

การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันจากภายนอกโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Finite Element Analysis of Toroidal Membrane under External Pressure

วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา

คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน อ.เมือง
จ.นครราชสีมา 30000

Weeraphan Jiammeepreecha

Faculty of Engineering and Architecture, Rajamangala University of Technology Isan, Muang District,
Nakhon Ratchasima 30000

Tel: 09-1779-0935 E-mail: weeraphan.ji@rmuti.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมภายใต้แรงดันจากภายนอกแบบคงที่โดยอาศัยหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด สำหรับฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดสร้างได้จากหลักการของงานเสมือนในทอมของค่าการเสียรูปและเขียนในรูปแบบที่เหมาะสม ผลตอบสนองทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสามารถแก้ได้โดยใช้วิธีกระบวนการทำซ้ำ จากนั้นทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตสำหรับค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดเนื่องจากแรงดันภายในพบว่ามีความใกล้เคียงกัน ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่แสดงค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดภายใต้การแปรเปลี่ยนค่าแรงดันจากภายนอก ความหนาของโครงสร้าง และความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทได้นำเสนอในบทความนี้

คำหลัก วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ ฟังก์ชันพลังงาน

Abstract

This paper presents finite element method for analysis of a toroidal membrane of circular cross section under constant external pressure using differential geometry for computing the membrane geometry. Energy function of the membrane is derived from the principle of virtual work in terms of displacements and it is expressed in the appropriate forms. The static response of the membrane can be obtained by using the nonlinear finite element method in which the numerical solutions are solved by using the iterative procedure. The present result for the displacement responses of the toroidal membrane under internal pressure are found to be in close agreement with those in existing literature. Numerical results of the membrane displacements with various external pressures, thicknesses, and toroid cross-section radii are demonstrated in this paper.

Keywords: Finite element method, toroidal membrane, differential geometry, energy functional

1. บทนำ

โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท (toroidal membrane) จะมีลักษณะแตกต่างจากโครง

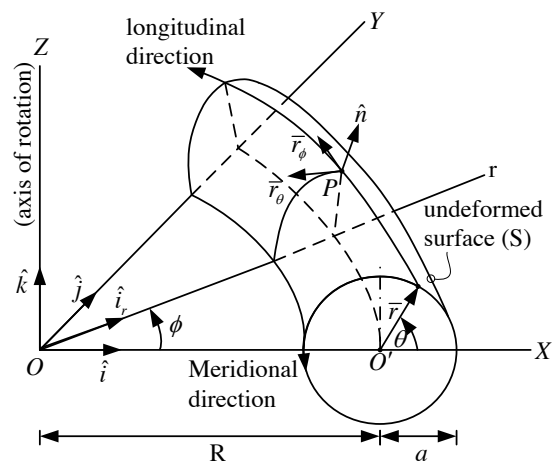
สร้างเปลือกบางไร้แรงดัดแบบสมมาตรตามแนวแกน (axisymmetric membranes) โดยทั่วไปคือจะไม่มีแรงดัดที่รอบแกนหมุน (axis of revolution) ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ในภาคอุตสาหกรรมเช่น ถังบรรจุปิโตรเลียมเหลว, ท่อยึดลมร้อน, เรือดำน้ำ และยางสำหรับรถยนต์หรือเครื่องบิน เป็นต้น [1-3] โดยที่กระบวนการหาคำตอบแบบดั้งเดิมสำหรับโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมภายใต้แรงดันภายในจะสามารถคำนวณได้จากทฤษฎีเมมเบรนแบบเชิงเส้น (linear membrane theory) [4] จนกระทั่งงานวิจัยของ Clark [5] ได้นำเสนอทฤษฎีเชลล์แบบเชิงเส้น (linear shell theory) ในการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทเพื่อให้ค่าการเสียรูปมีความต่อเนื่อง อย่างไรก็ตามถ้าความหนาของโครงสร้างมีค่าน้อยมากจะทำให้ผลของการดัดไม่ถูกต้องในการนำมาวิเคราะห์ ดังนั้นการวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนแบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear membrane theory) จึงให้ผลที่ได้มีความถูกต้องมากกว่าจากงานวิจัยของ Jordan [6] และ Sanders และ Liepins [7] โดยพิจารณาคำตอบในทอมของค่าความเครียดขนาดเล็ก (small strains) และสมการพื้นฐานแบบดั้งเดิม (classical constitutive equations) ต่อจากนั้น Kydonieffs และ Spencer [8] ได้นำเสนอการหาคำตอบโดยวิธีประมาณค่าสำหรับโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันภายในแบบคงที่ ซึ่งมีหน้าตัดก่อนการเสียรูปเป็นวงกลม สำหรับการประยุกต์ใช้กับงานทางด้านวิศวกรรมนอกชายฝั่งถูกนำเสนอโดย Willson และคณะ [9] ซึ่งทำการศึกษาโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยาง (toroidal shell) ติดตั้งอยู่ในทะเล โดยการจำลองปัญหาเป็นแบบสมมาตรรอบแกนรัศมี และกำหนดเงื่อนไขของเขตที่บริเวณรัศมีด้านในและด้านนอกของโครงสร้างเป็นแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ (roller support) นอกจากนี้ยังมีการงานวิจัยของ Sun [10] ซึ่งได้นำเสนอผลเฉลยแบบปิด (closed-form solution) สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรรูปทรงโดนัทที่มีความขรุขระสูงโดยประยุกต์ใช้เป็นอุปกรณ์การขยายตัวของท่อยึดลมร้อน (thermal expansion compensation)

สำหรับวัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้คือเพื่อนำเสนอถึงผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทที่รับแรงดันจากภายนอก โดยอาศัยหลักการของเรขาคณิตเชิง

อนุพันธ์ในการคำนวณรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด ซึ่งการคำนวณรูปทรงเรขาคณิตโดยวิธีนี้ได้เคยถูกนำเสนอในงานวิจัยของ Jiammeepreecha และคณะ [11-12] โดยจะรวมผลของค่าการเสียรูปและการหมุนที่มีขนาดใหญ่เข้าไปในสมการ ซึ่งลักษณะปัญหาดังกล่าวจะสามารถเขียนได้ในรูปแบบการแปรผัน (variational form) โดยใช้ทฤษฎีของเชลล์ [13] และเขียนในรูปแบบที่เหมาะสม [14-15] ซึ่งจะสะดวกในแก้ปัญหาแบบไม่เป็นเชิงเส้นและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลง การเสียรูปทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้โดยใช้หลักการของพลังงานศักย์ที่สภาวะหยุดนิ่ง (principle of stationary potential energy) [16] และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [17] โดยการจำลองโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดด้วยชิ้นส่วนของคานแบบ 1 มิติ แบ่งเป็นชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดเชิงขั้ว สำหรับระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแก้ได้โดยใช้วิธีการวนการทำซ้ำ (iterative process) โดยที่การเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทเมื่อรับแรงดันแบบคงที่จากภายนอกเป็นสิ่งที่ต้องคำนวณหา

2. รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบาง

กำหนดให้ R คือความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงโดนัทและ a คือความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทดังแสดงในรูปที่ 1 ดังนั้นสมการของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทจะแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 1 โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทและระยะพิกัด

$$\left(R - \sqrt{X^2 + Y^2}\right)^2 + Z^2 = a^2 \quad (1)$$

โดยที่ X, Y, Z คือระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate) ซึ่งสามารถนิยามได้ด้วยสมการ

$$X = X(\theta, \phi) = (R + a \cos \theta) \cos \phi \quad (2)$$

$$Y = Y(\theta, \phi) = (R + a \cos \theta) \sin \phi \quad (3)$$

$$Z = Z(\theta, \phi) = a \sin \theta \quad (4)$$

โดยที่ (θ, ϕ) คือค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิว (surface parameters) ซึ่งวัดตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและเส้นพิกัดลองจิจูด ตามลำดับ สำหรับในกรณีที่พื้นผิวมีความสมมาตรตามแนวแกนจะเกิดการเปลี่ยนแปลงเฉพาะเส้นเมอร์ริเดียนเท่านั้น ดังนั้นเมื่อกำหนด $\bar{r}$ คือเวกเตอร์ระบุตำแหน่งของจุด P ใดๆ บนพื้นผิวอ้างอิง (S) จะสามารถนิยามได้โดยใช้รัศมีของวงกลมในแนวขนาน r ดังสมการ

$$\bar{r} = r \cos \phi \hat{i} + r \sin \phi \hat{j} + Z \hat{k} \quad (5)$$

โดยที่ $r = r(\theta) = R + a \cos \theta$ และ $Z = Z(\theta) = a \sin \theta$ เมื่อโครงสร้างเกิดการเสียรูปจะทำให้พื้นผิว (S) เคลื่อนที่ไปยังพื้นผิวที่ตำแหน่งใหม่ (S^*) ดังแสดงในรูปที่ 2 ดังนั้นเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง $\bar{R}$ บนพื้นผิวที่เกิดการเสียรูปจะสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{q} = \bar{r} + \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}} u + \hat{n} w \quad (6)$$

โดยที่ $\bar{q}$ คือเวกเตอร์ของระยะการเสียรูปจากพื้นผิวอ้างอิงไปยังพื้นผิวที่เกิดการเสียรูป u คือค่าการเสียรูปตามแนวสัมผัสกับเส้นเมอร์ริเดียน w คือค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน และ $\hat{n}$ คือเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากกับพื้นผิว (S) ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\hat{n} = \frac{\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi}{|\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi|} = \frac{-r Z_\theta \cos \phi \hat{i} - r Z_\theta \sin \phi \hat{j} + r r_\theta \hat{k}}{D} \quad (7)$$

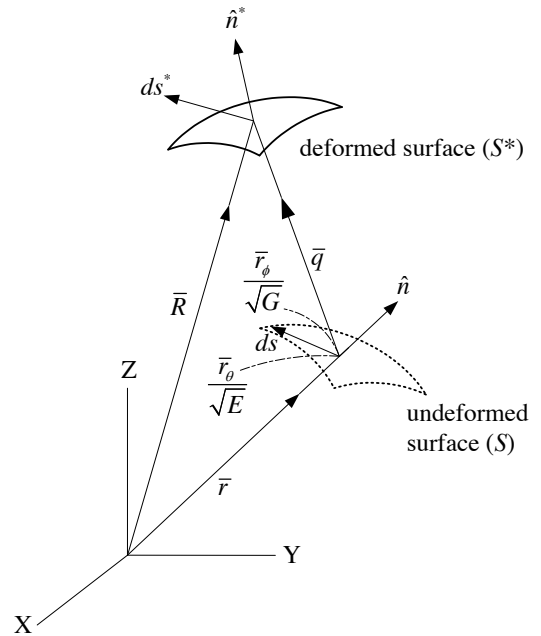
โดยที่ $D = \sqrt{EG - F^2} = r \sqrt{r_\theta^2 + Z_\theta^2}$

จากหลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) จะสามารถนิยามค่าความยาวส่วนโค้งก่อนการเสียรูป (ds) และหลังการเสียรูป (ds^*) ได้ดังนี้

$$ds^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = E d\theta^2 + 2F d\theta d\phi + G d\phi^2 \quad (8)$$

$$ds^{*2} = d\bar{R} \cdot d\bar{R} = E^* d\theta^2 + 2F^* d\theta d\phi + G^* d\phi^2 \quad (9)$$

โดยที่ $d\bar{r} = \bar{r}_\theta d\theta + \bar{r}_\phi d\phi$ และ $d\bar{R} = \bar{R}_\theta d\theta + \bar{R}_\phi d\phi$ คือผลรวมเชิงอนุพันธ์ของความยาวชิ้นส่วน $\bar{r}$ และ $\bar{R}$ ตามลำดับ ในที่นี้ตัวห้อย θ และ ϕ แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบาง



รูปที่ 2 การเสียรูปและเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง

ดังนั้นรูปแบบพื้นฐานอันดับหนึ่ง (first fundamental form) ของพื้นผิว (S) จะสามารถแสดงส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ (metric tensor) ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$E = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\theta = r_\theta^2 + Z_\theta^2 = a^2 \quad (10)$$

$$F = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\phi = 0 \quad (11)$$

$$G = \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}_\phi = r^2 = (R + a \cos \theta)^2 \quad (12)$$

และรูปแบบพื้นฐานอันดับสอง (second fundamental form) ของพื้นผิว (S) แสดงส่วนประกอบของเมตริกซ์ความโค้ง (metric curvature) ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$e = \bar{r}_{\theta\theta} \cdot \hat{n} = \frac{r_\theta Z_{\theta\theta} - r_{\theta\theta} Z_\theta}{\sqrt{r_\theta^2 + Z_\theta^2}} = a \quad (13)$$

$$f = \bar{r}_{\theta\phi} \cdot \hat{n} = 0 \quad (14)$$

$$g = \bar{r}_{\phi\phi} \cdot \hat{n} = \frac{r Z_{\theta\theta}}{\sqrt{r_\theta^2 + Z_\theta^2}} = (R + a \cos \theta) \cos \theta \quad (15)$$

กำหนดให้ $A = \sqrt{E}$ และ $B = \sqrt{G}$ ดังนั้นรูปแบบพื้นฐานอันดับหนึ่ง (first fundamental form) พื้นผิวหลังการเสียรูป (S^*) จะมีค่าดังสมการต่อไปนี้

$$E^* = \bar{R}_\theta \cdot \bar{R}_\theta = \left(A + u_\theta - \frac{e}{A} w\right)^2 + \left(\frac{e}{A} u + w_\theta\right)^2 \quad (16)$$

$$F^* = \bar{R}_\theta \cdot \bar{R}_\phi = 0 \quad (17)$$

$$G^* = \bar{R}_\phi \cdot \bar{R}_\phi = \left(B + \frac{B_\theta}{A} u - \frac{g}{B} w\right)^2 \quad (18)$$

ค่าความโค้งหลัก (principal curvatures) ของพื้นผิว (S) สามารถหาได้ดังสมการ

$$\kappa = \frac{ed\theta^2 + 2fd\theta d\phi + gd\phi^2}{Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\phi + Gd\phi^2} \quad (19)$$

ในกรณีของโครงสร้างเปลือกบางที่มีความสมมาตรตามแนวแกนจะพบว่าเส้นโค้งหลักจะซ้อนทับกับเส้นพิกัด แสดงว่าค่า $F=f=0$ ดังนั้นจากสมการที่ (16) จะได้ค่าความโค้งหลัก $\kappa_1 = e/E$ และ $\kappa_2 = g/G$

3. ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป

เมื่อพิจารณาความยาวชิ้นส่วนใดๆ บนพื้นผิวก่อนการเสียรูป (S) และพื้นผิวหลังการเสียรูป (S^*) ซึ่งมีระยะ ds และ ds^* ตามลำดับ จะสามารถคำนวณค่าความเครียดของความยาวชิ้นส่วนในทิศทางของระบบพิกัดซึ่งสามารถนิยามได้จากการเปลี่ยนแปลงความยาวเวกเตอร์ของชิ้นส่วนในรูปยกกำลังสองเทียบกับความยาวของชิ้นส่วนที่สภาวะก่อนการเสียรูป [18] โดยเขียนในเทอมของเมตริกซ์เทนเซอร์ ดังสมการต่อไปนี้

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{E^*}{E} - 1 \right) \quad (20)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{G^*}{G} - 1 \right) \quad (21)$$

แทนค่าจากสมการที่ (16) ถึง (18) ลงไปในสมการที่ (20) และ (21) จะได้ค่าความเครียดดังสมการต่อไปนี้

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_\theta}{A} - \frac{ew}{A^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_\theta}{A} - \frac{ew}{A^2} \right)^2 + \left(\frac{eu}{A^2} + \frac{w_\theta}{A} \right)^2 \right] \quad (22)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{B_\theta u}{AB} - \frac{gw}{B^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{B_\theta u}{AB} - \frac{gw}{B^2} \right)^2 \quad (23)$$

กำหนดให้ $\{g\}^T = [u \ w \ u_\theta \ w_\theta]$ ดังนั้นค่าความเครียดสามารถแบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือส่วนที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น โดยสามารถเขียนในรูปแบบดัชนี (index form) ได้ดังนี้

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^L + \varepsilon_i^N = L_k^i g_k + \frac{1}{2} H_{kl}^i g_k g_l \quad (24)$$

โดยที่ L_k^i และ H_{kl}^i คือเวกเตอร์และเมตริกซ์สมมาตรตามลำดับ

4. พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง

สำหรับโครงสร้างที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (linearly elastic) และความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง

t มีค่าคงที่ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสียรูป ค่าพลังงานความเครียดจะสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$U = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} t D d\phi d\theta \quad (25)$$

โดยที่ $[C]$ คือเมตริกซ์คุณสมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$[C] = \frac{E'}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

โดยที่ E' คือโมดูลัสยืดหยุ่น และ ν คืออัตราส่วนปัวส์ซอง

สำหรับพลังงานความเครียดในสมการที่ (25) สามารถเขียนได้ในรูปแบบที่เหมาะสม [14] ดังสมการ

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(\frac{1}{2} k_{kn} + \frac{1}{6} n_{kn}^1 + \frac{1}{12} n_{kn}^2 \right) g_k g_n \right] t D d\theta \quad (27)$$

โดยที่ $k_{kn} = C_{ij} L_k^i L_n^j$ (28)

$$n_{kn}^1 = C_{ij} \left(L_k^i H_{mn}^j + L_m^i H_{nk}^j + L_n^i H_{lm}^j \right) g_m \quad (29)$$

$$n_{kn}^2 = C_{ij} \left(H_{kl}^i H_{mn}^j + \frac{1}{2} H_{nk}^i H_{lm}^j \right) g_l g_m \quad (30)$$

5. พลังงานศักย์ของแรงดันจากภายนอก

แรงดันจากภายนอกที่กระทำต่อโครงสร้างเปลือกบางเป็นแรงกระทำแบบติดตามการเสียรูป ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นแรงแบบอนุรักษ์ (conservative force) ดังนั้นพลังงานศักย์ของแรงดันจากภายนอกสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\Omega = \frac{P_0}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} (\bar{R}_\theta \times \bar{R}_\phi \cdot \bar{R} - \bar{R}_\theta \times \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}) d\phi d\theta \quad (31)$$

โดยที่ p_0 คือค่าแรงดันคงที่ เมื่อแทนค่าจากสมการที่ (5) และ (6) ลงไปในสมการที่ (31) จะได้ค่าพลังงานศักย์ของแรงดันจากภายนอกโดยเขียนในรูปแบบที่เหมาะสม [15] ดังสมการต่อไปนี้

$$\Omega = \frac{P_0}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[v_k^c g_k + \left(\frac{1}{2} v_{kn}^K + \frac{1}{6} v_{kn}^N \right) g_k g_n \right] d\theta \quad (32)$$

โดยที่ v_k^c , v_{kn}^K , และ v_{kn}^N คือเวกเตอร์แบบเชิงเส้น, เมตริกซ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นอันดับที่สองและสาม ในเทอมของเวกเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ $\{g\}$ ตามลำดับ

6. ผลรวมของพลังงานศักย์

ผลรวมของพลังงานศักย์สำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางได้มาจากการรวมผลของพลังงานความเครียด

ของโครงสร้างเปลือกบางและพลังงานศักย์ของแรงดันจากภายนอก ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$V = U + \Omega \quad (33)$$

สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะสามารถหาสมการสมดุลของโครงสร้างได้โดยการประยุกต์ใช้หลักการหลักการของพลังงานศักย์ที่สภาวะหยุดนิ่ง [16] จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^m \left[\left\{ \frac{\partial U_n}{\partial d_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Omega_n}{\partial d_i} \right\} \right] = \{0\} \quad (34)$$

โดยที่ d_i คือเวกเตอร์ของดิกรีอิสระที่จุดต่อซึ่งวัดในทิศทางเดียวกันกับพิกัดรวม (global coordinate)

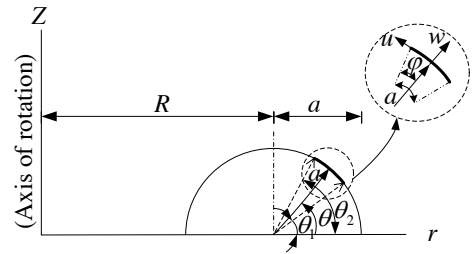
7. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทที่มีความสมมาตรตามแนวแกนรัศมีถูกนำมาพิจารณาภายใต้เงื่อนไขของการรับแรงดันจากภายในและภายนอกซึ่งจะทำให้พื้นผิวของโครงสร้างเกิดการเปลี่ยนแปลงเฉพาะเส้นเมอร์ริเดียนเท่านั้น ดังนั้นการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะสามารถทำได้โดยการจำลองโครงสร้างเปลือกบางไว้แรงดัดด้วยชิ้นส่วนของคานแบบ 1 มิติ และแบ่งเป็นชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ ตามแนวพิกัด θ ดังแสดงในรูปที่ 3 ดังนั้นเมื่อพิจารณาชิ้นส่วนใดๆ จะได้ว่าค่าการประมาณค่าการเคลื่อนที่ ณ จุดต่างๆ บนชิ้นส่วนย่อยจะสามารถทำได้โดยการกำหนดให้แต่ละจุดหัวของชิ้นส่วนย่อยมีดิกรีอิสระเท่ากับ 4 และใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่สาม (cubic polynomial) เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่เพื่อหาฟังก์ชันรูปร่าง (shape functions) และประมาณค่าการเสียรูปในแนวสัมผัส u และแนวตั้งฉาก w ดังสมการ

$$\{g\} = [\psi] \{d\} \quad (35)$$

โดยที่ $[\psi]$ คือเมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม ซึ่งจะมีค่าดังสมการต่อไปนี้

$$[\psi] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & | \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & | \\ N_{1,\varphi} & 0 & N_{2,\varphi} & 0 & | \\ 0 & N_{1,\varphi} & 0 & N_{2,\varphi} & | \\ | & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ | & 0 & N_3 & 0 & N_4 \\ | & N_{3,\varphi} & 0 & N_{4,\varphi} & 0 \\ | & 0 & N_{3,\varphi} & 0 & N_{4,\varphi} \end{bmatrix} \quad (36)$$



รูปที่ 3 การแบ่งชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัท

$$\text{โดยที่ } N_1 = 1 - 3\frac{\varphi^2}{\alpha^2} + 2\frac{\varphi^3}{\alpha^3} \quad (37)$$

$$N_2 = \varphi - 2\frac{\varphi^2}{\alpha} + \frac{\varphi^3}{\alpha^2} \quad (38)$$

$$N_3 = 3\frac{\varphi^2}{\alpha^2} - 2\frac{\varphi^3}{\alpha^3} \quad (39)$$

$$N_4 = -\frac{\varphi^2}{\alpha} + \frac{\varphi^3}{\alpha^2} \quad (40)$$

$$\text{และ } N_{1,\varphi} = \frac{6}{\alpha} \left(-\frac{\varphi}{\alpha} + \frac{\varphi^2}{\alpha^2} \right) \quad (41)$$

$$N_{2,\varphi} = 1 - 4\frac{\varphi}{\alpha} + 3\frac{\varphi^2}{\alpha^2} \quad (42)$$

$$N_{3,\varphi} = \frac{6}{\alpha} \left(\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\varphi^2}{\alpha^2} \right) \quad (43)$$

$$N_{4,\varphi} = -2\frac{\varphi}{\alpha} + 3\frac{\varphi^2}{\alpha^2} \quad (44)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าสมการที่ (35) ลงไปในสมการที่ (34) จะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \left[[k] + \frac{1}{2}[n^I] + \frac{1}{3}[n^2] \right] [\psi] t D d\theta \{d\} \\ + \frac{P_o}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \left[[v^K] + \frac{1}{2}[v^N] \right] [\psi] d\theta \{d\} \\ + \frac{P_o}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \{v^c\} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

เนื่องจากดิกรีอิสระเฉพาะที่ (local degree of freedom) $\{d\}$ เหมือนกับดิกรีอิสระรวม (global degree of freedom) $\{Q\}$ ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (45) ซึ่งจะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \left[[K] + \frac{1}{2}[N_1] + \frac{1}{3}[N_2] + \frac{P_o}{3} \left([VK] + \frac{1}{2}[VN] \right) \right] \{Q\} \\ + \frac{P_o}{3} \{VC\} = \{0\} \end{aligned} \quad (46)$$

เนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทที่มีความสมมาตรตามแนวแกนรัศมีถูกนำมาพิจารณา ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งอิควเอเตอร์ด้านใน (intrados equator) และด้านนอก (extrados equator) ของโครงสร้างเปลือกบางจะมีค่าดังนี้

$$u=0 \quad (47)$$

โดยที่ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นดังแสดงในสมการที่ (37) จะต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเนื่องจากความสมมาตรตามแนวแกนรัศมีจากสมการที่ (38) จึงจะสามารถคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้ด้วยวิธีการวนการทำซ้ำ

8. ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขและการอภิปรายผล

การศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งลักษณะของปัญหาดังกล่าวสามารถคำนวณได้โดยการประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ของ Jiammeepreecha และคณะ [19] โดยที่คุณสมบัติของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับการคำนวณในครั้งนี้จะใช้ตามตารางที่ 1 ทำการทดสอบการเข้าสู่ของค่าการเสียรูปในแนวนรัศมีซึ่งจะทำให้ได้จำนวนชิ้นส่วนย่อยที่มีความเหมาะสมดังแสดงในตารางที่ 2 เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าความถูกต้องสูงสุด ซึ่งจะพบว่าถ้าใช้จำนวนชิ้นส่วนย่อยระหว่าง 36 กับ 40 ชิ้นส่วนจะให้ค่าความแตกต่างของการเสียรูปในแนวนรัศมีที่ตำแหน่งอิควเอเตอร์ด้านในและด้านนอกน้อยกว่าร้อยละ 0.01 ดังนั้นงานวิจัยนี้จะเลือกใช้แบบจำลองที่มีจำนวนชิ้นส่วนย่อยเท่ากับ 36 ชิ้นเพื่อความถูกต้องของผลการวิเคราะห์แบบไม่เป็นเชิงเส้นในลำดับต่อไป

ตารางที่ 1 ข้อมูลและคุณสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

รายการ	ปริมาณ
ความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงโดนัท (R)	6 m
ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัท (a)	4 m
ความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง (t)	0.075 m
แรงดันคงที่ (p_0)	5×10^6 N/m ²
โมดูลัสยืดหยุ่น (E)	2×10^{11} N/m ²
อัตราส่วนปัวส์ซอง (ν)	0.3

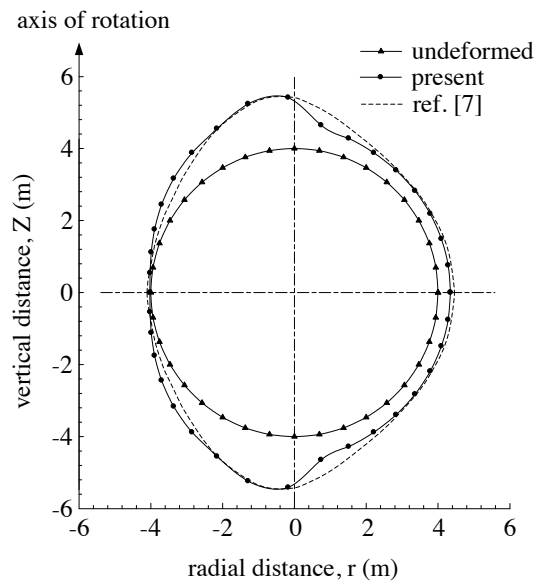
ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบการเข้าสู่ของค่าการเสียรูปในแนวนรัศมี

จำนวนชิ้นส่วนย่อย	$\Delta r_{\text{intrados}}$ (m)	$\Delta r_{\text{extrados}}$ (m)
20	0.000 266 70	0.003 463 07
24	0.000 266 74	0.003 464 89
28	0.000 266 81	0.003 465 38
32	0.000 266 79	0.003 465 80
36	0.000 266 75	0.003 466 05
40	0.000 266 73	0.003 466 21

จากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับสูตรของ Roark [20] สำหรับกรณีที่โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทรับแรงดันภายในแบบคงที่คือ

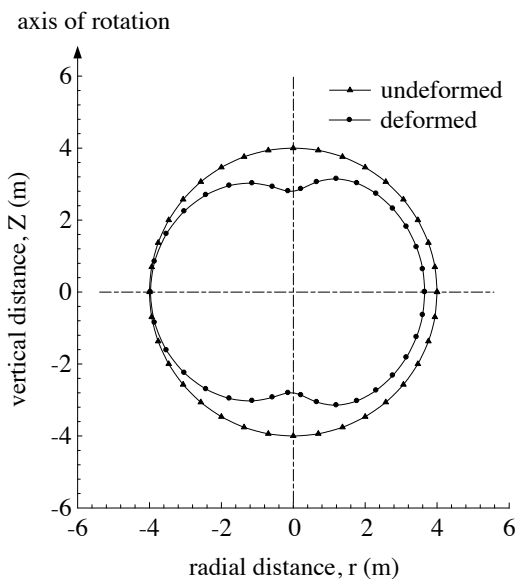
$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{p_0 a}{E t} [r - \nu(r+R)] \quad (48)$$

ซึ่งจะพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน โดยที่ค่าระยะการเสียรูปในแนวนรัศมีที่ตำแหน่งอิควเอเตอร์ด้านในและด้านนอกคือ 0.00026667 และ 0.00346667 เมตร และมี ค่าความแตกต่างจะอยู่ที่ร้อยละ 0.0375 และ 0.0202 สำหรับตำแหน่งอิควเอเตอร์ด้านในและด้านนอกตาม ลำดับ

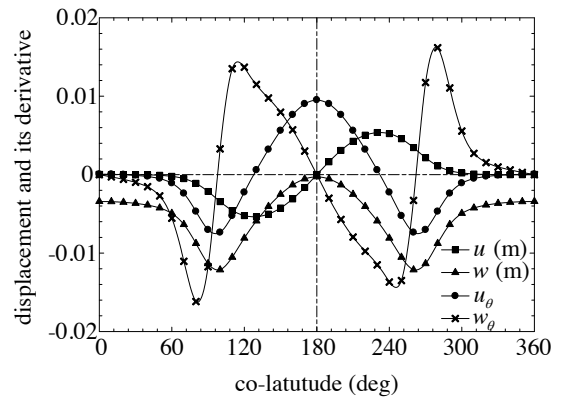


รูปที่ 4 รูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันภายในแบบคงที่ (ตัวคูณขยายการเสียรูป = 100)

นอกจากนี้ยังทำการเปรียบเทียบรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทที่สภาวะหลังการเสียรูปกับงานวิจัยของ Sanders และ Liepins [7] ดังแสดงในรูปที่ 4 ซึ่งจะพบว่ามีการเสียรูปมีลักษณะใกล้เคียงกัน แต่จะมีความแตกต่างกันในบริเวณจุดสูงสุด ($\theta = 90^\circ$) และจุดต่ำสุด ($\theta = -90^\circ$) ของโครงสร้างเนื่องจากความปัญหาที่ไม่สามารถหาค่าได้ (singularity) ในทอมของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป (strain-displacement relations) ซึ่งทำให้เกิดลักษณะความไม่ต่อเนื่องของค่าการเสียรูป [21] สำหรับการศึกษาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทนั้นสามารถกระทำได้โดยการให้โครงสร้างดังกล่าวรับแรงดันจากภายนอกที่มีค่าคงที่คือ 5 เมกะปาสคาล เช่นเดียวกัน ซึ่งผลการวิเคราะห์จะพบว่ารูปร่างของโครงสร้างที่สภาวะหลังการเสียรูปจะมีความไม่ต่อเนื่องของค่าการเสียรูปที่ตำแหน่งจุดสูงสุดและจุดต่ำสุด ดังแสดงในรูปที่ 5 ซึ่งจะสอดคล้องกับการณีของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทแรงดันภายในดังแสดงในรูปที่ 4 และค่าระยะการเสียรูปสูงสุดในแนวเส้นสัมผัสกับแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทจะเกิดขึ้นที่บริเวณช่วง θ มีค่าประมาณ ± 120 องศา ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 5 รูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันภายนอกแบบคงที่ (ตัวคูณขยายการเสียรูป = 100)



รูปที่ 6 ผลการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันภายนอกแบบคงที่

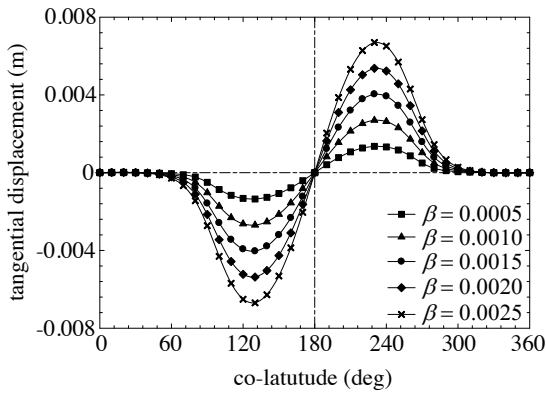
จากข้อมูลที่แสดงในตารางที่ 1 จะทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ส่งผลต่อการตอบสนองทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทโดยทำการแปรเปลี่ยนค่าแรงดันจากภายนอก, ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัท และความหนาของโครงสร้าง ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

8.1 ผลของแรงดันจากภายนอกที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท

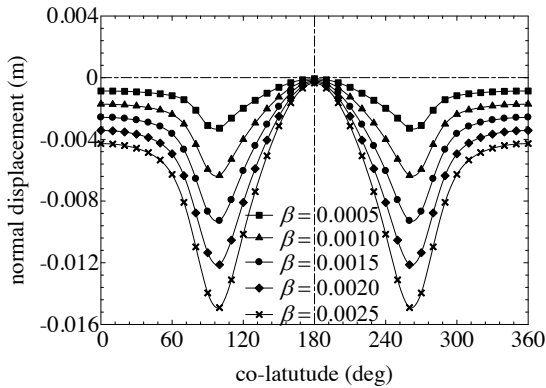
สำหรับการศึกษาผลของแรงดันจากภายนอกที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท โดยการแปรเปลี่ยนค่าแรงดันจากภายนอกให้อยู่ในรูปของทอมไร้มิตคือ $\beta = p_0 R / E t$ ซึ่งมีค่าแปรเปลี่ยนตั้งแต่ 0.0005 ถึง 0.0025 ดังแสดงในรูปที่ 7 ซึ่งผลการวิเคราะห์จะพบว่าระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางแบบไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อ $\beta = p_0 R / E t$ มีค่าเพิ่มสูงขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเมื่อแรงดันจากภายนอกมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้ค่าการเสียรูปที่ขนาดเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย

8.2 ผลของความหนาของโครงสร้างที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท

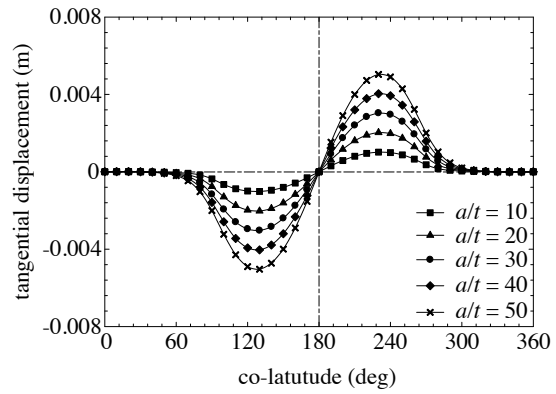
ในกรณีนี้จะทำการศึกษาผลกระทบของอัตราส่วนความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทต่อความหนาของโครงสร้าง ซึ่งจะทำให้ได้โดยการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนดังกล่าวตั้งแต่ 10 ถึง 50 โดยที่ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทเป็นค่าคงที่ดังแสดงในตารางที่ 1



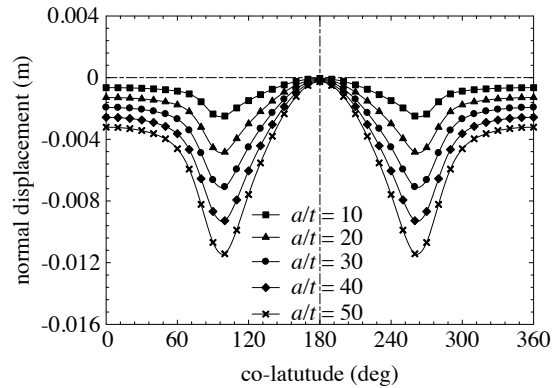
(ก) การเสียรูปในแนวเส้นสัมผัส



(ข) การเสียรูปในแนวเส้นตั้งฉาก



(ก) การเสียรูปในแนวเส้นสัมผัส



(ข) การเสียรูปในแนวเส้นตั้งฉาก

รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วน $\beta = p_0 R / E t$ ที่มีต่อการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท

รูปที่ 8 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วน a/t ที่มีต่อการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท

ผลการวิเคราะห์จะพบว่าระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางแบบไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วน a/t มีค่าสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 8

8.3 ผลของความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท

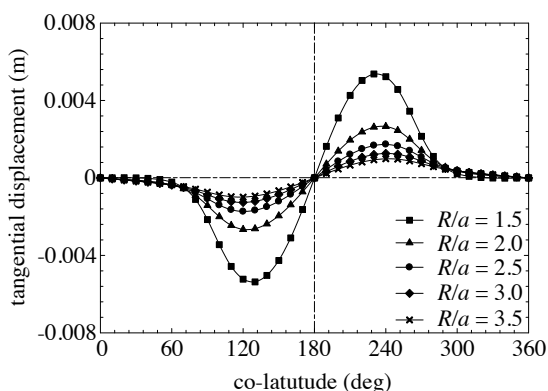
ค่าพารามิเตอร์สุดท้ายที่จะทำการศึกษาคือ ผลกระทบของอัตราส่วนความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงโดนัทต่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัท ตั้งแต่ 1.5 ถึง 3.5 โดยที่ค่าความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงโดนัทเป็นค่าคงที่ดังแสดงในตารางที่ 1 ซึ่งผลการวิเคราะห์จะพบว่าระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือก

บางแบบไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วน a/t มีค่าลดลงดังแสดงในรูปที่ 9 แสดงว่าค่าความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทที่มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเท่าเดิม ซึ่งทำให้ได้ผลที่สอดคล้องกับการศึกษาในหัวข้อเรื่องย่อย 8.2 สำหรับกรณีการเปลี่ยนแปลงค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทต่อความหนาของโครงสร้าง

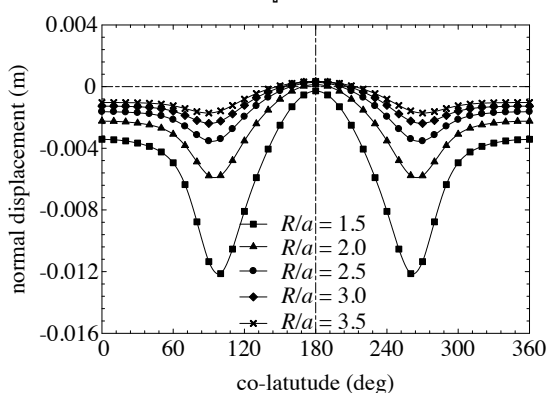
9. สรุป

การศึกษาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงรูปทรงโดนัทที่มีความสมมาตรตามแนวแกนและไม่มีการดัดกันรอบแกนหมุนภายใต้แรงดันกระทำจากภายนอกโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน ซึ่งปัญหาสามารถเขียนได้ในรูปแบบการแปรผันและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณการเสียรูปทาง

สถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัท
สามารถสรุปได้ดังนี้



(ก) การเสียรูปในแนวเส้นสัมผัส



(ข) การเสียรูปในแนวเส้นตั้งฉาก

รูปที่ 9 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วน R/a ที่มีต่อการเสียรูป
ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท

1. ค่าระยะการเสียรูปสูงสุดในแนวเส้นสัมผัสกับแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทจะเกิดขึ้นที่จุดสูงสุดและต่ำสุดในช่วงบริเวณด้านในของโครงสร้าง
2. ผลของแรงดันจากภายนอก, ความหนาของโครงสร้าง และความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทจะส่งผลกระทบโดยตรงต่อระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัท
3. ปัญหาความไม่ต่อเนื่องของระยะการเสียรูปที่ตำแหน่งบนสุดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทควรพิจารณาหาทฤษฎีเซลล์เฉพาะตำแหน่งดังกล่าวเพื่อให้เพื่อให้ค่าการเสียรูปมีความต่อเนื่อง

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล
อีสานที่ได้สนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Nordell, W.J. and Crawford, J.E. 1971. Analysis of behavior of unstiffened toroidal shells. Proceedings of the 1971 Symposium of the International Association for Shell Structures Pacific Symposium Part 1, 1971: 304-314.
- [2] Blachut, J. 2004. Buckling and First Ply Failure of Composite Toroidal Pressure Hull. Computers and Structures, 82: 1981-1992.
- [3] Wang, X.H. and Redekop, D. 2005. Natural Frequencies and Mode Shapes of an Orthotropic Thin Shell of Revolution. Thin-Walled Structures, 43: 735-750.
- [4] Timoshenko, S. 1940. Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, United States.
- [5] Clark, R.A. 1950. On the Theory of Thin Elastic Toroidal Shells. Journal of Mathematics and Physics, 29: 146-178.
- [6] Jordan, P.F. 1962. Stresses and Deformations of the Thin-Walled Pressurized Torus. Journal of Aerospace Science, 29: 213-225.
- [7] Sanders Jr, J.L. and Liepins, A. 1963. Toroidal Membrane under Internal Pressure. AIAA Journal, 1: 2105-2110.
- [8] Kydonieffs, A.D. and Spencer, A.J.M. 1967. The Finite Inflation of an Elastic Toroidal Membrane of Circular Cross Section. International Journal of Engineering Science, 5: 367-391.
- [9] Wilson, E.L., Hsueh, T.M. and Jones, L.R. 1971. Nonlinear analysis of deep ocean structures. Proceedings of the 1971 Symposium of the International Association for Shell Structures Pacific Symposium Part 1, 1971: 457-474.
- [10] Sun, B. 2010. Closed-Form Solution of

- Axisymmetric Slender Elastic Toroidal Shells. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 136: 1281-1288.
- [11] Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T. 2014. Nonlinear Static Analysis of an Axisymmetric Shell Storage Container in Spherical Polar Coordinates with Constraint Volume. Engineering Structures, 68: 111-120.
- [12] Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T. 2015. Parametric Study of an Equatorially Anchored Deepwater Fluid-Filled Periodic Symmetric Shell with Constraint Volume. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 141: 04015019.
- [13] Langhaar, H.L. 1964. Foundations of Practical Shell Analysis, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, United States.
- [14] Rajasekaran, S. and Murray, D.W. 1973. Incremental Finite Element Matrices. ASCE Journal of the Structural Division, 99: 2423-2438.
- [15] Chen, J.S. and Huang, T. 1985. Appropriate Forms in Nonlinear Analysis. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 111: 1215-1226.
- [16] Langhaar, H.L. 1962. Energy Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, New York, United States.
- [17] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. and Witt, R.J. 2002. Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, New York, United States.
- [18] Mase, G.T. and Mase, G.E. 1999. Continuum Mechanics for Engineers, CRC Press, Florida, United States.
- [19] วีรพันธุ์ เจริญมีปรีชา, สมชาย ชูชีพสกุล และ Tseng Huang. 2557. การวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนติดตั้งในทะเลลึก. วารสารวิจัยและพัฒนา มจร. 37: 239-255.
- [20] Young, W.C. and Budynas, R.G. 2002. Roark's Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill, New York, United States.
- [21] Vick, M.J. and Gramoll, K. 2012. Finite Element Study on the Optimization of an Orthotropic Composite Toroidal Shell. ASME Journal of Pressure Vessel Technology, 134: 051201.