



วารสารวิศวกรรมศาสตร์และนวัตกรรม Journal of Engineering and Innovation

บทความวิจัย

การวิเคราะห์การนำความร้อนในระบบพิกัดฉากหนึ่งมิติสำหรับวัสดุเนื้อเดียวด้วยวิธีดูล์ เมชไฟไนต์โดเมน

Analysis of heat conduction in one - dimensional Cartesian coordinate system for homogeneous material by using dual mesh finite domain method

ภาสกร เวสสะโกศล*

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลและเมคาทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์วิทยาเขตหาดใหญ่ อำเภอหาดใหญ่ จังหวัด
สงขลา 90190

Passakorn Vessakosol*

Department of Mechanical and Mechatronics Engineering Faculty of Engineering Prince of Songkla University Hatyai campus
Hatyai Songkla, 90190

* Corresponding author.

E-mail: passakorn.vessakosol@gmail.com; Telephone: 0 7428 7416

วันที่รับบทความ 2 สิงหาคม 2564; วันที่แก้ไขบทความ ครั้งที่ 1 16 กันยายน 2564; วันที่แก้ไขบทความ ครั้งที่ 2 4 ตุลาคม 2564

วันที่ตอบรับบทความ 15 ธันวาคม 2564

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในระบบพิกัดฉากหนึ่งมิติที่สถานะอยู่ตัวสำหรับวัสดุเนื้อเดียวด้วยวิธีดูล์เมชไฟไนต์โดเมน วิธีนี้ใช้เอลิเมนต์เพื่อการประมาณค่าฟังก์ชันร่วมกับการหาฟลักซ์ความร้อนที่ปลายทั้งสองด้านของโดเมนควบคุม ในบทความมีรายละเอียดของการประดิษฐ์สมการไม่ต่อเนื่องที่จุดต่อต่างๆของโดเมน ความแม่นยำของการคำนวณเชิงตัวเลขถูกประเมินโดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ในสามปัญหาได้แก่ 1) การนำความร้อนผ่านแท่งวัสดุที่ไม่มีการผลิตความร้อน 2) การนำความร้อนผ่านผนังที่มีการผลิตความร้อน และ 3) การนำความร้อนผ่านครีปที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอ เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดรวมของวิธีดูล์เมชไฟไนต์โดเมนด้วยการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับปัญหาที่ 1, 2 และ 3 คือ 0, 0 และ 0.01 ตามลำดับ

คำสำคัญ

การนำความร้อนในหนึ่งมิติ วิธีดูล์เมชไฟไนต์โดเมน โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยงานด้านวิศวกรรม การถ่ายเทความร้อน วัสดุเนื้อเดียว

Abstract

This paper presents an analysis of heat conduction in one-dimensional Cartesian coordinate system under steady state condition for homogeneous material by using the dual mesh finite domain method. This method used element for interpolation of functions and the calculation of heat fluxes at both ends of control domain. In this paper, the detail of discrete equation formulation was presented for the nodes of domain. The accuracy of numerical solutions was evaluated by comparison with the exact solutions of three problems including 1) heat conduction in a rod without heat generation, 2) heat conduction in a plane wall with heat generation and 3) heat conduction through a fin with uniform cross section. The percentage of error of the dual mesh finite domain method with four elements for problem 1, 2 and 3 were 0, 0 and 0.01, respectively.

Keywords

one-dimensional heat conduction; dual mesh finite domain method; computer aided engineering; heat transfer; homogeneous material

1. คำนำ

ในปัจจุบัน วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เชิงพาณิชย์ (commercial software) มีอยู่เพียงสองวิธีเท่านั้นที่ได้รับความนิยมมากที่สุด ได้แก่ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับงานเกี่ยวกับกลศาสตร์ของแข็งเชิงคำนวณครอบคลุมถึง การถ่ายเทความร้อน และวิธีไฟไนต์วอลุ่มสำหรับงานเกี่ยวกับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณครอบคลุมถึงการถ่ายเทความร้อน พื้นฐานของระเบียบวิธีเหล่านี้คือ การแปลงรูปสมการเชิงอนุพันธ์ของตัวแปร (สมการต่อเนื่อง) ให้อยู่ในสมการรูปแบบเมตริกซ์ (สมการไม่ต่อเนื่อง) ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ด้วยคอมพิวเตอร์ รายละเอียดการประดิษฐ์สมการไม่ต่อเนื่องของสองวิธีมีความแตกต่างกัน แต่มีสิ่งหนึ่งเหมือนกันคือ ทั้งสองวิธีใช้การหาปริพันธ์เพื่อช่วยหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ในขอบเขตของโดเมนย่อย วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กำหนดให้โดเมนย่อยคือเอลิเมนต์ (element) [1] แต่วิธีไฟไนต์วอลุ่มกำหนดให้โดเมนย่อยคือเซลล์ (cell) หรือปริมาตรควบคุม (control volume) [2, 3, 4]

การรวมเอาลักษณะสำคัญของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และวิธีไฟไนต์วอลุ่มเป็นเรื่องที่เคยเกิดขึ้นมานานแล้ว [5, 6] ในชื่อว่าวิธี Control Volume Finite Element Method หรือ CVFEM เมื่อไม่นานมานี้ Reddy และผู้ร่วมงานของเขาใน Texas A&M University [7-10] ได้นำเสนอวิธีที่คล้ายกับ CVFEM แต่ใช้ชื่อว่าวิธี Dual Mesh Finite Domain (DMFD) Reddy [7] ใช้วิธี DMFD กับกรณีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองสำหรับปัญหาที่มีตัวแปรเดียว บทความนี้จำเป็นต้องกล่าวถึงเพราะเป็นจุดเริ่มต้นของวิธี DMFD ผู้วิจัยมีข้อมูลที่เกี่ยวข้องเฉพาะบทความเท่านั้น จึงไม่สามารถให้รายละเอียดของบทความนี้ได้ Reddy [8] ใช้วิธี DMFD เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์หนึ่งมิติและสองมิติ สำหรับแก้ปัญหาเกี่ยวกับการแพร่และการพา กรณีทดสอบที่ใช้เป็นกรณีทดสอบของปัญหาการแพร่และการพาเท่านั้นทั้งปัญหาหนึ่งมิติ และสองมิติ เอลิเมนต์สองมิติที่ใช้ในงานวิจัยนี้คือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากเพื่อแสดงเป็นตัวอย่างเท่านั้น ทำให้ประสบปัญหาอย่างแน่นอนกับ โจทย์

สองมิติที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ความผิดพลาดของวิธี DMFD ใกล้เคียงกับความผิดพลาดของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยนำมาเปรียบเทียบกับคำตอบเชิงวิเคราะห์ของปัญหา Reddy and Nampally [9] ใช้วิธี DMFD ในปัญหาหนึ่งมิติในระบบฟังก์ชันฟังก์ชัน graded material นอกจากนี้วิธี DMFD ของ Nampally and Reddy [10] ถูกนำไปวิเคราะห์ปัญหาหนึ่งมิติในระบบฟังก์ชันฟังก์ชัน graded material เพื่อการโค้งงอ และความเค้นภายในแผ่นบางรูปวงกลมที่ทำจาก functionally graded material

วิธี DMFD ได้ถูกนำไปใช้ในปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อนและกลศาสตร์ของแข็งหนึ่งมิติ การใช้งานกับปัญหาสองมิติถือว่าน้อยมาก อย่างไรก็ตามผลการทดสอบความแม่นยำของวิธี DMFD กับปัญหาการนำความร้อนค่อนข้างน้อย ไม่เพียงพอต่อความเชื่อมั่นในวิธีการคำนวณ จึงต้องดำเนินการวิจัยเพิ่มเติมจากเอกสารที่มีอยู่ วัตถุประสงค์ของบทความนี้คือนำเสนอแนวคิด การได้มาซึ่งสมการคำนวณของวิธี DMFD รวมถึงแสดงให้เห็นถึงความแม่นยำของวิธี DMFD ในการแก้ปัญหาการนำความร้อนในฟังก์ชันหนึ่งมิติ ที่สภาวะอยู่ตัวสำหรับวัสดุเนื้อเดียว (homogeneous material) ปัญหาหนึ่งมิติแม้ว่าจะดูง่ายเกินไปสำหรับนักวิจัยผู้เชี่ยวชาญแต่ในมุมมองของผู้วิจัยที่เป็นอาจารย์ผู้สอนในวิชาเกี่ยวกับ วิธีคำนวณเชิงตัวเลข พบว่า นักศึกษาต้องการคำแนะนำและตัวอย่างเบื้องต้นที่ไม่ยากเกินไปเพื่อการเริ่มต้นทำความเข้าใจกับ ระเบียบวิธีการคำนวณใหม่ๆที่ไม่เคยรู้จักมาก่อน ผู้วิจัยหวังว่าบทความนี้จะมีประโยชน์ต่อกลุ่มผู้เริ่มต้น นักศึกษา และผู้สนใจทั่วไปที่ต้องการค้นหาวิธีการ หรือแนวทางที่แตกต่างจากวิธีการดั้งเดิมด้วยการทดสอบกับปัญหาที่ไม่ยากเกินไป ปัญหาที่ยากกว่านี้ผู้วิจัยหวังว่าจะนำเสนอในบทความวิจัยลำดับต่อไป เนื้อหาที่เหลืออยู่ในบทความได้แก่ สมการบังคับและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา การประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม เพื่อสร้างเป็นระบบสมการแบบเมตริกซ์ ต่อจากนั้นเป็นการทดสอบวิธี DMFD กับปัญหาการ

นำความร้อนจำนวน 3 กรณี ลำดับต่อไปคือ ผลการทดสอบ และสรุปผลการศึกษา

2. การนำความร้อนแบบหนึ่งมิติที่สภาวะอยู่ตัว

2.1 สมการบังคับของการนำความร้อน

วัสดุที่นำมาพิจารณาในบทความนี้มีคุณสมบัติเชิงความร้อนเป็นค่าคงที่ สมการบังคับของการนำความร้อนแบบหนึ่งมิติในพิกัดฉากที่สภาวะอยู่ตัวเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีรูปแบบทั่วไปดังนี้

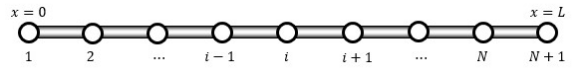
$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (1)$$

เมื่อ k และ S หมายถึงสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุ และอัตราการผลิตความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของวัสดุตามลำดับ ในบทความนี้พิจารณาเฉพาะวัสดุเนื้อเดียวซึ่งมีค่า k เป็นค่าคงที่ในทุกจุดของวัสดุ ถ้า S มีค่าเป็นบวก หมายถึงวัสดุสามารถผลิตความร้อนภายในได้หรือได้รับความร้อนจากแหล่งภายนอกตลอดความยาวของชิ้นงาน ถ้า S มีค่าเป็นลบหมายถึงการระบายความร้อนออกจากภายในวัสดุเช่น ครัวระบายความร้อนซึ่งต้องสูญเสียความร้อนให้กับอากาศที่อยู่แวดล้อมผิวครัว

2.2 Dual-mesh finite domain method

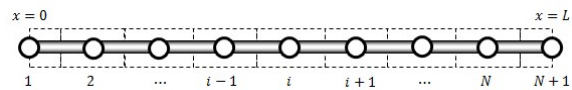
2.2.1 การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการพีชคณิต

การนำความร้อนในหนึ่งมิติที่กล่าวถึงในงานวิจัยนี้อยู่ในโดเมนใหญ่ที่อยู่ระหว่างพิกัด $x=0$ ถึง $x=L$ การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบที่จุดต่อ (node) ต่างๆในโดเมนใหญ่เริ่มต้นจากการกำหนดจำนวนของจุดต่อ ตำแหน่งของจุดต่อรวมถึงเอลิเมนต์ ขั้นตอนนี้คือการแบ่งย่อย (discretization) ดังแสดงในรูปที่ 1 โดเมนใหญ่คือเส้นตรงถูกแบ่งออกมาเป็นเส้นตรงขนาดเล็กหรือเอลิเมนต์ (element) จำนวน N ชิ้น จำนวนจุดต่อทั้งหมดของโดเมนคือ $N+1$ จุดต่อ โดยเอลิเมนต์ทั้งหลายไม่มีส่วนใดซ้อนทับกันเลย สมมติว่าเอลิเมนต์นั้นเป็นเอลิเมนต์เชิงเส้น ฟังก์ชันเส้นตรงในหนึ่งเอลิเมนต์ถูกประมาณค่าจากจุดต่อที่เกี่ยวข้องเพียงสองจุดต่อเท่านั้น เมช (Mesh) หรือโครงตาข่ายซึ่งเกิดจากการเชื่อมต่อระหว่างเอลิเมนต์ในรูปที่ถูกเรียกว่า primal mesh เพราะเกิดขึ้นทันทีที่แบ่งโดเมนใหญ่ออกมาเป็นชิ้นเล็กๆ

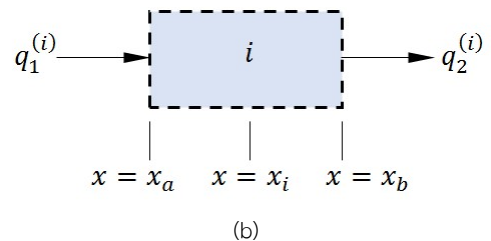
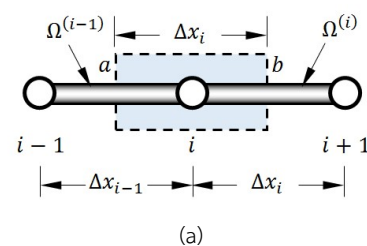


รูปที่ 1 การแบ่งโดเมนใหญ่ให้เป็นผลรวมของเอลิเมนต์จำนวน N ชิ้น และจำนวนจุดต่อเท่ากับ $N+1$ จุดต่อ

dual mesh ในรูปที่ 2 อาจถูกมองว่าเป็นคู่กันกับเมชแบบแรก เมชนี้แสดงถึงการเชื่อมต่อโดเมนควบคุม (control domain) ทั้งหลายเข้าด้วยกันแต่ primal mesh แสดงถึงการเชื่อมต่อ เอลิเมนต์ทั้งหลายเข้าด้วยกัน ขอบเขตของโดเมนควบคุมแสดงด้วยสี่เหลี่ยมเส้นประ จำนวนของโดเมนควบคุมเท่ากับจำนวนจุดต่อ ขนาดของโดเมนควบคุมสำหรับจุดต่อภายในมีใหญ่กว่าขนาดของโดเมนควบคุมสำหรับจุดต่อบนขอบเขตทั้งสองด้านดังแสดงให้เห็นในรูปที่ 2 แม้ว่าขนาดของเอลิเมนต์ใน primal mesh ในรูปที่ 1 จะเท่ากันทั้งหมด ในการแก้ปัญหาโดยทั่วไปผู้ใช้สามารถกำหนดให้โดเมนควบคุมมีขนาดเท่ากันหรือแตกต่างกันก็ได้แต่ผลรวมของโดเมนควบคุมทุกชิ้นต้องเท่ากับโดเมนใหญ่

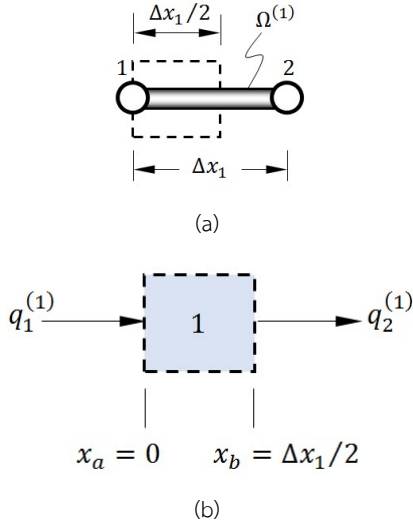


รูปที่ 2 การแบ่งโดเมนใหญ่ให้เป็นผลรวมของโดเมนควบคุมจำนวน $N+1$ ชิ้น

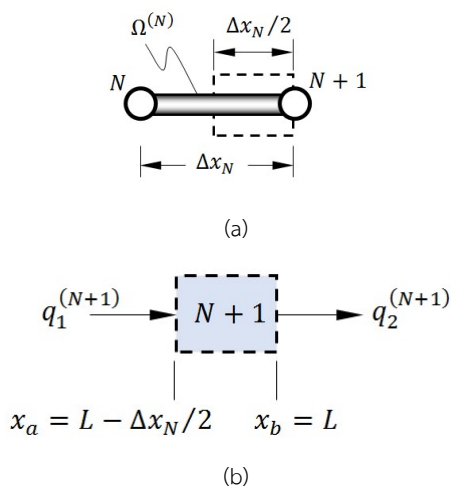


รูปที่ 3 (a) โดเมนควบคุมสำหรับจุดต่อภายใน i (b) ฟลักซ์ความร้อนที่เข้าและออกจากโดเมนควบคุม i

รูปที่ 3 แสดงโดเมนควบคุมสำหรับจุดต่อ i สมการของโดเมนควบคุมได้มาจากความสัมพันธ์เชิงความร้อนระหว่างจุดต่อ i กับจุดต่อข้างเคียงได้แก่จุดต่อ $i-1$ และจุดต่อ $i+1$ จุดต่อ i มีความสัมพันธ์กับจุดต่อ $i-1$ เพราะใช้ฟังก์ชันประมาณค่าของอุณหภูมิร่วมกันในเอลิเมนต์ $i-1$ ในลักษณะเดียวกัน จุดต่อ i มีความสัมพันธ์กับจุดต่อ $i+1$ เพราะใช้ฟังก์ชันประมาณค่าของอุณหภูมิร่วมกันในเอลิเมนต์ i



รูปที่ 4 (a) โดเมนควบคุมสำหรับจุดต่อ 1 บนขอบเขตซ้ายมือเกี่ยวข้องกับเอลิเมนต์ 1 (b) ฟลักซ์ความร้อนที่เข้าและออกจากโดเมนควบคุม 1



รูปที่ 5 (a) โดเมนควบคุมสำหรับจุดต่อ $N+1$ บนขอบเขตขวามือเกี่ยวข้องกับเอลิเมนต์ N (b) ฟลักซ์ความร้อนที่เข้าและออกจากโดเมนควบคุม $N+1$

สมการพีชคณิตของจุดต่อภายใน i ในรูปที่ 3 เกิดจากการตั้งค่าปริพันธ์ของสมการที่ (1) จากตำแหน่ง x_a ไปยังตำแหน่ง x_b ให้เท่ากับศูนย์

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S \right] dx = 0 \quad (2)$$

ดังนั้น

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_{x_a} - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_{x_b} = \int_{x_a}^{x_b} S dx \quad (3)$$

หรือ

$$q_{x_b} - q_{x_a} = \int_{x_a}^{x_b} S dx \quad (4)$$

เมื่อ q คือฟลักซ์ความร้อนตามกฎของฟูเรียร์ (Fourier's law) ฟลักซ์ความร้อนที่เข้าสู่จุดต่อ i ชื่อว่า $q_1^{(i)}$ ในขณะที่ฟลักซ์ความร้อนที่ออกจากจุดต่อ i ชื่อว่า $q_2^{(i)}$

$$q_1^{(i)} = q_{x_a} = \left(-k \frac{dT}{dx} \right)_{x_a} \quad (5a)$$

$$q_2^{(i)} = q_{x_b} = \left(-k \frac{dT}{dx} \right)_{x_b} \quad (5b)$$

ความหมายเชิงกายภาพคือ อัตราการไหลออกสุทธิของความความร้อนเท่ากับการผลิตความร้อนภายในโดเมนควบคุม ความหมายนี้ยังคงใช้ได้กับจุดต่อบนขอบเขตในรูปที่ 4 และ 5

2.2.2 การประมาณฟังก์ชันอุณหภูมิด้วยสมการเส้นตรง

สมการประมาณค่าภายในเอลิเมนต์ i คือสมการเส้นตรงที่ได้จากการรวมกันของฟังก์ชันผลคูณ $N_1^{(i)} T_1^{(i)}$ และฟังก์ชันผลคูณ $N_2^{(i)} T_2^{(i)}$ ในรูปที่ 6 ดังสมการ

$$T(x) = N_1^{(i)} T_1^{(i)} + N_2^{(i)} T_2^{(i)} \quad (6)$$

โดย T_1^i และ T_2^i คืออุณหภูมิที่จุดต่อ 1 และ 2 ของเอลิเมนต์ i ฟังก์ชัน $N_1^{(i)}$ และ $N_2^{(i)}$ คือฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น (linear) ของจุดต่อที่ 1 และ 2 ภายในเอลิเมนต์ i มีนิยามว่า

$$N_1^{(i)} = \frac{x_2^i - x}{\Delta x_i} \quad (7a)$$

$$N_2^{(i)} = \frac{x - x_1^i}{\Delta x_i} \quad (7b)$$

โดย $\Delta x_i = x_2^i - x_1^i$, $x_1^i = x_i$ และ $x_2^i = x_{i+1}$ กำหนดให้ระยะห่างระหว่างจุดต่อเท่ากันทั้งหมดคือ Δx เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายในลำดับต่อไป ต่อจากนั้นให้แทนสมการที่ (6) ลงในสมการที่ (4) สมการพีชคณิตที่ได้มาสำหรับจุดต่อภายใน i คือ

$$A_{i-1}T_{i-1} + A_iT_i + A_{i+1}T_{i+1} = B_i \quad (8)$$

โดย

$$A_{i-1} = -k / \Delta x \quad (9a)$$

$$A_i = 2k / \Delta x \quad (9b)$$

$$A_{i+1} = -k / \Delta x \quad (9c)$$

$$B_i = \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} S dx \quad (9d)$$

คุณสมบัติหนึ่งวิธี DMFD ได้มาจากวิธีไฟไนต์วอลุ่มคือ ความสอดคล้องกับหลักการอนุรักษ์พลังงานความร้อน พลักซ์ความร้อนที่สภาวะอยู่ตัวไหลออกจากจุดต่อ $i-1$ มีค่าเท่ากับ พลักซ์ความร้อนที่ไหลเข้าสู่จุดต่อ i ในทำนองเดียวกัน พลักซ์ความร้อนที่ไหลออกจากจุดต่อ i เท่ากับ พลักซ์ความร้อนที่ไหลเข้าสู่จุดต่อ $i+1$ ดังนั้น $q_2^{(i-1)} = q_1^{(i)}$ และ $q_2^{(i)} = q_1^{(i+1)}$ สมการพีชคณิตสำหรับจุดต่อบนขอบเขตซ้ายมือของโดเมนใหญ่ดังแสดงในรูปที่ 4 คือ

$$A_1T_1 + A_2T_2 = B_1 \quad (10)$$

โดย

$$A_1 = k / \Delta x \quad (11a)$$

$$A_2 = -k / \Delta x \quad (11b)$$

$$B_1 = -q_1^{(1)} + \int_0^{\Delta x/2} S dx \quad (11c)$$

สมการพีชคณิตสำหรับจุดต่อบนขอบเขตขวามือของโดเมนใหญ่ดังแสดงในรูปที่ 5 คือ

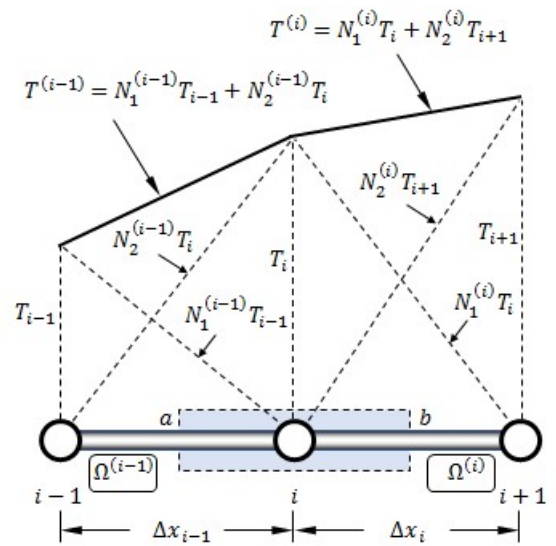
$$A_NT_N + A_{N+1}T_{N+1} = B_{N+1} \quad (12)$$

โดย

$$A_N = -k / \Delta x \quad (13a)$$

$$A_{N+1} = k / \Delta x \quad (13b)$$

$$B_{N+1} = -q_2^{(N+1)} + \int_{x_{N+1} - \Delta x/2}^{x_{N+1}} S dx \quad (13c)$$



รูปที่ 6 การประมาณค่าภายในเอลิเมนต์หนึ่งมิติแบบเชิงเส้น

3. วิธีดำเนินการวิจัย

ในการประเมินความผิดพลาดของวิธี DMFD สำหรับปัญหาการนำความร้อนในหนึ่งมิติที่สภาวะอยู่ตัว ผู้วิจัยใช้กรณีศึกษาจากเอกสาร [2] ซึ่งเป็นตำราที่เขียนโดย Versteeg and Malalasekera สำหรับการคำนวณพลศาสตร์ของไหลด้วยวิธีไฟไนต์วอลุ่มจำนวน 3 กรณีโดยแบ่งเป็น กรณีที่ 1 ศึกษาการนำความร้อนเกิดขึ้นได้ด้วยความแตกต่างของอุณหภูมิที่ผิวทั้งสองด้าน กรณีที่ 2 ศึกษาผลของการผลิตความร้อนขึ้นภายในวัสดุ (S เป็นค่าคงที่และมีค่าเป็นบวก) ทำให้เกิดการนำความร้อนจากภายในวัสดุสู่ผิวทั้งสองด้าน โดยกำหนดให้การผลิตความร้อนมีค่าเท่ากันทุกตำแหน่ง กรณีที่ 3

ศึกษาผลของการสูญเสียความร้อนให้กับของไหลที่อยู่แวดล้อม ทำให้เกิดการนำความร้อนภายในวัสดุ ข้อสังเกตในกรณีนี้ที่ 3 คือค่า S มีค่าเป็นลบและแปรผันตามอุณหภูมิซึ่งยังเป็นตัวแปรที่ต้องการหาคำตอบ

จำนวนจุดต่อในทุกกรณีคือ 5 จุดต่อ ยกเว้นกรณีสุดท้าย จำนวนจุดต่อเปลี่ยนแปลงเป็น 11 จุดต่อเพื่อแสดงถึงผลของจำนวนจุดต่อที่มีต่อความแม่นยำในการประมาณค่า การคำนวณในงานวิจัยนี้ใช้ฟังก์ชันเกี่ยวกับเมตริกซ์ของโปรแกรม Microsoft Excel ได้แก่ minverse เพื่อการคำนวณเมตริกซ์ผกผัน (inverse matrix) และ mmult สำหรับคำนวณผลคูณของเมตริกซ์ เป็นต้น อย่างไรก็ตามหากผู้สนใจต้องการประดิษฐ์เป็นโปรแกรมภาษาเช่น MATLAB, fortran หรือ C เป็นต้นก็สามารถทำได้อย่างรวดเร็วเพราะในบทความนี้ได้อธิบายไว้ชัดเจนเพียงพอแล้ว การหาคำตอบด้วยโปรแกรมภาษาจะทำให้สามารถแก้ปัญหาที่มีจุดต่อจำนวนมากได้สะดวกกว่า และเหมาะสมกว่าถ้าจะนำมาใช้กับการแก้ปัญหาสองมิติหรือสามมิติ ซึ่งผู้วิจัยคิดว่าจะพัฒนาเพิ่มเติมจากบทความนี้

เหตุผลที่เลือกปัญหาหนึ่งมิติมานำเสนอในบทความนี้ คือ เพื่อแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์วิธี DMFD ซึ่งเกิดจากการรวมเอาเทคนิคของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟไนต์วอลุ่มเข้าด้วยกันเพื่อแก้ปัญหาการนำความร้อนที่มีเฉพาะความแตกต่างของเงื่อนไขขอบ และเงื่อนไขภายในวัสดุ เป้าหมายต่อไปของผู้วิจัยคือ การประยุกต์กับปัญหาที่มีความซับซ้อนของรูปร่างมากกว่าในโดเมนสองมิติ และสามมิติ การแก้ปัญหาดังกล่าวต้องให้ความสำคัญกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวนจุดต่อ รวมถึงรูปร่างของเอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับความซับซ้อนของรูปร่างโดเมน จุดด้อยของบทความนี้คือยังไม่ครอบคลุมถึงปัญหาต่างๆของการนำความร้อนในทุกมิติ แต่จุดเด่นของบทความคือ การให้ข้อมูลเกี่ยวกับวิธี DMFD ในรายละเอียดบางอย่างสำหรับปัญหาอย่างง่ายได้แก่ ปัญหาหนึ่งมิติเพื่อให้เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับนักวิจัยที่กำลังให้ความสนใจในการคำนวณเชิงกลศาสตร์ซึ่งถูกรื้อเริ่มขึ้นมาเมื่อไม่นานนี้ ผู้วิจัยมีความเห็นว่าผู้สนใจที่มีพื้นฐานทางทฤษฎีในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หรือวิธีไฟไนต์วอลุ่มก็สามารถค้นคว้าเพิ่มเติมจากงานวิจัยนี้ได้

กรณีที่ 1 แท่งวัสดุหน้าตัดคงที่และไม่มีการผลิตความร้อน

รูปร่างของปัญหาแสดงอยู่ในรูปที่ 7 เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา คือ $T(0) = T_1 = 200^\circ C$ และ $T(L) = T_{N+1} = 400^\circ C$ โดยกำหนดให้ $k = 1 W / (m \cdot ^\circ C)$, $L = 0.4 m$, $S = 0$ ปัญหานี้ไม่ต้องระบุพลักซ์ความร้อนในสมการที่ (10) และ (12) แต่ให้กำหนดค่าอุณหภูมิที่ขอบเขตได้โดยตรง คำตอบเชิงวิเคราะห์สำหรับกรณีนี้ 1 สามารถหาได้จากการหาปริพันธ์ของสมการอนุพันธ์สามัญอันดับที่สองด้วยเงื่อนไขของอุณหภูมิทั้งสองด้าน และข้อมูลจากเอกสาร [2] คำตอบเชิงวิเคราะห์ของกรณีนี้ 1 คือ

$$T(x) = 200 + 500x \quad (14)$$

กรณีที่ 2 ผนังที่มีการผลิตความร้อนด้วยอัตราคงที่

รูปร่างของปัญหาแสดงอยู่ในรูปที่ 8 เงื่อนไขขอบเขตคือ $T(0) = T_A = T_1 = 100^\circ C$ และ $T(L) = T_A = T_{N+1} = 100^\circ C$ โดยกำหนดให้ $k = 1 W / (m \cdot ^\circ C)$, $L = 0.4 m$, $S = S_0 = 10^4 W / m^3$ ปัญหานี้ไม่ต้องระบุพลักซ์ความร้อนในสมการที่ (10) และ (12) แต่ให้กำหนดค่าอุณหภูมิที่ขอบเขตได้โดยตรง คำตอบเชิงวิเคราะห์ของกรณีนี้ 2 สามารถหาได้จากการหาปริพันธ์ของสมการการนำความร้อนด้วยเงื่อนไขของอุณหภูมิทั้งสองด้าน และข้อมูลจากเอกสาร [2] คือ

$$T(x) = 5000(0.4 - x)x + 100 \quad (15)$$

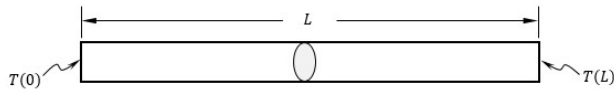
กรณีที่ 3 ครีบน้ำตดสม่ำเสมอที่มีการพาความร้อนตลอดความยาวครีบน้ำตด

รูปร่างของปัญหาแสดงอยู่ในรูปที่ 9 เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา คือ $T(0) = T_1 = 100^\circ C$ และ $q(L) = q_2^{(N+1)} = 0 W$ กำหนดให้ $k = 1 W / (m \cdot ^\circ C)$, $L = 1 m$, $S/k = -n^2 (T - T_\infty)$, $n^2 = hP / (kA) = 25 m^{-2}$, $T_\infty = 20^\circ C$, h คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉลี่ยบนผิวของครีบน้ำตด, T_∞ คือ อุณหภูมิของของไหลที่อยู่รอบผิวครีบน้ำตด, A คือขนาดพื้นที่หน้าตัดของครีบน้ำตดและ P คือขนาดเส้นรอบรูปของหน้าตัดครีบน้ำตด (perimeter) ถ้าครีบน้ำตดเป็นวงกลม $A = \pi d^2 / 4$ และ $P = \pi d$ เมื่อ d คือขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณจึง

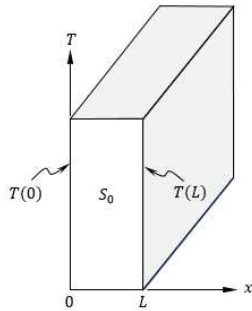
สมมติว่าผลคูณ $kA = 1 \text{ W} \cdot \text{m} / ^\circ\text{C}$ ปัญหานี้ทราบค่าอุณหภูมิให้กับขอบเขตซ้ายมือ และทราบค่าฟลักซ์ความร้อนให้กับขอบเขตขวามือ

คำตอบเชิงวิเคราะห์ของกรณีนี้ที่ 3 (ข้อมูลจากเอกสาร [2]) คือ

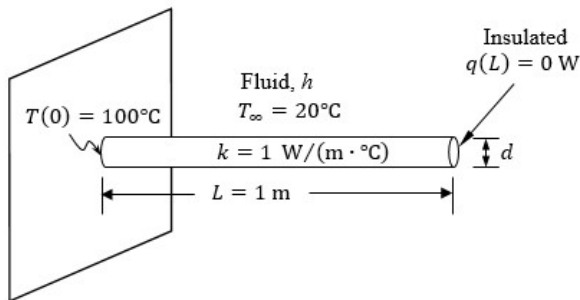
$$T(x) = 20 + 80 \left[\frac{\cosh[5(1-x)]}{\cosh(5)} \right] \quad (16)$$



รูปที่ 7 การนำความร้อนผ่านแท่งวัสดุไม่ผลิตความร้อน การถ่ายเทความร้อนเกิดจากผลต่างอุณหภูมิที่ปลายทั้งสองข้าง



รูปที่ 8 การนำความร้อนผ่านผนังที่มีความหนา L ซึ่งมีอัตราการผลิตความร้อนเป็นค่าคงที่ S_0



รูปที่ 9 การนำความร้อนผ่านครีบนํ้าตววงกลมสม่ำเสมอตลอดความยาว การพาความร้อนไปสู่ของไหลรอบๆครีปที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าตลอดระยะทางของการนำความร้อนในแท่งวัสดุ

การผลิตความร้อนในกรณีนี้ที่ 3 ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของจุดต่อต่างๆที่เกี่ยวข้องกับโดเมนควบคุมทำให้ต้องอาศัยหลักการการหาปริพันธ์เชิงเส้นด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูเพื่อให้ได้สัมประสิทธิ์ของสมการที่ (8) และ (12) ดังรูปที่ 10

พื้นที่ใต้กราฟรอบจุดต่อ i คือผลบวกของสี่เหลี่ยมคางหมูด้านซ้าย (พื้นที่ A_1) และสี่เหลี่ยมคางหมูด้านขวา (พื้นที่ A_2)

$$\int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} T dx = \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i} T dx + \int_{x_i}^{x_i + \Delta x/2} T dx = A_1 + A_2 \quad (17)$$

พื้นที่ $\square_1$ สามารถประมาณค่าได้เท่ากับ

$$A_1 = \Delta x [T_{i-1} + 3T_i] / 8 \quad (18)$$

พื้นที่ $\square_2$ สามารถประมาณค่าได้เท่ากับ

$$A_2 = \Delta x [3T_i + T_{i+1}] / 8 \quad (19)$$

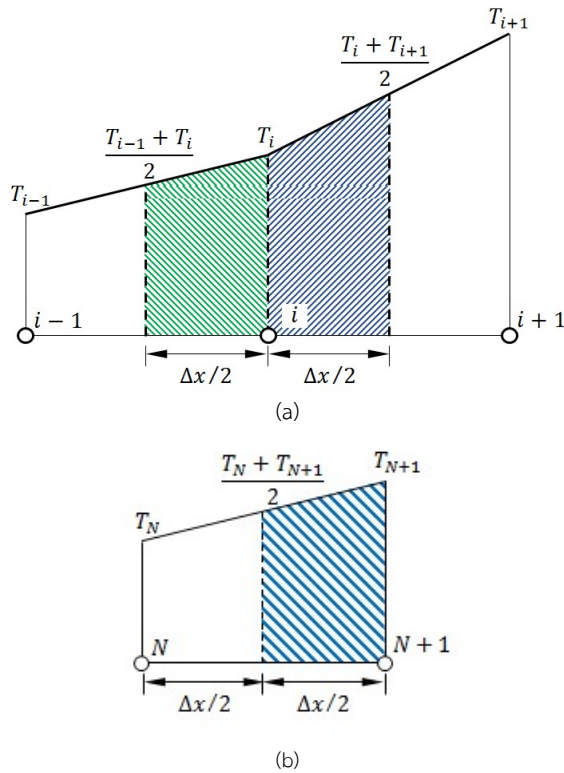
แทนสมการที่ (18) และ (19) ลงในสมการที่ (17) ผลที่ได้คือ

$$\int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} T dx = \left(\frac{\Delta x}{8} \right) T_{i-1} + \left(\frac{3\Delta x}{4} \right) T_i + \left(\frac{\Delta x}{8} \right) T_{i+1} \quad (20)$$

สมการที่ (20) เป็นส่วนหนึ่งของปริพันธ์ของการผลิตความร้อนในสมการที่ (9d) เนื่องจาก $S = -(hP/A)(T - T_\infty)$ ใช้สำหรับจุดต่อภายใน i ของรูปที่ 10(a) การหาพื้นที่ใต้กราฟในกรณีที่จุดต่อ $N+1$ บนขอบเขตด้านขวามือดังรูปที่ 10(b) กระทำได้ดังนี้

$$\int_{x_{N+1} - \Delta x/2}^{x_{N+1}} T dx = \left(\frac{\Delta x}{8} \right) T_N + \left(\frac{3\Delta x}{8} \right) T_{N+1} \quad (21)$$

สมการที่ (21) เป็นส่วนหนึ่งของปริพันธ์ของการผลิตความร้อนในสมการที่ (13c)



รูปที่ 10 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูสำหรับหาปริพันธ์เชิงตัวเลขให้กับ (a) จุดต่อภายใน i และ (b) จุดต่อ $N+1$ บนขอบเขตขวาเมื่อ

จำนวนจุดต่อที่ใช้มี 5 จุดต่อในทุกกรณี ($N=5$) ความแม่นยำของผลเฉลยเชิงตัวเลขถูกเปรียบเทียบกับคำตอบเชิงวิเคราะห์โดยใช้

1) เปอร์เซนต์ความผิดพลาดรวมหรือ Global percentage error (E) ดังนิยาม

$$E = \frac{\text{sum1}}{\text{sum2}} \times 100\% \quad (22)$$

โดย

$$\text{sum1} = \left[\sum_{i=1}^N (T_i^E - T_i^N)^2 \right]^{1/2} \quad (23a)$$

$$\text{sum2} = \left[\sum_{i=1}^N (T_i^E)^2 \right]^{1/2} \quad (23b)$$

2) เปอร์เซนต์ความผิดพลาดเฉพาะจุดหรือ Local percentage error (F) มีนิยามว่า

$$F = \frac{|T_i^E - T_i^N|}{|T_i^E|} \times 100\% \quad (24)$$

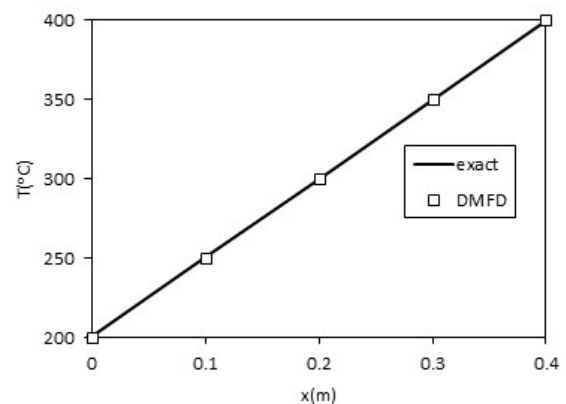
โดย T_i^E หมายถึงคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่จุดหนึ่งของโดเมนและ T_i^N หมายถึงคำตอบจากวิธี DMFD ที่จุดหนึ่งของโดเมน

ข้อสังเกตสำหรับการประเมินความผิดพลาดรวมคือ อุนหภูมิที่อยู่ระหว่างจุดต่อจะไม่ถูกนำมาประเมินเพราะ ความต้องการพื้นฐานของการคำนวณเชิงตัวเลขคือ การหาคำตอบสำหรับจุดต่อเท่านั้น ดังนั้นจึงไม่ต้องสนใจคำตอบที่จุดอื่นที่อยู่ในโดเมนแต่ไม่ใช่จุดต่อ หากต้องการหาคำตอบที่จุดใดก็ตามในโดเมนผู้ใช้ต้องระบุจุดนั้นให้เป็นจุดต่อของการคำนวณ

4. ผลการศึกษา

4.1 แท่งวัสดุหน้าตัดคงที่และไม่มีการผลิตความร้อน

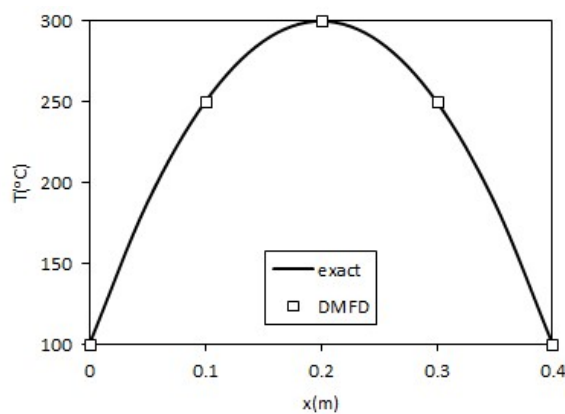
รูปที่ 11 แสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขในกรณีที่ 1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีความแม่นยำสูงมากเนื่องจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์คือฟังก์ชันเส้นตรง ความผิดพลาดรวมของการคำนวณเชิงตัวเลขคือ 0% คำตอบเชิงวิเคราะห์เท่ากับคำตอบที่จุดต่อทั้งหมดในกรณีที่การกระจายอุณหภูมิเป็นเส้นตรงตามระยะทาง



รูปที่ 11 ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่ 1

4.2 ผนังที่มีการผลิตความร้อนด้วยอัตราคงที่

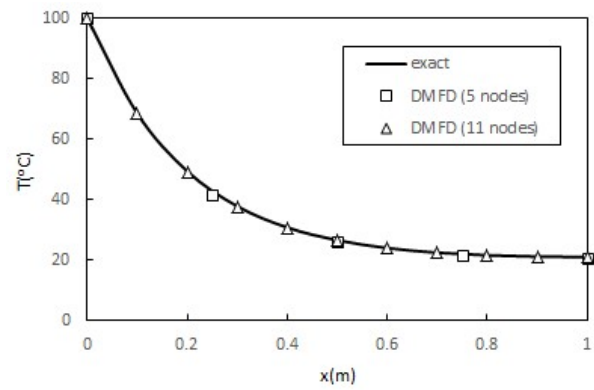
รูปที่ 12 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขในกรณีที่ 2 เห็นได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขสามารถทำนายอุณหภูมิที่จุดต่อได้ดี สรุปลักษณะการกระจายของการคำนวณเชิงตัวเลขคือ 0% ความผิดพลาดเฉพาะจุดมีค่าเท่ากับ 0% ทุกจุดต่อ ในกรณีที่ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เป็นฟังก์ชันกำลังสองของระยะทาง อย่างไรก็ตามหากคำตอบเชิงวิเคราะห์เป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อนกว่านี้เช่น ฟังก์ชันของการกำเนิดความร้อนเป็นฟังก์ชันของระยะทาง เป็นต้น ผลเฉลยเชิงตัวเลขอาจมีความแม่นยำลดลง และต้องอาศัย interpolation function ภายในเอลิเมนต์แบบไม่เป็นเส้นตรงเช่น quadratic function หรือ cubic function เป็นต้น เพื่อให้สามารถคำนวณอย่างแม่นยำด้วยเมชที่มีจำนวนจุดต่อน้อย



รูปที่ 12 ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่ 2

4.3 ครีบนํ้าตัดสม่ำเสมอที่มีการพาความร้อนตลอดความยาว

รูปที่ 13 แสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขในกรณีที่ 3 ผลการเปรียบเทียบพบว่า เปอร์เซนต์ความผิดพลาดรวม □ ของวิธี DMFD เท่ากับ 0.01 เมื่อใช้เอลิเมนต์จำนวน 4 ชิ้น การเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์เป็น 10 ชิ้นทำให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีเปอร์เซนต์ความผิดพลาดรวมและเฉพาะจุดลดลงดังแสดงในรูปที่ 13



รูปที่ 13 ผลเฉลยอุณหภูมิของครีบนํ้ากรณีที่ 3 จากการแบ่งโดเมนเป็นเอลิเมนต์เชิงเส้นจำนวน 4 ชิ้นและ 10 ชิ้น

ตัวเลขของเปอร์เซนต์ความผิดพลาดเฉพาะจุดที่คำนวณจากสมการที่ (24) ถูกนำมาแสดงไว้ในตารางที่ 1 สำหรับตำแหน่งต่างๆของครีบนํ้า คำตอบจากวิธีเชิงวิเคราะห์ วิธี DMFD ด้วยจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 4 และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ([2]) ด้วยจำนวนเซลล์เท่ากับ 5 ถูกนำมาเปรียบเทียบในตารางที่ 2 เปอร์เซนต์ความผิดพลาดเฉพาะจุดของวิธี DMFD มีลักษณะที่สม่ำเสมอกว่าเปอร์เซนต์ความผิดพลาดเฉพาะจุดของวิธีไฟไนต์วอลุ่ม สังเกตได้ว่าความผิดพลาดเฉพาะจุดของคำตอบจากทั้งสองวิธีมีค่าสูงสุดตรงบริเวณใกล้กับผิวด้านซ้ายมือและมีค่าต่ำสุดตรงบริเวณใกล้กับผิวด้านขวามือของครีบนํ้า

การศึกษาในครั้งนี้ไม่ได้ทำ grid independent test เพราะการหา grid independent solution ต้องทำหากปัญหานั้นไม่มีคำตอบเชิงวิเคราะห์ให้เป็นค่าอ้างอิง grid independent test ถูกใช้เพื่อสร้างความเชื่อมั่นในคำตอบว่าจุดกริดที่ใช้ไม่ได้หยাবเกินไปจนนำไปสู่คำตอบที่ผิดพลาด เปอร์เซนต์ความผิดพลาดในทุกกรณีมีค่าน้อยมากแม้ว่าจะใช้เอลิเมนต์เพียงสี่ชิ้น การหาผลลัพธ์ด้วยโปรแกรม Microsoft Excel ในทุกกรณีเสร็จสิ้นในเวลาดำกว่า 1 วินาที

ตารางที่ 1 คำตอบและเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉพาะจุด (F) ของวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธี DMFD ที่มีจำนวน 4 และ 10 เอลิเมนต์สำหรับกรณีที่ 3

x (m)	Analytical	DMFD-4E (F)	DMFD-10E (F)
0.1	68.526	-	68.396 (0.19)
0.2	49.439	-	49.281 (0.32)
0.25	42.932	41.811 (2.61)	-
0.3	37.866	-	37.722 (0.38)
0.4	30.853	-	30.736 (0.38)
0.5	26.611	25.975 (2.39)	26.521 (0.34)
0.6	24.056	-	23.989 (0.28)
0.7	22.536	-	22.487 (0.22)
0.75	22.036	21.74 (1.34)	-
0.8	21.663	-	21.626 (0.17)
0.9	21.216	-	21.185 (0.15)
1.0	21.078	20.883 (0.93)	21.049 (0.14)

ตารางที่ 2 คำตอบและเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉพาะจุด (F) ที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ วิธี DMFD และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (FVM) สำหรับกรณีที่ 3

x (m)	Analytical	DMFD-4E (F)	FVM-5C (F)
0.1	68.526	-	64.92 (6.27)
0.25	42.932	41.811 (2.61)	-
0.3	37.866	-	36.91 (2.51)
0.5	26.611	25.975 (2.39)	26.50 (0.41)
0.7	22.536	-	22.60 (0.31)
0.75	22.036	21.74 (1.34)	-
0.8	21.663	-	21.30 (0.42)
1.0	21.078	20.883 (0.93)	-

5. สรุปผลการศึกษา

บทความนี้นำเสนอการประดิษฐ์ระเบียบวิธี DMFD สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในหนึ่งมิติที่สภาวะอยู่ตัวสำหรับวัสดุเนื้อเดียว บทความนี้เกี่ยวข้องกับการใช้การคำนวณเชิงตัวเลขบนคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรมวิธี DMFD ในบทความนี้ใช้สองเมชร่วมกันได้แก่ primal mesh เพื่อการประมาณค่าของฟังก์ชันตามแนวทางของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และ dual mesh เพื่อการหาปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ตามแนวทางของวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ชนิดเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณในบทความนี้คือ เอลิเมนต์เชิงเส้นมีสองจุดต่อ

สมการ DMFD สำหรับจุดต่อภายในได้มาจากการแทนค่าอนุพันธ์ของตัวแปรตาม interpolation function ที่ใช้ลงในสมการความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิของจุดต่อนั้นกับอุณหภูมิของจุดต่อรอบข้าง สมการ DMFD ที่จุดต่อบนขอบเขตจะแตกต่างออกไปจากสมการ DMFD ที่จุดต่อภายในตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในแต่ละปัญหา ความผิดพลาดของผลเฉลยของวิธี DMFD ถูกประเมินด้วยการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ใน 3 กรณีทดสอบ

ผลการทดสอบในกรณีที่ 1 การนำความร้อนเกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิผิวทั้งสองของวัสดุและกรณีที่ 2 การนำความร้อนเกิดจากการผลิตความร้อนภายในวัสดุไปสู่ผิวทั้งสองของวัสดุมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดรวมเท่ากับ 0 ทั้งสองกรณี ในขณะที่วิธี DMFD ให้เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดรวมเท่ากับ 0.01 สำหรับกรณีที่ 3 การนำความร้อนผ่านครีบน้ำตดสม่ำเสมอที่มีการพาความร้อนตลอดความยาว

การวิจัยเพิ่มเติมในส่วนของการใช้เอลิเมนต์ที่มี interpolation function แบบไม่เชิงเส้นเช่น quadratic function เป็นต้น น่าจะเป็นแนวทางหนึ่งในการศึกษาเพิ่มเติมสำหรับปัญหาการนำความร้อนในพิกัดฉากหนึ่งมิติ นอกจากนี้ควรพัฒนาวิธี DMFD เพื่อแก้ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติหรือสามมิติ และเป็นทางเลือกใหม่ของการหาคำตอบเชิงตัวเลขนอกเหนือจากวิธีที่มีอยู่ในปัจจุบันเช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีไฟไนต์วอลุ่ม เป็นต้น วิธี DMFD เพิ่งจะถูกนำมาแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งเพียงบางปัญหา [9-10] และคาดว่าจะการประยุกต์ใช้วิธี DMFD คงจะไม่หยุดเพียงเท่านั้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลและเมคาทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ที่อำนวยความสะดวกด้านคอมพิวเตอร์ให้แก่ผู้วิจัย

เอกสารอ้างอิง

- [1] Reddy JN. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3th edition, New York: McGraw Hill, 1993.

- [2] Versteeg HK, Malalasekera W. *Computational Fluid Dynamics, the Finite Volume*. 2nd edition, Harlow, England, UK: Pearson Education (Prentice-Hall); 2007.
- [3] Ferziger JH, Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd edition, New York: Springer-Verlag; 2002.
- [4] Mazumder S. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: Finite Difference and Finite Volume methods*. New York: Elsevier; 2016.
- [5] Baliga BR, Patankar SV. A new finite- element formulation for convection- diffusion problems. *Numerical Heat Transfer*. 1980; 3(4):393-409.
- [6] Patankar SV. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Boca Raton: FL. CRC Press; 1980.
- [7] Reddy JN. A dual mesh finite domain method for the numerical solution of differential equations. *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2019; 20(3):212-28.
- [8] Reddy JN. A dual mesh finite domain method for steady- state convection- diffusion problems, *Computers and Fluids*. 2021; 214(104760).
- [9] Reddy JN, Nampally P. A dual mesh finite domain method for the analysis of functionally graded beams, *Composite Structure*. 2020; 251(112648).
- [10] Nampally P., Reddy JN. Bending analysis of functionally graded axisymmetric circular plates using the dual mesh finite domain method, *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2020; 17(7): e302.