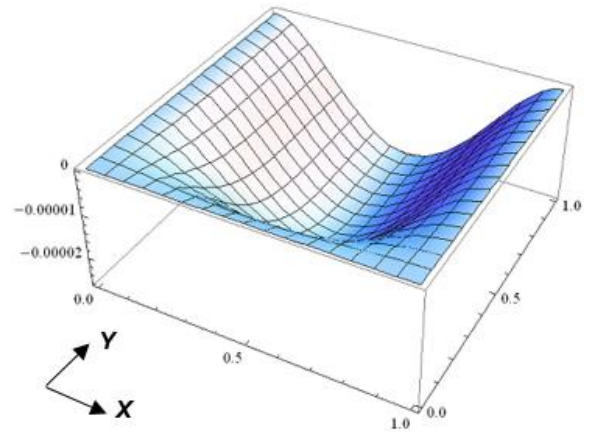
จากผลการศึกษาพบว่ารูปร่างการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคพลาร์ ไม่ขึ้นอยู่กับการเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิตตั้งแต่ $1:1$ ถึง $7:1$ โดยเมื่อแผ่นวัสดุเชิงประกอบรับภาระกระทำตั้งฉากกับแผ่น จะทำให้แผ่นวัสดุเชิงประกอบเกิดการแอ่น โดยที่จุดรองรับของขอบทั้งสามด้านจะไม่เกิดการแอ่น แต่การแอ่นจะเกิดขึ้นต่อจากจุดรองรับของขอบทั้งสามด้านในลักษณะลาดเอียงเข้าหาจุดกึ่งกลางของ

ขอบด้านที่ปล่อยอิสระ ทำให้จุดกึ่งกลางของขอบด้านที่ปล่อยอิสระนั้นเป็นจุดที่มีการแอ่นตัวสูงสุด

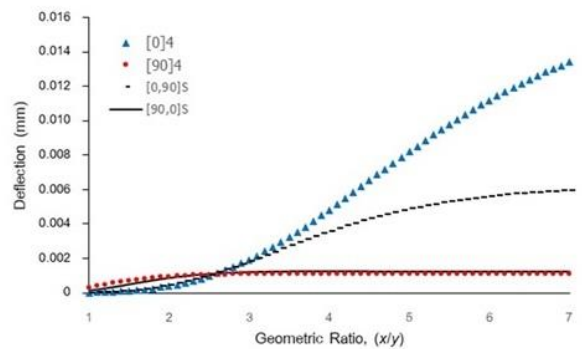
- 2) ผลของการแปรผันการเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ที่มีต่อระยะการแอ่น พบว่าระยะการแอ่นที่เกิดขึ้น สามารถแบ่งได้ 2 ช่วงคือ ช่วงที่ 1 ระยะการแอ่นจะมีค่าเพิ่มขึ้นต่อเนื่อง เนื่องจากมีการขยายอัตราส่วนทางเรขาคณิตทำให้เส้นใยมีความยาวมากขึ้นและมีความแข็งแรงลดลง ส่วนช่วงที่ 2 ระยะการแอ่นมีแนวโน้มที่จะคงที่เนื่องจากการขยายอัตราส่วนทางเรขาคณิตไม่ส่งผลต่อระยะการแอ่น ดังแสดงในรูปที่ 4

โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยต่างกันแต่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตเท่ากัน การเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ จะมีระยะการแอ่นสูงสุดที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตน้อย ในทางตรงกันข้ามที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตมากการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$ จะมีระยะการแอ่นสูงสุด เนื่องจากการเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตเป็นการเพิ่มความยาวทางด้าน x จึงทำให้ความยาวของเส้นใยในแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$ ซึ่งมีการเรียงเส้นใยในแนวแกน x มีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้ระยะการแอ่นมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง จนกระทั่งการเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตไม่ส่งผลต่อความยาวของเส้นใยทำให้ระยะการแอ่นมีแนวโน้มที่จะคงที่ ส่วนแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ การเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตจะไม่ส่งผลต่อความยาวของเส้นใยเนื่องจากเส้นใยมีการเรียงตัวในแนวแกน y ทำให้ระยะการแอ่นมีแนวโน้มที่จะคงที่เร็วกว่า

- 3) ผลของการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่รับภาระกระจายแบบสม่ำเสมอ



รูปที่ 3 ลักษณะการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ ขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระที่อัตราส่วน 1:1

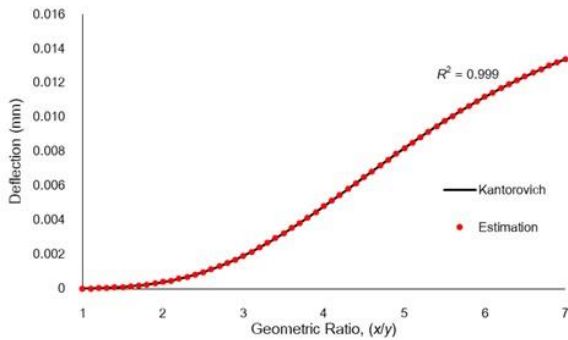


รูปที่ 4 ระยะการแอ่นและอัตราส่วนทางเรขาคณิต

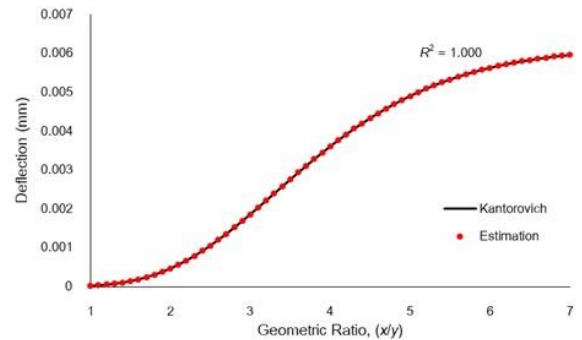
ขนาด 1 N/m^2 ตั้งแต่ 1:1 โดยขยายอัตราส่วนทางด้าน y ครั้งละ 0.1 เมตร จนระยะการแอ่นมีแนวโน้มที่จะคงที่ พบว่าความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นและอัตราส่วนทางเรขาคณิตมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ดังแสดงในรูปที่ 5-8 ซึ่งสามารถเขียนสมการโพลิโนเมียลแสดงความสัมพันธ์ พร้อมค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$

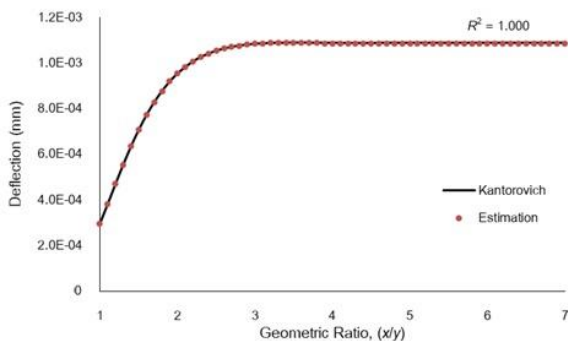
$$W = 4.980 \times 10^{-9} n^{10} + 1.992 \times 10^{-7} n^9 + 3.425 \times 10^{-6} n^8 + 3.291 \times 10^{-5} n^7 - 1.921 \times 10^{-4} n^6 + 6.970 \times 10^{-4} n^5$$



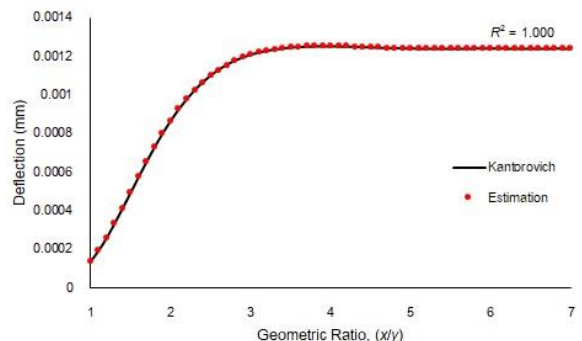
รูปที่ 5 ระยะการแอ่นที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอโรวิชของการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$



รูปที่ 7 ระยะการแอ่นที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอโรวิชของการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_5$



รูปที่ 6 ระยะการแอ่นที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอโรวิชของการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$



รูปที่ 8 ระยะการแอ่นที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอโรวิชของการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90/0]_5$

$$- 1.595 \times 10^{-3} n^4 + 2.471 \times 10^{-3} n^3 + 2.433 \times 10^{-3} n^2 + 1.394 \times 10^{-5} n + 3.485 \times 10^{-4}$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$

$$W = 7.299 \times 10^{-9} n^{10} - 3.146 \times 10^{-7} n^9 + 5.978 \times 10^{-6} n^8 - 6.589 \times 10^{-5} n^7 + 4.655 \times 10^{-4} n^6 - 2.195 \times 10^{-3} n^5 + 6.955 \times 10^{-3} n^4 - 1.441 \times 10^{-2} n^3 + 1.811 \times 10^{-2} n^2 - 1.137 \times 10^{-2} n + 2.806 \times 10^{-3}$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_5$

$$W = -1.192 \times 10^{-8} n^8 + 3.309 \times 10^{-7} n^7 - 3.955 \times 10^{-6} n^6 + 2.655 \times 10^{-5} n^5 - 1.091 \times 10^{-4} n^4 + 2.802 \times 10^{-4} n^3 - 4.362 \times 10^{-4} n^2 + 3.727 \times 10^{-4} n - 1.057 \times 10^{-4}$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90/0]_5$

$$W = 6.769 \times 10^{-8} n^8 - 1.847 \times 10^{-6} n^7 + 2.172 \times 10^{-5} n^6 - 1.435 \times 10^{-4} n^5 + 5.805 \times 10^{-4} n^4 - 1.453 \times 10^{-3} n^3 + 2.136 \times 10^{-3} n^2 - 1.557 \times 10^{-3} n + 4.423 \times 10^{-4}$$

โดยที่ n คือ อัตราส่วนทางเรขาคณิต

- 4) ผลของการแปรผันการเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิตที่มีต่อความเค้นดัด พบว่าเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าเพิ่มขึ้น ความเค้นดัดจะมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงแรก และจากนั้นความเค้นดัดจะมีแนวโน้มที่จะคงที่ ดังแสดงในรูปที่ 9 โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$ ความเค้นดัดจะมีแนวโน้มที่จะคงที่ต่ำกว่าแผ่นวัสดุเชิง

ประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_5$, $[90/0]_5$ และ $[90]_4$ ตามลำดับ

เนื่องจากการเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตทำให้ระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ทำให้ความโค้ง (curvature) ของส่วนโค้งมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ส่งผลให้โมเมนต์ดัดมีค่าเพิ่มขึ้น จึงทำให้ความเค้นดัดมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อการเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตไม่ส่งผลต่อระยะการแอ่น ระยะการแอ่นจึงมีแนวโน้มที่จะคงที่ ส่งผลให้ความโค้งของส่วนโค้ง โมเมนต์ดัด และความเค้นดัดมีแนวโน้มที่จะคงที่ ส่วนแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ การเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตส่งผลต่อระยะการแอ่นเล็กน้อย ทำให้ระยะการแอ่นมีแนวโน้มที่จะคงที่เร็วขึ้น ส่งผลให้ความโค้งของส่วนโค้ง โมเมนต์ดัด และความเค้นดัดมีแนวโน้มที่จะคงที่เร็วขึ้น

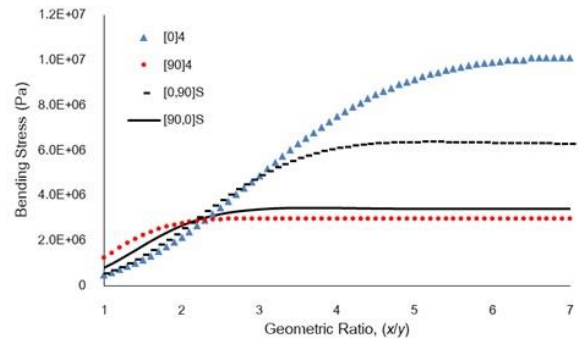
- 5) ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นดัดและอัตราส่วนทางเรขาคณิตมีลักษณะเป็นเส้นโค้งดังแสดงในรูปที่ 10-13 สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียล พร้อมค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$

$$\begin{aligned}\sigma = & 118.692 n^9 - 3.441 \times 10^3 n^8 + 43.427 \times 10^3 n^7 \\ & - 312.430 \times 10^3 n^6 + 1.408 \times 10^6 n^5 - 4.111 \times 10^6 n^4 \\ & + 7.737 \times 10^6 n^3 - 8.989 \times 10^6 n^2 + 5.788 \times 10^6 n \\ & - 1.049 \times 10^6\end{aligned}$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$

$$\sigma = -26.204 n^8 - 2.179 \times 10^3 n^7 + 58.406 \times 10^3 n^6$$



รูปที่ 9 ความเค้นดัดและอัตราส่วนทางเรขาคณิต

$$\begin{aligned}& - 583.627 \times 10^3 n^5 + 3.027 \times 10^6 n^4 - 8.764 \times 10^6 n^3 \\ & + 1.368 \times 10^7 n^2 - 9.669 \times 10^6 n + 2.757 \times 10^6\end{aligned}$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_5$

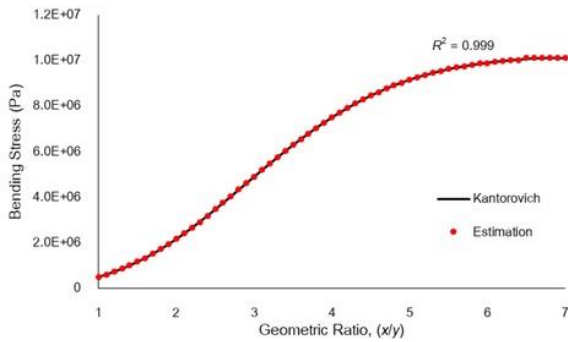
$$\begin{aligned}\sigma = & -245.365 n^8 + 6.759 \times 10^3 n^7 - 80.135 \times 10^3 n^6 \\ & + 533.001 \times 10^3 n^5 - 2.169 \times 10^6 n^4 + 5.507 \times 10^6 n^3 \\ & - 8.466 \times 10^6 n^2 + 7.127 \times 10^6 n - 1.908 \times 10^6\end{aligned}$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90/0]_5$

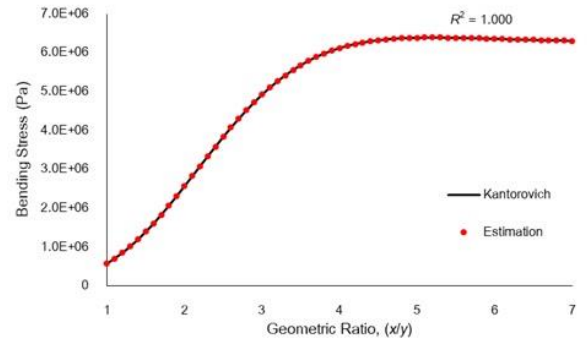
$$\begin{aligned}\sigma = & 969.057 n^8 - .081 \times 10^3 n^7 - .164 \times 10^3 n^6 \\ & 1.438 - \times 10^6 n^5 - 4.812 + \times 10^6 n^4 - 9.366 - \times 10^6 n^3 \\ & 9.642 + \times 10^6 n^2 - 3.711 - \times 10^6 n - 381 + .694 \times 10^3\end{aligned}$$

5. สรุปผลการศึกษา

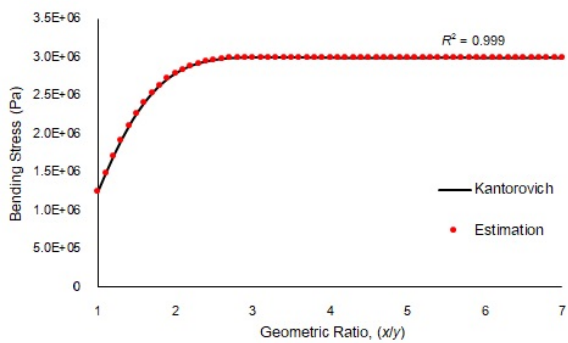
- 1) ลักษณะการเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิตไม่มีผลต่อลักษณะการแอ่นตัวของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคฟลาร์ ที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ (CCCF) และรับภาระกระจายแบบสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น แต่จะมีผลต่อระยะการแอ่นและความเค้นดัด
- 2) เมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าเพิ่มขึ้น ระยะการแอ่นและความเค้นดัดจะมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงแรก จากนั้นจะมีแนวโน้มที่จะคงที่ โดยแผ่นวัสดุเชิง



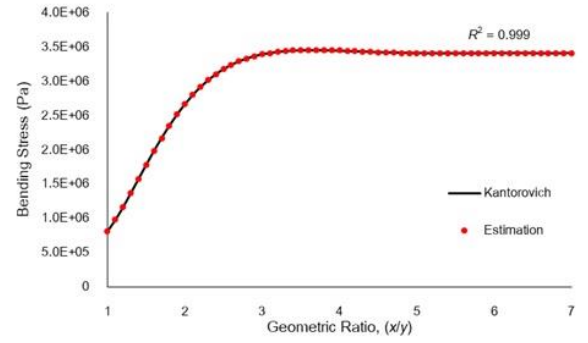
รูปที่ 10 ความเค้นดัดที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอร์วิชของการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$



รูปที่ 12 ความเค้นดัดที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอร์วิชของการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_5$



รูปที่ 11 ความเค้นดัดที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอร์วิชของการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$



รูปที่ 13 ความเค้นดัดที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอร์วิชของการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90/0]_5$

ประกอบเคพลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$ ระยะการแอ่นและความเค้นดัดจะมีแนวโน้มที่จะคงที่ ซ้ำกว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคพลาร์ ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_5$, $[90/0]_5$ และ $[90]_4$ ตามลำดับ

- 3) ความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียล อันดับ 10 ส่วนความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียล อันดับ 9 ซึ่งสามารถใช้คำนวณระยะการแอ่นและความเค้นดัดตั้งแต่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 1.0:1.0 ถึง 7.0:1.0 ทำให้ในทางปฏิบัติที่มีการนำแผ่นวัสดุเชิงประกอบเคพลาร์ มาใช้ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตต่าง ๆ มีความสะดวกมากขึ้น เมื่อเทียบกับ

การใช้วิธีการประมาณ โดยการแทนอัตราส่วนทางเรขาคณิตในสมการแสดงความสัมพันธ์ จะทำให้ผู้ใช้งานสามารถทราบระยะการแอ่นและความเค้นดัดได้

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณโครงการยกระดับปริญญาโทเป็นงานวิจัยตีพิมพ์ งานสร้างสรรค์ และงานบริการวิชาการสู่ชุมชน ประจำปี 2558

เอกสารอ้างอิง

- [1] ทวี หวังนิเวศน์กุล. *วัสดุวิศวกรรม*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์รุ่งแสงการพิมพ์; 2554.
- [2] Rajalingham C, Bhat RB, Xistris GD. Vibration of rectangular plates using plate characteristic functions as shape functions in the Rayleigh-Ritz

- method. *Journal of Sound and Vibration*. 1996; 193(2): 497–509.
- [3] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข, อาศิร บุญยะประสงค์,กรกฎ รัชชภูมิ, ธนบดี รักษ์พลพันธ์. การศึกษาการเปลี่ยนพฤติกรรมแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคาน. *วารสารวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*. 2557; 21(2): 21–29.
- [4] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข, ณัฐพงษ์ กุลท้วม, เอกรินทร์ ระลาธิ. ความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่น – ความเค้นดัด และอัตราส่วนทางเรขาคณิต ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตรขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น. *วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ ม.อบ.* 2559; 9(1): 61–69.
- [5] Ungbhakorn V, Wattanasakulpong N. Bending analysis of symmetrically laminated rectangular plates with arbitrary edge supports by the extended Kantorovich method. *Thammasat Int. J. Sc.Tech*. 2006: 33–44.
- [6] Phongsrisuk K, Ingsuwan P, Rangsi W, Klongpanich W. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite rectangular plate using extended Kantorovich method. *Maejo Int. J. Sci. Technol*. 2010; 4(3): 512–532.
- [7] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells* (2nd ed). New York: McGraw-Hill; 1959.
- [8] พิษณุ เจียวกุณ. *การวิเคราะห์การถดถอย*. เชียงใหม่: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่; 2548.
- [9] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis* (2nd ed). Boca Raton: CRC Press; 2004.