



วารสารวิศวกรรมศาสตร์และนวัตกรรม Journal of Engineering and Innovation

บทความวิจัย

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขให้กับปัญหาแบบปัวซองด้วยวิธีดิฟเฟอเรนเชียล ควอดราเจอร์ Numerical solution for poisson problems by using differential quadrature method

ภาสกร เวสสะโกศล*

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลและเมคาทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์วิทยาเขตหาดใหญ่ อำเภอหาดใหญ่ จังหวัดสงขลา 90190

Passakorn Vessakosol*

Department of Mechanical and Mechatronics Engineering Faculty of Engineering Prince of Songkla University Hatyai campus Hatyai Songkla, 90190

* Corresponding author.

E-mail: passakorn.vessakosol@gmail.com; Telephone: 0 7428 7416

วันที่รับบทความ 28 มิถุนายน 2564; วันที่แก้ไขบทความ ครั้งที่ 1 24 กันยายน 2564; วันที่แก้ไขบทความ ครั้งที่ 2 5 ตุลาคม 2565

วันที่ตอบรับบทความ 8 มีนาคม 2565

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีไร้โครงตาข่ายชื่อว่าวิธีดิฟเฟอเรนเชียลควอดราเจอร์สำหรับแก้ปัญหาลูปของ การแก้ปัญหาลูปของเป็นขั้นตอนสำคัญ ขั้นตอนหนึ่งสำหรับการคำนวณพลศาสตร์การไหล สนามไฟฟ้า และการถ่ายเทความร้อน วิธีนี้จะประเมินค่าอนุพันธ์ต่างๆโดยตรงจึงไม่จำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับกระบวนการของการหาปริพันธ์ ปัญหาลูปของที่เลือกถูกวิเคราะห์บนโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนึ่งหน่วย คำตอบของวิธีเชิงตัวเลขจากวิธีดิฟเฟอเรนเชียลควอดราเจอร์ ถูกนำมาเปรียบเทียบกับคำตอบจากวิธีเชิงวิเคราะห์ใน 5 กรณี ความผิดพลาดโดยรวมของวิธีการนี้ต่ำกว่าหนึ่งเปอร์เซ็นต์ในทุกกรณี

คำสำคัญ

วิธีดิฟเฟอเรนเชียลควอดราเจอร์ วิธีไร้โครงตาข่าย วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ปัญหาลูปของ

Abstract

This article presents a meshless method called Differential Quadrature Method for solving the Poisson problems. Solving the Poisson problem is one of the important steps for calculating flow dynamics, electric field, and heat transfer. This method estimates the derivatives directly so there is no need to deal with integration process. The selected Poisson's problems were analyzed in a unit square domain. The numerical solutions were compared with the analytical solutions in five cases. The overall error in all cases were less than one percent.

Keywords

differential quadrature method; meshless method; numerical solution; Poisson's problem

1. บทนำ

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาคำตอบให้แก่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลายในปัจจุบันได้แก่ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

เป็นต้น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกใช้อย่างกว้างขวางในปัญหา กลศาสตร์ของแข็งซึ่งโดเมนมีรูปร่างซับซ้อน วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์เป็นวิธีที่เก่าแก่ที่สุดของการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข แต่ยังสามารถใช้งานได้ดีในหลากหลายปัญหา โดยเฉพาะปัญหาที่มีรูปร่างโดเมนไม่ซับซ้อน ข้อดีของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์คือ การ

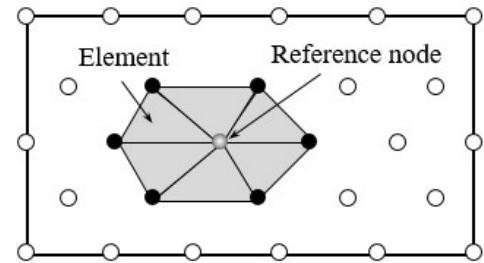
สร้างสมการคำนวณทำได้ง่ายไม่ต้องอาศัย การหาปริพันธ์ (integration) ที่ยุ่งยาก วิธีไฟไนต์วอลุ่มเป็นอีกวิธีหนึ่งซึ่งต้องอาศัยวิธีหาปริพันธ์ในการสร้างระบบสมการ วิธีนี้ถูกใช้อย่างกว้างขวางในการคำนวณพลศาสตร์การไหล และการถ่ายเทความร้อน เป็นวิธีที่เหมาะสมสำหรับโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อน ปัจจุบันวิธีนี้ถูกนำมาประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคำนวณเชิงพาณิชย์ นิยมใช้ในอุตสาหกรรมต่างๆที่ต้องเกี่ยวข้องกับแรงผลัก แรงยก จากความดันของของไหลที่กำลังเคลื่อนที่ผ่าน และการพาความร้อนโดยของไหล

วิธีที่กล่าวมาข้างต้นทุกวิธี ผู้ใช้จะต้องจัดเตรียมข้อมูลที่เรียกว่า เมช (mesh) ให้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์เรียกขั้นตอนนี้ว่า pre-processing step เมชคือ โครงข่ายของจุดต่อ (node) ต่างๆที่อยู่ใกล้เคียงกันตรงตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งของโดเมนที่ระบุว่าเป็นจุดต่ออ้างอิง (reference node) ตัวอย่างของ เมชสามเหลี่ยม (triangular mesh) ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นไปดังรูปที่ 1(a) ฟังก์ชันและค่าอนุพันธ์ต่างๆที่ตำแหน่งต่างๆรอบจุดต่ออ้างอิง ได้รับอิทธิพลมาจากฟังก์ชันที่อยู่ในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดต่ออ้างอิงเป็นสมาชิก เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมจำนวน 6 เอลิเมนต์อยู่รอบจุดต่ออ้างอิง การประมาณค่าภายในเอลิเมนต์เหล่านี้เป็นการประมาณค่าแบบเชิงเส้น เอลิเมนต์ต่างๆจะต้องไม่ซ้อนทับกัน และกระจายตัวให้ครอบคลุมทั่วทั้งโดเมนโดยไม่มีช่องว่าง

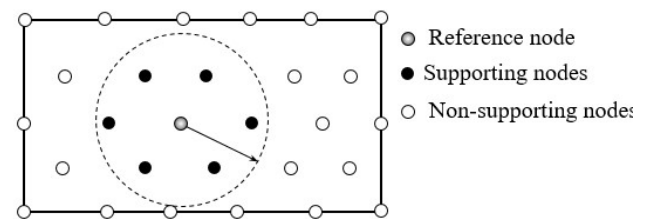
วิธีไร้โครงตาข่ายหรือ meshless method ถูกคิดค้นขึ้นมาเพื่อให้การคำนวณเชิงเลขไม่ต้องอาศัยเมช เพราะการสร้างเมชเป็นขั้นตอนที่ใช้ระยะเวลานาน ต้องตรวจสอบความถูกต้องในการเชื่อมต่อระหว่างจุดต่อต่างๆ ในเอลิเมนต์ และอาจต้องตรวจสอบรูปร่างของเอลิเมนต์ด้วย ปัญหานี้จะมีผลกระทบอย่างยิ่งในปัญหาสามมิติ ปัญหาไม่อยู่ตัวที่รูปร่างของโดเมนเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ตัวอย่างของวิธีไร้โครงตาข่ายในปัจจุบันมีอยู่มากมาย รายชื่อวิธีไร้โครงตาข่ายบางส่วนของมีอยู่ในปัจจุบันได้แก่ Element-Free Galerkin method (EFG) [1], Local Meshless Petrov-Galerkin method (MLPG) [2], Kansa's method [3], Method of Fundamental solutions [4], Differential Quadrature Method (DQM) [5], Smoothed Particle Hydrodynamics method (SPH) [6] และ Reproducing Kernel Particle

Methods (RKPM) [7] เป็นต้น ความแตกต่างของแต่ละวิธีสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน [8]

(a)



(b)



รูปที่ 1 ความแตกต่างของสองวิธีที่ใช้ในการหาค่าเฉลยเชิงตัวเลข (a) Triangular mesh ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (b) วิธีที่ไม่ต้องจัดเตรียมเมชให้กับการคำนวณ (meshless) เพราะวิธีการนี้จะค้นหาจุดที่เกี่ยวข้องโดยอัตโนมัติ

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือเพื่อแสดงขั้นตอนในการประดิษฐ์ระเบียบวิธีของ meshless method สำหรับปัญหาปัวซอง ซึ่งเป็นปัญหาพื้นฐานสำคัญทางคณิตศาสตร์และวิศวกรรม วิธี meshless ที่ต้องการนำเสนอคือ differential quadrature method (DQM) ผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องมีการจัดเตรียมเมชก่อนเริ่มการคำนวณ การหาโครงข่ายของจุดต่อสามารถทำได้แบบอัตโนมัติด้วยการกำหนดของอาณาเขตของโดเมนย่อยเช่น รูปวงกลม เป็นต้น ภายในวงกลมมี จุดต่อสนับสนุน (supporting nodes) และจุดต่ออ้างอิง อยู่ร่วมกันดังรูปที่ 1(b) วงกลมรอบจุดต่ออ้างอิงต่างๆสามารถซ้อนทับกันได้ จุดต่อที่อยู่นอกวงกลมถือว่าไม่ได้มีส่วนร่วมในการสร้างสมการของจุดต่ออ้างอิงนั้น ระบบสมการขนาดใหญ่เกิดจากการรวบรวมสมการของจุดต่ออ้างอิงต่างๆ ที่อยู่ภายในโดเมน และจุดต่ออ้างอิงบนขอบเขต (กรณีที่ไม่ได้ระบุค่าเฉลยให้กับจุดต่อนั้น)

ปัญหาของปั๊วของถือเป็นปัญหาพื้นฐานสำคัญของการศึกษาทางวิศวกรรมด้านต่างๆได้แก่ การนำความร้อนในวัตถุ การไหลแบบอัดตัวไม่ได้และไม่มี ความหนืด สนามความดันในการไหลแบบไม่อัดตัวและมีความหนืด สนามไฟฟ้าสถิตย์ สนามการไหลของน้ำใต้ดิน เป็นต้น ดังนั้นในบทความนี้จะให้ความสนใจไปที่สมการนี้เพียงอย่างเดียวเพื่อทำความเข้าใจถึงการใช้เทคนิค DQM ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม หัวข้อที่จะกล่าวถึงต่อไปได้แก่ หลักคิดของ DQM ต่อจากนั้นเป็นหัวข้อวิธีดำเนินการวิจัย หัวข้อต่อไปคือผลการศึกษา และหัวข้อสุดท้ายเป็นสรุปผลการศึกษา

2. Differential Quadrature Method (DQM)

กำหนดให้โดเมนของปัญหาคือตัวแปร Ω และขอบเขตของปัญหาคือตัวแปร Γ ในบทความนี้ต้องการนำเสนอการใช้วิธี DQM เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาที่เป็นไปตามสมการทั่วไปแบบปั๊วของดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (1)$$

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบดิริคเลท (Dirichlet) หรือเงื่อนไขระบุค่า u บนขอบเขต Γ โดยใช้คำตอบเชิงวิเคราะห์ $u_e(x, y)$ ในการสร้างสมการด้วยวิธีนี้ไม่จำเป็นต้องมีการหาปริพันธ์ แต่ใช้การหารูปแบบสมการพีชคณิตเทียบเท่าสำหรับอนุพันธ์อันดับสองที่เกี่ยวข้องของสมการ ซึ่งในที่นี้คือ $\partial^2 u / \partial x^2$ และ $\partial^2 u / \partial y^2$ สำหรับแต่ละจุดที่ยังไม่ทราบค่า u

ขั้นตอนแรกของวิธี DQM คือการกำหนดฟังก์ชันประมาณค่าให้แก่ตัวแปรไม่ทราบค่า u ภายในอาณาเขตรอบจุดอ้างอิงที่ถูกกำหนดโดยผู้ใช้ ฟังก์ชันประมาณค่าคือ ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับที่สอง ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้สองครั้งโดยไม่มีค่าอนุพันธ์อันดับที่สองกลายเป็นศูนย์ ฟังก์ชัน $u(x, y)$ ถูกประมาณค่าด้วยผลบวกขององค์ประกอบโพลิโนเมียลจำนวน 6 พจน์ดังสมการที่ (2)

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^6 p_k(x, y) a_k \quad (2)$$

โดย $a_k, k = 1, 2, \dots, 6$ คือสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ของแต่ละองค์ประกอบโพลิโนเมียล $p_k, k = 1, 2, \dots, 6$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันองค์ประกอบโพลิโนเมียลดังต่อไปนี้

$$p_1(x, y) = 1 \quad (3a)$$

$$p_2(x, y) = x \quad (3b)$$

$$p_3(x, y) = y \quad (3c)$$

$$p_4(x, y) = x^2 \quad (3d)$$

$$p_5(x, y) = xy \quad (3e)$$

$$p_6(x, y) = y^2 \quad (3f)$$

หลังจากแทนค่า $p_1(x, y)$ ถึง $p_6(x, y)$ ในสมการที่ (2) จะได้สมการดังนี้

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \quad (4)$$

ค่าอนุพันธ์อันดับสองของ $u(x, y)$ เทียบกับระยะทาง x หาได้จาก

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial^2 p_k}{\partial x^2} a_k = 2a_4 \quad (5)$$

และค่าอนุพันธ์อันดับสองของ $u(x, y)$ เทียบกับระยะทาง y หาได้จาก

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial^2 p_k}{\partial y^2} a_k = 2a_6 \quad (6)$$

วิธี DQM กำหนดให้ค่าอนุพันธ์ทั้งสองสามารถหาได้จากผลบวกของผลคูณระหว่างตัวแปร b_j และ c_j กับค่า u ต่างๆที่อยู่ในขอบเขตรอบจุดอ้างอิงดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{j=1}^6 u_j b_j \\ &= b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_6 u_6 \end{aligned} \quad (7)$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sum_{j=1}^6 u_j c_j \\ &= c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_6 u_6 \end{aligned} \quad (8)$$

โดย

$$\begin{aligned} u_1 = u(x_1, y_1) &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 \\ &\quad + a_4 x_1^2 + a_5 x_1 y_1 + a_6 y_1^2 \end{aligned} \quad (9a)$$

$$u_2 = u(x_2, y_2) = a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4x_2^2 + a_5x_2y_2 + a_6y_2^2 \quad (9b)$$

$$u_3 = u(x_3, y_3) = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4x_3^2 + a_5x_3y_3 + a_6y_3^2 \quad (9c)$$

$$u_4 = u(x_4, y_4) = a_1 + a_2x_4 + a_3y_4 + a_4x_4^2 + a_5x_4y_4 + a_6y_4^2 \quad (9d)$$

$$u_5 = u(x_5, y_5) = a_1 + a_2x_5 + a_3y_5 + a_4x_5^2 + a_5x_5y_5 + a_6y_5^2 \quad (9e)$$

$$u_6 = u(x_6, y_6) = a_1 + a_2x_6 + a_3y_6 + a_4x_6^2 + a_5x_6y_6 + a_6y_6^2 \quad (9f)$$

หากเปรียบเทียบสมการที่ (5) และ (7) จะพบว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 & x_6y_6 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ในทำนองเดียวกัน หากเปรียบเทียบสมการที่ (6) และ (8)

จะพบว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 & x_6y_6 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ b_j ทั้ง 6 ค่าและ c_j ทั้ง 6 ค่า

สามารถคำนวณได้จาก การใช้วิธีเมทริกซ์ผกผันจากสมการที่ (10) และ (11) ตามลำดับ การแทนสมการที่ (7) และ (8) ลงในสมการที่ (1) จะทำให้ได้สมการคำนวณสำหรับจุดต่ออ้างอิงใดๆที่มีกลุ่มจุดต่อรอบข้างจำนวน 5 จุดต่อดังนี้

$$(b_1 + c_1)u_1 + (b_2 + c_2)u_2 + \dots + (b_6 + c_6)u_6 = g(x_6, y_6) \quad (12)$$

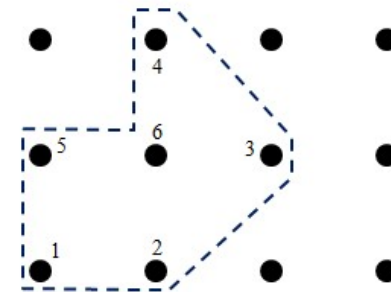
ถ้าพิจารณารูปที่ 2 และ 3 และสมมุติว่า จุดต่ออ้างอิง คือ

$u_6 = U_{61}$ จุดต่อสนับสนุนประกอบด้วย $u_1 = U_{49}$, $u_2 = U_{50}$, $u_3 = U_{62}$, $u_4 = U_{72}$ และ $u_5 = U_{60}$ โดย u หมายถึงตัวแปรของจุดต่อภายในพื้นที่รอบจุดต่ออ้างอิง และ U หมายถึงตัวแปรของจุดต่อในโดเมน หากต้องการคำนวณค่าตัวแปร U ของจุดต่อทั้งโดเมนจะต้องนำเอา 81 สมการมา

ประกอบเข้าด้วยกันแล้วเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตจำนวน 40 สมการ ดังนั้นระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นคือ

$$[A]_{121 \times 121} \{U\}_{121 \times 1} = \{G\}_{121 \times 1} \quad (13)$$

โดย $[A]$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์, $\{U\}$ คือเวกเตอร์ของคำตอบและ $\{G\}$ คือเวกเตอร์ด้านขวามือของเมทริกซ์ ในที่สุดตัวแปรไม่ทราบค่าในเวกเตอร์ $\{U\}$ จำนวน 81 ค่าหาได้จากวิธีกำจัดตัวแปรแบบเกาส์ (Gauss elimination method) สำหรับกรณีที่จำนวนจุดต่อไม่มากนัก แต่ถ้าจะใช้กับโจทย์ที่มีจำนวนจุดต่อค่อนข้างมาก ควรใช้วิธีการแก้ระบบเมทริกซ์ด้วยการคำนวณซ้ำ (iterative method) ได้แก่ วิธียาโคบี (Jacobi) หรือวิธีเกาส์ไซเดล (Gauss Seidel) เป็นต้น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ถูกสร้างขึ้นมาด้วยภาษา fortran90



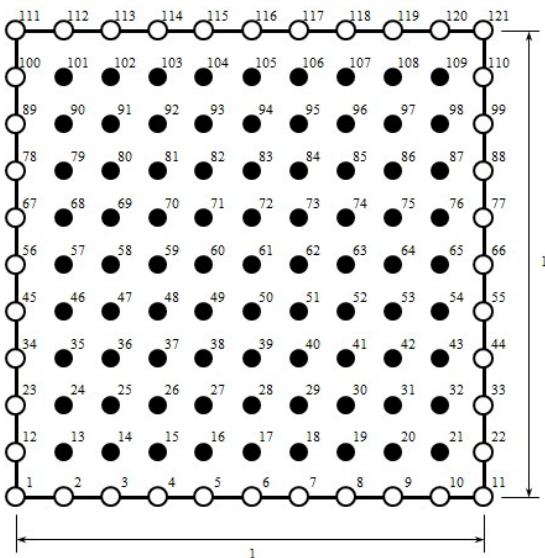
รูปที่ 2 ตัวอย่างของกลุ่มจุดต่อที่ใช้ในการสร้างสมการพีชคณิต ประกอบด้วยจุดต่ออ้างอิง (หมายเลข 6) และจุดต่อรอบข้าง (หมายเลข 1 ถึง 5)

3. วิธีดำเนินงานวิจัย

สมการสำหรับปัญหาของปั๊วของคือ สมการที่ (1) ถูกเลือกมาใช้ในการตรวจสอบความแม่นยำของวิธี DQM โดเมนการคำนวณถูกกำหนดให้เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 หน่วย ระยะห่างระหว่างจุดต่อแบบสม่ำเสมอเท่ากับ 0.1 หน่วยทั้งแกน x และแกน y หรืออาจเรียกว่ากริดมีรูปแบบ (structured grid) ก็ได้ดังรูปที่ 3

ค่าของตัวแปรบนขอบเขตเป็นตัวแปรที่ทราบค่า ซึ่งนำมาจากคำตอบเชิงวิเคราะห์ (exact solution) ของแต่ละกรณี กรณีทดสอบทั้งหมด 5 กรณีมีตัวแปร $g(x, y)$ และผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ $u_e(x, y)$ ดังนี้

1. พจน์ g มีค่าเป็นศูนย์ทั้งโดเมน, $g(x, y) = 0$, $u_e(x, y) = \sinh(\pi y) \sin(x) / \sinh(\pi)$
2. พจน์ g มีค่าคงที่ทั้งโดเมน, $g(x, y) = 26$, $u_e(x, y) = (2x + 3y)^2$
3. พจน์ g เปลี่ยนแปลงตาม x และ y แบบเส้นตรง, $g(x, y) = 12(x + y)$, $u_e(x, y) = (x + y)^3$
4. พจน์ g เปลี่ยนแปลงตาม x และ y แบบเอกโปเนนเชียล, $g(x, y) = 2e^{x-y}$, $u_e(x, y) = e^{x-y}$
5. พจน์ g เปลี่ยนแปลงตาม x และ y แบบฟังก์ชันส่วนกลับของผลบวกยกกำลัง, $g(x, y) = 4/(x + y + 1)^3$, $u_e(x, y) = 1/(x + y + 1)$



รูปที่ 3 ตำแหน่งและหมายเลขของ 121 node ที่ใช้ในการคำนวณภายในโดเมนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนึ่งหน่วย

ผู้วิจัยเลือกกรณีทดสอบทั้ง 5 กรณีเพื่อให้เป็นกรณีทดสอบที่มีคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่แตกต่างกันและง่ายต่อการตรวจสอบความถูกต้องด้วยการแทนคำตอบนั้น เข้าไปในสมการปัวซอง เพื่อพิสูจน์ว่าคำตอบเชิงวิเคราะห์นั้นถูกต้องหรือไม่ ผู้อ่านสามารถประยุกต์แนวทางอื่นกับวิธี DQM ในการสร้างโครงข่ายระหว่าง 5 จุดต่อรอบข้างและจุดต่ออ้างอิง แต่ทุกโครงข่ายต้องมี 6 จุดต่อเท่ากันเพราะผู้วิจัยใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลกำลังสองในการประมาณค่า รูปแบบโครงข่ายที่ผู้วิจัยใช้คือรูปแบบใน

รูปที่ 2 เพราะได้มาจากการคำนวณระยะทางระหว่างจุดต่อรอบข้างกับจุดต่ออ้างอิง รูปแบบนี้ประกอบด้วย จุดต่อรอบข้างหรือจุดต่อสนับสนุนจำนวน 2 จุดต่อในแนวแกน x (จุดต่อ 3 และ 5) และ y (จุดต่อ 2 และ 4) ที่เหลือคือ จุดต่อ 1 ที่ต้องมีอยู่เพื่อให้เมตริกซ์ของจุดต่ออ้างอิงเป็นเมตริกซ์จัตุรัส 6×6 ซึ่งสามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้ หากต้องการใช้รูปแบบอื่นก็สามารถทำได้เช่นกัน การเพิ่มอันดับของโพลีโนเมียลให้สูงขึ้นจำเป็นที่จะต้องมีความหนาแน่นของจุดต่อ เข้ามาเกี่ยวข้องมากขึ้น

4. ผลการศึกษา

ความผิดพลาด 2-norm (E) ถูกใช้ในการประเมินเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโดยรวมจากทุกจุดต่อ ในโดเมนของผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution) จากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์นิยามว่า

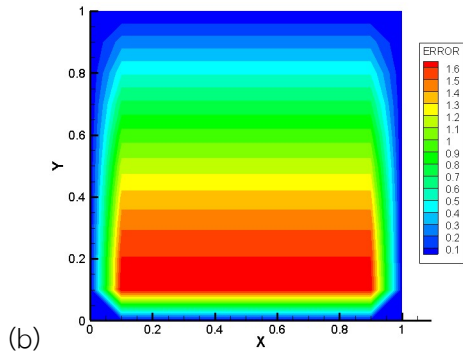
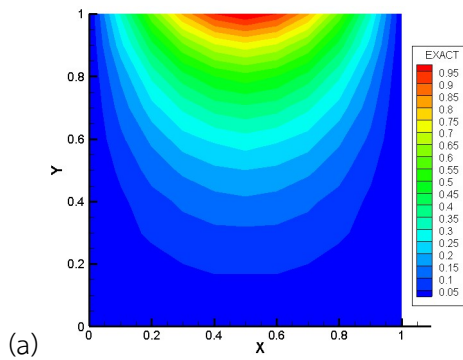
$$E = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N (u_e - u_N)^2}{\sum_{i=1}^N u_e^2} \right\} \times 100\% \quad (14)$$

ตารางที่ 1 สรุปเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาด norm-2 ของทั้งโดเมนสำหรับทุกกรณีทดสอบ เห็นได้ว่าความผิดพลาดของทุกกรณีต่ำกว่า 1 เปอร์เซ็นต์ ดังนั้นวิธี DQM ให้คำตอบที่มีความแม่นยำสูงมาก

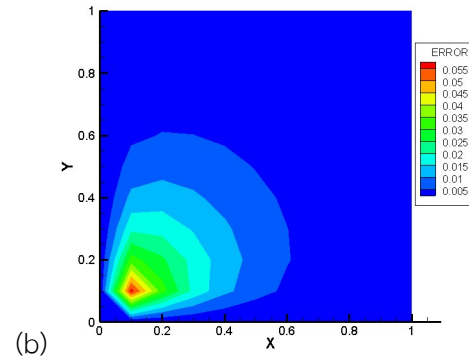
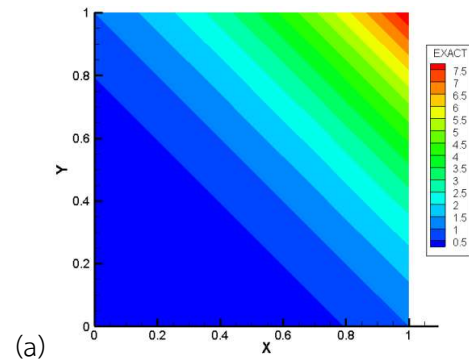
ตารางที่ 1 เปอร์เซนต์ความผิดพลาดของผลเฉลยจากวิธี DQM สำหรับทุกกรณี

กรณี	เปอร์เซนต์ความผิดพลาด (%)
1	4.15720×10^{-1}
2	2.20756×10^{-4}
3	9.29308×10^{-4}
4	3.65026×10^{-3}
5	1.02055×10^{-2}

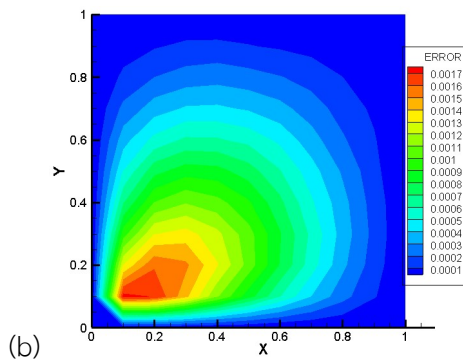
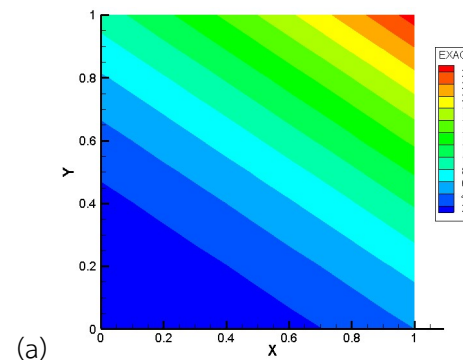
ผลเฉลยจากวิธี DQM และความผิดพลาดของผลเฉลยจากวิธี DQM สำหรับกรณีที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 แสดงอยู่ในรูปที่ 4, 5, 6, 7 และ 8 ตามลำดับ



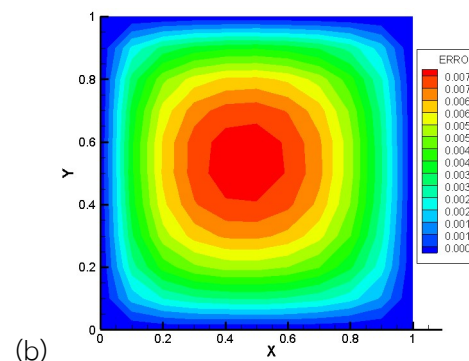
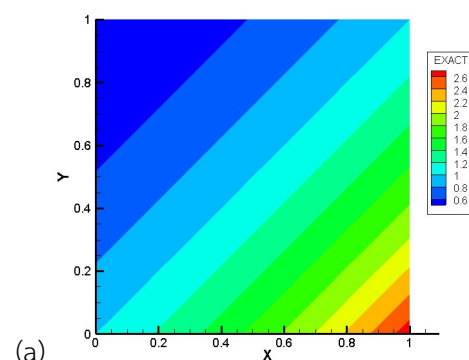
รูปที่ 4 (a) ผลเฉลยจากวิธี DQM (b) ความผิดพลาดเฉพาะที่ของวิธี DQM สำหรับกรณีที่ 1



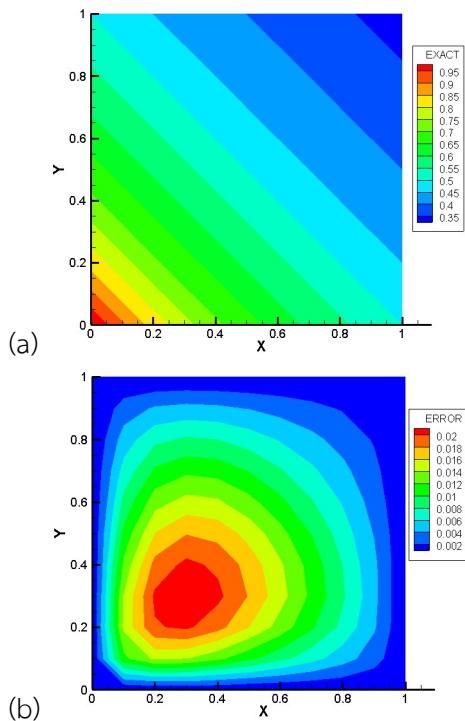
รูปที่ 6 (a) ผลเฉลยจากวิธี DQM (b) ความผิดพลาดเฉพาะที่ของวิธี DQM สำหรับกรณีที่ 3



รูปที่ 5 (a) ผลเฉลยจากวิธี DQM (b) ความผิดพลาดเฉพาะที่ของวิธี DQM สำหรับกรณีที่ 2



รูปที่ 7 ผลเฉลยจากวิธี DQM และความผิดพลาดเฉพาะที่ของวิธี DQM สำหรับกรณีที่ 4



รูปที่ 8 (a) ผลเฉลยจากวิธี DQM (b) ความผิดพลาดเฉพาะที่ของวิธี DQM สำหรับกรณีที่ 5

ความผิดพลาดเฉพาะที่ (Error) ของผลเฉลยจากวิธี DQM มีนิยามว่า

$$Error = \left(\frac{|u_e(x, y) - u_n(x, y)|}{|u_e(x, y)|} \right) \times 100\% \quad (15)$$

ค่าสูงสุดของความผิดพลาดเฉพาะที่ทั้ง 5 กรณีส่วนใหญ่เกิดขึ้นตรงมุมซ้ายล่างยกเว้นกรณีที่ 1 ความผิดพลาดเฉพาะที่สูงสุดอยู่ตามแนวเส้น $y = 0.125$ หน่วย กรณีที่ 4 ความผิดพลาดเฉพาะที่สูงสุดอยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

5. สรุปผลการศึกษา

การคำนวณแบบไร้โครงตาข่ายทำให้ผู้วิเคราะห์สามารถละทิ้งขั้นตอนการสร้างเมชได้ แม้ว่าจะมีผู้วิจัยทางด้านนี้แล้วพอสมควรและมีแนวโน้มว่าจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ในต่างประเทศแต่การศึกษาในประเทศไทยมีค่อนข้างน้อยมาก ผู้วิจัยหวังว่าข้อมูลนี้จะเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยของผู้อ่าน บทความนี้ใช้วิธีไร้โครงตาข่ายชื่อว่า DQM เพื่อวิเคราะห์ปัญหาปัวซองในโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนึ่งหน่วย ขั้นตอนของการสร้างสมการพีชคณิตแสดงอยู่ในบทความนี้เช่นกัน ปัญหาที่ใช้ในการ

ทดสอบความแม่นยำของวิธี DQM มีทั้งหมดห้ากรณี แต่ละกรณีมีความแตกต่างกันที่ค่า g ทางด้านขวามือของสมการปัวซอง ผลการศึกษาพบว่าวิธี DQM ให้ค่าความผิดพลาดโดยรวมน้อยกว่า 1% ในทุกกรณี ข้อจำกัดของวิธี DQM ที่คิดว่าจะต้องปรับปรุงคือ การเพิ่มกระบวนการค้นหาจุดต่ออัตโนมัติ และการหาค่าอนุพันธ์ต่างๆ โดยมีจุดต่อสนับสนุนมากกว่า 6 จุดต่อซึ่งเป็นสิ่งที่เสี่ยงได้ยาก หากต้องนำมาใช้กับจุดต่อที่กระจายไปทั่วทั้งโดเมนโดยไร้ระเบียบ

แนวทางที่สามารถต่อยอดได้การนำไปใช้ในปัญหาอื่นๆ คือ การวิเคราะห์ปัญหาที่สภาวะไม่อยู่ตัว การวิเคราะห์ปัญหาสามมิติ การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง กลศาสตร์ของไหล ปัญหาทางวิศวกรรมไฟฟ้า ปัญหาทางวิศวกรรมโยธา ปัญหาทางวิศวกรรมเคมี รวมถึงการทดสอบวิธี DQM กับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน เป็นต้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลและเมคคาทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ที่อำนวยความสะดวกด้านเครื่องคอมพิวเตอร์ และฐานข้อมูลเพื่อการค้นคว้าให้แก่ผู้วิจัยตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- [1] Belytschko T, Lu, YY, Gu, L. Element-free Galerkin methods. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 1994;37: 229-256.
- [2] Atluri SN, Zhu T. A New meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*. 1998;22: 117-127.
- [3] Kansa EJ. Multiquartics- A scattered data approximation with applications to computational fluid dynamics- II: solutions to parabolic, hyperbolic, and elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*. 1990;19: 147-161.

- [4] Goldberg MA. The method of fundamental solutions for Poisson's equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1995;16: 205-213.
- [5] Shu C, Ding H, Yeo, KS. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2003;192: 941-954.
- [6] Monaghan JJ. Smooth particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1992;30: 543-574.
- [7] Liu WK, Jun S, Belytschko T. Reproducing kernel particle methods. *International Journal of Numerical Methods in Fluid*. 1995;20: 1081-1106.
- [8] Chantasiriwan S. Meshless methods: future of engineering computations. In: *The 17th Conference of Mechanical Engineering Network*; 15-17 October 2003.