



## วารสารวิศวกรรมศาสตร์และนวัตกรรม Journal of Engineering and Innovation

บทความวิจัย

### พฤติกรรมการดัดและการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบ ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกตัวและแรงอัดที่ปลายคาน

### Bending and large deflection behaviors of free horizontally moving supported beam subjected to self-weight and compression at the end

วันวิสา รักษาสุข บรรพต กุลสุวรรณ การันต์ คล้ายฉ่ำ\*

ศูนย์วิจัยวิศวกรรมโครงสร้างพื้นฐานเพื่อความยั่งยืน ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Wanwisa Raksasuk Bunpoat Kunsuwan Karun Klaycham\*

Research Center for Sustainable Infrastructure Engineering (RSIE), Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering at Kamphaengsaen, Kasetsart University

\* Corresponding author.

E-mail: karun.kl@ku.ac.th; Telephone: 08 4070 8405

วันที่รับบทความ 26 กันยายน 2565; วันที่แก้ไขบทความ ครั้งที่ 1 11 พฤศจิกายน 2565; วันที่แก้ไขบทความ ครั้งที่ 2 21 ธันวาคม 2565

วันที่ตอบรับบทความ 15 เมษายน 2566

#### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอพฤติกรรมการดัดและการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกตัวและแรงอัดที่ปลายคาน การแปรผันของระบบคานพัฒนาขึ้นโดยอาศัยหลักการงานเสมือนซึ่งเขียนในพจน์ของระบบพิกัดอินทรีนสิก ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยของคานได้มาจากการพิจารณาทฤษฎีอีลาสติคคา วิถีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นและกระบวนการทำซ้ำด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันถูกใช้สำหรับการหาค่าตอบเชิงตัวเลข นอกจากนั้น ระบบสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น จากการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยของคาน ซึ่งจัดเป็นปัญหาค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด สามารถหาค่าตอบเชิงตัวเลขได้โดยใช้วิธียิงเป้า จากนั้นผลคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิถีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รับการตรวจสอบกับคำตอบที่ได้จากวิธียิงเป้า ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าน้ำหนักคานและแรงอัดที่ปลายคานทำให้จุดรองรับของคานเคลื่อนที่ ซึ่งทำให้เกิดการแอ่นตัวมาก

#### คำสำคัญ

การแอ่นตัวมาก นิวตัน-ราฟสัน วิถีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธียิงเป้า หลักการงานและพลังงานเสมือน

#### Abstract

This research presents bending and large deflection behaviors of the beams with horizontally moveable support subjected to self-weight and compressive force at a beam tip. A variational formulation of a beam system has been developed based on principle of virtual work, which is written in term of intrinsic coordinate. The geometric relation of deformed infinitesimal length of the beam is derived by considering the elastica theory. The non-linear finite element method incorporated with the Newton-Raphson iterative procedure is used to solve the numerical solution. In addition, the set of nonlinear first-order differential equations obtained from the force and moment equilibrium, moment-curvature relationship, and nonlinear geometric relations of the beam segment, which is categorized as two-point boundary value problem is numerically solved by using the shooting method. Then the numerical results from the finite element method

are independently verified by those results from the shooting method. The results also show that the beam self-weight and the compressive force at the beam tip cause the support movement, which induce large deflection.

### keywords

large deflection, newton-raphson, finite element method, shooting method, virtual work principles.

## 1. คำนำ

พฤติกรรม การดัด และการแอ่นตัวมาก (large deflection) ของคานเป็นเรื่องท้าทายและได้รับความสนใจจากวิศวกรและนักวิจัยอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบันโดยทั่วไป การวิเคราะห์ปัญหาประเภทนี้จะอาศัยทฤษฎีอิลาสติกคา ซึ่ง เป็นทฤษฎีสำหรับวิเคราะห์โครงสร้างที่แอ่นตัวได้มากโดย ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งการเสียรูปต้องเป็นค่า แม่นตรง อย่างไรก็ตามวิธีดังกล่าวมีความยืดหยุ่นเชิงเส้น ซึ่งนิยม ประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาประเภทต่างๆของโครงสร้าง ที่มีความขะลุคสูง ได้แก่ คานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยน ได้ คานยื่น คานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้ ตลอดจนเสาหรือ โครงข้อแข็งที่เคลื่อนตัวทางด้านข้าง ปัญหาการแอ่นตัวมาก ของคานสามารถจำลองด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์ซึ่งโดย ปกติจะเป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น การแก้ไขปัญหาดังกล่าว สามารถใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ เพื่อหาคำตอบในรูปแบบ ปิด หรือวิธีเชิงตัวเลข โดยที่วิธีเชิงวิเคราะห์ส่วนใหญ่แล้ว นำเสนอผลเฉลยในรูปของอิลิปติกอินทิกรัล [1] แต่อย่างไรก็ตามวิธีเชิงวิเคราะห์มีข้อจำกัดในกรณีของแรงกระทำแบบแผ่ กระจาย ดังนั้นวิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการ แก้ไขปัญหา ซึ่งได้แก่ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีการยิงเป้า และวิธีอิลิปติกอินทิกรัล เป็นต้น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method: FEM) คือวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่นำมา ประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรม โดยอาศัยระเบียบวิธี เชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณของปัญหาซึ่งนิยม คำนำวนด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิ เมนต์เป็นเทคโนโลยีที่ทันสมัยทำให้ง่ายต่อการขึ้นรูป แบบจำลองที่มีรูปร่างซับซ้อนโดยแบ่งแบบจำลองเป็นเอลิ เมนต์ย่อย ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method: SM) เป็น วิธีการหาคำตอบของปัญหาค่าขอบเขตแบบสองจุด โดย สมการครอบคลุมปัญหาจะอยู่ในรูปของระบบสมการเชิง อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ตัวอย่างงานวิจัยที่นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้าง ที่มีการแอ่นตัวมาก ได้แก่ สุรพันธ์ บุญเจริญ [2] ซึ่งได้ศึกษา และวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้ง แปรเปลี่ยนได้โดยใช้วิธีอิลิปติกอินทิกรัลในการหาค่าตอบแม่น ตรง สุนิสา รอดสงวาล [3] ได้ศึกษาและวิเคราะห์การแอ่นตัว มากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้วิธีไฟ ไนต์เอลิเมนต์ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข Giraldo-Londono และคณะ [4] ศึกษาการแอ่นตัวมากและพฤติกรรมหลังการ โกงเดาะของโครงสร้างคาน-เสาที่มีจุดต่อแบบกึ่งแข็งโดยรวม ผลกระทบของการเสียรูปตามแนวแกนและการเนื้องาน ครัลณ์ ชุ่มกลัด [5] ศึกษาผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มี ความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำจากน้ำหนัก ของตัวเอง Jeong และ Yoo [6] ได้สร้างแบบจำลองของคาน ที่มีการแอ่นตัวมากโดยใช้วิธี Assumed mode method ญัฐ พันธ์ จันทรวงศ์ [7] ได้ศึกษาผลกระทบของจุดหมุนแบบ ด้านทานการหมุนในช่วงความยาวอิลาสติกคาต่อพฤติกรรม หลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้ง แปรเปลี่ยนได้ ซึ่งพบว่าโครงสร้างประเภทอิลาสติกคาจะอยู่ใน สภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพหลังเกิดการโก่งเดาะ และเมื่อ สปริงด้านทานการหมุนถึงจุดคราก แรงอัดตามแนวแกนจะ ลดลงทันทีซึ่งขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของสติฟเนสของสปริง จากนั้น Mauricio และคณะ [8] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของ คานและเสาที่มีหน้าตัดคงที่และหน้าตัดที่มีความลึกไม่ สม่ำเสมอโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential transformation Method) Masjedi และ Weaver [9] ได้ใช้ วิธี Homotopy analysis เพื่อหาสมการแม่นตรงของปัญหา คานที่มีการแอ่นตัวมาก และกรณีที่วิเคราะห์คานที่มีแรงอัดที่ ปลายเพียงอย่างเดียว ได้แก่ งานวิจัยของ Kuznetsov และ Levyakov [10] ซึ่งได้ศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของ เสาที่มีจุดรองรับแบบยึดหมุนทั้งสองด้านโดยวิธีอิลิปติก อินทิกรัล และ Perkins [10] ได้ศึกษาการสั่นในระนาบแบบ เชิงเส้นของส่วนโค้งอิลาสติกคาที่มีจุดรองรับอย่างง่าย อย่างไรก็ตาม

กิติ กรณีนี่มีน้ำหนักบรรทุกทุกตัวเองเพียงอย่างเดียว ได้แก่ งานวิจัยของ Sundara Raja Iyengar และ Lakshmana Rao [11] ซึ่งได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับที่ปลายทั้งสองเป็นแบบยึดหมุนโดยมีแรงกระทำทางด้านข้าง Wang [12] ได้ศึกษาการดัดแบบไม่เป็นเชิงเส้นของคานยื่นและคานที่มีจุดรองรับที่ปลายทั้งสองเป็นแบบยึดหมุนภายใต้แรงกระทำแบบกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคาน อย่างไรก็ตาม งานวิจัยข้างต้นที่กล่าวมาข้างต้นไม่ได้ศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับสามารถเคลื่อนที่ได้อิสระตามแนวราบที่อยู่ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกตัวเองและแรงอัดที่ปลาย

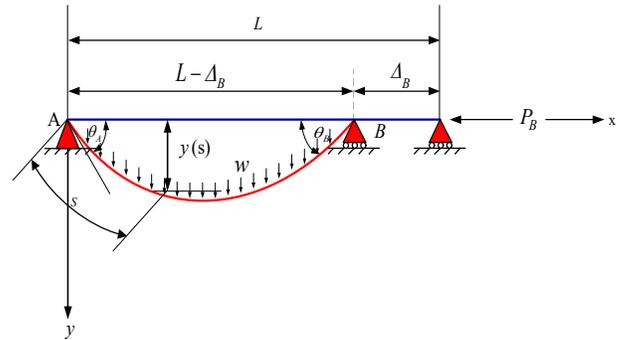
งานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอพฤติกรรมการดัดและการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงอัดที่ปลายคานและน้ำหนักคาน ซึ่งสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของคานโดยอาศัยหลักการงานเสมือนและเขียนสมการในพจน์ของระบบพิกัดอินทรีนสิก จากนั้นหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นอกจากนี้ ได้สร้างระบบสมการครอบคลุมปัญหาในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้นและใช้วิธีการยิงเป้าในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งสามารถตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ที่ได้โดยเปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธียิงเป้า ผลการวิเคราะห์ที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำมาเป็นแนวทางในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างคาน-เสา และโครงสร้างอื่นๆ ที่มีความขรุขระตลอดจนแบบจำลองที่นำเสนอสามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์การแอ่นตัวของไม้ค้ำถ่อในกีฬา ค้ำถ่อ หรือกระดานกระโดดน้ำ ตลอดจนถึงลำเลียงของไหลใต้ทะเล

## 2. แบบจำลองคณิตศาสตร์

### 2.1 ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตและสมการสมดุลของคาน

รูปที่ 1 แสดงลักษณะการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบ ภายใต้ น้ำหนักของคานและแรงอัดที่จุดรองรับ B โดยจุดรองรับทั้ง 2 ด้านของคานวางอยู่บนระนาบเดียวกัน ก่อนการเสียรูปประยะห่างในแนวราบระหว่างจุดรองรับทั้ง 2 ข้างมีค่าเท่ากับ  $L$  จุด

รองรับที่ปลายด้านซ้าย (จุด A) เป็นแบบยึดหมุน ขณะที่ปลายด้านขวา (จุด B) เป็นจุดรองรับแบบยึดหมุนที่เคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบ เนื่องจากแรงอัด ( $P_B$ ) ที่ปลายคาน และน้ำหนักของคาน ( $w$ ) ทำให้จุดรองรับ B เกิดการเคลื่อนที่เป็นระยะ  $\Delta_B$  ตามแนวแกน  $x$  และคานเกิดการแอ่นตัว ( $y$ )



รูปที่ 1 การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบ

รูปที่ 2 แสดงผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคานที่มีความยาว  $ds$  โดยความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของชิ้นส่วนคานสามารถหาได้จากรูปร่างทางเรขาคณิต ดังนี้

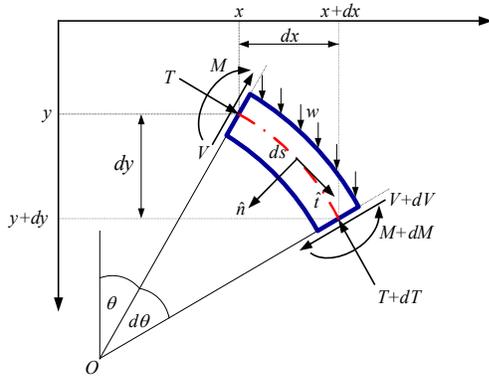
$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (1)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (2)$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} \quad (3)$$

โดยที่  $x$  และ  $y$  คือตำแหน่งตามแนวราบและแนวระดับของคานในระบบพิกัดฉาก ตามลำดับ ตัวแปร  $\kappa$  คือค่าความโค้งของคานที่สถานะสมดุลสถิต ตัวแปร  $s$  คือพิกัดตามความยาวโค้งและ  $\theta$  มุมหมุนของคานซึ่งวัดจากแนวราบไปยังแนวสัมผัสของคาน

เมื่อพิจารณาสมดุลของแรงจากผังอิสระของคานในรูปที่ 2 สมการสมดุลของแรงในทิศทางตั้งฉาก ( $\hat{n}$ ) และทิศทางสัมผัส ( $\hat{t}$ ) ของคานสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (4) และ (5) ตามลำดับ และสมการสมดุลของโมเมนต์สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (6)



รูปที่ 2 แรงภายในและฟังก์ชันของชิ้นส่วนย่อยของคานที่มีควมยาว  $ds$

$$\sum F_n = 0 ; \frac{dV}{ds} = T \frac{d\theta}{ds} - w \cos \theta \quad (4)$$

$$\sum F_t = 0 ; \frac{dT}{ds} = -V \frac{d\theta}{ds} + w \sin \theta \quad (5)$$

$$\sum M_o = 0 ; \frac{dM}{ds} = V \quad (6)$$

โดยที่  $w$  คือน้ำหนักคาน และตัวแปร  $V$ ,  $M$  และ  $T$  คือแรงเฉือน โมเมนต์ดัด และแรงอัดตามแนวแกน ตามลำดับ

## 2.2 สมการงานเสมือนของคาน

สมการงานเสมือนที่นำเสนอในงานวิจัยนี้จะเขียนในพจน์ของระบบพิกัดอินทรีนสิก  $\theta(s)$  ซึ่งประกอบด้วยพลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการดัด งานเสมือนเนื่องจากแรงภายนอก ได้แก่ แรงอัดที่ปลายคานและน้ำหนักคาน จากรูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและค่าความโค้งของคานเมื่อคานเกิดการแอ่นตัวมากตามทฤษฎีอีลาสติคคา [13] คือ

$$M = -EI \frac{d\theta}{ds} \quad (7)$$

$EI$  คือสติฟเนสต้านการดัดของคาน โดยตัวแปร  $E$  และ  $I$  คือโมดูลัสยืดหยุ่นและโมเมนต์ความเฉื่อยของคานตามลำดับ ดังนั้นพลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการดัดของคาน สามารถหาได้โดย

$$\delta U_b = \int_0^L EI \theta' \delta \theta' ds \quad (8)$$

โดยที่  $(\prime)$  แทนการอนุพันธ์ของตัวแปรต่างๆเทียบกับ  $s$  และ  $L$  คือความยาวของคาน งานเสมือนเนื่องจากน้ำหนักของคาน ( $w$ ) คำนวณได้โดย

$$\delta W_w = \int_0^L \int_0^s w \cos \theta \delta \theta ds ds \quad (9)$$

งานเสมือนเนื่องจากแรงอัดที่ปลายคานสามารถคำนวณได้จาก

$$\delta W_p = -P_B \int_0^L \sin \theta \delta \theta ds \quad (10)$$

จากหลักการพลังงานเสมือนทั้งหมดของระบบสามารถหาได้จากผลต่างระหว่างพลังงานเสมือนและงานเสมือนเนื่องจากแรงภายนอก ดังนี้

$$\delta \pi = \delta U_b - \delta W_w - \delta W_p \quad (11)$$

เมื่อแทนสมการที่ (8) (9) และ (10) ในสมการที่ (11) จะได้สมการงานเสมือนทั้งหมดของระบบดังนี้

$$\delta \pi = \int_0^L EI \theta' \delta \theta' ds - \left\{ \int_0^L \int_0^s w \cos \theta ds ds - P_B \int_0^L \sin \theta \delta \theta ds \right\} \quad (12)$$

เนื่องจากมุมหมุน  $\theta$  เป็นตัวแปรอิสระของปัญหานี้ ดังนั้นการกำหนดค่าการแอ่นตัวของคานที่จุดรองรับด้านขวา (ที่  $s = L$ ) ไม่สามารถทำได้โดยตรง ซึ่งจำเป็นต้องกำหนดด้วยสมการเงื่อนไขต่อไปนี้

$$g = y(L) - \int_0^L \sin \theta ds = 0 \quad (13)$$

โดยที่  $y(L) = 0$  คือพิกัดในแนวตั้งของคานที่จุดรองรับด้านขวา การศึกษานี้ได้กำหนดตำแหน่ง  $y(L)$  เป็นเงื่อนไขบังคับของปัญหาโดยใช้เทคนิคตัวคูณลากรองจ์ [14] จากหลักการของตัวคูณลากรองจ์ จะนำตัวแปรไม่ทราบค่า  $\lambda$  ไป

คูณกับสมการเงื่อนไขสมการที่ (13) และทำการอนุพันธ์จากนั้นนำไปบวกกับสมการงานเสมือนของคาน ได้ดังนี้

$$\delta\pi^* = \delta\pi + \delta(\lambda g) \quad (14)$$

หลังจากที่แทนค่าสมการที่ (12) และ (13) ในสมการที่ (14) จะได้สมการงานเสมือนทั้งหมดของระบบภายใต้เงื่อนไขบังคับค่าการแอ่นตัวที่ปลายด้านขวาของคาน ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta\pi^* = & \int_0^L EI\theta'\delta\theta' ds - \left\{ \int_0^L \int_0^s w \cos\theta\delta\theta ds ds + P_B \int_0^L \sin\theta\delta\theta ds \right\} \\ & - \lambda \int_0^L \cos\theta\delta\theta ds + \left[ y(L) - \int_0^L \sin\theta ds \right] \delta\lambda \end{aligned} \quad (15)$$

สมการที่ (15) จัดเป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งการหาคำตอบด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ทำได้ยาก ในการศึกษาครั้งนี้จึงอาศัยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข

### 3. การหาคำตอบด้วยวิธีการเชิงตัวเลข

หัวข้อนี้นำเสนอวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับขั้นตอนทำซ้ำด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน และวิธียิงเป้าในการหาคำตอบเชิงตัวเลข

#### 3.1 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการงานเสมือนของคาน สมการที่ (15) สามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากกระบวนการนี้ ค่ามุมหมุน  $\theta(s_s)$  ภายในเอลิเมนต์ของคานสามารถประมาณได้โดย

$$\theta(s_s) = \mathbf{N}\{\mathbf{q}\} \quad (16)$$

$s_s$  คือพิกัดตามแนวโค้งภายในเอลิเมนต์ของคาน  $\mathbf{N}$  คือเมทริกซ์ฟังก์ชันรูปร่าง ซึ่งสามารถกำหนดได้ดังนี้

$$[\mathbf{N}] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]^T \quad (17)$$

เมื่อ  $N_i$  คือฟังก์ชันรูปร่างพหุนามอันดับสาม

$$N_1 = 1 - \frac{1s_s}{2l} + \frac{9s_s^2}{l^2} - \frac{9s_s^3}{l^3} \quad (18ก)$$

$$N_2 = \frac{9s_s}{l} - \frac{45s_s^2}{2l^2} + \frac{27s_s^3}{2l^3} \quad (18ข)$$

$$N_3 = -\frac{9s_s}{2l} + \frac{18s_s^2}{l^2} - \frac{27s_s^3}{l^3} \quad (18ค)$$

$$N_4 = \frac{s_s}{l} + \frac{9s_s^2}{2l^2} - \frac{9s_s^3}{2l^3} \quad (18ง)$$

โดยที่  $l = \frac{L}{n_{elem}}$  คือความยาวเอลิเมนต์ของคาน และ

$n_{elem}$  เป็นจำนวนเอลิเมนต์ของคาน เวกเตอร์  $\{\mathbf{q}\}$  คือดิกกรีอิสระที่จุดต่อข้อของคานซึ่งสอดคล้องกับค่ามุมหมุน  $\theta(s_s)$  ที่ตำแหน่งจุดต่อข้อ ดังนี้

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} \theta(s_s = 0) \\ \theta\left(s_s = \frac{1}{3}\right) \\ \theta\left(s_s = \frac{2l}{3}\right) \\ \theta(s_s = 1) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

จากหลักการของพลังงานเสมือนของระบบ  $\pi^* = \sum_{k=1}^{n_{elem}} \{\pi_k^*\}$  เมื่อ  $\pi_k^*$  คือพลังงานเสมือนของเอลิเมนต์ของคาน ดังนั้นจะสามารถหาสภาวะสมดุลของคานได้ก็ต่อเมื่อ

$$\delta\pi_k^* = \left( \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i + \left( \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \lambda} \right) \delta \lambda = 0 \quad (20)$$

เนื่องจาก  $\delta \mathbf{q}_i$  และ  $\delta \lambda$  ไม่เท่ากับศูนย์ดังนั้น  $\{\partial \pi_k^* / \partial \mathbf{q}_i\} = \{0\}$  และ  $\{\partial \pi_k^* / \partial \lambda\} = 0$  ซึ่งสามารถเขียนใหม่โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$\left\{ \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \mathbf{q}_i} \right\}_{n+1} = \left\{ \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \mathbf{q}_i} \right\}_n + \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \left( \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \right\}_n \Delta \mathbf{q}_n + \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \right\}_n \Delta \lambda_n = 0 \quad (21ก)$$

$$\left\{ \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \lambda} \right\}_{n+1} = \left\{ \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \lambda} \right\}_n + \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left( \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \lambda} \right) \right\}_n \Delta \mathbf{q}_n + \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \pi_k^*}{\partial \lambda} \right) \right\}_n \Delta \lambda_n = 0 \quad (21ข)$$

โดยที่  $\{\Delta \mathbf{q}\}_n = \{\mathbf{q}_i\}_{n+1} - \{\mathbf{q}_i\}_n$  และ  $\Delta \lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$  เมื่อตัวแปร  $n$  คือรอบของการทำซ้ำ ดังนั้นหลังจากตัดพจน์ที่มีค่าน้อยๆ ทำให้สามารถเขียนระบบสมการที่ (21) ในรูปแบบเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{NL}]_{N \times N} & \{\mathbf{K}_\lambda\}_{N \times 1} \\ \{\mathbf{K}_\lambda\}_{1 \times N}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta \mathbf{q}_i\} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{\mathbf{R}_i\} \\ \mathbf{R}_\lambda \end{Bmatrix} \quad (22)$$

จำนวนเต็ม  $N$  คือจำนวนดีกรีอิสระทั้งหมดของระบบคาน เมทริกซ์  $[\mathbf{K}_{NL}]$  ได้จากการรวมเมทริกซ์ของเอลิเมนต์เมทริกซ์  $[\partial^2 \pi_k^* / \partial \mathbf{q}_i \partial \mathbf{q}_j]$  เวกเตอร์  $\{\mathbf{K}_\lambda\}$  ได้จากการรวมเวกเตอร์ของเอลิเมนต์  $\{\partial^2 \pi_k^* / \partial \lambda \partial \mathbf{q}_i\}$  เวกเตอร์  $\{\mathbf{R}_i\}$  ได้จากการรวมเวกเตอร์ของเอลิเมนต์  $\{\partial \pi_k^* / \partial \mathbf{q}_i\}$  และพารามิเตอร์  $\mathbf{R}_\lambda$  คือค่าผลรวมของ  $\partial \pi_k^* / \partial \lambda$  จากทุกเอลิเมนต์

สมการที่ (22) เป็นระบบสมการไม่เชิงเส้นซึ่งจะใช้กระบวนการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสันในการหาคำตอบเชิงตัวเลข จากกระบวนการนี้จะกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่า  $\{\mathbf{q}_i\}$  และ  $\lambda$  และสร้างระบบสมการที่ (22) จากนั้นคำนวณหาค่าส่วนเพิ่ม  $\{\Delta \mathbf{q}_i\}$  และ  $\Delta \lambda$  และนำค่าที่ได้ไปบวกเพิ่มระหว่างเวกเตอร์  $\{\Delta \mathbf{q}_i\}$  กับ  $\{\mathbf{q}_i\}$  และ  $\Delta \lambda$  กับ  $\lambda$  ซึ่งจะทำให้ได้ค่า  $\{\mathbf{q}_i\}$  และ  $\lambda$  ใหม่ ค่าเหล่านี้จะใช้

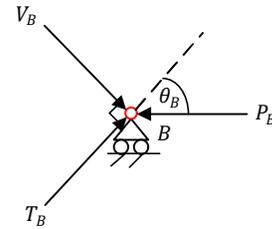
สำหรับการคำนวณซ้ำต่อไป โดยทำซ้ำขั้นตอนข้างต้นจนกว่าค่า  $\{\Delta \mathbf{q}_i\}$  และ  $\Delta \lambda$  จะเข้าสู่ใกล้ศูนย์ โดยได้กำหนดค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ไม่เกิน  $10^{-7}$

หลังจากหาสถานะสมดุลของคานแล้วจึงคำนวณหาแรงภายในที่เกิด ณ ตำแหน่งต่างๆของคาน ได้แก่ ค่าโมเมนต์ตัด  $\mathbf{M}(s)$  ซึ่งสามารถคำนวณหาได้จากสมการที่ (7) แรงเฉือน  $\mathbf{V}(s)$  หาได้จากการแทนสมการที่ (7) ในสมการที่ (6) ซึ่งสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\mathbf{V}(s) = -EI \frac{d^2 \theta}{ds^2} \quad (23)$$

และแรงตามแนวแกน  $\mathbf{T}(s)$  หาได้จากการอินทิเกรตสมการที่ (5) ซึ่งได้สมการดังต่อไปนี้

$$\mathbf{T}(s) = T_B + \int_s^L \left( V \frac{d\theta}{ds} - w \sin \theta \right) ds \quad (24)$$



รูปที่ 3 สมดุลแรงที่จุดรองรับ B

ตัวแปร  $T_B$  คือแรงอัดตามแนวแกนที่จุดรองรับ B ซึ่งคำนวณหาได้จากสมการสมดุลที่จุด B (รูปที่ 3) ดังสมการต่อไปนี้

$$T_B = \frac{P_B - V_B \sin \theta_B}{\cos \theta_B} \quad (25)$$

ตัวแปร  $V_B$  คือแรงเฉือนที่จุดรองรับ B

### 3.2 การหาคำตอบเชิงตัวเลขด้วยวิธียิงเป้า

เนื่องจากสมการที่ (1) ถึง (6) เป็นระบบสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น จึงเหมาะที่จะหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณจำเป็นต้องจัดให้อยู่ในรูปของสมการไร้หน่วย โดยอาศัยความสัมพันธ์จากสมการต่อไปนี้

$$\hat{s} = \frac{S}{L}, \hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{y} = \frac{y}{L}, \Delta = \frac{\Delta_B}{L} \quad (26ก-ง)$$

$$\hat{w} = \frac{wL^3}{EI}, \hat{T} = \frac{TL^2}{EI}, \hat{V} = \frac{VL^2}{EI}, \hat{M} = \frac{ML}{EI} \quad (26จ-ซ)$$

$$\hat{P}_B = \frac{P_B L^2}{EI} \quad (26ฉ)$$

ตัวแปร  $\hat{s}$  คือค่าพิกัดตามความยาวส่วนโค้งแบบไร้หน่วย  $\hat{w}, \hat{T}, \hat{V}$  และ  $\hat{M}$  คือค่าไร้หน่วยของน้ำหนักแกน แรงอัดตามแนวแกน แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ตามลำดับ จากความสัมพันธ์ของสมการที่ (26ก-ง) ทำให้สามารถเขียนสมการครอบคลุมปัญหา (สมการที่ 1-6) ให้อยู่ในรูปของระบบสมการไร้หน่วยได้ดังนี้

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{s}} = \sin \theta \quad (27ก)$$

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}} = \cos \theta \quad (27ข)$$

$$\frac{d\theta}{d\hat{s}} = -\hat{M} \quad (27ค)$$

$$\frac{d\hat{T}}{d\hat{s}} = -\hat{V} \frac{d\theta}{d\hat{s}} + \hat{w} \sin \theta \quad (27ง)$$

$$\frac{d\hat{V}}{d\hat{s}} = \hat{T} \frac{d\theta}{d\hat{s}} - \hat{w} \cos \theta \quad (27จ)$$

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{s}} = \hat{V} \quad (27ฉ)$$

ระบบสมการที่ (27) จัดเป็นปัญหาค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด ซึ่งในการศึกษานี้ได้ใช้วิธียิงเป้าในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งได้กำหนดเงื่อนไขของจุดรองรับทั้ง 2 ด้านของ

คานาดังนี้ ที่จุดรองรับด้านซ้ายของคาน (จุด A) กำหนดให้อยู่ที่พิกัด  $\hat{x} = 0$  และ  $\hat{y} = 0$  ขณะที่พิกัดตามแนวระดับของจุดรองรับด้านขวา (จุด B) คือ  $\hat{y} = 0$  เนื่องจากจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคานเป็นแบบยึดหมุน ดังนั้นโมเมนต์ดัด ( $\hat{M}$ ) ที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคานเท่ากับศูนย์ โดยที่ค่ามุม ( $\theta$ ) แรงเฉือน ( $\hat{V}$ ) และระยะพิกัดตามแนวราบ ( $\hat{x}$ ) ที่จุดรองรับ B เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งจำเป็นต้องเดาค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปรไม่ทราบค่านี้เป็น  $\theta_B, \hat{V}_B$  และ  $\hat{x}_B$  ตามลำดับ ดังนั้นในการกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างของคานทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการไร้หน่วยดังต่อไปนี้

จุดรองรับ A ( $\hat{s} = 0$ ) :

$$\hat{x} = 0, \hat{y} = 0, \hat{M} = 0, \theta = \theta_A, \hat{V} = \hat{V}_A, \hat{T} = \hat{T}_A \quad (28ก-ฉ)$$

จุดรองรับ B ( $\hat{s} = 1$ ) :

$$\hat{x} = \hat{x}_B, \hat{y} = 0, \hat{M} = 0, \theta = \theta_B, \hat{V} = \hat{V}_B, \hat{T} = \hat{T}_B \quad (29ก-ฉ)$$

กระบวนการหาคำตอบเชิงตัวเลขสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้ เริ่มแรกให้กำหนดค่าของตัวแปรควบคุมซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้  $\hat{P}_B$  เป็นตัวแปรควบคุม กำหนดน้ำหนักของคาน  $\hat{w}$  ซึ่งเป็นค่าคงที่และค่าเงื่อนไขของจุดรองรับ ( $\hat{y}$  และ  $\hat{M}$  ที่  $\hat{s} = 1$ ) จากนั้นประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งประกอบด้วย  $\hat{x}, \theta$  และ  $\hat{V}$  ที่  $\hat{s} = 1$  ให้เท่ากับ  $\hat{x}_B, \theta_B$  และ  $\hat{V}_B$  ตามลำดับโดยอาศัยทฤษฎีของคานที่อ่อนตัวน้อยๆแบบเป็นเชิงเส้นเพื่อใช้เป็นค่าเดาเริ่มต้น

จากนั้นอินทิเกรตสมการครอบคลุมปัญหา (สมการที่ (29)) ตามพิกัดส่วนโค้งของคานจาก  $\hat{s} = 1$  ถึง  $\hat{s} = 0$  (จากจุดรองรับ B ไปยังจุดรองรับ A) ด้วยวิธี Cash-Karp Runge-Kutta อันดับที่ 5 โดยควบคุม Step Size ของการอินทิเกรตเพื่อให้ได้คำตอบเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำเพียงพอ

การศึกษานี้ใช้ Step Size เท่ากับ 0.01 จากนั้นใช้กระบวนการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสันเพื่อทำการปรับแก้ค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า  $(\theta_B, \hat{V}_B, \hat{x}_B)$  จนกระทั่งผลลัพธ์ลู่เข้าและสอดคล้องกับเงื่อนไขของสมการที่ (25) โดยกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับให้ (Tolerance) เท่ากับ  $10^{-12}$

$$\min_{\theta_B, \hat{V}_B, \hat{x}_B} \Phi = |\hat{x}(0)| + |\hat{y}(0)| + |\hat{M}(0)| = 0 \quad (30)$$

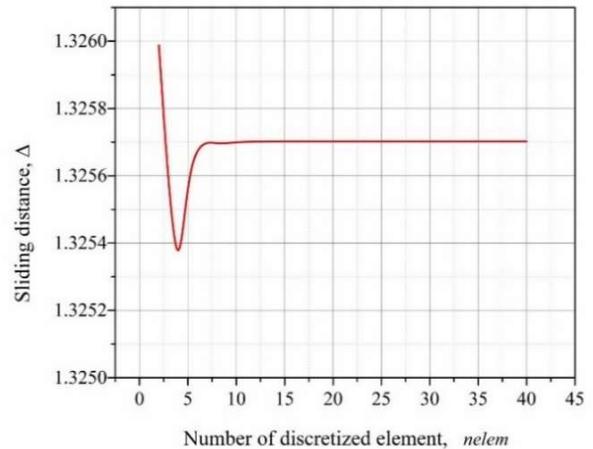
ขั้นตอนสุดท้ายให้บวกส่วนเพิ่ม  $\Delta \hat{P}_B$  เข้ากับค่าตัวแปรควบคุม  $\hat{P}_B$  และทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวข้างต้นทั้งหมดเพื่อสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง  $\hat{P}_B$  กับ  $\theta_B$  และ  $\hat{P}_B$  กับ  $\Delta (= 1 - \hat{x}_B)$

#### 4. ผลคำตอบเชิงตัวเลข

##### 4.1 ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื่องจากความถูกต้องแม่นยำของคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ขึ้นอยู่กับจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ จึงจำเป็นต้องตรวจสอบจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับใช้ในแบบจำลองนี้ หัวข้อนี้ได้ทำการศึกษาผลของจำนวนเอลิเมนต์ต่อค่าของการเคลื่อนที่ของจตุรรองรับ B โดยการศึกษานี้ได้กำหนดค่าตัวแปรต่างๆ ในรูปของตัวแปรไร้หน่วยดังนี้ ได้แก่ ความยาวช่วงคาน ( $\hat{L}$ ) เท่ากับ 1 น้ำหนักคาน ( $\hat{w}$ ) เท่ากับ 6 และแรงที่กระทำต่อจตุรรองรับ B ( $\hat{P}_B$ ) มีค่าเท่ากับ 40

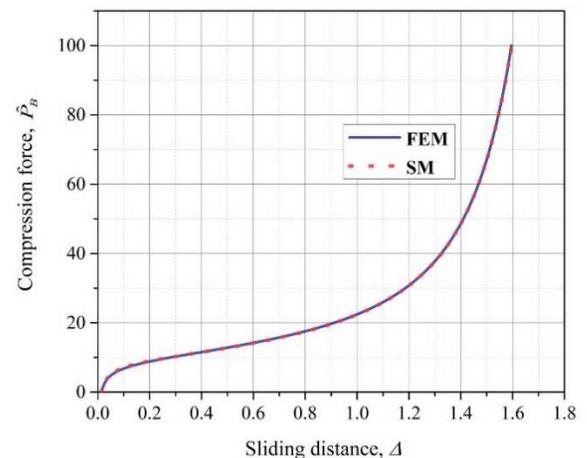
จากผลการศึกษาดังแสดงในรูปที่ 4 จะเห็นได้ว่าจำนวนเอลิเมนต์ที่น้อยที่สุดตั้งแต่ 8 เอลิเมนต์ขึ้นไปจะทำให้ค่าการเคลื่อนที่ของจตุรรองรับ B ( $\Delta$ ) ลู่เข้าสู่ค่าคงที่ ดังนั้นการหาคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เลือกใช้จำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 10 เอลิเมนต์เพราะสามารถหาคำตอบที่มีความถูกต้องเพียงพอ



รูปที่ 4 การตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบเชิงตัวเลขเนื่องจากจำนวนเอลิเมนต์

##### 4.2 ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลข

หัวข้อนี้นำเสนอการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองคณิตศาสตร์และผลคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) โดยเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธียิงเป้า (SM) ตัวอย่างการวิเคราะห์นี้ได้กำหนดน้ำหนักคาน ( $\hat{w}$ ) เท่ากับ 6 ความยาวช่วงคาน ( $\hat{L}$ ) เท่ากับ 1 และแรงอัดที่จตุรรองรับ B ( $\hat{P}_B$ ) มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 100 เพื่อใช้สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์



รูปที่ 5 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจตุรรองรับ B ( $\Delta$ ) และแรงอัดที่จตุรรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) ที่จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และวิธียิงเป้า (SM)

จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่จูดรองรับ B กับค่าการเคลื่อนที่ในแนวราบของจูดรองรับ B ดังแสดงในรูปที่ 5 โดยเปรียบเทียบผลคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

(FEM) กับผลที่ได้จากวิธียิงเป้า (SM) ซึ่งพบว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้จากสองวิธีนี้สอดคล้องกันเป็นอย่างดี

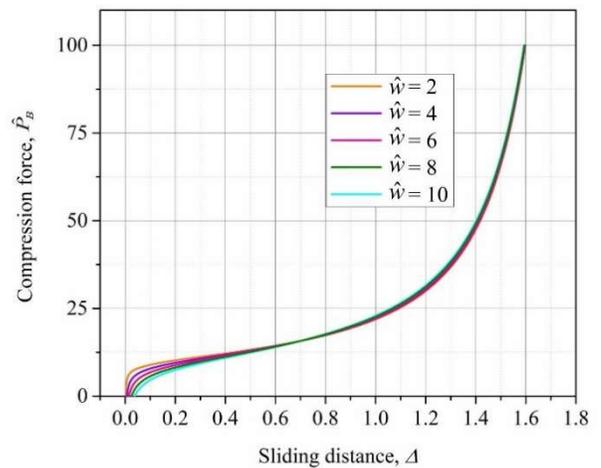
ตารางที่ 1 เปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และวิธียิงเป้า (SM)

$\hat{P}_B$	$\theta_A(-\theta_B)$		$\hat{y}_{max}$		$\Delta$	
	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM
0	0.244131	0.244131	0.075877	0.075877	0.014445	0.014444
10	1.085405	1.085402	0.304852	0.304854	0.277224	0.277223
20	2.138747	2.138950	0.401146	0.401161	0.914898	0.914981
30	2.544136	2.546110	0.360806	0.360798	1.187361	1.187470
40	2.746523	2.744961	0.321174	0.321043	1.325700	1.326078
50	2.863648	2.861484	0.290077	0.289927	1.410305	1.410658
60	2.937487	2.933427	0.265773	0.265550	1.468485	1.468866
70	2.986755	2.981718	0.246362	0.246040	1.511666	1.512067
80	3.021007	3.014852	0.230490	0.229902	1.545429	1.545881
90	3.045588	3.036534	0.217241	0.215575	1.572822	1.573328
100	3.063684	3.050210	0.205984	0.201084	1.595665	1.596199

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบค่ามุมหมุนที่จูดรองรับ ( $\theta_A(-\theta_B)$ ) ระยะการแอ่นสูงสุด ( $\hat{y}_{max}$ ) ระยะการเคลื่อนที่ของจูดรองรับ B ( $\Delta$ ) ภายใต้แรงอัดที่จูดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) ต่างๆ โดยพบว่าคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และวิธียิงเป้า (SM) มีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก

#### 4.3 ผลของน้ำหนักคานและแรงอัดที่จูดรองรับต่อการแอ่นตัวมากของคาน

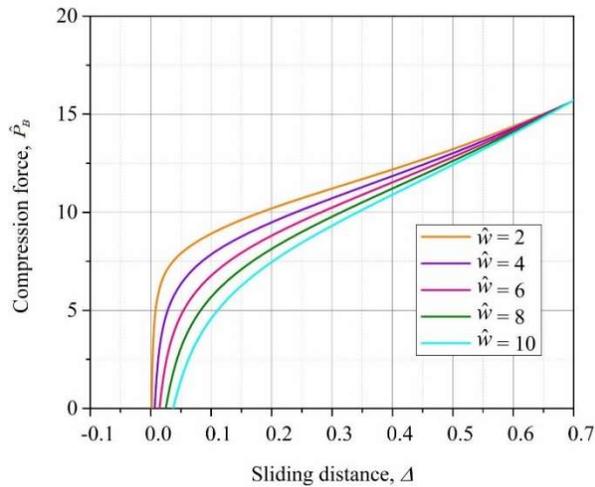
หัวข้อนี้นำเสนอผลของน้ำหนักคานและแรงอัดที่จูดรองรับต่อการแอ่นตัวและเสถียรภาพของคานที่มีจูดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระตามแนวราบ ตัวอย่างการวิเคราะห์นี้ กำหนดให้น้ำหนักคาน ( $\hat{w}$ ) เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10 ตามลำดับ และแรงที่อัดจูดรองรับ B ( $\hat{P}_B$ ) มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 100 ผลการวิเคราะห์ได้นำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจูดรองรับ B ( $\Delta$ ) และแรงอัดที่จูดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) ตามรูปที่ 6



รูปที่ 6 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจูดรองรับ B ( $\Delta$ ) และแรงอัดที่จูดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) เมื่อ  $\hat{w}$  มีค่าเท่ากับ 2 4 6 8 และ 10

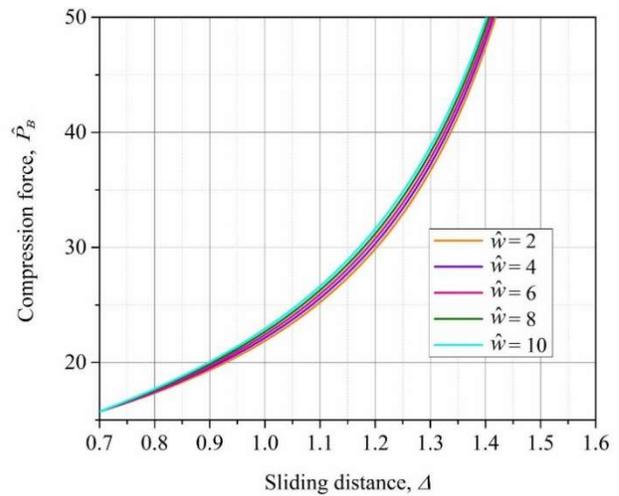
จากรูปที่ 6 พบว่าแรงอัดที่จูดรองรับส่งผลโดยตรงทำให้จูดรองรับเคลื่อนที่เพิ่มมากขึ้น โดยพฤติกรรมที่เกิดขึ้นสามารถแบ่งเป็นสองช่วงดังแสดงในรูปที่ 7(ก) และ 7(ข) โดยรูปที่ 7(ก) แสดงช่วงแรงอัด  $\hat{P}_B$  มีค่าตั้งแต่ 0-16 และรูปที่ 7(ข) แสดงช่วงแรงอัด  $\hat{P}_B$  มีค่าตั้งแต่ 16-100 ทั้งนี้ผลการศึกษาพบว่าเมื่อ  $\hat{P}_B$  น้อยกว่า 16 น้ำหนักของคานส่งผลให้จุด

รองรับ B ( $\Delta$ ) เคลื่อนที่มากขึ้น อย่างไรก็ตาม เมื่อ  $\hat{P}_B$  มากกว่า 16 การเพิ่มน้ำหนักคานทำให้การเคลื่อนที่ของจุดรองรับลดลง (รูปที่ 7(ข)) และเมื่อพิจารณาน้ำหนักบรรทุกตัวเอง จะพบว่าในช่วงแรกเมื่อจุดรองรับ B เริ่มเคลื่อนตัว แรงอัดที่ปลาย B จะมีค่าน้อยลงเมื่อน้ำหนักบรรทุกตัวเอง ( $\hat{w}$ ) มีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกตัวเองในช่วงที่การแอ่นตัวมีค่าเพิ่มขึ้นนี้ จะไปลดสติฟเนสของคานเป็นเหตุให้แรงอัดที่ปลาย B ลดลง



(ก) แรงอัดที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) ในช่วง 0-16

เมื่อน้ำหนักบรรทุกตัวเองเพิ่มขึ้น ในขณะที่เมื่อจุดรองรับ B เข้าใกล้จุดรองรับ A แรงอัดที่ปลาย B ที่เพิ่มขึ้นจะยกเส้นโค้งฮิสเทรีซิสของคานให้สูงขึ้น ดังนั้นน้ำหนักบรรทุกตัวเองจะทำให้หน้าที่ยืดหยุ่นของคานเป็นผลให้ต้องการแรงที่ปลาย B สูงขึ้นเมื่อน้ำหนักบรรทุกตัวเองมากขึ้น



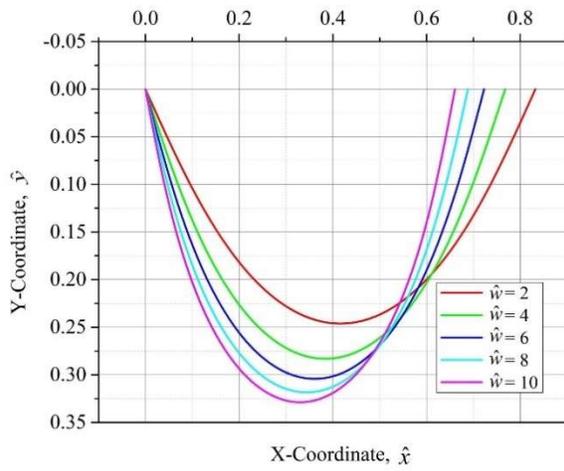
(ข) แรงอัดที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) ในช่วง 16-50

รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( $\Delta$ ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ )

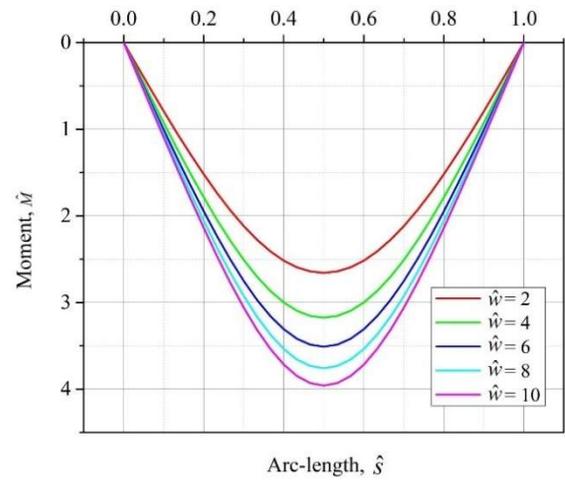
รูปที่ 8(ก)-8(ง) แสดงลักษณะการแอ่นตัวของคานและแรงภายในที่เกิดขึ้นแรงอัดที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) เท่ากับ 10 โดยเปรียบเทียบผลของน้ำหนักคาน  $\hat{w}$  เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10 จากลักษณะการเสียรูปของคานดังรูปที่ 8(ก) พบว่าการเพิ่มน้ำหนักคานมากขึ้นทำให้จุดรองรับของคานและการแอ่นตัวเพิ่มมากขึ้นซึ่งสอดคล้องกับผลสรุปก่อนหน้านี้ โดยการแอ่นตัว

สูงสุดเกิดขึ้นที่กึ่งกลางคาน และส่งผลทำให้โมเมนต์ดัดเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน (รูปที่ 8 (ข)) โดยจะมีค่าสูงสุดที่กึ่งกลาง

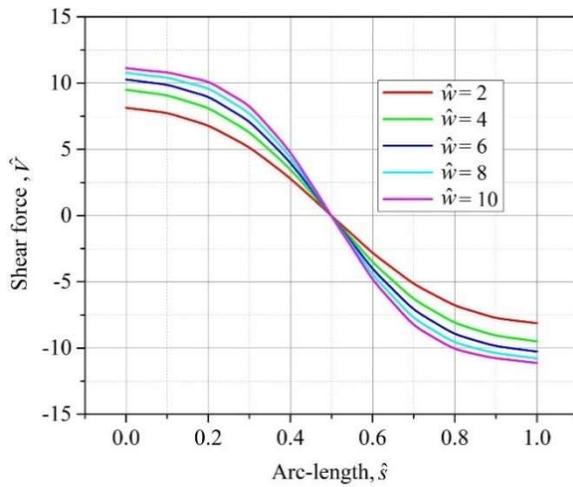
คานจากรูปที่ 8(ค) พบว่าแรงเฉือนมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อน้ำหนักคานมากขึ้น และแรงเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นบริเวณจุดรองรับทั้งสองข้าง จากรูปที่ 8(ง) พบว่าแรงตามแนวแกนเป็นแรงอัดและมีค่าสูงสุดที่กึ่งกลางคาน แต่เมื่อน้ำหนักคานมากขึ้นอาจส่งผลให้แรงตามแนวแกนที่จุดรองรับเปลี่ยนเป็นแรงดึง (เมื่อ  $\hat{w} = 10$ )



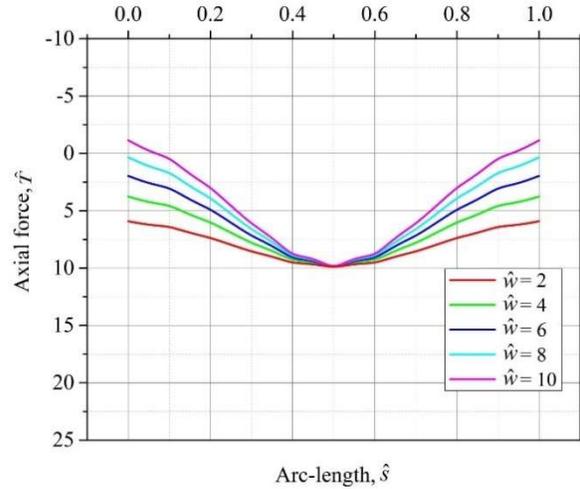
(ก) เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวที่สภาวะสมดุลของคาน



(ข) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคาน

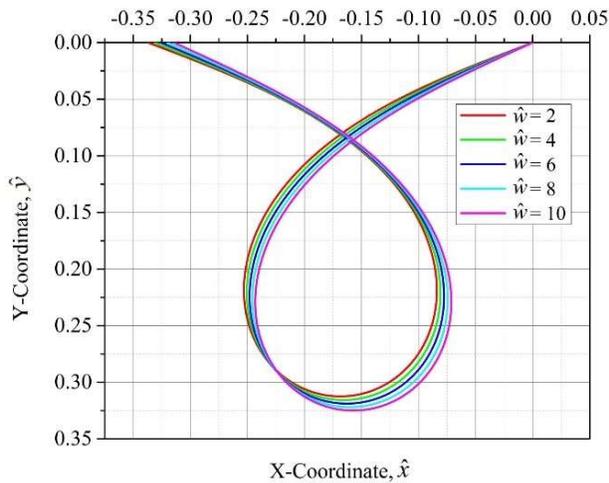


(ค) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงเฉือนตลอดความยาวคาน

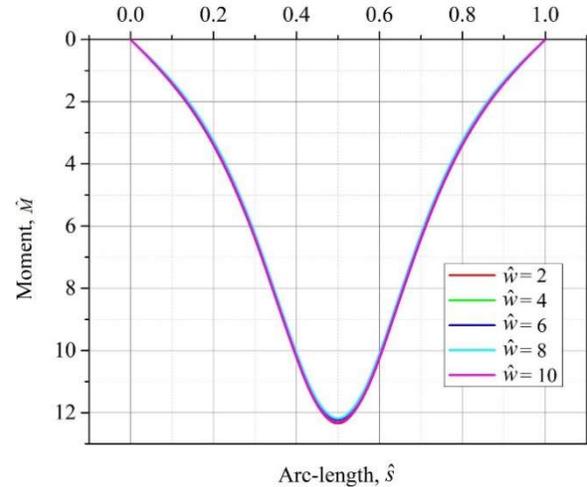


(ง) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงตามแนวแกนตลอดความยาวคาน

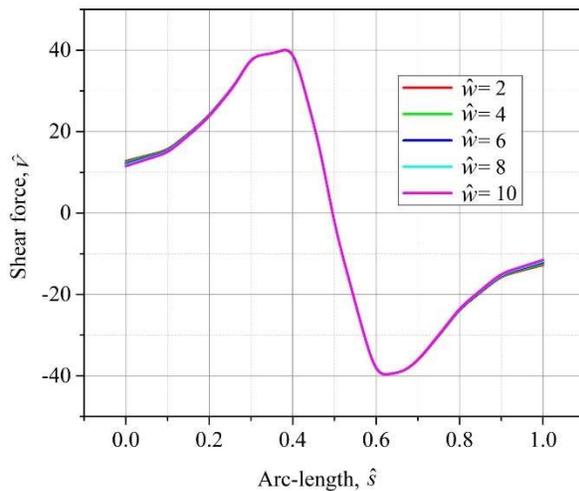
รูปที่ 8 เปรียบเทียบลักษณะรูปร่างการแอ่นตัวที่สภาวะสมดุลของคานและการกระจายตัวของแรงภายในที่เกิดภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) เท่ากับ 10 โดยกำหนดให้  $\hat{\psi}$  เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10



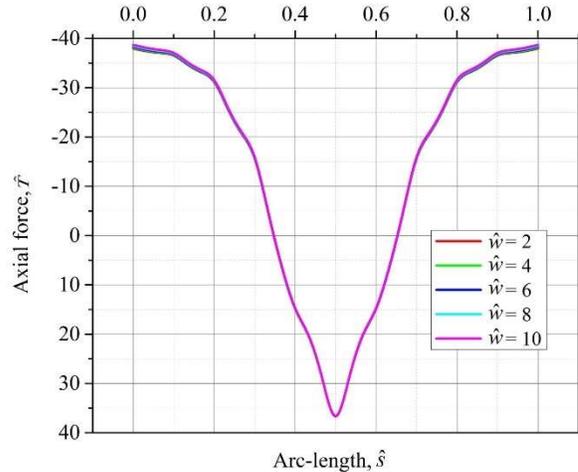
(ก) เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานที่สภาวะสมดุลของคาน



(ข) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคาน



(ค) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงเฉือนตลอดความยาวคาน



(ง) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงตามแนวแกนตลอดความยาวคาน

รูปที่ 9 เปรียบเทียบลักษณะรูปร่างการแอ่นตัวของคานและการกระจายตัวของแรงภายในที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) เท่ากับ 40 โดยกำหนดให้  $\hat{w}$  เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10

ในทำนองเดียวกัน รูปที่ 9(ก)-9(ง) แสดงลักษณะการแอ่นตัวของคานและแรงภายในที่เกิดขึ้นแรงอัดที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) เท่ากับ 40 โดยเปรียบเทียบผลของน้ำหนักคาน  $\hat{w}$  เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10 ซึ่งพบว่าเมื่อแรงอัดมีค่ามากทำให้จุดรองรับ B เลื่อนผ่านจุดรองรับ A ดังรูป จากลักษณะการเสียรูปของคานแสดงดังรูปที่ 9(ก) พบว่าเมื่อน้ำหนักคานมากขึ้นทำให้คานเกิดการแอ่นตัวมากขึ้นซึ่งการแอ่นตัวสูงสุดเกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางคาน อย่างไรก็ตามพบว่าการเคลื่อนที่ของจุดรองรับมีค่าลดลงเมื่อน้ำหนักคานเพิ่มขึ้น เนื่องจากน้ำหนักคานเป็นแรงทางด้านข้าง

ซึ่งเป็นแรงถ่วงต้านการสไลด์ของจุดรองรับคาน จากรูปที่ 9(ข) พบว่าเมื่อน้ำหนักคานมากขึ้นส่งผลให้โมเมนต์เพิ่มขึ้นเล็กน้อยและค่าสูงสุดเกิดที่กึ่งกลางคานซึ่งสอดคล้องกับการค่าการแอ่นตัวของคาน จากรูปที่ 9(ค) พบว่า แรงเฉือนจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อน้ำหนักคานมากขึ้น ทั้งนี้แรงเฉือนสูงสุดเกิดบริเวณระยะ 2/5 เท่าของความยาวคานจากปลายทั้งสองด้าน และจากรูปที่ 9(ง) พบว่าแรงตามแนวแกนสูงสุดเกิดขึ้นที่กึ่งกลางคานซึ่งเป็นแรงอัด แต่บริเวณจุดรองรับทั้งสองข้างของคานจะเกิดแรงดึง

ตารางที่ 2 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขภายใต้น้ำหนักคนต่างๆ และแรงอัด ( $\hat{P}_B$ ) เท่ากับ 10 และ 40

$\hat{P}_B$	$\hat{w}$	$\theta_A(-\theta_B)$	$\hat{y}_{max}$	$\Delta$	$\hat{M}_{max}$	$\hat{V}_{max}$	$\hat{T}_{max}$	$\lambda$
10	2	0.834513	0.246649	0.167729	2.658104	8.131653	9.951580	1.0
	4	0.988974	0.283686	0.232292	3.175398	9.495158	9.948467	2.0
	6	1.085405	0.304852	0.277224	3.510014	10.273837	9.959841	3.0
	8	1.154793	0.319119	0.311716	3.759394	10.779705	9.982337	4.0
	10	1.208318	0.329573	0.339582	3.958685	11.126048	10.014832	5.0
40	2	2.779164	0.314797	1.336959	12.447962	41.044200	40.854610	1.0
	4	2.762760	0.318019	1.331341	12.408093	41.067785	40.846339	2.0
	6	2.746523	0.321174	1.325700	12.368899	41.093491	40.838345	3.0
	8	2.730460	0.324264	1.320042	12.330394	41.121339	40.830622	4.0
	10	2.714578	0.327286	1.314372	12.292590	41.151348	40.823167	5.0

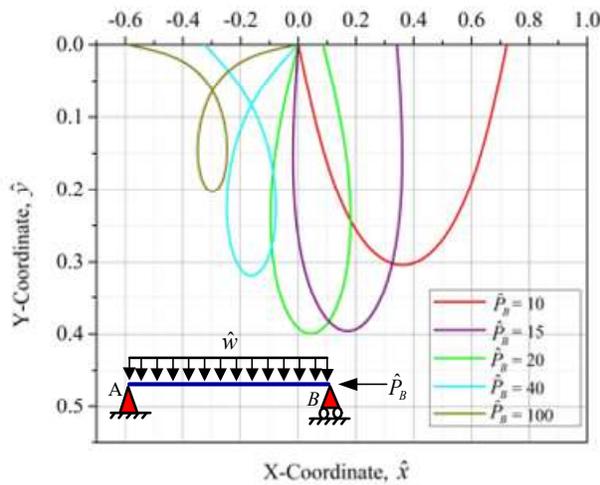
นอกจากนั้นผลคำตอบเชิงตัวเลขแบบไร้หน่วยถูกนำเสนอในตารางที่ 2 ได้แก่ค่ามุมหมุนที่จุดรองรับ ( $\theta_A(-\theta_B)$ ) ระยะการแอ่นตัวสูงสุด ( $\hat{y}_{max}$ ) ระยะการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( $\Delta$ ) โมเมนต์ดัดสูงสุด ( $\hat{M}_{max}$ ) แรงเฉือนสูงสุด ( $\hat{V}_{max}$ ) แรงอัดตามแนวแกนสูงสุด ( $\hat{T}_{max}$ ) และค่าตัวคูณลากรองจ์ ( $\lambda$ )

จากการศึกษาพบว่าความหมายทางกายภาพของตัวคูณลากรองจ์ ( $\lambda$ ) คือแรงปฏิกิริยาในแนวตั้งที่จุดรองรับ B ซึ่งมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของน้ำหนักคน

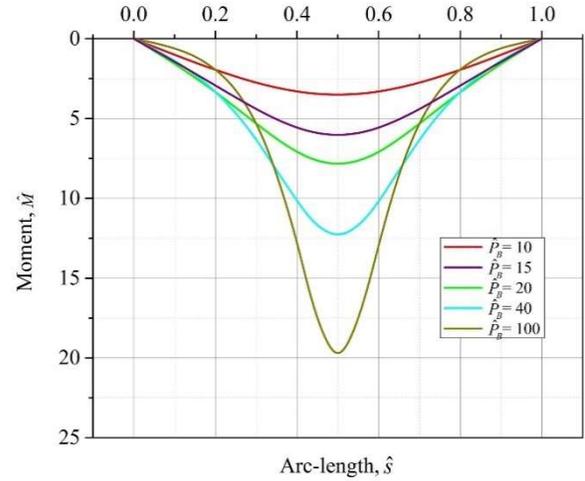
นอกจากนั้น การศึกษานี้ได้นำเสนอการแอ่นตัวของคานและแรงภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากผลของแรงอัดที่จุดรองรับ B โดยกำหนดให้  $\hat{P}_B$  เท่ากับ 10 15 20 40 และ 100 ตามลำดับ น้ำหนักคน ( $\hat{w}$ ) เท่ากับ 6 จากลักษณะการเสียรูปของคานพบว่าค่า  $\hat{P}_B$  ส่งผลทำให้การเคลื่อนที่ของจุดรองรับเพิ่มมากขึ้น ในกรณีที่พิจารณาเฉพาะแรงอัดที่ปลาย ( $\hat{P}_B$ ) โดยให้แรงอัดเพิ่มขึ้น จุดรองรับ B จะเลื่อนตัวเข้าไปหาจุดรองรับ A พร้อมกันนั้นคานจะเกิดการแอ่นตัวที่เพิ่มขึ้น เมื่อจุดรองรับ B เลื่อนเข้าไปใกล้จุดรองรับ A มากขึ้น คานจะไม่แอ่นตัวเพิ่มขึ้นแต่อย่างใด แต่คานจะยกตัวขึ้นเนื่องจากเป็นคานที่มีความยาวจำกัด ( $L = 1$  หน่วย) ดังแสดงในรูปที่ 10(ก) และแรงอัด  $\hat{P}_B$  ส่งผลให้โมเมนต์ดัดเพิ่มมากขึ้นดังแสดงในรูปที่ 10(ข) จากการกระจายตัวของแรงเฉือนดังแสดงในรูปที่ 10(ค) พบว่าแรงเฉือน ( $\hat{V}$ ) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่กึ่งกลางคาน (ที่  $\hat{s} = 0.5$ ) และมีแรงเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นบริเวณใกล้กับกึ่งกลางคาน ซึ่งต่างจาก

พฤติกรรมของแรงเฉือนที่เกิดกับคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีการแอ่นตัวน้อยๆ ทั้งนี้เนื่องจากปัจจัยต่างๆ ได้แก่ 1) คานที่ศึกษาเป็นคานที่มีการแอ่นตัวมาก 2) ผลเนื่องจากการพิจารณาแรงตามแนวแกนและ 3) ทิศทางแรงเฉือนไม่ได้อยู่ในแนวตั้ง แต่เป็นแรงที่ตั้งฉากกับเส้นโค้งการแอ่นตัวของคาน จากการกระจายตัวของแรงอัดตามแนวแกนดังแสดงในรูปที่ 10(ง) พบว่าแรงในแนวแกนสูงสุดเป็นแรงอัดที่บริเวณกึ่งกลางคานและเมื่อแรงอัดที่จุดรองรับ  $\hat{P}_B$  เพิ่มขึ้นทำให้แรงในแนวแกนสูงสุดเปลี่ยนเป็นแรงดึงที่บริเวณจุดรองรับทั้งสองด้านของคาน ( $\hat{P}_B = 100$ ) ทั้งนี้ผลวิเคราะห์เชิงตัวเลขของคานภายใต้แรงอัด  $\hat{P}_B$  เท่ากับ 10 15 20 40 และ 100 เมื่อน้ำหนักคน ( $\hat{w}$ ) เท่ากับ 6 ได้ถูกนำเสนอในตารางที่ 3

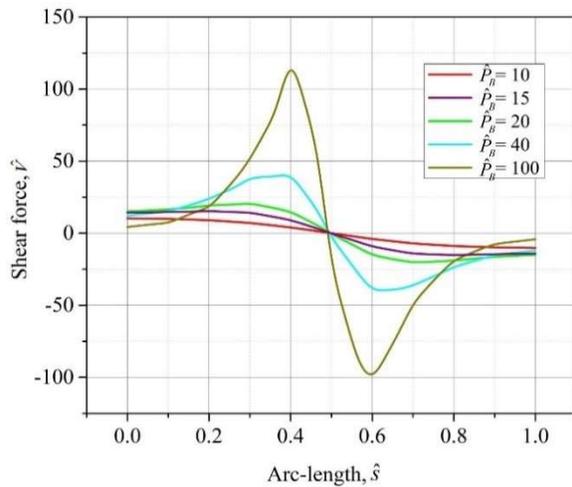
ตารางที่ 3 แสดงค่ามุม ( $\theta_A(-\theta_B)$ ) ระยะการแอ่นตัวสูงสุด ( $\hat{y}_{max}$ ) ระยะการเคลื่อนที่ของจุดรองรับเคลื่อนที่ ( $\Delta$ ) โมเมนต์สูงสุด ( $\hat{M}_{max}$ ) แรงเฉือนสูงสุด ( $\hat{V}_{max}$ ) และแรงในแนวแกนสูงสุด ( $\hat{T}_{max}$ ) พบว่าผลจากแรงอัดที่กระทำที่จุดรองรับ ในช่วงที่  $\hat{P}_B$  เท่ากับ 10 15 และ 20 ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ มีค่าเพิ่มขึ้นตามแรงอัดที่กระทำ แต่เมื่อแรงอัดที่จุดรองรับ ในช่วงที่  $\hat{P}_B$  เท่ากับ 40 และ 100 ค่ามุมที่จุดรองรับและระยะการแอ่นตัวสูงสุด ( $\hat{y}_{max}$ ) มีค่าลดลง



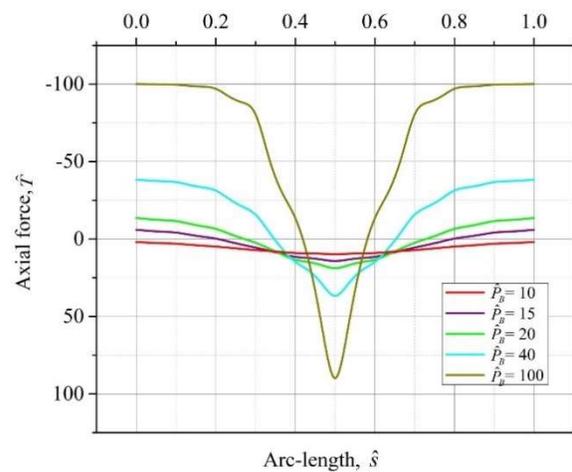
(ก) เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานที่สภาวะสมดุล



(ข) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของโมเมนต์ตัดตลอดความยาวคาน



(ค) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงเฉือนตลอดความยาวคาน



(ง) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงอัดตามแนวแกน

รูปที่ 10 เปรียบเทียบลักษณะรูปร่างการแอ่นตัวและแรงภายในที่ตำแหน่งต่างๆของคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) เท่ากับ 10 15 20 40 และ 100 เมื่อ  $\hat{w}$  เท่ากับ 6

ตารางที่ 3 ผลคำตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( $\hat{P}_B$ ) เท่ากับ 10 15 20 40 และ 100 เมื่อ  $\hat{w}$  เท่ากับ 6

$\hat{P}_B$	$\theta_A (-\theta_B)$	$\hat{y}_{\max}$	$\Delta$	$\hat{M}_{\max}$	$\hat{V}_{\max}$	$\hat{T}_{\max}$
10	1.085405	0.304852	0.277224	3.510014	10.273837	9.959840
15	1.749379	0.397314	0.658290	6.040493	15.361216	14.731980
20	2.138747	0.401146	0.914898	7.863321	20.751799	19.902470
40	2.746523	0.321174	1.325700	12.368900	41.093491	40.838340
100	3.063684	0.205984	1.595665	20.151224	125.108246	107.279720

## 6. สรุป

บทความนี้นำเสนอพฤติกรรมการดัดและการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับและน้ำหนักคาน สมการแปรรูปของคานได้รับการพัฒนาโดยอาศัยหลักการงานเสมือนซึ่งอยู่ในรูปของสมการอินทิกรัลแบบไม่เป็นเชิงเส้น จากนั้นประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบพิกัดอินทรีนสิกสำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา ซึ่งพบว่าผลคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความสอดคล้องกับผลที่ได้จากวิธียิงเป้านอกจากนั้น ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าน้ำหนักคานและแรงอัดที่จุดรองรับมีผลต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานซึ่งทำให้จุดรองรับเคลื่อนที่เพิ่มมากขึ้นและคานเกิดการแอ่นตัวมาก ตลอดจนทำให้แรงภายในได้แก่ โมเมนต์ดัด แรงเฉือนและแรงตามแนวแกนเพิ่มขึ้น ทั้งนี้โมเมนต์ดัดมีค่ามากที่สุดที่บริเวณกึ่งกลางคาน แรงเฉือนจะมีค่ามากที่สุดที่บริเวณจุดรองรับ แรงตามแนวแกนเป็นแรงอัดและมีค่ามากที่สุดที่บริเวณกึ่งกลางคาน อย่างไรก็ตาม หากรวมแรงอัดที่จุดรองรับเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องจะทำให้จุดรองรับด้านขวาเคลื่อนที่ผ่านจุดรองรับด้านซ้าย แรงตามแนวแกนบริเวณจุดรองรับทั้งสองด้านจะเปลี่ยนจากแรงอัดเป็นแรงดึง อย่างไรก็ตาม ผลการวิเคราะห์ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถนำมาเป็นแนวทางในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างคาน-เสา และโครงสร้างอื่นๆที่มีความซับซ้อนสูง ทั้งนี้แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่นำเสนอนี้สามารถนำไปต่อยอดเพื่อวิเคราะห์โครงสร้างภายใต้แรงอัดแบบติดตามการเสถียรได้

### กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากคณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

### เอกสารอ้างอิง

- [1] Kuznetsov VV, Levyakov SV. Complete solution of the stability problem for Elastica of Euler's column. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002; 37(6):1003-1009.
- [2] สุรพันธ์ บุญเจริญ. การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนอย่างอิสระโดยใช้วิธีอีลิปติกอินทิกรัลในการหาคำตอบเชิงตัวเลข [วิทยานิพนธ์]. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี; 2536.
- [3] สุนิสา รอดสังวาล. การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [วิทยานิพนธ์]. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี; 2542.
- [4] Giraldo- Londono O, Monsalve- Giraldo JS, Ariszabal- Ochoa JD. Large- deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015; 77:85-95.
- [5] ศรีณย์ ชุ่มกลัด. ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกาคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง [วิทยานิพนธ์]. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี; 2560.
- [6] Jeong S, Yoo HH. Flexibility modeling of a beam undergoing large deflection using the assumed mode method. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017; 133: 611-618.
- [7] ณัฐพัชร์ จันทรวงศ์มณี. ผลกระทบของจุดรองรับแบบด้านทานการหมุนแบบยึดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกาคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้แบบจำลองของสปริงด้านทานการหมุน [วิทยานิพนธ์]. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี; 2562.
- [8] Areiza- Hurtado M. Aristizábal- Ochoa JD. Large-deflection analysis of prismatic and tapered beam-column using the Differential Transform Method. *Structure*. 2020; 28:923-932.
- [9] Masjedi PK, Weaver PM, Analytical solution for arbitrary large deflection of geometrically exact beams using the homotopy analysis method. *Applied Mathematical Modelling*. 2020; 103: 516-542.
- [10] Perkins NC, Planar vibration of an Elastica Arch: theory and experiment. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1990; 112(3):374-379.
- [11] Iyengar SR, Rao SK. Large deflections of simply supported beams. *Journal of Franklin Institute*. 1955;256(6): 523-528.

- [12] Wang TM. Non-linear bending of beams with uniformly distributed loads. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1969; 4(4): 389-395.
- [13] Timoshenko SP, Gere JM. *Theory of elastic stability*. The McGraw-Hill Companies, Inc.; 1961.
- [14] Langhaar HL. *Energy methods in applied mechanics*. The John Wiley and Sons, Inc; 1962.