



บทความวิจัย

การสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลว

Axisymmetric free vibration of semi liquid-containment toroidal shell

คมกร ไชยเดชาธร^{1*} วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา¹ สิทธิศักดิ์ แจ่มนาม²

¹ สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน อำเภอเมืองนครราชสีมา จังหวัดนครราชสีมา 30000

² ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร 10800

Komkorn Chaidachatorn^{1*} Weeraphan Jiammeepreecha¹ Sittisak Jamnam²

¹ Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Architecture, Rajamangala University of Technology Isan Nakhon Ratchasima 30000

² Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok Bangkok 10800

* Corresponding author.

E-mail: komkorn@rmuti.ac.th; Telephone: 08 8592 9040

วันที่รับบทความ 9 ตุลาคม 2563; วันที่แก้ไขบทความครั้งที่ 1 25 พฤศจิกายน 2564; วันที่ตอบรับบทความ 28 มกราคม 2564

บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอพฤติกรรมการสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน การเขียนฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางอาศัยหลักการของงานเสมือนในเทอมของค่าการเสียรูปและเขียนในรูปแบบที่เหมาะสม และใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระโดยใช้ชิ้นส่วนย่อยแบบคาน 1 มิติในระบบพิกัดเชิงขั้วสำหรับการสร้างแบบจำลอง ผลการศึกษาพบว่า การเปลี่ยนแปลงค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของเหลวส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางน้อยมาก ในขณะที่การเปลี่ยนแปลงค่าของความหนา ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัด ค่าแรงดันภายในเริ่มต้น และโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างจะส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

คำสำคัญ

การสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกน โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลว เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร ทฤษฎีเมมเบรน ฟังก์ชันพลังงาน

Abstract

This paper presents axisymmetric free vibration behavior of semi liquid-containment toroidal shell with constraint volume condition using membrane theory. Energy functional of the shell system can be derived by the principle of virtual work in terms of displacements and it is expressed in the appropriate forms. Natural frequencies and the corresponding mode shapes can be calculated by finite element method with one-dimensional beam elements described in polar coordinate. The results indicate that the changing of bulk modulus of the internal liquid has a little effect on the frequency parameter of the shell structures with constraint volume condition, whereas effects of variations in thickness, cross-sectional radius, initial internal pressure, and elastic modulus have a major impact ones.

Keywords

axisymmetric free vibration; semi liquid-containment toroidal shell; constraint volume condition; membrane theory; energy functional

1. บทนำ

การประยุกต์ใช้งานโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทได้ถูกนำมาใช้ในงานวิศวกรรมหลากหลายประเภท เช่น ถังสำหรับบรรจุก๊าซธรรมชาติ (NGV) หรือก๊าซปิโตรเลียมเหลว (LPG) ในรถยนต์หรือรถบรรทุกขนาดใหญ่ รวมไปถึงในภาคอุตสาหกรรมขนาดใหญ่สำหรับบรรจุและกักเก็บสารเคมีอื่น ๆ ที่มีแรงดันภายในสูง เป็นต้น แต่ในปัจจุบันพบว่าการใช้งานโครงสร้างเปลือกบางมีข้อจำกัดเนื่องจากการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยามักถูกจำกัดที่รูปทรงแบบเต็มใบ ในขณะที่การใช้งานด้านวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเล การติดตั้งโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งใบถือเป็นทางเลือกที่มีประสิทธิภาพสูงเหมือนกับการติดตั้งโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดม (dome structures) เป็นต้น

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันสูง (pressurized toroidal shell) ได้มีการศึกษากันมาอย่างต่อเนื่องโดยนักวิจัยหลายท่าน โดยเริ่มจากงานวิจัยของ Liepins [1-2] โดยใช้วิธีผลต่างสลับเนื่อง (finite difference method) ในการแก้ปัญหาสมการควบคุม (governing equation) เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่น จนกระทั่งต่อมาได้ประยุกต์ใช้วิธีการดังกล่าวในการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันสูงที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาของโครงสร้างในงานวิจัยของ Liepins [3] จากนั้น Lewis [4] ได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันสูง Jha และคณะ [5] ได้นำเสนอการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันสูงโดยใช้วิธีของกาเลอร์กิน (Galerkin's method) เปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้จากงานวิจัยของ Liepins [1] พบว่าให้คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกัน นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทสำหรับบรรจุของเหลวในงานวิจัยของ Fang [6] พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดไร้มิติจะมีค่าต่ำกว่ากรณีที่ไม่มีของเหลวในโหมดพื้นฐาน (fundamental mode) ในขณะที่โหมดอื่น ๆ ให้ผลตรงกันข้าม Tizzi [7] ได้ทำการศึกษาการสั่น

อิสระของโครงสร้างเปลือกบางเชิงประกอบ (toroidal composite shells) โดยรวมผลของแรงเฉือนและใช้วิธี Rayleigh-Ritz ในการคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลข พบว่าผลลัพธ์ที่ได้ใกล้เคียงกับงานวิจัยของ Balderes และ Armenakas [8] ที่ใช้วิธี Runge-Kutta method และ Wang และคณะ [9] ที่ใช้วิธี Differential Quadrature และ Wang และ Redekop [10] ที่ใช้ทฤษฎีการเสถียรเนื่องจากแรงเฉือน ซึ่งจากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตพบว่าพฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันสูงเป็นสิ่งสำคัญ เนื่องจากค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นเป็นสมบัติเฉพาะของโครงสร้างเปลือกบางได้นำมาใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการออกแบบโครงสร้างเพื่อป้องกันปัญหาการสั่นพ้อง (resonance) ภายใต้แรงกระทำจากแบบพลศาสตร์ (dynamic loads) จนทำให้โครงสร้างเกิดความเสียหายไม่สามารถใช้งานต่อไปได้

ดังนั้นวัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อเสนอพฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวที่มีแรงดันสูงภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรโดยสมมติให้ความหนาของโครงสร้างไม่มีการเปลี่ยนแปลงขณะเกิดการสั่น และรูปหน้าตัดของโครงสร้างเป็นวงกลมที่มีความยาวรัศมีคงที่ที่สถานะอ้างอิง (reference state) โดยมุ่งเน้นศึกษาเฉพาะปัญหาของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทที่มีฐานรองรับบนระนาบในแนวอิกเวเตอร์ (equator plane) ที่ได้เคยนำเสนอในงานวิจัยของ Jiammeepreecha และ Chucheepsakul [11] และงานวิจัยของ Jiammeepreecha และคณะ [12] ซึ่งปัญหาดังกล่าวยังไม่มีการศึกษามาก่อน สำหรับปัญหาการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรได้ถูกนำเสนอในงานวิจัยของ วีรพันธ์ุ์ เจียมมีปรีชา และสมชาย ชูชีพสกุล [13] และ Jiammeepreecha และ Chucheepsakul [14] ซึ่ง จะทำการศึกษาเฉพาะโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงครึ่งวงกลม แต่ในงานวิจัยของคมกร ไชยเดชาธร และคณะ [15] จะทำการศึกษาการสั่นเฉพาะกรณีที่เป็นโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทที่

รับเฉพาะแรงดันภายในโดยไม่พิจารณาผลของของเหลวที่บรรจุภายใน (contained fluid) ในการคำนวณรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสามารถทำได้โดยใช้หลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) [16] ฟังก์ชันพลังงาน (energy functional) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบและของเหลวที่ถูกบรรจุภายในโครงสร้างจะสามารถเขียนได้โดยอาศัยหลักการของงานเสมือน (principle of virtual work) [17-18] และเขียนในรูปแบบที่เหมาะสม (appropriate form) [19-20] และใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [21] ในการหาคำตอบเชิงตัวเลขสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นของโครงสร้าง

2. แบบจำลองของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลว

โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวแสดงในรูปที่ 1 สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 สถานะ โดยเริ่มต้นจากสถานะเริ่มต้นซึ่งเป็นสถานะที่โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบยังไม่มีบรรจุของเหลวจึงไม่มีค่าความเครียด (initial unstrained state, IUS) ใด ๆ จากนั้นจะเป็นสถานะที่โครงสร้างดังกล่าวบรรจุของเหลวที่มีค่าแรงดันภายในคงที่ (internal constant pressure) จะเรียกสถานะอ้างอิง (reference state, RS) และสุดท้ายคือสถานะการสั่น (vibrated state, VS) ของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้แรงกระทำจากภายนอก ดังแสดงในรูปที่ 2 ถ้ากำหนดให้ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดโครงสร้างเปลือกบางและความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงโดนัทมีค่าคงที่ a และ c ตามลำดับ ภายใต้แรงดันที่มีค่าคงที่สม่ำเสมอเท่ากันตลอดหน้าตัดที่สถานะอ้างอิงจะสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$X(\theta, \phi) = (c + a \cos \theta) \cos \phi \quad (1)$$

$$Y(\theta, \phi) = (c + a \cos \theta) \sin \phi \quad (2)$$

$$Z(\theta, \phi) = a \sin \theta \quad (3)$$

โดยที่ (X, Y, Z) คือระบบพิกัดและ (θ, ϕ) คือค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิววัดตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและเส้นพิกัดลองจิจูด ตามลำดับ ดังนั้นค่าเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวอ้างอิงที่จุด P สามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\bar{r}(\theta, \phi) = r \cos \phi \hat{i} + r \sin \phi \hat{j} + Z \hat{k} \quad (4)$$

โดยที่ $r = r(\theta) = R + a \cos \theta$ และ $Z = Z(\theta) = a \sin \theta$ ในที่นี้ $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวพิกัดฉาก เมื่อโครงสร้างเกิดการสั่นค่าเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวที่สถานะเกิดการสั่นคือ $\bar{R} = \bar{R}(\theta, \phi, t)$ ซึ่งอ้างอิงจากตำแหน่งของเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง $\bar{r}(\theta, \phi)$ สามารถนิยามได้จากสมการ

$$\bar{R}(\theta, \phi, t) = \bar{r}(\theta, \phi) + \bar{q}(\theta, \phi, t) \quad (5)$$

เมื่อ $\bar{q}(\theta, \phi, t)$ คือเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ขึ้นกับเวลา t ใด ๆ มีค่าดังสมการ

$$\bar{q}(\theta, \phi, t) = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}} u + \frac{\bar{r}_\phi}{\sqrt{G}} v + \hat{n} w \quad (6)$$

เมื่อ u คือค่าการเสีรูปตามแนวเส้นเมอร์ริเดียน v คือค่าการเสีรูปตามแนวเส้นลองจิจูด และ w คือค่าการเสีรูปตามแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ส่วนตัวห้อย θ และ ϕ แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบ เนื่องจากเป็นปัญหาเฉพาะการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้นค่าการเสีรูปตามแนวเส้นลองจิจูดมีค่าเป็นศูนย์ ($v = 0$) สำหรับค่าความเร็วและความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบจะสามารถหาได้โดยการอนุพันธ์สมการที่ (6) เทียบกับเวลาจะได้ดังสมการ

โดยที่ $\varepsilon_{0\theta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_0}{E} \right)$ (19)

$$\varepsilon_{0\phi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{G_0}{G} \right) \quad (20)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{E^*}{E} - 1 \right) \quad (21)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{G^*}{G} - 1 \right) \quad (22)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{1 - 2\varepsilon_{0\theta}} \quad (23)$$

$$T_{\phi\phi} = \frac{G}{G_0} = \frac{1}{1 - 2\varepsilon_{0\phi}} \quad (24)$$

จากสมการที่ (17) และ (18) จะสามารถเขียนได้ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\{\varepsilon^L\} = [T](\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}) \quad (25)$$

เมื่อ $\{\varepsilon_0\}$ คือค่าความเครียดเริ่มต้นแบบออยเลอร์ (initial Eulerian strains) และ $\{\varepsilon\}$ คือค่าความเครียดเพิ่มขึ้น (added strains) ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_\theta}{A} - \frac{ew}{A^2} \quad (26)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{B_\theta u}{AB} - \frac{gw}{B^2} \quad (27)$$

โดยที่ $A = \sqrt{E}$ และ $B = \sqrt{G}$

กำหนดให้ $\{g\}^T = [u \ w \ u_\theta \ w_\theta]$ ดังนั้นค่าความเครียดสามารถเขียนในรูปแบบดัชนี (index form) ได้ดังนี้

$$\varepsilon_i = L_k^i g_k \quad (28)$$

โดยที่ L_k^i คือเวกเตอร์ความเครียดซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\{L_1\}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{e}{E} & \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\{L_2\}^T = \begin{bmatrix} \frac{B_\theta}{AB} & -\frac{g}{G} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

4. พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง

โครงสร้างเปลือกบางที่มีสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (linearly elastic material) และความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการสั่น ดังนั้นค่าพลังงานความเครียดสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$U = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} \{\varepsilon^L\}^T [C] \{\varepsilon^L\} h D_0 d\phi d\theta \quad (31)$$

โดยที่ $[C]$ คือเมตริกซ์สมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$[C] = \frac{E'}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

และ $D_0 = \sqrt{E_0 G_0} = D \sqrt{(1 - 2\varepsilon_{0\theta})(1 - 2\varepsilon_{0\phi})}$ (33)

โดยที่ E' คือโมดูลัสยืดหยุ่น และ μ คืออัตราส่วนปัวส์ของ สำหรับพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางในสมการที่ (31) สามารถเขียนได้โดยใช้รูปแบบดัชนี (index form) ดังสมการ

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_0^i \varepsilon_0^j + C_{ij} \varepsilon_0^i \varepsilon^j + \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon^i \varepsilon^j \right) d\theta \quad (34)$$

จากสมการที่ (34) จะพบว่าเทอมแรกจะถูกตัดทิ้งในภายหลัง ดังนั้นพลังงานความเครียดสามารถเขียนได้ในรูปแบบที่เหมาะสม [19] ดังสมการ

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[c_k^0 g_k + \frac{1}{2} k_{kn} g_k g_n \right] d\theta \quad (35)$$

โดยที่ $c_k^0 = E_{ij} \varepsilon_0^i L_k^j$ (36)

$$k_{kn} = E_{ij} L_k^i L_n^j \quad (37)$$

ดังนั้นสามารถเขียนค่าการแปรผันของพลังงานความเครียด δU ได้จากสมการที่ (35) ดังนี้

$$\delta U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta g_k [c_k^0 + k_{kn} g_n] d\theta \quad (38)$$

5. พลังงานความเครียดของของเหลว

พลังงานความเครียดของของเหลวที่บรรจุภายใน โครงสร้างเปลือกบางจากสถานะเริ่มต้นปราศจากความเครียด (IUS) ไปยังสถานะการสั้น (VS) สามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\Gamma = \frac{1}{2} k_0 \left[\frac{\Delta V_{ow} + \Delta V}{V_{ow}} \right]^2 V_{ow} \quad (39)$$

โดยที่ k_0 คือโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว, V_{ow} คือ ปริมาตรของของเหลวที่สถานะ IUS, ΔV_{ow} คือการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของเหลวภายในที่บรรจุจากสถานะ IUS ไปยังสถานะ RS และ ΔV คือการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของเหลวภายในที่บรรจุจากสถานะ RS ไปยังสถานะ VS ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\Delta V = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} (\bar{R}_\theta \times \bar{R}_\phi \cdot \bar{R} - \bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}) d\phi d\theta \quad (40)$$

แทนค่าสมการที่ (4) และ (5) ลงในสมการที่ (40) ได้ว่า

$$\Delta V = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} (\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 + \tilde{v}_3 + \tilde{v}_4) d\phi d\theta \quad (41)$$

โดยที่ $\tilde{v}_1 = \left[B_\theta (\bar{r} \cdot \hat{n}) - \frac{Be}{A^2} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) \right] u$ (42)

$$\tilde{v}_2 = \left[-\frac{Ag}{B} (\bar{r} \cdot \hat{n}) - \frac{Be}{A} (\bar{r} \cdot \hat{n}) + AB \right] w$$
 (43)

$$\tilde{v}_3 = [B(\bar{r} \cdot \hat{n})] u_\theta \quad (44)$$

$$\tilde{v}_4 = \left[-\frac{B}{A} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) \right] w_\theta \quad (45)$$

ดังนั้นสามารถเขียนการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของเหลวได้ดังสมการ

$$\Delta V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\tilde{v}\} \{g\} d\theta \quad (46)$$

โดยที่ $\{\tilde{v}\}^T = [\tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \tilde{v}_3 \quad \tilde{v}_4]$ (47)

และเขียนโดยใช้รูปแบบดัชนี (index form) ดังสมการ

$$\Delta V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (v_k^c g_k) d\theta \quad (48)$$

จากสมการที่ (48) จะสามารถเขียนค่าการแปรผันของพลังงานความเครียดของเหลวที่มีค่าแรงดันภายในคงที่ $\delta \Gamma$ ได้จากสมการ

$$\delta \Gamma = -(p_0 + \lambda) \delta(\Delta V) \quad (49)$$

โดยที่ p_0 คือค่าแรงดันภายในคงที่ที่สถานะ RS และ λ คือค่าการปรับเปลี่ยนแรงดันภายในจากสถานะ RS ไปยังสถานะ VS สามารถนิยามได้จากสมการ

$$p_0 = -k_0 (\Delta V_{ow} / V_{ow}) \quad (50)$$

$$\lambda = -k_0 (\Delta V / V_{ow}) \quad (51)$$

จากความสัมพันธ์ของค่า p_0 และ λ จะได้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรดังสมการ

$$\Delta V + \frac{V}{k_0 - p_0} \lambda = 0 \quad (52)$$

เมื่อ V คือปริมาตรของของเหลวที่สถานะ RS

6. งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้าง

งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\delta I = -2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho_s \ddot{u} \{\delta u\} + \rho_s \ddot{w} \{\delta w\}) h D d\theta \quad (53)$$

เมื่อ ρ_s คือความหนาแน่นของวัสดุโครงสร้างเปลือกบาง และ (\ddot{u}, \ddot{w}) คือองค์ประกอบสำหรับเวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางตามแนวเส้นเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ

7. ผลรวมของงานเสมือน

จากหลักการของงานเสมือน [17-18] ได้ผลรวมของงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวสมดุลเมื่อ $\delta \pi = 0$ สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\delta U + \delta \Gamma - \delta I = 0 \quad (54)$$

แทนค่าจากสมการที่ (38), (49) และ (53) ลงในสมการที่ (54) ได้ว่า

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta g_k \{ [c_k^0 + k_{kn} g_n] + (-p_0 + \lambda) v_k^c \} d\theta + 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho_s \ddot{u} \{\delta u\} + \rho_s \ddot{w} \{\delta w\}) h D d\theta = 0 \quad (55)$$

จากสมการที่ (55) ได้ว่าโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวสมดุลที่สถานะอ้างอิง ดังนั้น λ และ g_n จะมีค่าเป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta g_k \{ c_k^0 - p_0 v_k^c \} d\theta \quad (56)$$

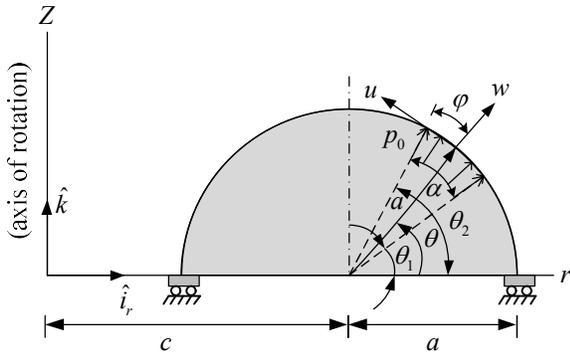
โดยที่เงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นต้องเป็นจริงและใช้ในการหาค่าความเครียดเริ่มต้น (ϵ_0)

8. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การหาค่าตอบเชิงตัวเลขของค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรไม่สามารถคำนวณหาผลเฉลยแบบแม่นยำ (exact solution) ได้เนื่องจากสมการดังกล่าวประกอบไปด้วยเทอมไร้มิติค่อนข้างสูง ดังแสดงในสมการที่ (55) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคือระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) [21] ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขโดยการจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบด้วยชิ้นส่วนของคานแบบ 1 มิติในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลข โดยแบ่งชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางตามแนวทิกตเชิงซั้ว ดังแสดงในรูปที่ 3 ซึ่งจะได้ค่าประมาณการเสีรูบในแนวเส้นเมอร์ริเดียนและแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียนดังสมการ

$$\{g\} = [\psi] \{d\} \quad (57)$$

โดยที่ $[\psi]$ คือเมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม และ $\{d\}$ คือเวกเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ ดังนั้นเมื่อแทนค่าสมการที่ (57) ลงไปในสมการที่ (55) จะสามารถแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3 การแบ่งชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบ

$$\begin{aligned} & \{\delta d\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T (\{c_0\} - (p_0 + \lambda)\{v_c\}) d\theta \\ & + \{\delta d\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T ([c_1] + [k]) [\psi] d\theta \{d\} \\ & + 2\pi \{\delta u\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_u\} \rho_s \{\psi_u\}^T h D d\theta \\ & + 2\pi \{\delta w\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_w\} \rho_s \{\psi_w\}^T h D d\theta = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

สมการที่ (58) สามารถเขียนในรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ (equation of motions) ของโครงสร้างเปลือกบางได้ดังสมการ

$$[m]\{\ddot{d}\} + [k]\{d\} = \{f\} \quad (59)$$

โดยที่ $[m]$ คือเมตริกซ์มวลของชิ้นส่วนย่อย, $[k]$ คือเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยเนื่องจากพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง, $\{f\}$ คือเวกเตอร์แรงของชิ้นส่วนย่อย, $\{d\}$ คือเวกเตอร์การเคลื่อนที่ และ $\{\ddot{d}\}$ คือเวกเตอร์ความเร่งซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} [m] &= 2\pi \{\delta u\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_u\} \rho_s \{\psi_u\}^T h D d\theta \\ & + 2\pi \{\delta w\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_w\} \rho_s \{\psi_w\}^T h D d\theta \end{aligned} \quad (60)$$

$$[k] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T ([\tilde{c}_1] + [\tilde{k}]) [\psi] d\theta \quad (61)$$

$$\{f\} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T (\{c_0\} - (p_0 + \lambda)\{v_c\}) d\theta \quad (62)$$

เนื่องจากดีกรีอิสระเฉพาะที่ (local degree of freedom) $\{d\}$ เหมือนกับดีกรีอิสระรวม (global degree of freedom) $\{D\}$ ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (59) ซึ่งจะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{F\} \quad (63)$$

จากสมการที่ (52) จะได้สมการเงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรดังสมการ

$$\{D\}^T \{\Delta V\} + \frac{V}{k_0 - p_0} \lambda = 0 \quad (64)$$

จากสมการที่ (63) และ (64) สามารถเขียนรวมได้ในรูปของเมตริกซ์สมมาตรดังนี้

$$[\tilde{M}]\{\ddot{Q}\} + [\tilde{K}]\{Q\} = \{\tilde{F}\} \quad (65)$$

ในที่นี้

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} [M] & | & \{0\} \\ \hline \{0\}^T & | & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [K] & | & \{\Delta V\} \\ \hline \{\Delta V\}^T & | & -\frac{V}{(k_0 - p_0)} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\{\tilde{F}\} = \begin{bmatrix} p_0 \{VC\} - \{C_0\} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} \{D\} \\ \hline \lambda \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\{\ddot{Q}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{D}\} \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

จากสมการที่ (65) สามารถคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดมทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร ดังสมการ

$$[\tilde{K}] - \omega_n^2 [\tilde{M}] = 0 \quad (71)$$

เมื่อ ω_n คือความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโครงสร้างเปลือกบาง ซึ่งสมการที่ (71) เป็นปัญหาค่าเฉพาะ (eigenvalue problem) และเนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดมทแบบครึ่งใบที่มีความสมมาตรตามแนวแกนถูกนำมาพิจารณา ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งอิควเอเตอร์ด้านใน (intrados equator) และด้านนอก (extrados equator) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดมทแบบครึ่งใบจะมีค่าดังนี้

$$u = w_\theta = 0 \quad (72)$$

โดยที่ปัญหาค่าเฉพาะดังแสดงในสมการที่ (71) จะต้องกำหนดเงื่อนไขของฐานรองรับจากสมการที่ (72) จึงจะคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้

9. ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขและการอภิปรายผล

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดมทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวแรงดันสูงภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะต้องเริ่มต้นจากการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ถูกเขียนโดยใช้โปรแกรม MATLAB 2015b โดยที่สมบัติของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับการคำนวณในครั้งนี้จะแสดงในตารางที่ 1 ทำการทดสอบการลู่เข้าของค่าความถี่ธรรมชาติ (natural

frequency, ω_n) เพื่อหาจำนวนของชิ้นส่วนย่อยที่เหมาะสมดังแสดงในรูปที่ 4 เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าความถูกต้องสูงสุด โดยพบว่าถ้าใช้จำนวนชิ้นส่วนย่อยระหว่าง 60 กับ 70 ชิ้นส่วนจะให้ค่าถูกต้องสูงสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดการสั่นที่ 1 ถึง 5 ไม่เกินร้อยละ 0.50 เมื่อเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่มีจำนวนชิ้นส่วนย่อยสูงกว่านี้

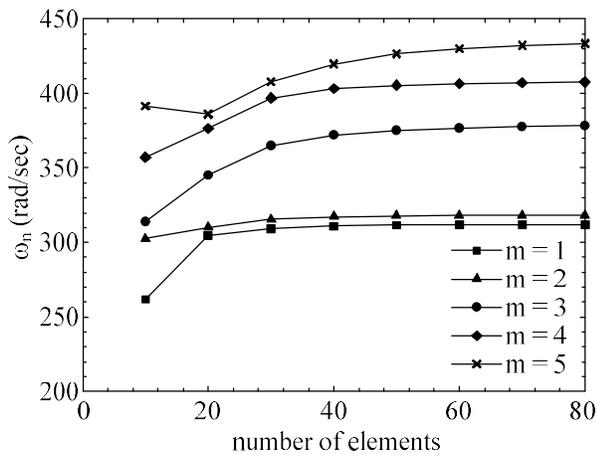
ดังนั้นงานวิจัยนี้จะเลือกใช้แบบจำลองที่มีจำนวนชิ้นส่วนย่อยเท่ากับ 60 ชิ้นส่วนเท่านั้น จากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องของผลการคำนวณที่ได้จากงานวิจัยนี้กับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูป ABAQUS ในการสร้างแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดมทแบบครึ่งใบที่มีความสมมาตรตามแนวแกน ซึ่งเป็นการประมาณค่าการเคลื่อนที่แบบฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสอง (quadratic membrane) โดยใช้ชิ้นส่วนแบบจำลอง MAX2 ร่วมกับชิ้นส่วนที่มีค่าแรงดันแบบสถิต FAX2 ซึ่งมีค่าประมาณการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น (linear fluid element) ซึ่งจะพบว่าให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกันแต่ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากงานวิจัยนี้มีค่าน้อยกว่าโดยมีค่าความแตกต่างสูงสุดไม่เกินร้อยละ 5 ใน 4 โหมดแรก แต่จะมีค่าความแตกต่างสูงสุดไม่เกินร้อยละ 8.5 ใน 10 โหมดแรก ดังแสดงในตารางที่ 2 และรูปที่ 5 แสดงการเปรียบเทียบโหมดการสั่นใน 5 โหมดแรกที่ได้จากงานวิจัยนี้กับโปรแกรม ABAQUS พบว่ามีลักษณะโหมดการสั่นที่สอดคล้องกัน

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

รายการ	ปริมาณ
ความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงโดมท (c)	6 m
ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดมท (a)	4 m
ความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง (h)	0.01 m
ความหนาแน่นของวัสดุโครงสร้าง	7850 kg/m ³
โมดูลัสยืดหยุ่น (E')	2x10 ¹¹ N/m ²
อัตราส่วนปัวส์ซอง (μ)	0.3
แรงดันคงที่ (p_0)	1x10 ⁶ N/m ²
โมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว (k_0)	1.45x10 ⁹ N/m ²

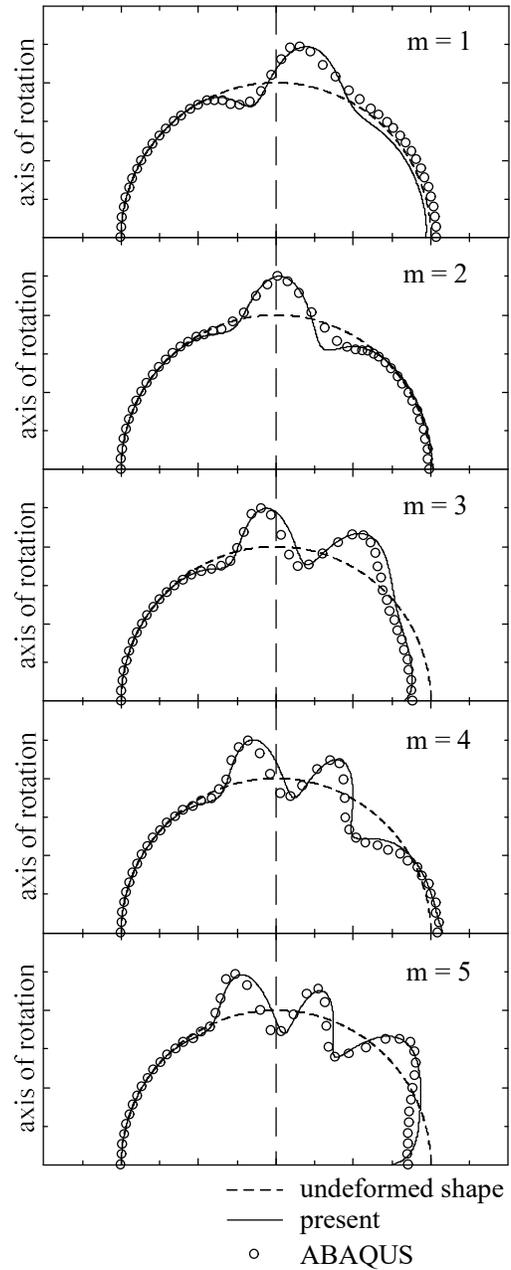
ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติ

โหมดการสั่น	ABAQUS	งานวิจัยนี้	ร้อยละความแตกต่าง
1	322.81	311.77	3.42
2	332.64	318.14	4.36
3	390.69	376.63	3.60
4	424.72	406.59	4.27
5	457.10	430.13	5.90
6	490.41	461.86	5.82
7	519.43	481.63	7.28
8	549.64	509.34	7.33
9	580.93	533.74	8.12
10	613.77	561.99	8.44



รูปที่ 4 การลู่เข้าคำตอบของค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลว

จากผลการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวแรงดันสูงภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรที่ได้จากงานวิจัยนี้ สามารถทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของโครงสร้างที่ส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางโดยทำการแปรเปลี่ยนค่าของความหนา ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัด ค่าแรงดันภายในเริ่มต้น ค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว และโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้าง จากข้อมูลที่แสดงในตารางที่ 1 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้



รูปที่ 5 การเปรียบเทียบโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลว

9.1 ผลของความหนาที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

การศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนแปลงความหนาตั้งแต่ 0.01 ถึง 0.05 เมตร พบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาของโครงสร้างส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับทุกโหมดการสั่นของโครงสร้างนั่นคือเมื่อ

ความหนาของโครงสร้างเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 6 โดยที่ค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าความชันของกราฟลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าน้อยและความชันของกราฟจะมีค่าลดลงอย่างช้า ๆ ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่ามาก ซึ่งในที่นี้การที่โครงสร้างเปลือกบางมีความหนามากจำเป็นจะต้องพิจารณาผลของแรงดัด ซึ่งไม่ได้ถูกนำมาพิจารณาในบทความนี้ และพบว่าที่ความหนาสูง ๆ ส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดการสั่นที่ 1 และ 2 มีค่าลู่เข้าหากัน ซึ่งรวมไปถึงโหมดการสั่นที่ 3 และ 4 ที่ให้ผลลัพธ์ในลักษณะเช่นเดียวกันกับโหมดการสั่นลำดับที่ 1 และ 2

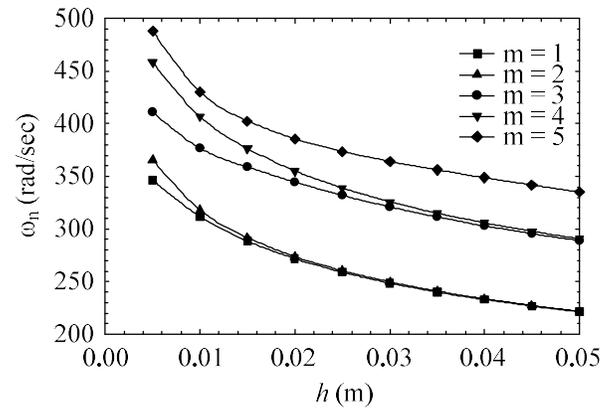
9.2 ผลของความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

ผลกระทบของความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนแปลงความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทตั้งแต่ 1.0 ถึง 4.5 เมตร ดังแสดงในรูปที่ 7 แสดงให้เห็นว่าเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวมีค่าลดลง กล่าวคือค่าความชันของค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าลดลงเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทมีค่าเพิ่มสูงขึ้น และมีค่าความชันของค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทมีค่าลดลง

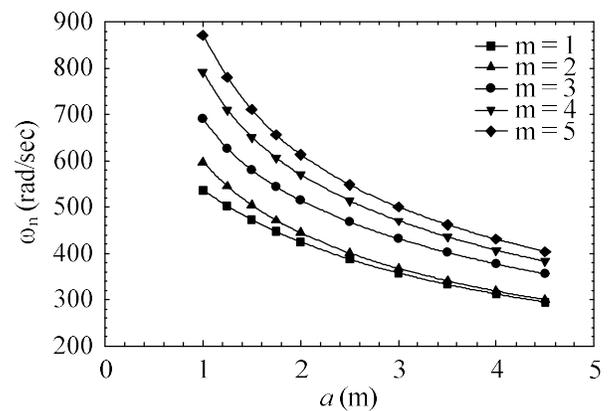
9.3 ผลของค่าแรงดันภายในเริ่มต้นที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

ค่าแรงดันภายในเนื่องจากของเหลวที่บรรจุเป็นค่าพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญอย่างมากที่ส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลว ซึ่งจะสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนแปลงค่าแรงดันภายในเริ่มต้นตั้งแต่ 0.5 ถึง 1.4 เมกะปาสคาล ดังแสดงในรูปที่ 8 ซึ่งจากผลการศึกษาพบว่าเมื่อเพิ่มค่าแรงดันภายในให้มีค่าสูงขึ้น ซึ่งจะรวมไปถึงค่าความเค้นและความเครียดเริ่มต้นที่มีค่าสูงขึ้นอีกด้วย จะส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น เนื่องจากค่าเมตริกซ์สติเฟนสของโครงสร้างเนื่องจากพลังงานความเครียดในสมการ

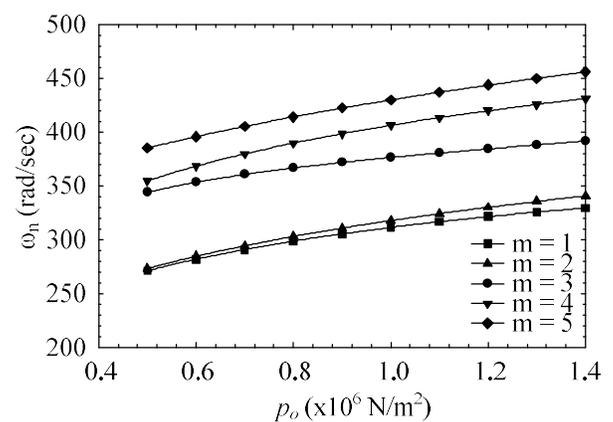
ที่ (61) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่าที่ค่าแรงดันภายในมีค่าต่ำ ๆ จะให้ความถี่ธรรมชาติในโหมดการสั่นที่ 1 และ 2 มีค่าลู่เข้าหากัน ซึ่งรวมไปถึงโหมดการสั่นที่ 3 และ 4 ที่ให้ผลลัพธ์ในลักษณะเช่นเดียวกันกับโหมดการสั่นลำดับที่ 1 และ 2



รูปที่ 6 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนความยาวรัศมีหน้าตัดที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ



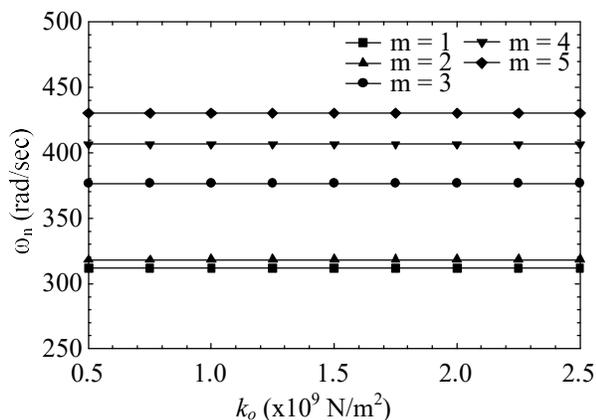
รูปที่ 8 ผลของการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

9.4 ผลของค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของเหลวที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

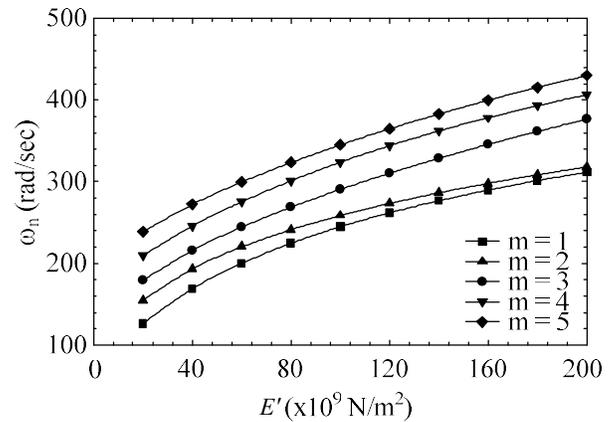
สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบ สำหรับบรรจุของเหลวที่มีค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรแตกต่างกัน ตั้งแต่ 0.5×10^3 ถึง 2.5×10^3 เมกะปาสคาล สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 9 จากผลการศึกษาพบว่า การเปลี่ยนแปลงค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวจะไม่ส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง แต่ค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวเป็นค่าที่มีความสำคัญสมการเงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรดังสมการ ดังแสดงในสมการที่ (64)

9.5 ผลของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

สำหรับค่าพารามิเตอร์สุดท้ายที่จะทำการศึกษาคือผลของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลว โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นจะมีค่าตั้งแต่ 20×10^3 ถึง 200×10^3 เมกะปาสคาล ซึ่งค่าการเพิ่มค่าโมดูลัสยืดหยุ่นจะทำให้ค่าเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างเนื่องจากพลังงานความเครียดในสมการที่ (61) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังนั้นเมื่อเพิ่มค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างให้มีค่าสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 10 นอกจากนี้ยังพบว่าที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นมีค่าสูง ๆ จะให้ความถี่ธรรมชาติในโหมดการสั่นที่ 1 และ 2 มีค่าลู่เข้าหากัน นอกจากนี้ยังพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดลำดับที่ 1 และ 2 จะมีค่าความชันของกราฟลดลงเมื่อค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบางมีค่ามาก



รูปที่ 9 ผลของการแปรเปลี่ยนโมดูลัสเชิงปริมาตรของเหลวที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 10 ผลของการแปรเปลี่ยนโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

10. สรุปผล

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแบบครึ่งใบสำหรับบรรจุของเหลวแรงดันสูง ภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน ซึ่งปัญหาสามารถเขียนได้ในรูปแบบการแปรผันและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบาง

จากผลการศึกษาสรุปได้ว่าผลของการแปรเปลี่ยนค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวจะไม่ส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง ในขณะที่การเพิ่มค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างมีค่าลดลงเมื่อความหนาและความยาวรัศมีหน้าตัดมีค่าเพิ่มสูงขึ้น สำหรับผลของการเปลี่ยนแปลงค่าแรงดันภายในเริ่มต้นกับโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างให้ผลในลักษณะตรงกันข้าม กล่าวคือค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อแรงดันภายในเริ่มต้นกับโมดูลัสยืดหยุ่นมีค่าเพิ่มสูงขึ้น เนื่องจากการเพิ่มค่าแรงดันภายในเริ่มต้นกับโมดูลัสยืดหยุ่นจะส่งผลทำให้ค่าสติฟเนสของโครงสร้างเนื่องจากพลังงานความเครียดในสมการการเคลื่อนที่มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ในขณะที่การเพิ่มความหนาของโครงสร้างโดยปราศจากการพิจารณาผลของพลังงานความเครียดเนื่องจากการตัดทำให้มวลของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้นมากแต่ค่าสติฟเนสของโครงสร้างมีค่าสูงขึ้นเล็กน้อย ดังนั้นจึงส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าลดลง ซึ่งผลการศึกษานี้จะสามารถ

นำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการออกแบบโครงสร้างเปลือกบางเพื่อป้องกันการเกิดปัญหาการสั่นพ้องได้ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงอื่น ๆ ได้

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน ตามสัญญาเลขที่ NKR2564INC001

เอกสารอ้างอิง

- [1] Liepins, AA. Free vibrations of prestressed toroidal membrane. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 1965; 3(10): 1924-1933.
- [2] Liepins AA. *Flexural Vibrations of the Prestressed Toroidal Shell*, NASA CR-296: 1965.
- [3] Liepins AA. *Vibration Study of a Pressurized Torus Shell*, NASA CR-885: 1967.
- [4] Lewis JA. *Finite Element Modeling and Active Control of an Inflated Torus Using Piezoelectric Devices [dissertation]*. Mechanical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA: 2000.
- [5] Jha AK, Inman DJ, Plaut RH. Free vibration analysis of an inflated toroidal shell. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2002; 124(3): 387-396.
- [6] Fang Z. Free vibration of fluid-filled toroidal shells. *Journal of Sound and Vibration*. 1992; 155(2): 343-352.
- [7] Tizzi S. A free vibration analysis of toroidal composite shells in free space. *Journal of Sound and Vibration*. 2015; 337: 116-134.
- [8] Balderes T, Armenakas AE. Free vibration of ring-stiffened toroidal shells, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 1973; 11(12): 1637-1644.
- [9] Wang XH, Xu B, Redekop D. Theoretical natural frequencies and mode shapes for thin and thick curved pipes and toroidal shells. *Journal of Sound and Vibration*, 2006; 292(1-2): 424-434.
- [10] Wang XH, Redekop D. Free vibration analysis of moderately-thick and thick toroidal shells. *Structural Engineering and Mechanics*. 2011; 39(4): 449-463.
- [11] Jiammeepreecha W, Chucheepsakul S. Non-linear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell. *Thin-Walled Structures*. 2017; 116: 12-18.
- [12] Jiammeepreecha W, Suebsuk J, Chucheepsakul S. Nonlinear static analysis of liquid-containment toroidal shell under hydrostatic pressure. *Journal of Structural Engineering*. 2020; 146(1): 04019169.
- [13] วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา, สมชาย ชูชีพสกุล. การสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายใน. *วารสารวิจัยและพัฒนา มจร*. 2560; 40(4): 509-532.
- [14] Jiammeepreecha W, Chucheepsakul S. Non-linear axisymmetric free vibration analysis of liquid-filled spherical shell with volume constraint. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2017; 139(5): 051016.
- [15] คมกร ไชยเดชาธร, จีรศักดิ์ สุพรมวัน, กิ่งสมร ทิพย์โยธา, วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา. ผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์และการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดัน. ใน: *การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 25, ชลบุรี ประเทศไทย 15-17 กรกฎาคม 2563*. หน้า 1123-1129.
- [16] Langhaar HL. *Foundations of Practical Shell Analysis*, Illinois: Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign: 1964.
- [17] Langhaar HL. *Energy Methods in Applied Mechanics*, New York: John Wiley & Sons, Inc; 1962.
- [18] วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา. การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันจากภายนอกโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. *วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ ม.อ.* 2559; 9(2), 47-56.

- [19] Rajasekaran S, Murray DW. Incremental finite element matrices. *Journal of the Structural Division*. 1973; 99: 2423-2438.
- [20] Chen JS, Huang T. Appropriate forms in nonlinear analysis. *Journal of Engineering Mechanics*. 1985; 111: 1215-1226.
- [21] Cook RD, Malkus DS, Plesha ME, Witt RJ. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc; 2002.