



การวัดค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มแท่งกลมที่รองรับตรงปลาย

Measuring local gravity with end-supported rod pendulums

บัญชา คังตระกูล¹ สายชล สิทธิพงศ์^{2*}

¹ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่ อำเภอหางดง จังหวัดเชียงใหม่ 50230

² สาขาวิชาเทคโนโลยียานยนต์ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่ อำเภอหางดง จังหวัดเชียงใหม่ 50230

Bancha Kongtragool¹ Saichon Sithipong^{2*}

¹ Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering and Technology, North-Chiang Mai University, Chiang Mai, 50230

² Department of Automotive Technology, Faculty of Engineering and Technology, North-Chiang Mai University, Chiang Mai, 50230

* Corresponding author.

E-mail: saichon@northcm.ac.th; Telephone: 08 1594 5284

วันที่รับบทความ 4 กรกฎาคม 2566; วันที่แก้ไขบทความ ครั้งที่ 1 15 สิงหาคม 2566; วันที่แก้ไขบทความ ครั้งที่ 2 9 พฤศจิกายน 2566

วันที่ตอบรับบทความ 27 พฤศจิกายน 2566

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ ได้นำเสนอผลลัพธ์ของการหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นโดยใช้ลูกตุ้มแท่งกลมที่รองรับตรงปลายเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง ผลลัพธ์จากการศึกษานี้แสดงให้เห็นว่า โดยใช้การจับเวลาในการแกว่งของลูกตุ้มจำนวน 100 รอบโดยใช้มุมเริ่มต้นไม่เกิน 2° จำนวน 12 ซ้ำ จะได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นจากการทดลองด้วยลูกตุ้มแบบแท่งกลมที่รองรับตรงปลายเป็น $9.78 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$ โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเทียบกับค่าคำนวณ, 9.7847 m/s^2 , ประมาณ 0.03%

คำสำคัญ

การวัดความโน้มถ่วง มาตรฐานความโน้มถ่วง ลูกตุ้มแบบแท่งกลมที่รองรับตรงปลาย

Abstract

In this paper, we present the results of local gravity measurements obtained using end-supported rod pendulums as gravimeters. Results from this study indicated that, by 12 trials of timing of 100 oscillation cycles of the rod pendulums oscillation with the initial angular amplitude less than 2° , the experimental local gravity obtained from the end-supported rod pendulum was $9.78 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$ with 0.03% error compared with the calculated value, 9.7847 m/s^2 .

Keywords

gravity measurement; gravimeter; end-supported rod pendulum

1. คำนำ

งานทางด้านการทดลองทางวิศวกรรมที่ละเอียดอ่อนซึ่งต้องการค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น (Local gravity) ที่แท้จริง ไม่สามารถใช้ค่ามาตรฐาน $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$ เพราะจะทำให้

ผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนออกไปจากความเป็นจริง เช่น ในการทดลองต่างๆ เกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว (Simple harmonic motion) และการสั่น สะเทือนอย่างอิสระไม่มีการหน่วงนั้น การทดลองเกี่ยวกับลูกตุ้ม

(Pendulum) ประเภทต่างๆ การคำนวณจะต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นเสมอจึงจะได้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง [1]

ค่าความโน้มถ่วงในแต่ละบริเวณจะแตกต่างกันขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น ความสูงเหนือระดับน้ำทะเลปานกลาง ตำแหน่งละติจูด ลักษณะทางธรณีวิทยา เป็นต้น สถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติ ได้วัดค่าแรงโน้มถ่วงโดยใช้เครื่องวัดแบบสมบูรณ์ (Absolute gravimeter) จำนวน 7 จุด ครอบคลุมทุกภาคของประเทศไทย พบว่า บริเวณจังหวัดเชียงใหม่มีค่าแรงโน้มถ่วงประมาณ $9.784261950 \pm 0.39 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ [2]

จุดประสงค์ของบทความนี้คือการนำเสนอการวัดความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยวิธีที่ง่าย และใช้เครื่องทดลองที่ไม่ซับซ้อนราคาถูก สร้างได้เองคือใช้ลูกตุ้มประกอบ (Compound pendulum) แบบแท่งกลม (Rod pendulum) เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง (Gravimeter) โดยตั้งเป้าหมายไว้ว่าผลลัพธ์ที่เป็นค่าทดลองจากการวัดจะต้องมีค่าคลาดเคลื่อน (Error) จากค่าคำนวณไม่เกิน 0.5%

แม้ว่าปัญหานี้จะเคยมีผู้อื่นนำเสนอมาแล้ว [3-6] แต่การนำเสนอเหล่านั้นทั้งหมดจะเป็นการทดลองที่ใช้ลูกตุ้มแบบแท่งแบน (Bar pendulum) ที่เจาะรูเพื่อใช้สำหรับยึดจุดรองรับตามแนวเส้นศูนย์กลางเป็นระยะห่าง 5 cm โดยตลอดเพียงแท่งเดียว ซึ่งการกระจายมวลตามความยาวจะไม่สม่ำเสมอจริง และการจับเวลาในการหาคาบ (Period) ของการแกว่งก็เพียง 10 และ 20 รอบแค่ 1-2 ชั่วโมงเท่านั้น ซึ่งวิธีการทดลองแบบนี้การทำผลลัพธ์ค่อนข้างยุ่งยาก และในการหาค่าความคลาดเคลื่อน (Error) เป็นร้อยละก็เปรียบเทียบกับค่าความโน้มถ่วงมาตรฐาน g_0 แทนที่จะเป็นค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น ณ สถานที่ทดลอง

ในบทความนี้จะแสดงการวัดค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มแท่งกลมซึ่งมีการกระจายมวลอย่างสม่ำเสมอที่มีความยาวลดหลั่นกัน 5 แท่ง โดยใช้วิธีทำผลลัพธ์ที่ง่ายกว่า

2. การใช้ลูกตุ้มประกอบเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วง

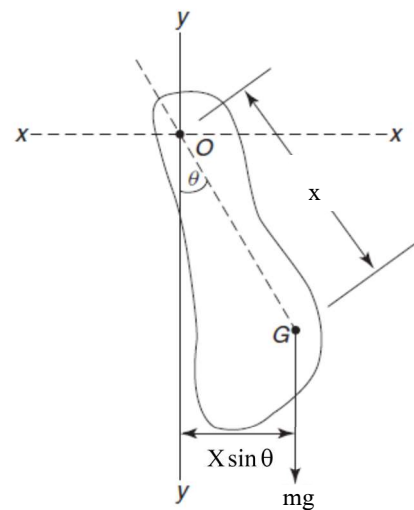
วิธีวัดความโน้มถ่วงมีอยู่หลายวิธีส่วนใหญ่มีหลักการอยู่บนพื้นฐานของพลศาสตร์ เช่น ใช้วิธีการตกอย่างอิสระของวัตถุ, ใช้ระนาบเอียง, ใช้ลูกตุ้มเดี่ยว (Simple pendulum) และใช้

ระบบสปริง-มวล โดยหลักการแล้วลูกตุ้มประกอบก็สามารถใช้เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงได้เช่นกัน

2.1 ลูกตุ้มประกอบแบบทั่วไป

พิจารณาลูกตุ้มประกอบในรูปแบบทั่วไปที่แสดงในรูปที่ 1 ซึ่งแกว่งรอบแกน Z ที่จุด O และจุด G คือตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของลูกตุ้มประกอบ (Center of mass) ให้ I_0 เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบจุด O ใช้การสมดุลทางพลศาสตร์จะได้:

$$\begin{aligned}\Sigma M &= I_0 \ddot{\theta} = -mgx \sin \theta \\ I_0 \ddot{\theta} + mgx \sin \theta &= 0\end{aligned}$$



รูปที่ 1 ลูกตุ้มประกอบในรูปแบบทั่วไป

สำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมน้อยๆ $\sin \theta \cong \theta$ (มีหน่วยเป็น rad) ดังนั้น:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgx}{I_0} \theta = 0$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์กับรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว, $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$, จะได้:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{I_0}} \quad (1)$$

และมีคาบของการแกว่งเป็น:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgx}} \quad (2)$$

จากทฤษฎีแกนนาน จะได้:

$$I_O = I_G + mx^2 = mk_G^2 + mx^2$$

เมื่อ I_G คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกน Z-Z ที่จุด G และ k_G^2 คือรัศมีไจเรชัน (Radius of gyration) รอบแกน Z-Z ที่จุด G สมการ (2) จึงกลายเป็น:

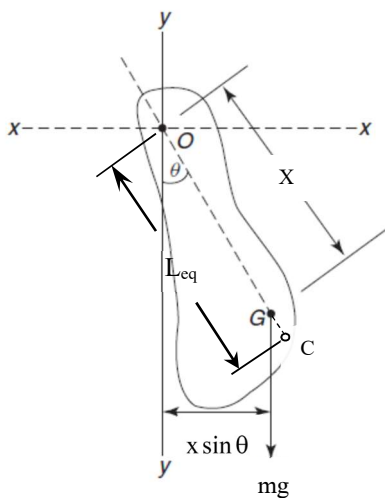
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(k_G^2 / x + x)}{g}} \quad (3)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับลูกตุ้มเดี่ยวที่ยาว L_{eq} ซึ่งมีคาบ T เท่ากันกับลูกตุ้มประกอบ จะได้ [7]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{(k_G^2 / x + x)}{g}} \quad (4)$$

โดย L_{eq} เป็นความยาวที่สมมูลกับลูกตุ้มเดี่ยว และมวลทั้งหมดถือว่ามารวมกันอยู่ที่จุด C เรียกว่าเป็นจุดศูนย์กลางการแกว่ง (Center of oscillation) รอบจุด O (ดูรูปที่ 2) โดย:

$$OC = L_{eq} = k_G^2 / x + x \quad (5)$$



รูปที่ 2 จุดศูนย์กลางการแกว่งของลูกตุ้มประกอบ

และเมื่อสลับให้จุด C เป็นจุดที่แขวนลูกตุ้มแทนจุด O, จุด O ก็ จะกลายเป็นจุดศูนย์กลางการแกว่งรอบจุด C

จัดรูปสมการ (5) ใหม่เป็น:

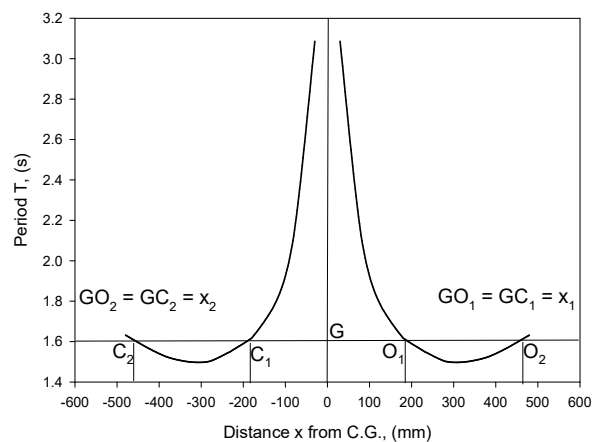
$$x^2 - L_{eq}x + k_G^2 = 0 \quad (6)$$

ซึ่งได้เป็นรูปแบบของสมการกำลังสอง ที่มีรากอยู่สองค่าคือ x_1 และ x_2 ในลักษณะที่:

$$x_1 + x_2 = L_{eq} \quad (7)$$

$$\text{และ} \quad x_1 \cdot x_2 = k_G^2 \quad (8)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างคาบ T กับระยะห่าง x จากจุดศูนย์กลางได้แสดงในรูปที่ 3 เมื่อใช้จุด O เป็นจุดแขวนจะมีความยาวสองค่าที่มีคาบเท่ากัน คือ $GO_1 = x_1$ และ $GO_2 = x_2$ และเมื่อสลับจุดแขวนเป็นจุด C ก็จะมีอีกสองความยาวสองค่าที่มีคาบเท่ากัน คือ $GC_1 = x_1$ และ $GC_2 = x_2$



รูปที่ 3 คาบเวลา T กับระยะห่าง x จากจุดศูนย์กลาง

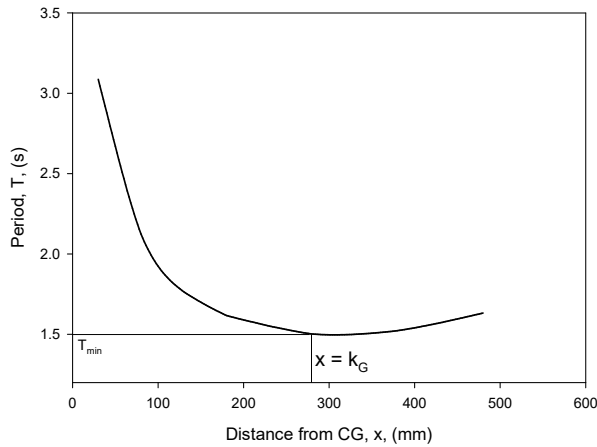
ระยะห่างที่จะทำให้มีคาบน้อยที่สุดจะหาได้จาก:

$$\frac{d}{dx} L = \frac{d}{dx} (k_G^2 / x + x) = -k_G^2 / x^2 + 1 = 0$$

$$\text{นั่นคือ} \quad x = k_G = x_{T_{min}} \quad (9)$$

และ
$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{2k_G}{g}} \quad (10)$$

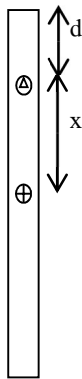
โดย $k_G^2 = I_G/m$ ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 คาบเวลา $T_{\min}$ กับระยะห่าง $X = k_G = X_{T_{\min}}$ จากจุดศูนย์ถ่วง

2.2 ลูกตุ้มแบบแท่งแบบทั่วไป

พิจารณาลูกตุ้มประกอบแบบที่ง่ายที่สุดคือลูกตุ้มแบบแท่ง (Rod หรือ stick หรือ bar pendulum ตามหน้าตัด) ซึ่งแขวนในตำแหน่งที่จุดศูนย์ถ่วงอยู่ห่างจากจุดรองรับเป็นระยะทาง x ใดๆ (ดูรูปที่ 5)



รูปที่ 5 ลูกตุ้มแบบแท่ง (rod pendulum)

แทนค่า $I_0 = mL^2/12 + mx^2$ ลงในสมการ (2) ได้:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2/12 + mx^2}{mgx}} = 2\pi \sqrt{\frac{L^2/12 + x^2}{gx}} \quad (11)$$

จะเห็นว่าในกรณีของลูกตุ้มประกอบ แม้แต่ในรูปแบบที่ง่ายที่สุด คือเป็นแท่งความสัมพัทธ์ระหว่างค่ากำลังสองของคาบ (T^2) ไม่ได้เป็นปฏิกิริยากับความยาว L เหมือนกับกรณีของลูกตุ้มเดี่ยว แต่จะขึ้นอยู่กับระยะห่าง x ระหว่างจุดศูนย์ถ่วงกับจุดรองรับแทน ซึ่งทำให้การนำลูกตุ้มประกอบมาใช้เป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงมีความซับซ้อนมากกว่าลูกตุ้มเดี่ยว

ยกกำลังสองสมการ (11) แล้วจัดรูปสมการหาค่า x ได้:

$$x^2 - g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 x + \frac{L^2}{12} = 0 \quad (12)$$

ซึ่งเป็นสมการกำลังสองที่มีรูปแบบมาตรฐานเป็น:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

และจะหารากได้จาก:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ในกรณีนี้ $a = 1$, $b = -g[T/(2\pi)]^2$, $c = L^2/12$, ดังนั้น:

$$x = \frac{g[T/(2\pi)]^2 \pm \sqrt{(g[T/(2\pi)]^2)^2 - 4(L^2/12)}}{2} \quad (13)$$

การแก้สมการ (13) จำเป็นต้องใช้ค่าของ g , L และ T ซึ่งมีวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการแก้สมการนี้ได้หลายวิธี

การใช้ลูกตุ้มแท่งเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงสามารถจำแนกได้เป็นสองวิธี คือวิธีดั้งเดิม (Classical method) กับวิธีใหม่ (Novel method)

วิธีดั้งเดิมไม่ใช้การแก้สมการ (13) แต่ใช้การทดลองโดยกำหนดค่า x แล้วหาค่าของ d จากความยาวของลูกตุ้มแท่งเพียงแท่งเดียวซึ่งมีค่าคงที่

วิธีใหม่ใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้สมการ (13) นำไปสู่การหาค่าความโน้มถ่วงในขั้นต่อไป ทำให้หลายวิธี

ในบทความนี้จะนำเสนอวิธีใหม่ด้วยกำหนดระยะ $X = L/2$ เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

พิจารณากรณีเฉพาะที่ $X = L/2$ โดยปรับสมการ (4) เป็น:

$$g = 4\pi^2 \frac{L_{eq}}{T^2}$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์จากสมการ (7), (8) และ (9) จะได้:

$$L_{eq} = \frac{L^2}{12x_2} + x_2$$

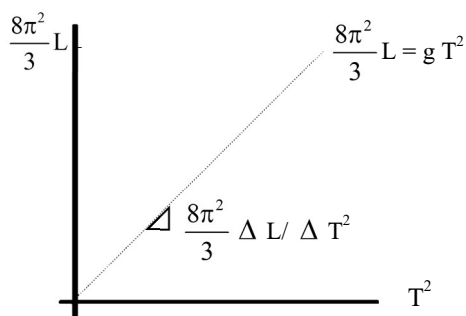
จากรูปที่ 3 ถ้ากำหนดให้จุด O_2 อยู่ที่ตำแหน่งปลายสุดของลูกตุ้มแท่ง ซึ่งระยะ $GO_2 = X_2 = L/2$ ก็จะได้ $L_{eq} = 2L/3$,

$$g = \frac{8\pi^2}{3} \frac{L}{T^2} \quad (14)$$

ลูกตุ้มแท่งในวิธีที่สองนี้เรียกได้ว่าเป็นลูกตุ้มแท่งที่รองรับตรงปลาย เห็นได้จากสมการ (14) ว่าความสัมพันธ์ระหว่าง L กับ T^2 กลับมาเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น และอัตราส่วน L/T^2 มีค่าคงที่ คือจากสมการ (14) ได้:

$$\frac{L}{T^2} = \frac{3g}{8\pi^2} = \text{const.}$$

จากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้เกิดแนวคิดในการหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น g ด้วยลูกตุ้มแท่งที่รองรับตรงปลายบนสุดสามารถทำได้สามวิธี คือ:



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่าง L กับ T^2 ของลูกตุ้มแท่งที่รองรับตรงปลาย

1. เนื่องจากอัตราส่วน L กับ T^2 มีค่าคงที่ เพียงแค่นำลูกตุ้มแบบแท่งหนึ่งแท่ง ความยาวเดียวกันมาแกว่งแล้วจับเวลาหาคาบในการแกว่งของลูกตุ้มก็จะสามารถหาค่า g ได้จากสมการ (14) คือ:

$$g = \frac{8\pi^2}{3} \frac{L}{T^2}$$

2. นำลูกตุ้มแบบแท่งหลายแท่ง หลายความยาวลดหลั่นกันมาแกว่งทีละแท่ง แล้วจับเวลาเพื่อหาคาบในการแกว่งเช่นเดียวกับวิธีที่ 1 แล้วคำนวณหาค่า g จากค่าเฉลี่ยของอัตราส่วน $(8\pi^2 L/3)/T^2$ คือ:

$$g = \left(\frac{8\pi^2}{3} \frac{L}{T^2} \right)_{Av} \quad (14a)$$

3. นำค่าของ $(8\pi^2/3)L$ และ T^2 มาทำเป็นกราฟดังรูปที่ 6 ค่า g จะหาได้จากค่าความชันของเส้นกราฟโดยตรงเนื่องจาก:

$$g = \frac{8\pi^2}{3} \frac{\Delta L}{\Delta T^2} \quad (14b)$$

จะสังเกตจากสมการ (14), (14a) และ (14b) ได้ว่าการหาค่าความโน้มถ่วงวิธีนี้ สิ่งที่ต้องวัดมีเพียงความยาวของลูกตุ้มแท่งและคาบในการแกว่งของลูกตุ้มแท่งแต่ละความยาวเท่านั้น ในบทความนี้จะให้ความสำคัญกับวิธีที่ 2 และวิธีที่ 3 เนื่องจากวิธีที่ 1 เป็นส่วนหนึ่งของวิธีที่ 2 อยู่แล้ว

เนื่องจากต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎี เพื่อการเปรียบเทียบกับค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นจากการทดลอง โดยค่าทางทฤษฎีจะสามารถคำนวณได้จากวิธีการของสำนักมาตรฐานของประเทศเยอรมันที่ใช้สมการ WELMEC ซึ่งอ้างอิงจาก International Gravity Formula 1967 ซึ่งค่าความโน้มถ่วงที่คำนวณได้จะมีผลมาจากตำแหน่งเส้นละติจูดกับระดับความสูงเหนือระดับน้ำทะเล [8,9]:

$$g(\phi, h) = 9.780\,318\,4 (1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 \phi - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\phi) - 3.086 \times 10^{-6} h \quad (15)$$

เมื่อ ϕ คือองศาเส้นละติจูดทางภูมิศาสตร์ และ h คือระดับความสูงเหนือน้ำทะเลปานกลาง, มีหน่วยเป็น m AMSL

3. อุปกรณ์ทดลองและวิธีทดลอง

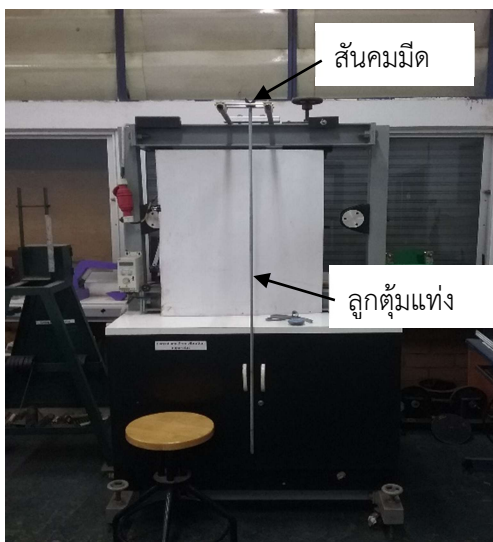
สถานที่ดำเนินการทดลองคืออาคารปฏิบัติการสาขาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่ ตั้งอยู่ที่ ต.หนองแก้ว อ.หางดง จ.เชียงใหม่ มีพิกัดอยู่ที่เส้นละติจูด $18^{\circ}39'43''$ N และมีระดับความสูง 300 m AMSL เมื่อแทนค่า ϕ และ h ของสถานที่ทดลองลงในสมการ (15) ก็จะได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น ณ สถานที่ทดลองเป็น:

$$g(18.66^{\circ}, 300 \text{ m}) = 9.784\ 681\ 227 \text{ m/s}^2 \\ \cong 9.7847 \text{ m/s}^2 = g_{\text{Cal}}$$

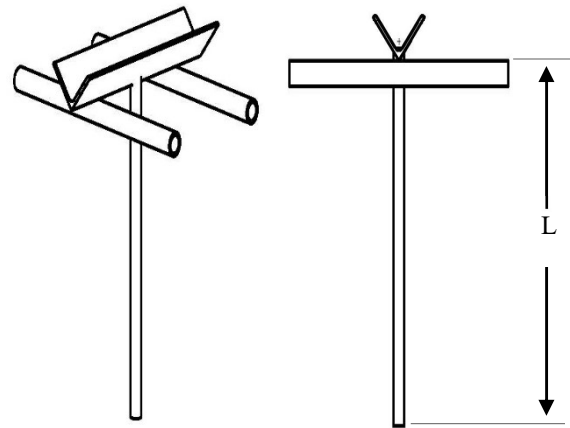
3.1 อุปกรณ์ทดลอง

รูปที่ 7-9 แสดงภาพถ่ายของมาตรฐานความโน้มถ่วงที่ใช้หลักการของลูกตุ้มแบบแก้ม และอุปกรณ์ ประกอบด้วย:

1. ลูกตุ้มแบบแก้มที่สร้างจากเหล็กแท่งเกลียวที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 mm มีความยาว 1299.20 mm, 1350.50 mm, 1399.50 mm, 1450.35 mm และ 1500.00 mm รวม 5 ท่อน



รูปที่ 7 ชุดอุปกรณ์การทดลองลูกตุ้มแบบแก้ม



รูปที่ 8 โครงสร้างชุดทดลองลูกตุ้มแบบแก้ม

การวัดความยาวของแท่งเกลียวใช้บรรทัดโลหะที่มีขีดมาตรา (Least count) 1 mm ร่วมกับเวอร์เนียคาลิเปอร์ที่มีขีดมาตรา 0.02 mm



รูปที่ 9 จุดหมุนของลูกตุ้มแบบสั่นคมมีด

2. โครงรองรับที่สร้างจากท่อเหล็กประปาขนาด 0.5 นิ้ว สองท่อน นำมายึดเพิ่มเติมกับโครงของเครื่องทดลองการสั่นสะเทือนของเดิมที่มีอยู่แล้ว

3. จุดหมุนของลูกตุ้มแบบแก้มแบบสั่นคมมีดสร้างจากเหล็กฉากขนาด 25.4×25.4 mm หนา 1.5 mm มีความยาว 80 mm มีแป้นเกลียวเชื่อมติดกับสันเหล็กฉาก เพื่อให้เมื่อสวมกับแท่งเกลียวแล้ว ปลายแท่งเกลียวจะสัมผัสกับสันเหล็กฉากพอดี ทำให้ปลายบนของลูกตุ้มแก้มอยู่ที่จุดหมุนอย่างแท้จริง (ดูรูปที่ 9) สั่นคมมีดจะถูกรองรับด้วยเพลาลูกกลิ้งไร้สนิมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 mm สองท่อนซึ่งยึดอยู่กับโครงรองรับ

4. นาฬิกาจับเวลา ที่มีขีดมาตรา 0.01 s

3.2 วิธีทดลอง

การทดลองของลูกตุ้มแท่งกลมที่รองรับตรงปลาย มีดังนี้:

1. นำลูกตุ้มแท่งที่ยาว 1299.20 mm มาใส่สันคมมีดให้อยู่ที่ปลายสุดแท่งเกลียวชนกับสันคมมีดพอดี แล้วนำลูกตุ้มแท่งที่ใส่สันคมมีดแล้วไปวางบนเพลารองรับ

2. จับลูกตุ้มแท่งให้เบนออกจากตำแหน่งสมดุลสถิตเป็นมุมไม่เกิน 2° จากนั้นจึงปล่อยลูกตุ้มแท่ง ให้แกว่งได้อย่างอิสระ ในขั้นตอนนี้ได้ตรวจสอบแล้วว่าลูกตุ้มแกว่งบนระนาบในแนวตั้งอย่างแท้จริง จับเวลาที่ผ่านไปของการแกว่งที่ครบรอบอย่างสมบูรณ์ 100 รอบ แล้วจดบันทึกเวลา โดยทำซ้ำ 12 ซ้ำ

3. เปลี่ยนเป็นลูกตุ้มแท่งที่มีความยาวมากขึ้นอันถัดไป (คือ 1350.50 mm) แล้วเริ่มทดลองใหม่ซ้ำ โดยทำตามขั้นตอนถัดต่อมาจนเสร็จการทดลองครบทั้งห้าความยาว จะได้ข้อมูลทั้งหมดที่แสดงไว้ในตารางที่ 1

4. ผลลัพธ์และการอภิปรายผลลัพธ์

ผลลัพธ์จากการทดลองของลูกตุ้มแท่งกลมที่รองรับตรงปลายได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 โดยมีขั้นตอนการทำผลลัพธ์ดังนี้:

เริ่มต้นโดยนำความยาวของลูกตุ้มแท่งจากตารางที่ 1 มาใส่ในสูตรแรก แล้วคูณความยาวในสูตรแรกด้วย $8\pi^2/3$ แล้วใส่ผลลัพธ์ไว้ในสูตรที่ 2

ตารางที่ 1 ข้อมูลของลูกตุ้มแท่งกลมที่รองรับตรงปลาย

ซ้ำ	เวลาในการแกว่งครบ 100 รอบ (100T, s)				
	ความยาวของลูกตุ้ม L (mm)				
	1299.20	1350.50	1399.50	1450.35	1500.0
1	186.86	190.56	193.84	197.72	201.06
2	186.85	190.53	193.97	197.73	200.97
3	186.85	190.59	193.91	197.70	201.00
4	186.80	190.50	193.93	197.75	201.06
5	186.81	190.57	194.00	197.68	201.00
6	186.86	190.50	193.91	197.78	201.03
7	186.88	190.53	193.87	197.63	201.15
8	186.84	190.56	193.84	197.71	201.13
9	186.82	190.40	193.97	197.72	201.10
10	186.84	190.37	194.00	197.72	201.18
11	186.81	190.44	193.90	197.66	201.06
12	186.86	190.38	193.94	197.81	200.91
ค่าเฉลี่ย	186.84	190.49	193.92	197.72	201.05

ตารางที่ 2 ผลลัพธ์ของลูกตุ้มแท่งกลมที่รองรับตรงปลาย

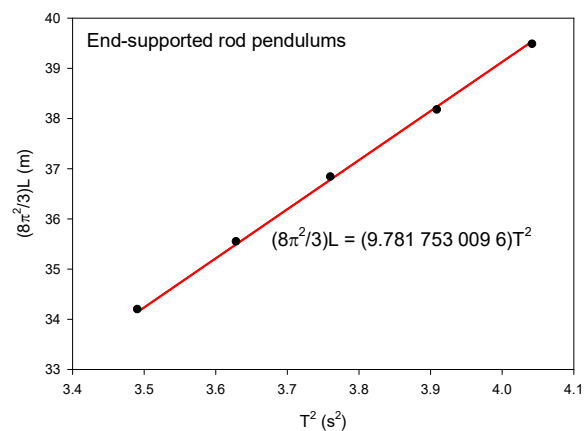
L (m)	$(8\pi^2/3)L$ (m)	T (s)	T^2 (s ²)	g (m/s ²)
1.299 20	34.1936	1.8684	3.4909	9.795 007
1.350 50	35.5437	1.9049	3.6347	9.794 893
1.399 50	36.8334	1.9392	3.7662	9.794 477
1.450 35	38.1717	1.9772	3.9063	9.764 524
1.500 00	39.4784	2.0105	4.0392	9.766 379
ค่าเฉลี่ย				9.7831

คำนวณหา T ในสูตรที่ 3 โดยหารเวลาเฉลี่ย (แถวสุดท้ายของตารางที่ 1) ด้วย 100 ค่า T^2 ในสูตรที่ 4 ได้จากการยกกำลังสองค่า T ในสูตรที่ 3

คำนวณหาค่าอัตราส่วน $(8\pi^2/3)L/T^2 = g$ ในสูตรที่ 5 โดยหารสูตรที่ 2 ด้วยสูตรที่ 4

ขั้นสุดท้าย หาค่าเฉลี่ยของค่า g ในสูตรที่ 5 ได้ $(8\pi^2/3)L/T^2]_{Av} = 9.7831 \text{ m/s}^2 = g_{Av}$

เมื่อนำค่าของ $(8\pi^2/3)L$ กับ T^2 ในตารางที่ 2 ไปทำเป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(8\pi^2/3)L$ กับ T^2 ก็จะได้เป็นกราฟเส้นตรงในรูปที่ 10 ซึ่งมีค่าความชันของเส้นกราฟเป็น $(8\pi^2/3) \pi L / \pi T^2 \cong 9.7818 \text{ m/s}^2 = g_{Gr}$ ซึ่งต่างกับ g_{Av} ใน ตารางที่ 2 เพียงเล็กน้อย คือ % Diff = $(9.7818/9.7831-1)100 \cong -0.01$



รูปที่ 10 ความสัมพันธ์ระหว่าง $(8\pi^2/3)L$ กับ T^2 ที่ได้จากการทดลอง

ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น g_{Gr} มีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าคำนวณ, $g_{Cal} = 9.7847 \text{ m/s}^2$, เมื่อใช้ความละเอียดของตัวเลข 5 ตำแหน่งเป็น:

$$\%Error_{Gr} = ABS(9.7818/9.7847-1)100 \cong 0.03$$

และค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น g_{Av} มีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าคำนวณ, ที่ความละเอียดของตัวเท่ากัน, เป็น:

$$\%Error_{Av} = ABS(9.7831/9.7847-1)100 \cong 0.02$$

ความคลาดเคลื่อนที่สำคัญในการทดลองนี้จะมีสาเหตุได้จากการวัดความยาวของลูกตุ้มและการจับเวลาในการหาคาบของการแกว่ง

ในการวัดความยาว ได้วัดโดยเทียบกับแท่งเกลียวที่มีความยาวเต็มจากผู้ผลิต คือยาว 1500 mm โดยนำแท่งที่ถูกตัดกับไม่ถูกตัดมาวางคู่กัน จัดปลายที่ไม่ถูกตัดของทั้งสองแท่งเสมอกัน แล้วใช้เวอร์เนียคาลิเปอร์วัดจากปลายอีกข้างหนึ่งของแท่งที่ไม่ถูกตัดถึงปลายของแท่งที่ถูกตัดโดยวัดหลายครั้งแล้วเลือกใช้ค่าความยาวที่ซ้ำกันมากที่สุด

ส่วนความคลาดเคลื่อนในการจับเวลา สิ่งที่สำคัญก็คือเวลาปฏิกิริยา (Reaction time) ซึ่งเกิดขึ้นสองครั้งในตอนเริ่มต้นการจับเวลาและตอนหยุดการจับเวลา ซึ่งในการทดลองนี้ใช้จำนวนรอบในการจับเวลาแต่ละซ้ำมากถึง 100 รอบจึงควรจะมีค่าความคลาดเคลื่อนของเวลาน้อย และได้ทำถึง 12 ซ้ำ จึงควรเป็นการดึงข้อมูลเข้าสู่ค่ากลางที่ละเอียดเพียงพอ

อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาโดยใช้ความละเอียดของตัวเลขเท่ากับค่าความโน้มถ่วงมาตรฐาน, $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$, เพียงสามตำแหน่งก็จะเห็นได้ว่าค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่ได้จากการทดลองมีค่าเท่ากันคือ:

$$g_{Av} = g_{Gr} = 9.78 \text{ m/s}^2 = g_{Exp}$$

โดยค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่ได้จากการคำนวณเมื่อใช้ความละเอียดของตัวเลขเท่ากันก็จะมีค่าเท่ากันด้วยคือ:

$$g_{Cal} = 9.78 \text{ m/s}^2 = g_{Exp}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองและจากการคำนวณมีความสอดคล้องกัน

เมื่อพิจารณาถึงความไม่แน่นอน (Uncertainty) ของผลลัพธ์จากการวัดค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น เมื่อใช้ผลลัพธ์ในตารางที่ 2 จะได้ความไม่แน่นอนสัมบูรณ์ (Absolute uncertainty) ของค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นมีค่าเป็น:

$$(9.7950 \text{ m/s}^2 - 9.7645 \text{ m/s}^2)/2 = \pm 0.02 \text{ m/s}^2$$

ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากการวัดค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มแท่งกลมที่รองรับตรงปลายจึงควรมีค่าเป็น:

$$g_{Exp} = 9.78 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$$

5. สรุป

ผลลัพธ์จากการศึกษานี้ พบว่า ในการทดลองหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นโดยใช้ลูกตุ้มแท่งกลมเป็นมาตรฐานความโน้มถ่วงนั้น มีความเป็นไปได้ที่จะได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเป็นที่ยอมรับได้ โดยควรจะต้องทำการทดลองด้วยลูกตุ้มแท่งซึ่งมีการวัดความยาวที่เที่ยงตรง ใช้มุมเริ่มต้นการแกว่งน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ และควรจะใช้จำนวนรอบในการจับเวลาแต่ละครั้งมากเพียงพอ

ในการทดลองนี้ ได้ใช้ลูกตุ้มแท่งกลมที่มีความยาวเป็น 1299.20, 1350.00, 1399.50, 1450.35 และ 1500.00 mm ตามลำดับ, ใช้มุมแกว่งเริ่มต้นไม่เกิน 2° , จับเวลาการแกว่ง 100 รอบ, และแต่ละความยาวจับเวลา 12 ซ้ำ

ผลลัพธ์จากการศึกษา ณ ตำแหน่งละติจูดและความสูงเหนือระดับน้ำทะเลปานกลางเดียวกัน ค่าแรงโน้มถ่วงท้องถิ่นจากการคำนวณมีค่า $\cong 9.7847 \text{ m/s}^2$ และค่าที่ได้จากการทดลองมีค่า $\cong 9.7818 \text{ m/s}^2$ เมื่อเปรียบเทียบกับจะมีความคลาดเคลื่อนประมาณ 0.03 % ทั้งสองกรณีมีค่าสอดคล้องกับค่าแรงโน้มถ่วงบริเวณจังหวัดเชียงใหม่ ซึ่งวัดโดยสถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติมีค่าแรงโน้มถ่วงประมาณ $9.784261950 \pm 0.39 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$

ผลลัพธ์การทดลองหาค่าแรงโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มแท่งกลมที่รองรับตรงปลายด้วยวิธีหาค่าเฉลี่ยกับวิธีหาจาก

กราฟ ได้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นเท่ากันโดย ประมาณเป็น $g_{Exp} = 9.78 \text{ m/s}^2$ และเมื่อแสดงผลลัพธ์จากการทดลอง ร่วมกับค่าความไม่แน่นอนจะมีค่าเป็น $g_{Exp} = 9.78 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$

ซึ่งผลลัพธ์ของลูกตุ้มแท่งที่รองรับตรงปลายทั้งสองวิธีคือ วิธีหาค่าความถี่ของค่าคำนวณ และวิธีหาค่าความชัน ของกราฟ บรรลุตามเป้าประสงค์ให้มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.5% ที่ตั้งไว้ทั้งสองกรณี

เอกสารอ้างอิง

- [1] ฌกาคม ศรีคช, สายชล สิทธิพงศ์, บัญชา คังตระกูล. การหาค่าความเร่งจากความโน้มถ่วงท้องถิ่นด้วยลูกตุ้มเดี่ยว. ใน: กองงานวิจัย มหาวิทยาลัยพะเยา *การประชุมวิชาการระดับชาติพะเยาวิจัย ครั้งที่ 10*. พะเยา: 2564. หน้า 2593-2603.
- [2] ทศนย์ ไพรัตน์มณ, ณัฐนันท์ วรเดช. *การวัดค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกในประเทศไทย และความสำคัญ*. Available from: <https://www.nimt.or.th/main/?p=21307>. [Accessed 17th November 2023].
- [3] Nelson RA, Olsson MG. The pendulum- rich physics from a simple system. *American Journal of Physics*. 1986; 54(2): 112-121.
- [4] Cristiano KL, Triana DA, Ortiz R, Pico M, Estupinan AF. Analytical and experimental determination of gravity and moment of inertia using a physical pendulum. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019; 1386(1): 1-7.
- [5] Klavivova M, Mucha L. Physical pendulum – A simple experiment can give comprehensive information about a rigid body. *European Journal of Physics*. 2014; 35(2): 1-14.
- [6] Suwanpayak N, Sutthiyan S, Kulsirirat K, Srisongkram P, Teeka C, Buranasiri P. A comparison of gravitational acceleration measurement methods for undergraduate experiment. *Journal of Physics Conference Series*. 2018; 1144(1): 1-7.
- [7] Young H, Freedman R. *University physics with Modern Physics*. 11th ed. Boston: Addison Wesley; 2004.
- [8] บัญชา คังตระกูล, สายชล สิทธิพงศ์. การสืบค้นหาสูตรการคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น. *วารสารวิชาการโรงเรียนนายเรือ ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี*. 2566; 6(1): 161-173.
- [9] Encyclopedia. Normal Gravity Formula. Available from: <https://encyclopedia.pub/entry/33797>. [Accessed 17th November 2023].