

ความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่น - ความเค้นดัด และอัตราส่วนทางเรขาคณิต ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตรขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น

Relationship between Deflection - Bending Stress and Geometric Ratio of Symmetrically Laminated Plates with Four Edges Clamped

กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข* ณัฐพงษ์ กุลท้วม เอกนรินทร์ ระลathi

Kullasup Phongsrisuk* Nuttapong Kultuam Eknarin Ralathi

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา เชียงใหม่ 50300

Department of Mechanical Engineering, Rajamangala University of Technology Lanna, Chiangmai 50300

Tel : 0-5392-1444 E-mail: phongsrisuk@gmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตรขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น รับแรงกระจายแบบสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น โดยใช้วิธีค้นโตโรวิชในการคำนวณระยะการแอ่นและความเค้นดัดของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ ที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0]_4$, $[90]_4$, $[0/90]_s$ และ $[90/0]_s$ และมีการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิตตั้งแต่ 1:1 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1 จนกระทั่งระยะการแอ่นและความเค้นดัดมีค่าลู่เข้า จากนั้นนำระยะการแอ่นกับความเค้นดัดและอัตราส่วนทางเรขาคณิตมาสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิตโดยวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย จากผลการศึกษาพบว่าสมการแสดงความสัมพันธ์ที่ได้เป็นสมการโพลิโนเมียลลำดับที่ 9

คำหลัก ระยะการแอ่น ความเค้นดัด วัสดุเชิงประกอบรองรับแบบยึดแน่น วิธีวิเคราะห์แบบถดถอย

Abstract

The purpose of this research is to study the relationship between deflections and geometric ratios, and between bending stresses and geometric ratios of symmetrically laminated plates with four

edges clamped. The composite plates are subjected to a uniformly distributed load. The deflection and bending stress of $[0]_4$, $[90]_4$, $[0/90]_s$ and $[90/0]_s$ composite plates are calculated by the Kantorovich method. The variations of the geometric ratio are from 1:1, increasing in steps of 0.1, until the deflection and bending stress converged. The regression analysis method then is used to generate the estimation equations of the relationship between deflection and geometric ratio, and between bending stress and geometric ratio. The result found that the estimation equations are the 9th polynomial equation.

Keyword: deflection, bending stress, composite material, clamped, regression analysis

1. บทนำ

ปัจจุบันวัสดุเชิงประกอบได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก เนื่องจากมีคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ดีกว่าวัสดุทั่วไป อาทิเช่น มีความแข็งแรงต่อน้ำหนักสูง ทนต่อการกัดกร่อน ทนต่อการสึกหรอ นอกจากนี้ยังสามารถออกแบบให้ได้คุณสมบัติตามที่ต้องการ ในงานวิศวกรรมวัสดุเชิงประกอบโดยมากถูกนำมาใช้ในลักษณะของแผ่น บางกรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบอาจถูกนำมาใช้ในการรับภาระกระทำตั้งฉากกับแผ่น ซึ่งจะทำให้แผ่นวัสดุเชิงประกอบเกิดระยะการแอ่น และเกิดความเสียหายเมื่อความเค้น

เนื่องจากภาระที่กระทำมีค่าสูงถึงขีดจำกัดความเค้นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ ดังนั้นการหาระยะการแอ่นและความเค้นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบจึงมีความสำคัญในงานวิศวกรรม สมการสำหรับการหาระยะการแอ่นและความเค้นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations: PDEs) ซึ่งสามารถหาคำตอบจากวิธีแม่นตรง (exact method) ได้ก็ต่อเมื่อแผ่นวัสดุเชิงประกอบมีขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบอย่างง่าย หากแผ่นวัสดุเชิงประกอบมีขอบรองรับแบบอื่นวิธีการประมาณ (approximate method) จะถูกนำมาใช้ ระยะการแอ่นและความเค้นที่ได้จากวิธีการประมาณจะไม่อยู่ในรูปของสมการ ทำให้ในทางปฏิบัติที่มีการนำแผ่นวัสดุเชิงประกอบมาใช้ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิต (geometric ratio) ต่าง ๆ ต้องหาระยะการแอ่นและความเค้นจากวิธีการประมาณใหม่

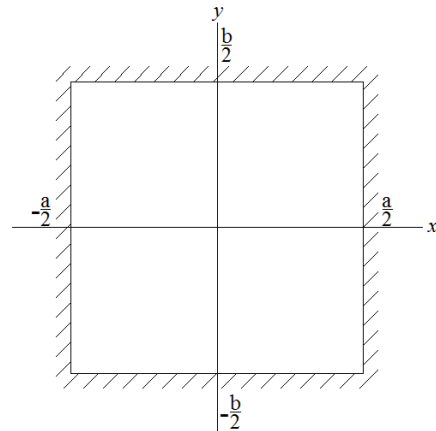
ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้นจึงได้มีการนำวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย (regression analysis) มาสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต ของแผ่นวัสดุไอโซทรอปิก (isotropic plate) [1] ที่มีขอบสามด้านรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกด้านรองรับแบบยึดแน่น (CFFF) ขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกสองด้านรองรับแบบยึดแน่นและแบบอย่างง่าย (CFSF) ขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกสองด้านรองรับแบบอย่างง่าย (SFSF) ซึ่งการศึกษายังจำกัดอยู่ที่แผ่นวัสดุไอโซทรอปิก งานวิจัยนี้จึงต้องการศึกษาการนำวิธีวิเคราะห์แบบถดถอยมาสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิตของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ

2. ทฤษฎี

2.1 วิธีคันทอร์วิช (The Kantorovich method) [2]

วิธีคันทอร์วิชเป็นวิธีการประมาณที่สามารถลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations: ODEs) จากนั้นใช้วิธีการคำนวณแบบทำซ้ำ เพื่อทำให้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ

สมการที่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบจะถูกนำมาหาระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ ระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตร ดังแสดงในรูปที่ 1 สมการควบคุมจะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังแสดงในสมการ (1)



รูปที่ 1 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} q w dx dy \right\} = 0 \quad (1)$$

โดย a	คือ ความกว้างด้าน x
b	คือ ความกว้างด้าน y
D_{ij}	คือ สติฟเนสของวัสดุเชิงประกอบ
i	คือ 1, 2, 3, ..., 6
j	คือ 1, 2, 3, ..., 6
w	คือ ระยะการแอ่น
q	คือ แรงกระจายแบบสม่ำเสมอกระทำตั้งฉากกับแผ่น

กำหนดผลเฉลยให้อยู่ในรูป $w(x, y) = X(x)Y(y)$ แทนผลเฉลยในสมการ (1)

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right) \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right) + D_{26} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right] dx dy - \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} qXY dx dy \right\} = 0 \quad (2)$$

พิจารณา $X(x)$ สามารถเขียนสมการ (2) ได้เป็น

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} S_{1x} D_{11} Y^2 + 2S_{2x} D_{12} Y \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) + S_{3x} D_{22} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 + 4S_{4x} D_{66} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + 4S_{5x} D_{16} Y \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) + 4S_{6x} D_{26} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) dy - \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} S_{7x} qY dy \right\} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{โดย } S_{1x} &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)^2 dx & S_{2x} &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx \\ S_{3x} &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X^2 dx & S_{4x} &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 dx \\ S_{5x} &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) dx & S_{6x} &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) dx \\ S_{7x} &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X dx \end{aligned}$$

ใช้วิธีแปรผัน (variation method) และการอินทิเกรตแยกส่วน (integration by part) สมการ (3) สามารถเขียนสมการควบคุม ได้ดังสมการ (4)

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} + 2k_1 \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2 Y = q_y \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{โดย } k_1 &= \left(\frac{S_{2x} D_{12} - 2S_{4x} D_{66}}{S_{3x} D_{22}} \right) \\ k_2 &= \frac{S_{1x} D_{11}}{S_{3x} D_{22}} \\ q_y &= \frac{S_{7x} q}{S_{3x} D_{22}} \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยสมการ (4) กรณีที่ $k_1 > 0$ และ $(k_1^2 - k_2) > 0$ ได้ดังสมการ (5.1)

$$Y(y) = C_{1y} \cos(q_1 y) + C_{2y} \cos(q_2 y) + \frac{q_y}{k_2} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{โดย } q_1 &= \sqrt{k_1 + \sqrt{k_1^2 - k_2}} \\ q_2 &= \sqrt{k_1 - \sqrt{k_1^2 - k_2}} \end{aligned}$$

กรณีที่ $k_1 < 0$ หรือ $k_1 > 0$ และ $(k_1^2 - k_2) < 0$ สามารถเขียนผลเฉลยสมการ (4) ได้ดังสมการ (5.2)

$$\begin{aligned} Y(y) &= C_{1y} \cos(q_2 y) \cosh(q_1 y) \\ &+ C_{2y} \sin(q_2 y) \sinh(q_1 y) + \frac{q_y}{k_2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{โดย } q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{k_2} - k_1} \\ q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{k_2} + k_1} \end{aligned}$$

ส่วนกรณีที่ $k_1 < 0$ และ $0 < k_2 < k_1^2$ สามารถเขียนผลเฉลยสมการ (4) ได้ดังสมการ (5.3)

$$Y(y) = C_{1y} \cosh(q_1 y) + C_{2y} \cosh(q_2 y) + \frac{q_y}{k_2} \quad (5.3)$$

$$\text{โดย } q_1 = \sqrt{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - k_2}} \\ q_2 = \sqrt{-k_1 - \sqrt{k_1^2 - k_2}}$$

ในทำนองเดียวกันสมการ (2) เมื่อพิจารณา $Y(y)$ สามารถเขียนสมการควบคุม ได้ดังสมการ (6)

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + 2k_3 \frac{d^2 X}{dx^2} + k_4 X = q_x \quad (6)$$

$$\text{โดย } k_3 = \left(\frac{S_{2y} D_{12} - 2S_{4y} D_{66}}{S_{3y} D_{11}} \right)$$

$$k_4 = \frac{S_{1y} D_{22}}{S_{3y} D_{11}}$$

$$q_x = \frac{S_{7y} q}{S_{3y} D_{11}}$$

$$S_{1y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 dy \quad S_{2y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(Y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) dy$$

$$S_{3y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y^2 dy \quad S_{4y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 dy$$

$$S_{5y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) dy \quad S_{6y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) dy$$

$$S_{7y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y dy$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยสมการ (6) ได้เป็นสมการ (7.1) (7.2) และ (7.3) ตามลำดับ

$$X(x) = C_{1x} \cos(p_1 x) + C_{2x} \cos(p_2 x) + \frac{q_x}{k_4} \quad (7.1)$$

$$X(x) = C_{1x} \cos(p_2 x) \cosh(p_1 x) \\ + C_{2x} \sin(p_2 x) \sinh(p_1 x) + \frac{q_x}{k_4} \quad (7.2)$$

$$X(x) = C_{1x} \cosh(p_1 x) + C_{2x} \cosh(p_2 x) + \frac{q_x}{k_4} \quad (7.3)$$

เพื่อให้ผลเฉลยสมการ (5) และสมการ (7) มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ ($dY/dy=0$, $Y=0$ และ ($dX/dx=0$, $X=0$) [3] ตามลำดับ จึงทำการคำนวณแบบทำซ้ำ ซึ่งมีหลักการดังนี้

- (1) กำหนดสมการเริ่มต้นสำหรับการคำนวณแบบทำซ้ำ โดยสมการเริ่มต้นอาจไม่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ แต่ถ้าสมการเริ่มต้นมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ การคำนวณแบบทำซ้ำจะมีการลู่เข้าของผลเฉลยเร็วขึ้น [4] ในกรณีสมการเริ่มต้นเป็นฟังก์ชัน x ให้คำนวณค่า k_1 และ k_2
- (2) เลือกสมการผลเฉลย (5.1) - (5.3) ตามกรณีของ k_1 และ k_2
- (3) แทนสมการผลเฉลยที่ได้จากข้อ (2) ในเงื่อนไขขอบจะทำให้ได้ฟังก์ชัน $Y(y)$ จากนั้นคำนวณระยะการแอ่นจากสมการ $w(x, y) = X(x)Y(y)$
- (4) คำนวณค่า k_3 และ k_4 จากฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่ได้จากข้อ (3)
- (5) เลือกสมการผลเฉลย (7.1) - (7.3) ตามกรณีของ k_3 และ k_4
- (6) แทนสมการผลเฉลยที่ได้จากข้อ (5) ในเงื่อนไขขอบจะทำให้ได้ฟังก์ชัน $X(x)$ จากนั้นคำนวณระยะการแอ่นจากสมการ $w(x, y) = X(x)Y(y)$
- (7) เปรียบเทียบระยะการแอ่นที่ได้จากข้อ (3) และข้อ (6) หากค่าความคลาดเคลื่อนไม่อยู่ในเกณฑ์ที่กำหนด ให้ทำการคำนวณแบบทำซ้ำต่อไป โดยในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเท่ากับ 0%

ผลเฉลยสมการ (5) และสมการ (7) ที่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ สามารถหาโมเมนต์ดัด [5] ได้ดังสมการ (8)

$$M_y = S_{3x} D_{22} \frac{d^2 Y}{dy^2} + 2S_{6x} D_{26} \frac{dY}{dy} + S_{2x} D_{12} Y \quad (8.1)$$

$$M_x = S_{3y} D_{11} \frac{d^2 X}{dx^2} + 2S_{6y} D_{16} \frac{dX}{dx} + S_{2y} D_{12} X \quad (8.2)$$

โดย M_y คือ โมเมนต์ดัดทางด้าน y

M_x คือ โมเมนต์ดัดทางด้าน x

แทนโมเมนต์ดัดในสมการที่ (9.1) และ (9.2) เพื่อหาความเค้นดัดสูงสุด [6] ที่เกิดขึ้น

$$\sigma_y = \pm \frac{6M_y}{h^2} \quad (9.1)$$

$$\sigma_x = \pm \frac{6M_x}{h^2} \quad (9.2)$$

โดย σ_y คือ ความเค้นดัดทางด้าน y
 σ_x คือ ความเค้นดัดทางด้าน x
 h คือ ความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ

2.2 วิธีวิเคราะห์แบบถดถอย [7]

วิธีวิเคราะห์แบบถดถอยเป็นวิธีทางสถิติที่ใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเชิงปริมาณตั้งแต่สองตัวขึ้นไป เพื่อใช้ในการทำนายค่าของตัวแปรหนึ่งจากตัวแปรอื่นๆ ตัวแปรที่ใช้ในวิธีวิเคราะห์แบบถดถอยมีสองแบบใหญ่ๆ คือตัวแปรอิสระ (independent variable) กับตัวแปรตาม (dependent variable) โดยที่ตัวแปรอิสระนั้นเป็นตัวแปรที่ทราบค่า และตัวแปรอิสระนี้จะมีผลต่อตัวแปรตาม ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าและต้องการทำนายหรือต้องการหาความสัมพันธ์

กรณีที่ตัวแปรตามมีความสัมพันธ์ไม่เชิงเส้นกับตัวแปรอิสระ จะใช้สมการการถดถอยไม่เชิงเส้น (nonlinear regression) เป็นสมการในการทำนายความสัมพันธ์ในงานวิจัยนี้สมการการถดถอยแบบพหุนามลำดับที่ p จะถูกนำมาใช้ ดังแสดงในสมการ (8)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_p x_i^p + \varepsilon_i \quad (10)$$

โดย y_i คือ ตัวแปรตาม
 x_i คือ ตัวแปรอิสระ
 β_i คือ ค่าพารามิเตอร์ของสมการ
 ε_i คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการการถดถอยแบบพหุนามลำดับที่ p จะพิจารณาให้ผลรวมความแตกต่างระหว่างตัวแปรตามและค่าสังเกตของตัวแปรตามมีค่าน้อยที่สุด

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

โดย Q คือ ค่าผลรวมความแตกต่าง
 $\hat{y}_i$ คือ ค่าสังเกตของตัวแปรตาม

การทำให้ค่าผลรวมความแตกต่างมีค่าน้อยที่สุด ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ค่าผลรวมความแตกต่างเทียบกับค่าพารามิเตอร์ของสมการการถดถอยที่ได้จากค่าสังเกต

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i} = 0$$

โดย b_i คือ ค่าพารามิเตอร์ของสมการการถดถอยที่ได้จากค่าสังเกต

การที่จะตัดสินใจว่าสมการการถดถอยที่ได้นั้นมีความเหมาะสมหรือไม่ ค่าที่ใช้เป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจคือค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ

$$r^2 = \frac{SSR}{SST}$$

โดย r^2 คือ ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ซึ่งมีค่า

$$0 \leq r^2 \leq 1$$

$$SSR = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

3. วิธีการศึกษา

ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตร ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น จะใช้วิธีคันโตโรวิชในการคำนวณระยะการแอ่นและความเค้นดัดที่อัตราส่วนด้าน y ต่อด้าน x ตั้งแต่ 1.0: 1.0 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1 จนกระทั่งระยะการแอ่นและความเค้นดัดมีค่าเข้าสู่จากนั้นสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิตโดยวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย และทำการทวนสอบสมการแสดงความสัมพันธ์เพื่อตรวจสอบ

ความถูกต้อง โดยการนำอัตราส่วนทางเรขาคณิตมาแทนในสมการแสดงความสัมพันธ์ เพื่อหาระยะการแอ่นและความเค้นดัด จากนั้นเปรียบเทียบระยะการแอ่นและความเค้นดัดที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคั่นโตโรวิช

แผ่นวัสดุเชิงประกอบที่นำมาใช้ในงานวิจัยทำจากเคฟลาร์ (Kevlar) ที่มีคุณสมบัติทางกล $E_1=138$ GPa, $E_2=8.96$ GPa, $G_{12}=7.1$ GPa, $G_{23}=2.82$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{23}=0.59$ และ $\rho=1600$ kg/m³ โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบมีการเรียงชั้นแบบ $[0]_4$, $[90]_4$, $[0/90]_s$ และ $[90/0]_s$ และแต่ละชั้นมีความหนา 2.5 mm

4. ผลการศึกษา

(1) จากการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิต พบว่าเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าเพิ่มขึ้น ระยะการแอ่นจะมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงแรก และจากนั้นระยะการแอ่นจะมีค่าลู่เข้า ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90]_4$ ระยะการแอ่นจะมีค่าลู่เข้าช้ากว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90/0]_s$, $[0/90]_s$ และ $[0]_4$ ตามลำดับ เนื่องจากการเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตเป็นการเพิ่มความยาวทางด้าน y จึงทำให้ความยาวของเส้นใยในแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90]_4$ ซึ่งมีการเรียงเส้นใยในแนวแกน y มีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้ระยะการแอ่นมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง จนกระทั่งการเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตไม่ส่งผลต่อความยาวของเส้นใย ทำให้ระยะการแอ่นมีค่าลู่เข้า ส่วนแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0]_4$ การเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตจะไม่ส่งผลต่อความยาวของเส้นใยเนื่องจากเส้นใยมีการเรียงตัวในแนวแกน x ทำให้ระยะการแอ่นมีค่าลู่เข้าเร็วกว่า

(2) จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นและอัตราส่วนทางเรขาคณิต พบว่าความสัมพันธ์มีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ซึ่งสามารถเขียนสมการพหุนามแสดงความสัมพันธ์ พร้อมค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ได้เป็น

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0]_4$

$$w = 6.335 \times 10^{-9} n^9 - 1.843 \times 10^{-7} n^8 + 2.337 \times 10^{-6} n^7 - 1.690 \times 10^{-5} n^6 + 7.673 \times 10^{-5} n^5 - 2.259 \times 10^{-4} n^4 + 4.296 \times 10^{-4} n^3 - 5.061 \times 10^{-4} n^2 + 3.321 \times 10^{-4} n - 6.837 \times 10^{-5}$$

$$r^2 = 0.999$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0/90]_s$

$$w = -1.192 \times 10^{-8} n^8 + 3.309 \times 10^{-7} n^7 - 3.955 \times 10^{-6} n^6 + 2.655 \times 10^{-5} n^5 - 1.091 \times 10^{-4} n^4 + 2.802 \times 10^{-4} n^3 - 4.362 \times 10^{-4} n^2 + 3.727 \times 10^{-4} n - 1.057 \times 10^{-4}$$

$$r^2 = 1.000$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90/0]_s$

$$w = 6.769 \times 10^{-8} n^8 - 1.847 \times 10^{-6} n^7 + 2.172 \times 10^{-5} n^6 - 1.435 \times 10^{-4} n^5 + 5.805 \times 10^{-4} n^4 - 1.453 \times 10^{-3} n^3 + 2.136 \times 10^{-3} n^2 - 1.557 \times 10^{-3} n + 4.423 \times 10^{-4}$$

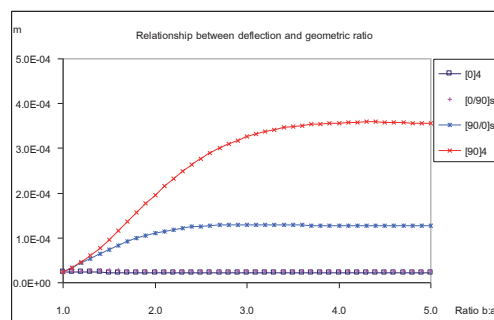
$$r^2 = 1.000$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90]_4$

$$w = -1.935 \times 10^{-7} n^8 + 4.879 \times 10^{-8} n^7 - 5.180 \times 10^{-5} n^6 + 2.985 \times 10^{-4} n^5 - 9.993 \times 10^{-4} n^4 + 1.911 \times 10^{-3} n^3 - 1.916 \times 10^{-3} n^2 + 9.660 \times 10^{-4} n - 1.904 \times 10^{-4}$$

$$r^2 = 1.000$$

โดย n คือ อัตราส่วนทางเรขาคณิต



รูปที่ 2 ระยะการแอ่นและอัตราส่วนทางเรขาคณิต

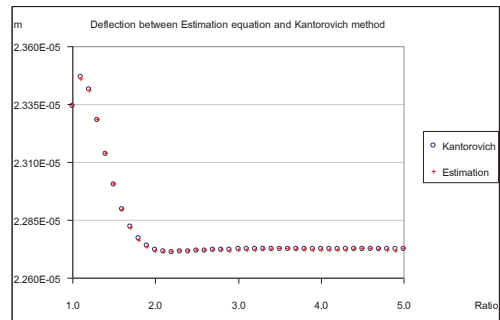
(3) จากการเปรียบเทียบระยะการแอ่นที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอโรวิช ตั้งแต่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 1.0:1.0 ถึง 1.0:5.0 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1 รวมเป็น 41 อัตราส่วน พบว่าระยะการแอ่นที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์มีความสอดคล้องกับระยะการแอ่นที่ได้จากวิธีคันทอโรวิช ดังแสดงในรูปที่ 3 โดยมีร้อยละของความคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 0.538

(4) จากการแปรผันอัตราส่วนทางเรขาคณิต พบว่าเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าเพิ่มขึ้น ความเค้นดัดจะมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงแรก และจากนั้นความเค้นดัดจะมีค่าลู่เข้า ดังแสดงในรูปที่ 4 โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90]_4$ ความเค้นดัดจะมีค่าลู่เข้าช้ากว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90/0]_8$, $[0/90]_8$ และ $[0]_4$ ตามลำดับ เนื่องจากการเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตทำให้ระยะการแอ่นของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90]_4$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ทำให้ความโค้ง (Curvature) ของส่วนโค้งมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ส่งผลให้โมเมนต์ดัดมีค่าเพิ่มขึ้น จึงทำให้ความเค้นดัดมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อการเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตไม่ส่งผลต่อระยะการแอ่น ระยะการแอ่นจึงมีค่าลู่เข้า ส่งผลให้ความโค้งของส่วนโค้งมีค่าลู่เข้า ทำให้โมเมนต์ดัดและความเค้นดัดมีค่าลู่เข้า ส่วนแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0]_4$ การเพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิตส่งผลต่อระยะการแอ่นเล็กน้อย ทำให้ระยะการแอ่นมีค่าลู่เข้าเร็ว ความโค้งของส่วนโค้งจึงมีค่าลู่เข้าเร็ว ทำให้โมเมนต์ดัดและความเค้นดัดมีค่าลู่เข้าเร็ว

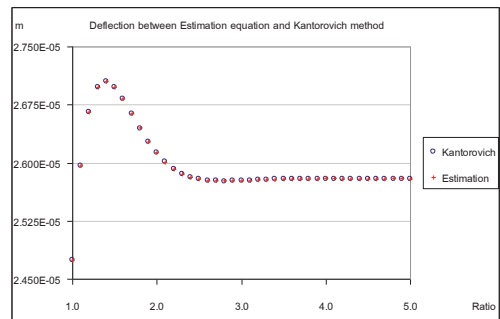
(5) ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นดัดและอัตราส่วนทางเรขาคณิตมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการพหุนามเมียร์ พร้อมค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ได้เป็น

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0]_4$

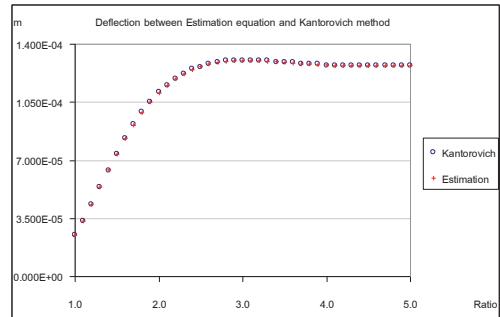
$$\begin{aligned}\sigma &= 118.692n^9 - 3.441 \times 10^3 n^8 + 43.427 \times 10^3 n^7 \\ &\quad - 312.430 \times 10^3 n^6 + 1.408 \times 10^6 n^5 - 4.111 \times 10^6 n^4 \\ &\quad + 7.737 \times 10^6 n^3 - 8.989 \times 10^6 n^2 + 5.788 \times 10^6 n \\ &\quad + 1.049 \times 10^6 \\ r^2 &= 0.999\end{aligned}$$



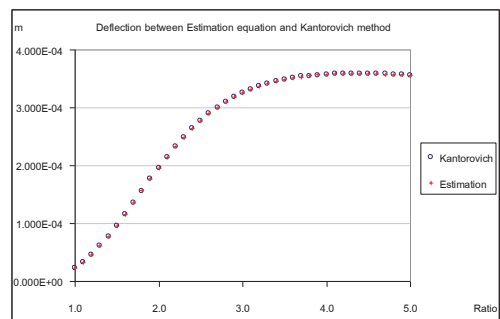
(ก) การเรียงชั้นแบบ $[0]_4$



(ข) การเรียงชั้นแบบ $[0/90]_8$



(ค) การเรียงชั้นแบบ $[90/0]_8$



(ง) การเรียงชั้นแบบ $[90]_4$

รูปที่ 3 ระยะการแอ่นที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอโรวิช

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ [0/90]_s

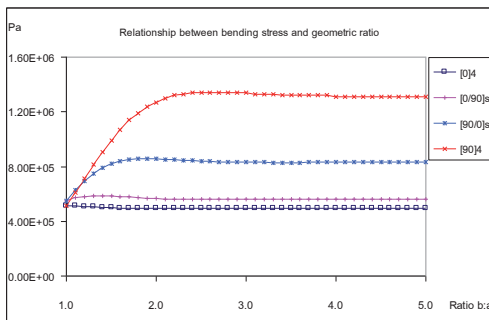
$$\begin{aligned}\sigma = & -245.365n^8 + 6.759 \times 10^3 n^7 - 80.135 \times 10^3 n^6 \\ & + 533.001 \times 10^3 n^5 - 2.169 \times 10^6 n^4 + 5.507 \times 10^6 n^3 \\ & - 8.466 \times 10^6 n^2 + 7.127 \times 10^6 n - 1.908 \times 10^6 \\ r^2 = & 1.000\end{aligned}$$

กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ [90/0]_s

$$\begin{aligned}\sigma = & 969.057n^8 - 24.081 \times 10^3 n^7 + 252.164 \times 10^3 n^6 \\ & + 1.438 \times 10^6 n^5 + 4.812 \times 10^6 n^4 - 9.366 \times 10^6 n^3 \\ & + 9.642 \times 10^6 n^2 - 3.711 \times 10^6 n + 381.694 \times 10^3 \\ r^2 = & 0.999\end{aligned}$$

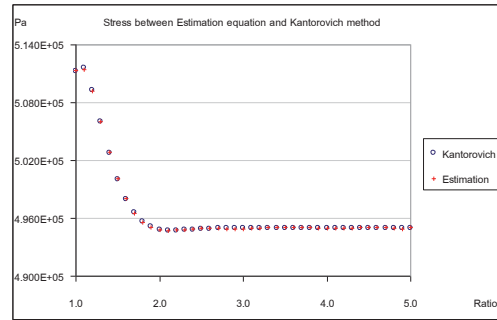
กรณีแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ [90]₄

$$\begin{aligned}\sigma = & -26.204n^8 - 2.179 \times 10^3 n^7 + 58.406 \times 10^3 n^6 \\ & - 583.627 \times 10^3 n^5 + 3.027 \times 10^6 n^4 - 8.764 \times 10^6 n^3 \\ & + 1.368 \times 10^7 n^2 - 9.669 \times 10^6 n + 2.757 \times 10^6 \\ r^2 = & 0.999\end{aligned}$$

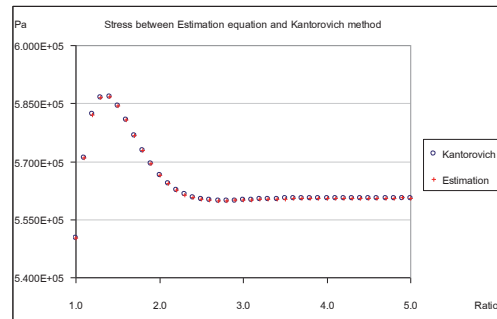


รูปที่ 4 ความเค้นดัดและอัตราส่วนทางเรขาคณิต

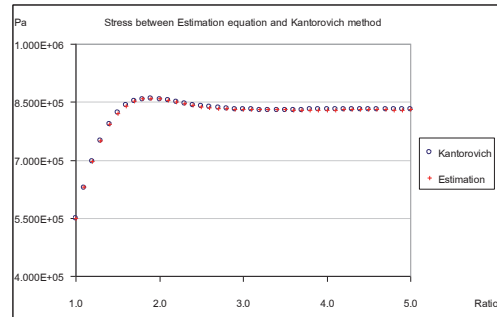
(6) จากการเปรียบเทียบความเค้นดัดที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอโรวิช ตั้งแต่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 1.0:1.0 ถึง 1.0:5.0 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 0.1 รวมเป็น 41 อัตราส่วน พบว่าความเค้นดัดที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์มีความสอดคล้องกับความเค้นดัดที่ได้จากวิธีคันทอโรวิช ดังแสดงในรูปที่ 5 โดยมีร้อยละของความคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 0.392



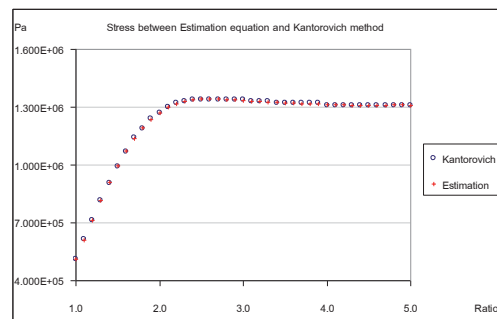
(ก) การเรียงชั้นแบบ [0]₄



(ข) การเรียงชั้นแบบ [0/90]_s



(ค) การเรียงชั้นแบบ [90/0]_s



(ง) การเรียงชั้นแบบ [90]₄

รูปที่ 5 ความเค้นดัดที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์และวิธีคันทอโรวิช

5. สรุปผลการศึกษา

(1) เมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าเพิ่มขึ้น ระยะการแอ่นและความเค้นดัดจะมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงแรก จากนั้นจะมีค่าลู่เข้า โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90]_4$ ระยะการแอ่นและความเค้นดัดจะมีค่าลู่เข้าช้ากว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[90/0]_8$, $[0/90]_8$ และ $[0]_4$ ตามลำดับ

(2) ความสัมพันธ์ระหว่างระยะการแอ่นกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต และความเค้นดัดกับอัตราส่วนทางเรขาคณิต สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียล อันดับ 9 ซึ่งสามารถใช้คำนวณระยะการแอ่นและความเค้นดัดตั้งแต่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 1.0:1.0 ถึง 1.0:5.0 ทำให้ในทางปฏิบัติที่มีการนำแผ่นวัสดุเชิงประกอบมาใช้ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตต่าง ๆ มีความสะดวกมากขึ้น เมื่อเทียบกับการใช้วิธีการประมาณ

symmetrically laminated composite square plate using the extended Kantorovich method. Proceedings of the 23rd conference of the mechanical engineering network of Thailand, Chiangmai, Thailand, Nov 4-7 2009.

[5] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข. การประมาณค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตร ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น. วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ ม.อ. 2557; 7(2):55-64.

[6] Chantaramungkorn K. Theory of Plates and shells, Chiangmai University. 1990.

[7] พิษณุ เจียวกุณ. การวิเคราะห์การถดถอย. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่. 2548.

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณ โครงการยกระดับปริญญาโทเป็นงานวิจัยตีพิมพ์ งานสร้างสรรค์ และงานบริการวิชาการสู่ชุมชน ประจำปี 2557 ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงที่ได้ให้การสนับสนุนงบประมาณตลอดโครงการวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- [1] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข, อาศิษ บุญยะประสงค์, กรกฎ รัชชภูมิ, ธนบดี รัชทรัพย์พันธ์. การศึกษาการเปลี่ยนพฤติกรรมแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคาน. วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. 2557; 21(2):21-29.
- [2] Ungbhakorn V., Wattanasakulpong N. Bending analysis of symmetrically laminated rectangular plates with arbitrary edge supports by the extended Kantorovich method. Thammasat Int. J. Sc.Tech. 2006; 11:33-44.
- [3] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells (2nd ed). McGraw-Hill, New York. 1959.
- [4] Phongsriruk K., Ingsuwan P., Rangsi W., Klongpanich W. Free vibration analysis of