

การประมาณค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เป็นวัสดุเชิงประกอบ เรียงชั้นแบบสมมาตร ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น

Estimation Natural Frequencies of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates with All Edges Clamped

กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข
Kullasup Phongsrisuk

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา ภาควิชาฯ เชียงใหม่ 50300
Department of Mechanical Engineering, Rajamangala University of Technology Lanna, Chiangmai 50300
Tel : 0-5324-4891 E-mail: phongsrisuk@gmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบ $[0/90]_s$ ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น วิธีคันทอโรวิชได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณความถี่ธรรมชาติที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตด้าน y ต่อด้าน x เท่ากับ 0.50:1.00 ถึง 2.00:1.00 ผลการคำนวณความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตชุดหนึ่ง จะถูกนำมาสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์โดยวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย จากนั้นจะสอบทวนสมการแสดงความสัมพันธ์กับผลการคำนวณความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตอีกชุดหนึ่ง ซึ่งพบว่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์มีความคลาดเคลื่อนสูงสุดจากวิธีคันทอโรวิชเท่ากับ 1.278%

คำหลัก การวิเคราะห์แบบถดถอย ความถี่ธรรมชาติ วัสดุเชิงประกอบ ยึดแน่น

Abstract

This research was to study the relationship between the natural frequencies and the geometric ratios of $[0/90]_s$ laminated rectangular plates with all edges clamped. The Kantorovich method was applied to calculate the natural frequencies with the geometric ratios from 0.50: 1.00 to 2.00: 1.00. One result set of them was used to create the

relationship equation by the regression analysis and another one was verified by the relationship equation. The comparing results shown that the natural frequencies obtained from the relationship equation had maximum error from the Kantorovich method 1.278%.

Keyword: Regression analysis, natural frequency, composite material, clamped

1. บทนำ

ปัจจุบันได้มีการนำวัสดุเชิงประกอบมาใช้ในการใช้งานวิศวกรรมอย่างแพร่หลาย เนื่องจากวัสดุเชิงประกอบมีความแข็งแรงสูง น้ำหนักเบา ทนต่อการกัดกร่อน ทนต่อการสึกหรอ และสามารถออกแบบให้ตรงตามวัตถุประสงค์ของงานได้ วัสดุเชิงประกอบจะถูกนำมาใช้ในงานวิศวกรรมในรูปของแผ่นบาง บางครั้งแผ่นบางอาจถูกนำมาใช้ในการรับภาระแบบสั่นสะเทือน ซึ่งแผ่นบางจะเกิดความเสียหายอย่างมาก ถ้าความถี่ของภาระภายนอกตรงกับความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง ดังนั้นการหาความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางจึงมีความสำคัญในงานวิศวกรรม การหาความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางโดยวิธีแม่นยำ (exact method) จะทำได้ต่อเมื่อแผ่นบางมีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบอย่างง่าย หากแผ่นบางมีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบอื่น อาจหาความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางได้จากวิธีการประมาณ (approximation method) ซึ่งวิธีการประมาณหากแผ่น

บางมีการเปลี่ยนค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิต เงื่อนไขขอบ คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ จะต้องทำการประมาณค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางใหม่ทุกครั้ง

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้นจึงได้มีการสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิก (Isotropic) ขอบสามด้านรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกด้านรองรับแบบยึดแน่น (CFFF) [1] ขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านรองรับแบบปล่อยอิสระ (CFCF) [2] ขอบสี่ด้านรองรับแบบปล่อยอิสระ (FFFF) [3] เพื่อหาความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางทุกอัตราส่วนทางเรขาคณิต และได้มีการนำค่าสัมประสิทธิ์ของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นบางรูปวงกลมและวงรี มีรูตรงกลาง ที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิก ขอบด้านในและด้านนอกมีการรองรับหลายแบบ มาเป็นค่านำหนักสเกลลาร์ (Scalar Weight) สำหรับคูณกับค่าอินพุตสเกลลาร์ (Scalar Input) ในโครงข่ายประสาทเทียม (artificial neural network) แบบหนึ่งอินพุต-หนึ่งเอาต์พุต (single input single output) [4] และแบบหลายอินพุต-หนึ่งเอาต์พุต (multi input single output) [5] เพื่อนำไปสร้างความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นบาง

งานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นบาง ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบ [0/90]_s โดยใช้วิธีคันทอร์วิชในการคำนวณความถี่ธรรมชาติที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตด้าน y ต่อด้าน x เท่ากับ 0.50:1.00 ถึง 2.00:1.00 จากนั้นสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตโดยวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย และทำการสอบทวนสมการแสดงความสัมพันธ์เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

2. ทฤษฎี

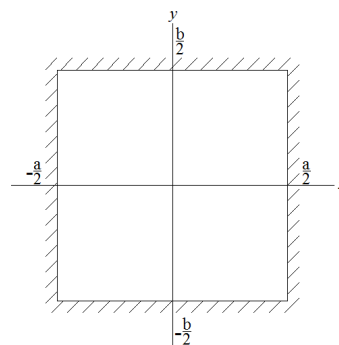
2.1 วิธีคันทอร์วิช (The Kantorovich method: KM)

พลังงานศักย์และพลังงานจลน์ของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตรดังแสดงในรูปที่ 1 เขียนสมการได้เป็น [6]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} m(\omega w)^2 dx dy \right\} dt = 0 \quad (1)$$

โดย a	คือ ความกว้างด้าน x
b	คือ ความกว้างด้าน y
D_{ij}	คือ สติฟเนสของวัสดุเชิงประกอบ
i	คือ 1, 2, 3, ..., 6
j	คือ 1, 2, 3, ..., 6
w	คือ ระยะการแอ่น
m	คือ มวลต่อพื้นที่ของวัสดุเชิงประกอบ
ω	คือ ความเร็วเชิงมุมธรรมชาติ

กำหนดผลเฉลยให้อยู่ในรูป $w(x, y) = X(x)Y(y)$ แทนผลเฉลยในสมการ (1)



รูปที่ 1 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right) \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right) + D_{26} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right] dx dy - \frac{1}{2} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} m X^2 Y^2 \omega^2 dx dy \right\} dt = 0 \quad (2)$$

พิจารณา $X(x)$ สามารถเขียนสมการ (2) ได้เป็น

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[S_{1x} D_{11} Y^2 + 2S_{2x} D_{12} Y \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) + S_{3x} D_{22} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 + 4S_{4x} D_{66} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + 4S_{5x} D_{16} Y \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) + 4S_{6x} D_{26} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \right] dy - \frac{1}{2} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} S_{3x} m Y^2 \omega^2 dx dy \right\} dt = 0 \quad (3)$$

$$\text{โดย } S_{1x} = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad S_{2x} = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) dx \\ S_{3x} = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X^2 dx, \quad S_{4x} = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 dx \\ S_{5x} = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) dx, \quad S_{6x} = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) dx$$

ใช้วิธีแปรผัน (variation method) และการอินทิเกรตแยกส่วน (integration by part) สมการ (3) สามารถเขียนสมการควบคุม (4) และเงื่อนไขขอบ (5) และ (6) ได้เป็น [7]

$$S_{3x} D_{22} \frac{d^4 Y}{dy^4} + (2S_{2x} D_{12} - 4S_{4x} D_{66}) \frac{d^2 Y}{dy^2} + (S_{1x} D_{11} - S_{3x} m \omega^2) Y = 0 \quad (4)$$

$$V_y = S_{3x} D_{22} \frac{d^3 Y}{dy^3} + (S_{2x} D_{12} - 4S_{4x} D_{66}) \frac{dY}{dy} - 2S_{5x} D_{16} Y \quad (5)$$

$$M_y = S_{3x} D_{22} \frac{d^2 Y}{dy^2} + 2S_{6x} D_{26} \frac{dY}{dy} + S_{2x} D_{12} Y \quad (6)$$

โดย V_y คือ แรงเฉือนรวมต่อหนึ่งหน่วยความยาวบนระนาบตั้งฉากกับแกน y

M_y คือ โมเมนต์ดัดต่อหนึ่งหน่วยความยาวบนระนาบตั้งฉากกับแกน y

ในทำนองเดียวกันสมการ (2) เมื่อพิจารณา $Y(y)$ สามารถเขียนสมการควบคุม (7) และเงื่อนไขขอบ (8) และ (9) ได้เป็น [7]

$$S_{3y} D_{11} \frac{d^4 X}{dx^4} + (2S_{2y} D_{12} - 4S_{4y} D_{66}) \frac{d^2 X}{dx^2} + (S_{1y} D_{22} - S_{3y} m \omega^2) X = 0 \quad (7)$$

$$V_x = S_{3y} D_{11} \frac{d^3 X}{dx^3} + (S_{2y} D_{12} - 4S_{4y} D_{66}) \frac{dX}{dx} - 2S_{5y} D_{26} X \quad (8)$$

$$M_x = S_{3y} D_{11} \frac{d^2 X}{dx^2} + 2S_{6y} D_{16} \frac{dX}{dx} + S_{2y} D_{12} X \quad (9)$$

โดย V_x คือ แรงเฉือนรวมต่อหนึ่งหน่วยความยาวบนระนาบตั้งฉากกับแกน x

M_x คือ โมเมนต์ดัดต่อหนึ่งหน่วยความยาวบนระนาบตั้งฉากกับแกน x

$$S_{1y} = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 dy, \quad S_{2y} = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(Y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) dy$$

$$S_{3y} = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y^2 dy, \quad S_{4y} = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 dy$$

$$S_{5y} = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) dy, \quad S_{6y} = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) dy$$

สมการควบคุม (4) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} + B_1 \frac{d^2 Y}{dy^2} + B_2 Y = 0$$

$$\text{โดย } B_1 = \left(\frac{2S_{2x}D_{12} - 4S_{4x}D_{66}}{S_{3x}D_{22}} \right)$$

$$B_2 = \left(\frac{S_{1x}D_{11} - S_{3x}m\omega^2}{S_{3x}D_{22}} \right)$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยกรณีรูปร่างโหมดสมมาตรและ (symmetry) และไม่สมมาตร (antisymmetry) ได้เป็น สมการ (10.1) และ (10.2) ตามลำดับ

$$Y(y) = C_{1y} \cos(q_1 y) + C_{2y} \cosh(q_2 y) \quad (10.1)$$

$$Y(y) = C_{1y} \sin(q_1 y) + C_{2y} \sinh(q_2 y) \quad (10.2)$$

โดย q_1, q_2 คือ ตัวแปรความถี่ในทางแกน y ดัง แสดงในสมการ (11) และ (12)

$$q_1^2 - q_2^2 = \frac{2S_{2x}D_{12} - 4S_{4x}D_{66}}{S_{3x}D_{22}} \quad (11)$$

$$q_1^2 q_2^2 = \frac{S_{3x}m\omega^2 - S_{1x}D_{11}}{S_{3x}D_{22}} \quad (12)$$

แทนเงื่อนไขขอบ ($dY/dy = 0$ และ $Y = 0$ ในสมการ (10) ทำให้ได้ปัญหาค่าเฉพาะ (eigenvalue problem) กรณีรูปร่างโหมดสมมาตรและไม่สมมาตรดังสมการ (13.1) และ (13.2) ตามลำดับ

$$q_2 \tanh\left(\frac{q_2 b}{2}\right) + q_1 \tan\left(\frac{q_1 b}{2}\right) = 0 \quad (13.1)$$

$$q_2 \coth\left(\frac{q_2 b}{2}\right) - q_1 \cot\left(\frac{q_1 b}{2}\right) = 0 \quad (13.2)$$

ในทำนองเดียวกันสมการควบคุม (7) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + A_1 \frac{d^2 X}{dx^2} + A_2 X = 0$$

$$\text{โดย } A_1 = \left(\frac{2S_{2y}D_{12} - 4S_{4y}D_{66}}{S_{3y}D_{11}} \right)$$

$$A_2 = \left(\frac{S_{1y}D_{22} - S_{3y}m\omega^2}{S_{3y}D_{11}} \right)$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยกรณีรูปร่างโหมดสมมาตรและ ไม่สมมาตรได้เป็นสมการ (14.1) และ (14.2) ตามลำดับ

$$X(x) = C_{1x} \cos(p_1 x) + C_{2x} \cosh(p_1 x) \quad (14.1)$$

$$X(x) = C_{3x} \sin(p_2 x) + C_{4x} \sinh(p_2 x) \quad (14.2)$$

โดย p_1, p_2 คือ ตัวแปรความถี่ในทางแกน x ดังแสดง ในสมการ (15) และ (16)

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{2S_{2y}D_{12} - 4S_{4y}D_{66}}{S_{3y}D_{11}} \quad (15)$$

$$p_1^2 p_2^2 = \frac{S_{3y}m\omega^2 - S_{1y}D_{22}}{S_{3y}D_{11}} \quad (16)$$

แทนเงื่อนไขขอบ ($dX/dx = 0$ และ $X = 0$ ในสมการ (14) ทำให้ได้ปัญหาค่าเฉพาะกรณีรูปร่างโหมดสมมาตร และ ไม่สมมาตรดังสมการ (17.1) และ (17.2)

$$p_2 \tanh\left(\frac{p_2 a}{2}\right) + p_1 \tan\left(\frac{p_1 a}{2}\right) = 0 \quad (17.1)$$

$$p_2 \coth\left(\frac{p_2 a}{2}\right) - p_1 \cot\left(\frac{p_1 a}{2}\right) = 0 \quad (17.2)$$

3. วิธีการศึกษา

แบ่งการศึกษาออกเป็น 5 ส่วน คือ

- (1) การหาความถี่ธรรมชาติโดยวิธีคันโตโรวิช
- (2) การหาความถี่ธรรมชาติโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- (3) การสอบทวนวิธีคันโตโรวิช
- (4) การสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์โดยวิธี

วิเคราะห์แบบถดถอย

- (5) การสอบทวนสมการแสดงความสัมพันธ์

3.1 การหาความถี่ธรรมชาติโดยวิธีคันโตโรวิช

(1) กำหนดสมการเริ่มต้นสำหรับการคำนวณแบบ ทำซ้ำ ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยสมการเริ่มต้นอาจเป็น ฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งไม่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ แต่

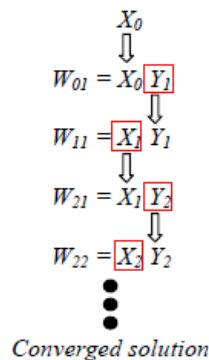
ถ้าสมการเริ่มต้นมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ การคำนวณแบบทำซ้ำจะมีการลู่เข้าของผลเฉลยได้เร็วขึ้น [9] ในกรณีสมการเริ่มต้นเป็นฟังก์ชัน x ให้คำนวณค่า S_{1x} ถึง S_{6x}

(2) แทน S_{1x} ถึง S_{6x} ในสมการ (13) เพื่อหาค่า q_1 และ q_2 จากนั้นแทนค่า q_1 และ q_2 ในสมการ (10) เพื่อหาฟังก์ชัน y

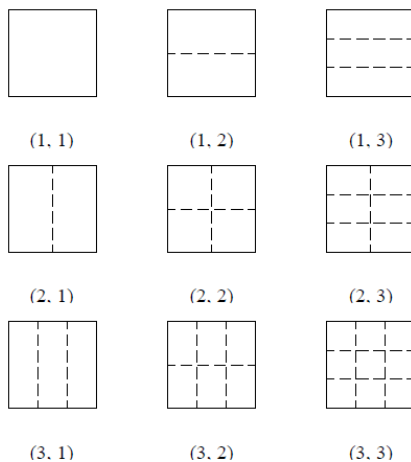
(3) นำฟังก์ชัน y ที่ได้จากข้อ (2) คำนวณหาค่า S_{1y} ถึง S_{6y}

(4) แทน S_{1y} ถึง S_{6y} ในสมการ (17) เพื่อหาค่า p_1 และ p_2 จากนั้นแทนค่า p_1 และ p_2 ในสมการ (14) เพื่อหาฟังก์ชัน x

(5) นำฟังก์ชัน x ที่ได้จากข้อ (4) คำนวณหาค่า S_{1x} ถึง S_{6x}



รูปที่ 2 การคำนวณแบบทำซ้ำ



รูปที่ 3 รูปร่างโหมดของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น[8]

(6) แทน S_{1x} ถึง S_{6x} ในสมการ (13) เพื่อหาค่า q_1 และ q_2 จากนั้นแทนค่า q_1 และ q_2 ในสมการ (10) เพื่อหาฟังก์ชัน y

(7) เปรียบเทียบค่า q_1 และ q_2 ที่ได้จากข้อ (6) และข้อ (2) หากค่าความคลาดเคลื่อนไม่อยู่ในเกณฑ์ที่กำหนด ให้ทำการคำนวณแบบทำซ้ำต่อ

3.2 การหาความถี่ธรรมชาติโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method: FEM)

(1) กำหนดเอลิเมนต์ของแบบจำลองเป็นเอลิเมนต์แบบเปลือก (Shell element) ชนิด 16-Layer ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ 8 จุดต่อ โดยแต่ละจุดต่อมี 6 องศาความเป็นอิสระ

(2) สร้างแบบจำลองแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยมีความกว้างด้าน x 1 เมตร ความกว้างด้าน y ตามอัตราส่วนทางเรขาคณิต

(3) กำหนดคุณสมบัติทางกลของแบบจำลอง

(4) แบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์

(5) กำหนดเงื่อนไขขอบในแบบจำลอง

3.3 การสอบทวนวิธีคันทอร์วิช

(1) แทน q_1 และ q_2 ในสมการ (12) หรือแทน p_1 และ p_2 ในสมการ (16) เพื่อหาความถี่ธรรมชาติ

(2) แทน q_1 และ q_2 ในสมการ (10) และแทน p_1 และ p_2 ในสมการ (14) เพื่อหารูปร่างโหมดโดย $w(x, y) = X(x)Y(y)$ ดังแสดงในรูปที่ 3

(3) เปรียบเทียบความถี่ธรรมชาติที่ได้จากวิธีคันทอร์วิชกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยกำหนดให้แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเรียงชั้นแบบ $[0/90]_8$ แต่ละชั้นมีความหนา 2.5 mm มีคุณสมบัติทางกล $E_1=138$ GPa, $E_2=8.96$ GPa, $G_{12}=7.1$ GPa, $G_{23}=2.82$ GPa, $V_{12}=0.3$, $V_{23}=0.59$ และ $\rho=1600$ kg/m³

3.4 การสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์โดยวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย (regression analysis method)

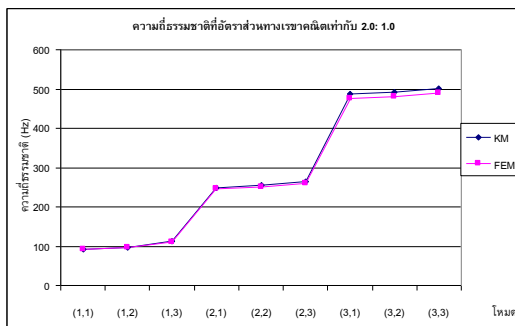
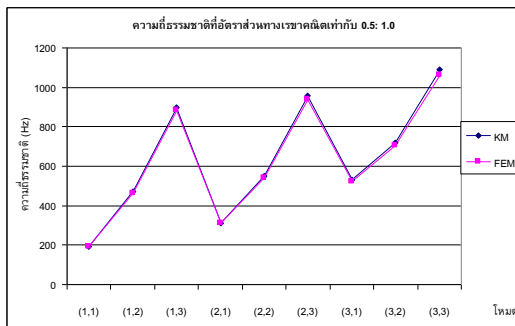
สร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิต โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method) จากข้อมูลความถี่ธรรมชาติที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตด้าน y ต่อด้าน x (b: a) 0.50: 1.00 ถึง 2.00: 1.00 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1

3.5 การสอบทวนสมการแสดงความสัมพันธ์

(1) แทนอัตราส่วนทางเรขาคณิต 0.55:1.00 ถึง 1.95:1.00 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1 ในวิธีคันโตโรวิช เพื่อหาความถี่ธรรมชาติ

(2) แทนอัตราส่วนทางเรขาคณิต 0.55:1.00 ถึง 1.95:1.00 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1 ในสมการแสดงความสัมพันธ์ที่ได้จากวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย เพื่อหาความถี่ธรรมชาติ

(3) เปรียบเทียบความถี่ธรรมชาติที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์โดยวิธีวิเคราะห์แบบถดถอยกับวิธีคันโตโรวิช



รูปที่ 4 เปรียบเทียบความถี่ธรรมชาติระหว่างวิธีคันโตโรวิชและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

4. ผลการศึกษา

(1) ผลการคำนวณรูปร่างโหมดของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบ [0/90]_s โดยวิธีคันโตโรวิช สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$w(x,y)=[C_{1x} \cos(p_1x)+C_{2x} \cosh(p_1x)] \times [C_{1y} \cos(q_1y)+C_{2y} \cosh(q_2y)]; \text{ Mode (1,1)}$$

$$w(x,y)=[C_{1x} \cos(p_1x)+C_{2x} \cosh(p_1x)] \times [C_{1y} \sin(q_1y)+C_{2y} \sinh(q_2y)]; \text{ Mode (1,2)}$$

$$w(x,y)=[C_{1x} \cos(p_1x)+C_{2x} \cosh(p_1x)] \times [C_{1y} \cos(q_1y)+C_{2y} \cosh(q_2y)]; \text{ Mode (1,3)}$$

$$w(x,y)=[C_{3x} \sin(p_2x)+C_{4x} \sinh(p_2x)] \times [C_{1y} \cos(q_1y)+C_{2y} \cosh(q_2y)]; \text{ Mode (2,1)}$$

$$w(x,y)=[C_{3x} \sin(p_2x)+C_{4x} \sinh(p_2x)] \times [C_{1y} \sin(q_1y)+C_{2y} \sinh(q_2y)]; \text{ Mode (2,2)}$$

$$w(x,y)=[C_{3x} \sin(p_2x)+C_{4x} \sinh(p_2x)] \times [C_{1y} \cos(q_1y)+C_{2y} \cosh(q_2y)]; \text{ Mode (2,3)}$$

$$w(x,y)=[C_{1x} \cos(p_1x)+C_{2x} \cosh(p_1x)] \times [C_{1y} \cos(q_1y)+C_{2y} \cosh(q_2y)]; \text{ Mode (3,1)}$$

$$w(x,y)=[C_{1x} \cos(p_1x)+C_{2x} \cosh(p_1x)] \times [C_{1y} \sin(q_1y)+C_{2y} \sinh(q_2y)]; \text{ Mode (3,2)}$$

$$w(x,y)=[C_{1x} \cos(p_1x)+C_{2x} \cosh(p_1x)] \times [C_{1y} \cos(q_1y)+C_{2y} \cosh(q_2y)]; \text{ Mode (3,3)}$$

(2) จากการเปรียบเทียบผลการคำนวณความถี่ธรรมชาติของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบ [0/90]_s โดยวิธีคันโตโรวิชและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 0.50:1.00 ,1.00:1.00 และ 2.00:1.00 พบว่าผลการคำนวณโดยวิธีคันโตโรวิชมีความสอดคล้องกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4

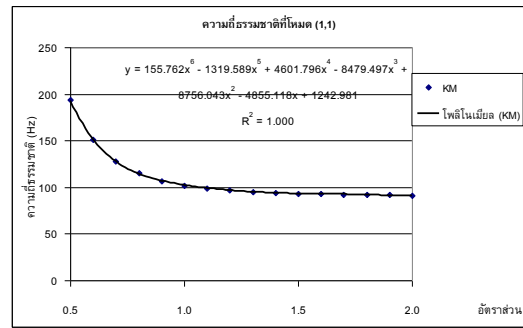
(3) จากการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิตพบว่าเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าเพิ่มขึ้น ความถี่ธรรมชาติของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบ [0/90]_s มีค่าลดลง และความถี่ธรรมชาติมีความสัมพันธ์กับอัตราส่วนทางเรขาคณิต โดยสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียลอันดับ 6 พร้อมค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (R^2) ดังแสดงในรูปที่ 5-13

$$f = 155.762r^6 - 1319.589r^5 + 4601.796r^4 - 8479.497r^3 + 8756.043r^2 - 4855.118r$$

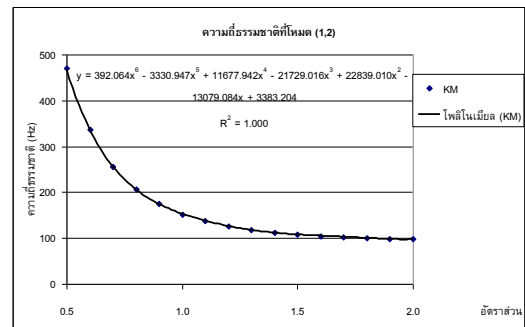
$$\begin{aligned}
 &+1242.981; \text{ Mode (1,1)} \\
 f = &392.064r^6 - 3330.947r^5 + 11677.942r^4 \\
 &- 21729.016r^3 + 22839.010r^2 - 13079.084r \\
 &+ 3383.204; \text{ Mode (1,2)} \\
 f = &773.581r^6 - 6561.414r^5 + 22954.047r^4 \\
 &- 42601.891r^3 + 44681.847r^2 - 25613.002r \\
 &+ 6617.356; \text{ Mode (1,3)} \\
 f = &132.818r^6 - 1110.867r^5 + 3811.706r^4 \\
 &- 6879.748r^3 + 6916.696r^2 - 3705.027r \\
 &+ 1090.864; \text{ Mode (2,1)} \\
 f = &423.355r^6 - 3586.838r^5 + 12511.883r^4 \\
 &- 23071.631r^3 + 23863.239r^2 - 13281.143r \\
 &+ 3430.795; \text{ Mode (2,2)} \\
 f = &777.197r^6 - 6608.886r^5 + 23185.283r^4 \\
 &- 43140.509r^3 + 45274.806r^2 - 25806.015r \\
 &+ 6680.422; \text{ Mode (2,3)} \\
 f = &92.073r^6 - 768.315r^5 + 2629.676r^4 \\
 &- 4733.827r^3 + 4747.855r^2 - 2540.483r \\
 &+ 1066.383; \text{ Mode (3,1)} \\
 f = &409.152r^6 - 3437.155r^5 + 11860.120r^4 \\
 &- 21563.336r^3 + 21893.034r^2 - 11889.409r \\
 &+ 3246.924; \text{ Mode (3,2)} \\
 f = &828.958r^6 - 7019.127r^5 + 24472.796r^4 \\
 &- 45114.954r^3 + 46670.078r^2 - 26002.573r \\
 &+ 6739.209; \text{ Mode (3,3)}
 \end{aligned}$$

โดย f คือ ความถี่ธรรมชาติ
 r คือ อัตราส่วน b: a

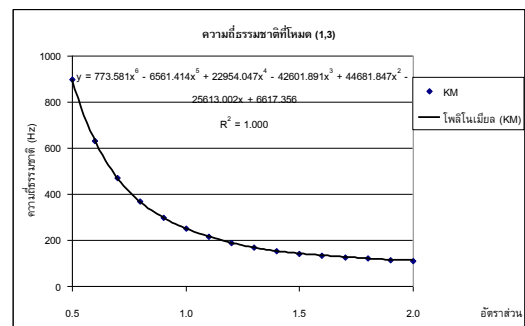
(4) สมการแสดงความสัมพันธ์ซึ่งได้จากการคำนวณความถี่ธรรมชาติที่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 0.50: 1.00 ถึง 2.00:1.00 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1 เมื่อนำมาหาความถี่ธรรมชาติที่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 0.55:1.00 ถึง 1.95:1.00 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1 พบว่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์ มีความสอดคล้องกับความถี่ธรรมชาติที่ได้จากวิธีคันโตโรวิช ดังแสดงในรูปที่ 14-22 โดยความถี่ธรรมชาติของรูปร่างโหมดที่ (1, 3) มีความคลาดเคลื่อนระหว่างสมการแสดงความสัมพันธ์กับวิธีคันโตโรวิชสูงสุดเท่ากับ 1.278% ดังแสดงในรูปที่ 16



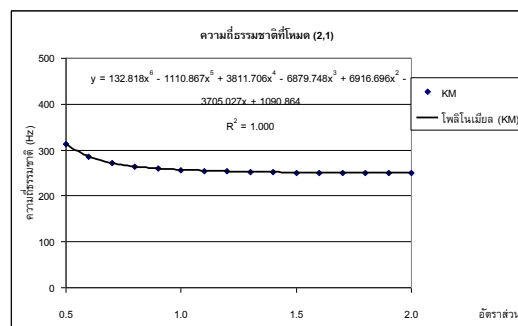
รูปที่ 5 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (1, 1)



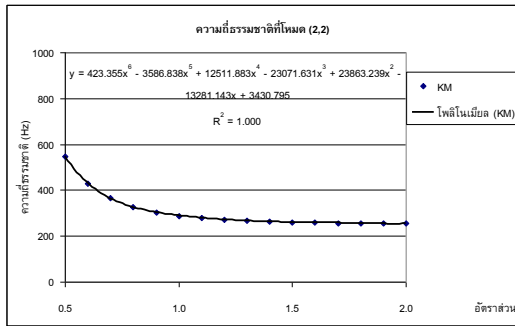
รูปที่ 6 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (1, 2)



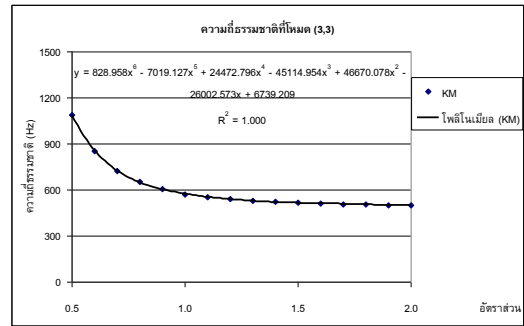
รูปที่ 7 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (1, 3)



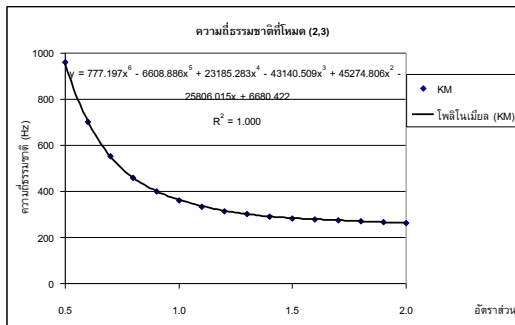
รูปที่ 8 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (2, 1)



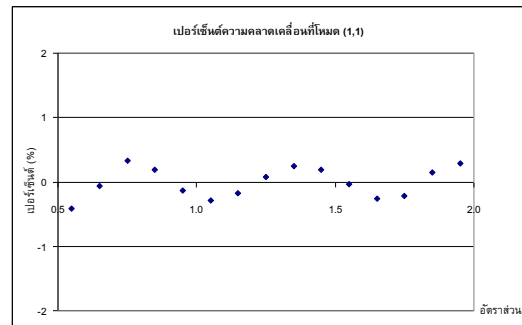
รูปที่ 9 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (2, 2)



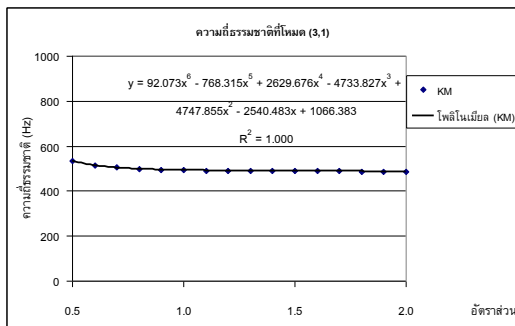
รูปที่ 13 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (3, 3)



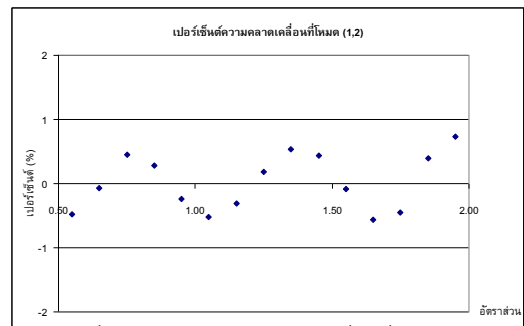
รูปที่ 10 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (2, 3)



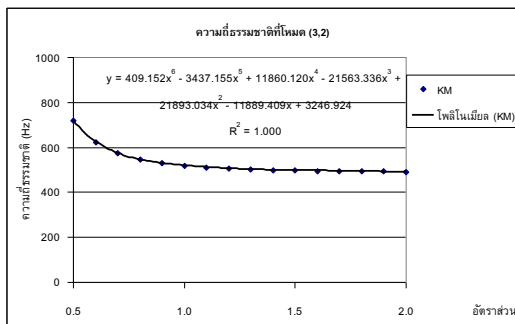
รูปที่ 14 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (1, 1)



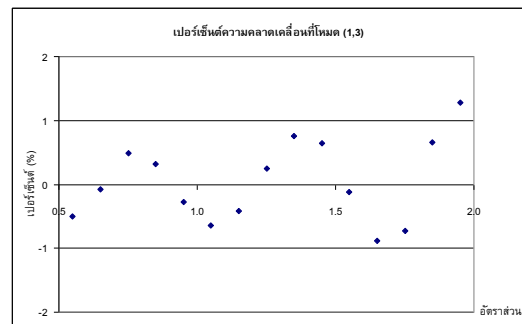
รูปที่ 11 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (3, 1)



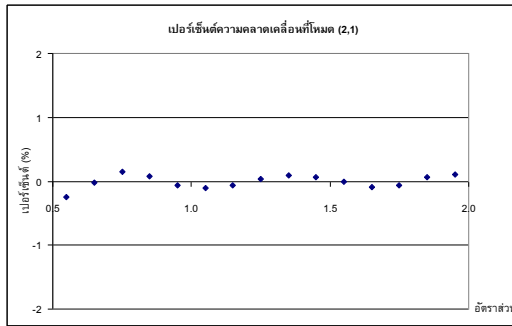
รูปที่ 15 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (1, 2)



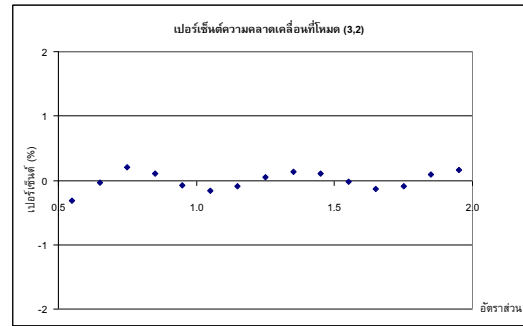
รูปที่ 12 ความถี่ธรรมชาติที่โหมด (3, 2)



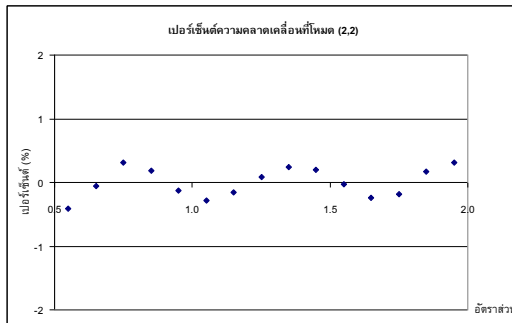
รูปที่ 16 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (1, 3)



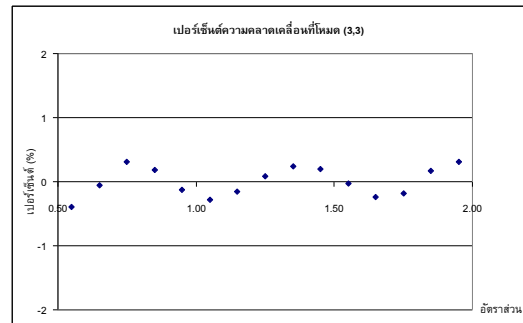
รูปที่ 17 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (2, 1)



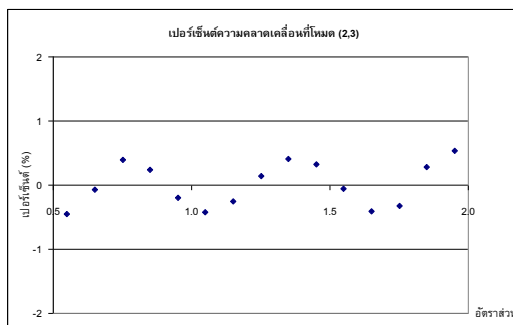
รูปที่ 21 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (3, 2)



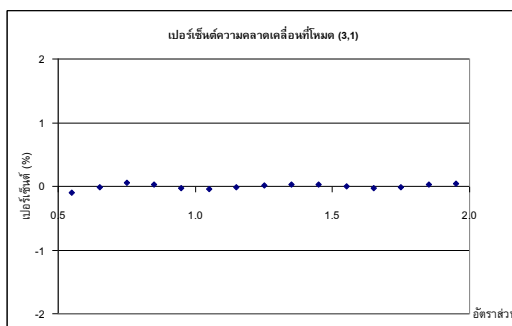
รูปที่ 18 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (2, 2)



รูปที่ 22 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (3, 3)



รูปที่ 19 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (2, 3)



รูปที่ 20 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนที่โหมด (3, 1)

5. สรุปผลการศึกษา

(1) ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติและอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบ $[0/90]_6$ ตั้งแต่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 0.50:1.00 ถึง 2.00:1.00 สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียลอันดับ 6

(2) สมการโพลิโนเมียลอันดับ 6 ที่ได้จากวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย สามารถนำมาใช้หาความถี่ธรรมชาติของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบ $[0/90]_6$ โดยมีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดจากวิธีคันทอโรวิชเท่ากับ 1.278%

เอกสารอ้างอิง

- [1] นิติพงศ์ โพธิ์ทอง และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2549. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางยื่นเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น. วิศวกรรมสาร มช. Vol.33, มีนาคม-เมษายน: หน้า 155-167.
- [2] จิรวัฒน์ วรณโรจน์ และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2550. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบาง

- เป็นพฤติกรรมคล้ายคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน. วิศวกรรมสาร มข. Vol.34, มกราคม-กุมภาพันธ์: หน้า 105-117.
- [3] ชิตพล คงคิล และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2550. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้าน. วิศวกรรมสาร มข. Vol.34, มกราคม-กุมภาพันธ์: หน้า 119-132.
- [4] Chakraverty S., Singh V.P. and Sharma R.K. 2006. Regression based weight generation algorithm in neural network for estimate of frequencies of vibrating plates. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 195: 4194-4202.
- [5] Singh V.P., Chakraverty S., Sharma R.K. and Sharma G.K. 2009. Modeling vibration frequencies of annular plates by regression based neural network. Applied Soft Computing. 9: 439-447.
- [6] Reddy J.N. 2004. Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis (2nd ed). CRC Press, Boca Raton.
- [7] Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S. 1959. Theory of Plates and Shells (2nd ed). McGraw-Hill, New York.
- [8] Phongsriruk, K., Ingsuwan, P., Rangsri, W. and Klongpanich, W. 2010. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite rectangular plates using extended Kantorovich method. Maejo International Journal of Science and Technology. 4(03): 512-532.
- [9] Phongsriruk, K., Ingsuwan, P., Rangsri, W. and Klongpanich, W. 2009. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite square plate using the extended Kantorovich method. The 23rd Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand, Chiangmai, Thailand, Nov 4-7, 2009.