

ปัจจัยที่มีผลต่อการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ เรียงชั้นแบบครอสพาย ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น

Effective Parameters of Bending-Mode Vibration of Cross-Ply Composite Plate with All Edges Clamped

กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข* ธนชภัค ขาวงาม พสิษฐ์ โขงสนั่น

Kullasup Phongsrisuk* Thanatchapak Khaongam Phasit Khongsanan

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา เชียงใหม่ 50300

Department of Mechanical Engineering, Rajamangala University of Technology Lanna, Chiangmai 50300

Tel : 0-5392-1444 E-mail: phongsrisuk@gmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาปัจจัยที่มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้ง ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบครอสพาย ที่มีการรองรับแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน โดยทำการแปรผันลักษณะการเรียงตัวของเส้นใย ความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบและอัตราส่วนทางเรขาคณิตในวิธีคันทอโรวิชและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากผลการศึกษาพบว่าลักษณะการเรียงตัวของเส้นใย ความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ไม่ส่งผลต่อรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งแต่จะส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเหมือนกันแต่มีความหนาต่างกัน จะมีค่าความถี่ธรรมชาติที่เพิ่มขึ้นเมื่อแผ่นวัสดุเชิงประกอบมีความหนาเพิ่มขึ้น ส่วนแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยต่างกันแต่มีความหนาเท่ากัน จะมีค่าความถี่ธรรมชาติลดลงเมื่อการเรียงตัวของเส้นใยขนานกับด้านที่เพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิต

คำหลัก ปัจจัย การสั่นสะเทือนแบบดัดโค้ง ความถี่ธรรมชาติ วัสดุเชิงประกอบ ยึดแน่น

Abstract

This research was to study the effective parameters of the natural frequencies and bending-mode vibrations of a cross-ply composite plate with all edges clamped. The fiber orientation, composite

plate thickness and geometric ratio were varied in the Kantorovich method and Finite Element Method. The results found that the fiber orientation, composite plate thickness and geometric ratio did not affect the bending-mode vibrations, but did affect the natural frequencies. With regard to a composite plate with the same fiber orientation, but with a different composite plate thickness, the natural frequencies increased when the composite plate thickness increased. For the composite plate with a different fiber orientation but with the same composite plate thickness, the natural frequencies decreased when the fiber orientation was parallel to the increasing geometric ratios.

Keyword: parameters, bending-mode vibration, natural frequency, composite material, clamped

1. บทนำ

วัสดุเชิงประกอบได้ถูกนำมาใช้ในงานวิศวกรรมอย่างแพร่หลาย ด้วยคุณสมบัติที่มีอัตราส่วนความแข็งแรงต่อน้ำหนักสูง ทนต่อการกัดกร่อน ทนต่อการสึกหรอ วัสดุเชิงประกอบโดยมากถูกนำมาใช้ในรูปของแผ่น บางครั้งแผ่นอาจรับภาระแบบสั่นสะเทือนซึ่งจะเกิดความเสียหายอย่างมาก ถ้าค่าความถี่ของภาระภายนอกตรงกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่น ดังนั้นการศึกษปัจจัยที่มี

ผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นจึงมีความสำคัญในงานวิศวกรรม

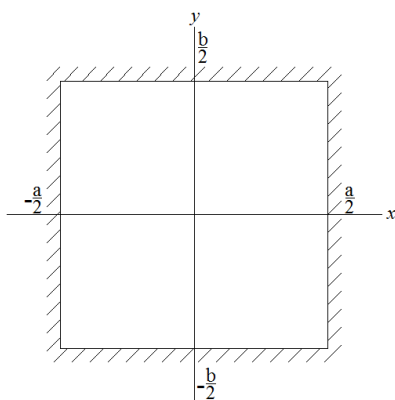
จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้นจึงได้มีการศึกษาผลของค่าความหนาแน่น ค่ามอดุลัสความยืดหยุ่นและค่าอัตราส่วนปัวซองส์ ที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิก (Isotropic) ขอบสองด้านตรงข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านรองรับแบบปล่อยอิสระ (CFCF) [1] ขอบสี่ด้านรองรับแบบปล่อยอิสระ (FFFF) [2] ซึ่งพบว่าถ้าค่าความหนาแน่นลดลงจะส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้น แต่ถ้าค่ามอดุลัสความยืดหยุ่นลดลงจะส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติลดลง ส่วนค่าอัตราส่วนปัวซองส์จะส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติเปลี่ยนแปลงน้อยมาก

งานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาค้นคว้าที่มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้ง ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการรองรับแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน โดยทำการแปรผันลักษณะการเรียงตัวของเส้นใย ความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบและอัตราส่วนทางเรขาคณิตในวิธีคันทอร์วิช และทำการทวนสอบผลการคำนวณที่ได้จากวิธีคันทอร์วิชด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

2. ทฤษฎี

2.1 วิธีคันทอร์วิช (The Kantorovich Method: KM)

พลังงานศักย์และพลังงานจลน์ของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตรดังแสดงในรูปที่ 1 เขียนสมการได้เป็น [3]



รูปที่ 1 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} m(\omega w)^2 dx dy \right\} dt = 0 \quad (1)$$

โดย a	คือ ความกว้างด้าน x
b	คือ ความกว้างด้าน y
D_{ij}	คือ สติฟเนสของวัสดุเชิงประกอบ
i	คือ 1, 2, 3, ..., 6
j	คือ 1, 2, 3, ..., 6
w	คือ ระยะการแอ่น
m	คือ มวลต่อพื้นที่ของวัสดุเชิงประกอบ
ω	คือ ความเร็วเชิงมุมธรรมชาติ

กำหนดผลเฉลยให้อยู่ในรูป $w(x, y) = X(x)Y(y)$ [4]
แทนผลเฉลยในสมการ (1)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right) \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right) + D_{26} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right] dx dy - \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} mX^2 Y^2 \omega^2 dx dy \right\} dt = 0 \quad (2)$$

พิจารณา $X(x)$ สามารถเขียนสมการ (2) ได้เป็น

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[S_{1x} D_{11} Y^2 + 2S_{2x} D_{12} Y \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + S_{3x}D_{22}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)^2 + 4S_{4x}D_{66}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \\
 & + 4S_{5x}D_{16}Y\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + 4S_{6x}D_{26}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right) \Big] dy \\
 & - \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} S_{3x}mY^2\omega^2 dx dy \Big\} dt = 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดย } S_{1x} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)^2 dx & S_{2x} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx \\
 S_{3x} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X^2 dx & S_{4x} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 dx \\
 S_{5x} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right) dx & S_{6x} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) dx
 \end{aligned}$$

ใช้วิธีแปรผัน (variation method) และการอินทิเกรตแยกส่วน (integration by part) สมการ (3) สามารถเขียนสมการควบคุมดังสมการ (4)

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} + B_1 \frac{d^2 Y}{dy^2} + B_2 Y = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดย } B_1 &= \left(\frac{2S_{2x}D_{12} - 4S_{4x}D_{66}}{S_{3x}D_{22}} \right) \\
 B_2 &= \left(\frac{S_{1x}D_{11} - S_{3x}m\omega^2}{S_{3x}D_{22}} \right)
 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยกรณีรูปร่างการสั่นสะท้อนแบบดัดโค้งสมมาตร (symmetry) และไม่สมมาตร (antisymmetry) ได้เป็นสมการ (5.1) และ (5.2) ตามลำดับ [5]

$$Y(y) = C_{1y} \cos(q_1 y) + C_{2y} \cosh(q_2 y) \quad (5.1)$$

$$Y(y) = C_{1y} \sin(q_1 y) + C_{2y} \sinh(q_2 y) \quad (5.2)$$

โดย q_1, q_2 คือ ตัวแปรความถี่ในทางแกน y ดังแสดงในสมการ (6) และ (7)

$$q_1^2 - q_2^2 = \frac{2S_{2x}D_{12} - 4S_{4x}D_{66}}{S_{3x}D_{22}} \quad (6)$$

$$q_1^2 q_2^2 = \frac{S_{3x}m\omega^2 - S_{1x}D_{11}}{S_{3x}D_{22}} \quad (7)$$

แทนเงื่อนไขขอบ ($dY/dy=0$ และ $Y=0$) [6] ในสมการ (5) ทำให้ได้ปัญหาค่าเฉพาะจาง (eigenvalue problem) กรณีรูปร่างการสั่นสะท้อนแบบดัดโค้งสมมาตรและไม่สมมาตรดังสมการ (8.1) และ (8.2) ตามลำดับ

$$q_2 \tanh\left(\frac{q_2 b}{2}\right) + q_1 \tan\left(\frac{q_1 b}{2}\right) = 0 \quad (8.1)$$

$$q_2 \coth\left(\frac{q_2 b}{2}\right) - q_1 \cot\left(\frac{q_1 b}{2}\right) = 0 \quad (8.2)$$

ในทำนองเดียวกันสมการ (2) เมื่อพิจารณา $Y(y)$ สามารถเขียนสมการควบคุมดังสมการ (9)

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + A_1 \frac{d^2 X}{dx^2} + A_2 X = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดย } A_1 &= \left(\frac{2S_{2y}D_{12} - 4S_{4y}D_{66}}{S_{3y}D_{11}} \right) \\
 A_2 &= \left(\frac{S_{1y}D_{22} - S_{3y}m\omega^2}{S_{3y}D_{11}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{1y} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)^2 dy & S_{2y} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} dy \\
 S_{3y} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y^2 dy & S_{4y} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 dy \\
 S_{5y} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right) dy & S_{6y} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dy
 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยกรณีรูปร่างการสั่นสะท้อนแบบดัดโค้งสมมาตรและไม่สมมาตรได้เป็นสมการ (10.1) และ (10.2) ตามลำดับ [5]

$$X(x) = C_{1x} \cos(p_1 x) + C_{2x} \cosh(p_1 x) \quad (10.1)$$

$$X(x) = C_{3x} \sin(p_2 x) + C_{4x} \sinh(p_2 x) \quad (10.2)$$

โดย p_1, p_2 คือ ตัวแปรความถี่ในทางแกน x ดังแสดงในสมการ (11) และ (12)

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{2S_{2y}D_{12} - 4S_{4y}D_{66}}{S_{3y}D_{11}} \quad (11)$$

$$p_1^2 p_2^2 = \frac{S_{3y}m\omega^2 - S_{1y}D_{22}}{S_{3y}D_{11}} \quad (12)$$

แทนเงื่อนไขขอบ ($dX/dx=0$ และ $X=0$) [6] ในสมการ (10) ทำให้ได้ปัญหาค่าเฉพาะจกรณีสู่รูปร่างการสั่นสะท้อนแบบดัดโค้งสมมาตรและไม่สมมาตรดังสมการ (13.1) และ (13.2)

$$p_2 \tanh\left(\frac{p_2 a}{2}\right) + p_1 \tan\left(\frac{p_1 a}{2}\right) = 0 \quad (13.1)$$

$$p_2 \coth\left(\frac{p_2 a}{2}\right) - p_1 \cot\left(\frac{p_1 a}{2}\right) = 0 \quad (13.2)$$

2.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method: FEM) [7]

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นกระบวนการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิต (algebraic equation) จากนั้นแก้สมการพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) เพื่อหาตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ (node) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะท้อน แสดงได้ดังสมการ (14)

$$[m]\{\ddot{D}\} + [c]\{\dot{D}\} + k\{D\} = \{F\} \quad (14)$$

โดย $[m]$ คือ เมทริกซ์ของมวล
 $[c]$ คือ เมทริกซ์ของความหน่วง
 $[k]$ คือ เมทริกซ์ของค่าฉีก
 $\{D\}$ คือ เวกเตอร์ของการกระจัด
 $\{F\}$ คือ เวกเตอร์ของแรง

กรณีการสั่นสะท้อนแบบอิสระที่ไม่มีความหน่วง สามารถลดรูปสมการ (14) ได้เป็น

$$[m]\{\ddot{D}\} + k\{D\} = \{0\} \quad (15)$$

กำหนดให้การกระจัดของทุกจุดต่อเป็น

$$\{D\} = \{A\} \sin \omega t \quad (16)$$

โดย $\{A\}$ คือ เวกเตอร์ของแอมพลิจูด
 ω คือ ความเร็วเชิงมุมธรรมชาติ

แทนสมการ (16) ในสมการ (15) ทำให้ได้

$$([k] - \lambda[m])\{A\} = \{0\}$$

โดย λ คือ ค่าเฉพาะ ซึ่งเท่ากับ ω^2

เมื่อ $\{A\}$ มีค่าไม่เป็นศูนย์ ทำให้ได้สมการค่าเฉพาะ ดังสมการ (17)

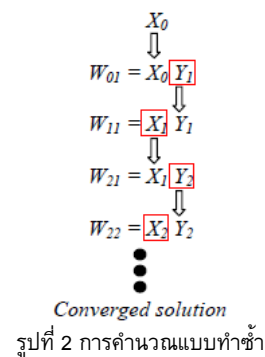
$$[k] - \lambda[m] = \{0\} \quad (17)$$

3. วิธีการศึกษา

แบ่งการศึกษาออกเป็น 3 ส่วน คือ

- (1) การหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะท้อนแบบดัดโค้งโดยวิธีคันทโรวิช
- (2) การหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะท้อนแบบดัดโค้งโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- (3) การทวนสอบวิธีคันทโรวิช

3.1 การหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีคันทโรวิช



(1) กำหนดสมการเริ่มต้นสำหรับการคำนวณแบบทำซ้ำ ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยสมการเริ่มต้นอาจเป็นฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งไม่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ แต่ถ้าสมการเริ่มต้นมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ การ

คำนวณแบบทำซ้ำจะมีการเข้าสู่ของผลเฉลยได้เร็วขึ้น [8] ในการนิยามการเริ่มต้นเป็นฟังก์ชัน x ให้คำนวณค่า S_{1x} ถึง S_{6x}

(2) แทน S_{1x} ถึง S_{6x} ในสมการ (8) เพื่อหาค่า q_1 และ q_2 จากนั้นแทนค่า q_1 และ q_2 ในสมการ (5) เพื่อหาฟังก์ชัน y

(3) นำฟังก์ชัน y ที่ได้จากข้อ (2) คำนวณหาค่า S_{1y} ถึง S_{6y}

(4) แทน S_{1y} ถึง S_{6y} ในสมการ (13) เพื่อหาค่า p_1 และ p_2 จากนั้นแทนค่า p_1 และ p_2 ในสมการ (10) เพื่อหาฟังก์ชัน x

(5) นำฟังก์ชัน x ที่ได้จากข้อ (4) คำนวณหาค่า S_{1x} ถึง S_{6x}

(6) แทน S_{1x} ถึง S_{6x} ในสมการ (8) เพื่อหาค่า q_1 และ q_2 จากนั้นแทนค่า q_1 และ q_2 ในสมการ (5) เพื่อหาฟังก์ชัน y

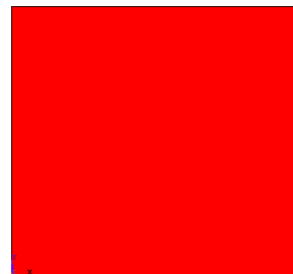
(7) เปรียบเทียบค่า q_1 และ q_2 ที่ได้จากข้อ (6) และข้อ (2) หากค่าความคลาดเคลื่อนไม่อยู่ในเกณฑ์ที่กำหนด ให้ทำการคำนวณแบบทำซ้ำต่อ

3.2 การหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

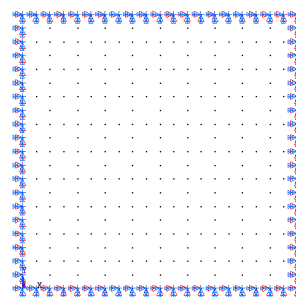
ในการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบครอสพาย ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น ลักษณะของปัญหาเป็นปัญหาแบบสองมิติที่มีลำดับชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 6 ในไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์จึงเลือกเอลิเมนต์แบบเปลือก (shell element) ชนิด 16-Layer ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สองมิติที่มี 8 จุดต่อ โดยแต่ละจุดต่อมี 6 ลำดับชั้นความเป็นอิสระ และสามารถสร้างจำนวนชั้นให้กับแผ่นวัสดุเชิงประกอบได้สูงสุด 16 ชั้น

ในการสร้างแบบจำลองจะสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนความกว้างด้าน x ต่อความกว้างด้าน y เท่ากับ 1:1, 1:3 และ 1:5 ดังแสดงในรูปที่ 3 โดยกำหนดให้แบบจำลองทำจากเคพลาร์ (Kevlar) ซึ่งมีค่า $E_1=138$ GPa, $E_2=8.96$ GPa, $G_{12}=7.1$ GPa, $G_{23}=2.82$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{23}=0.59$ และ $\rho=1600$ kg/m³ และมีการเรียงเส้นใยแบบ $[0]_4$, $[0/90]_s$, $[90/0]_s$ และ $[90]_4$ โดยแต่ละชั้นมีความหนา 2.5 mm

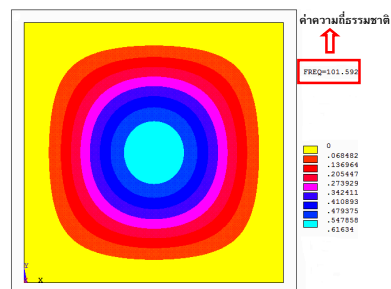
แบบจำลองที่สร้างจะมีขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น คือ จุดต่อทั้งหมดที่ขอบทั้งสี่ด้านของแบบจำลอง จะไม่สามารถเคลื่อนที่ในแนวแกน x , y และ z รวมไปถึงไม่สามารถหมุนรอบแกน x , y และ z ได้ ดังแสดงในรูปที่ 4 และจากการวิเคราะห์แบบ Modal analysis ในไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์จะทำให้ได้ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้ง ดังแสดงในรูปที่ 5 โดยแถบสีจะแสดงถึงการเสียรูปของแบบจำลอง สีฟ้าอมเขียวและสีเหลืองจะแสดงถึงการเสียรูปสูงสุดและต่ำสุดตามลำดับ



รูปที่ 3 การสร้างแบบจำลองที่มีอัตราส่วน 1:1

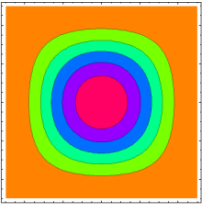
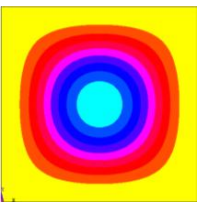
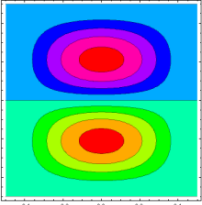
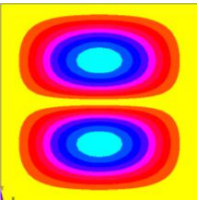
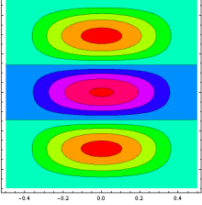
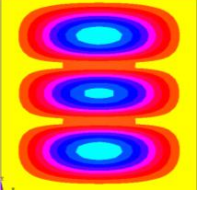
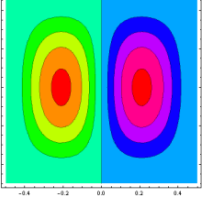
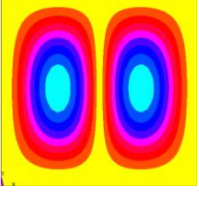
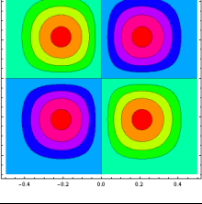
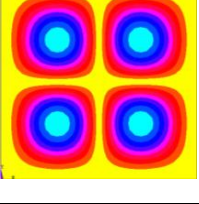


รูปที่ 4 การกำหนดเงื่อนไขขอบในแบบจำลอง



รูปที่ 5 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้ง

ตารางที่ 1 รูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ

Mode	KM	FEM
(1, 1)		
(1, 2)		
(1, 3)		
(2, 1)		
(2, 2)		

3.3 การทดสอบวิธีคันทอดโรว

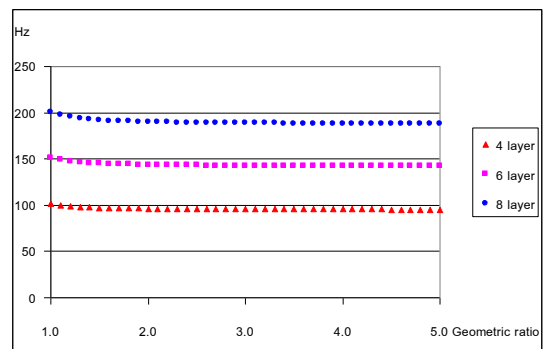
(1) แทน q_1 และ q_2 ในสมการ (7) หรือแทน p_1 และ p_2 ในสมการ (12) เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ

(2) แทน q_1 และ q_2 ในสมการ (5) และแทน p_1 และ p_2 ในสมการ (10) เพื่อหารูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้ง โดย $w(x, y) = X(x)Y(y)$

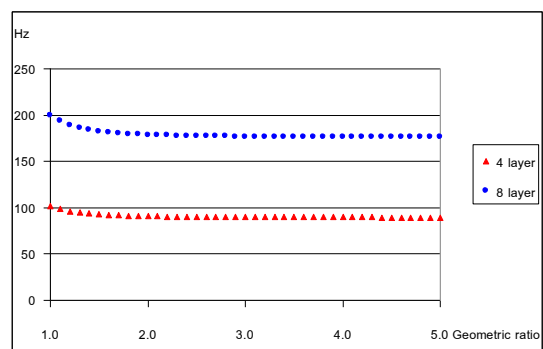
(3) เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากวิธีคันทอดโรวกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 2 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ ที่มีรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้ง

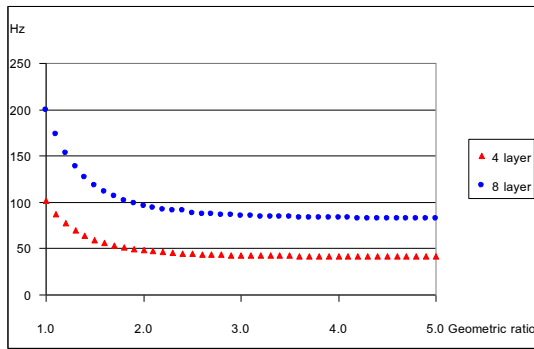
เรียงชั้น	อัตราส่วน	KM	FEM	%Error
[0] ₄	1:1	102.081	101.592	0.479 %
	1:3	96.138	95.676	0.481 %
	1:5	95.872	95.412	0.480 %
[0/90] _s	1:1	102.125	101.558	0.555 %
	1:3	90.482	89.934	0.606 %
	1:5	90.126	89.580	0.606 %
[90/0] _s	1:1	102.125	101.558	0.555 %
	1:3	42.899	42.843	0.130 %
	1:5	41.299	41.247	0.126 %
[90] ₄	1:1	102.081	101.592	0.479 %
	1:3	27.965	27.939	0.094 %
	1:5	25.272	25.197	0.295 %



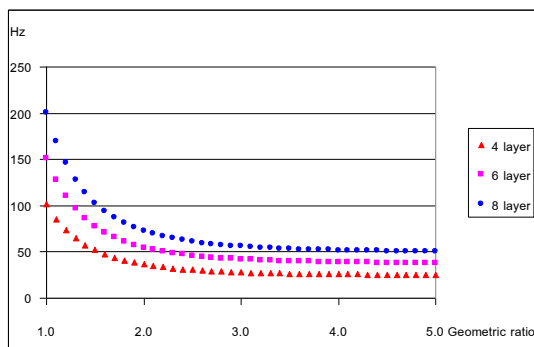
รูปที่ 5 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยแบบ [0]_n



รูปที่ 6 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยแบบ [0/90]_{ns}



รูปที่ 7 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยแบบ $[90/0]_{ns}$



รูปที่ 8 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยแบบ $[90]_n$

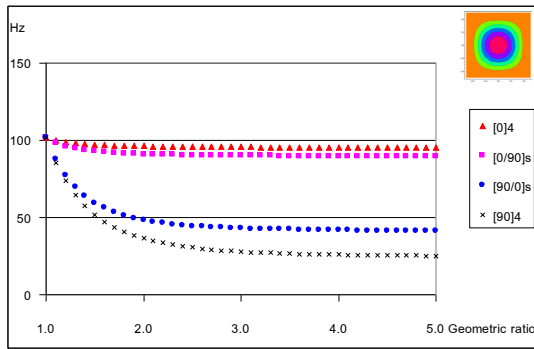
4. ผลการศึกษา

(1) จากการเปรียบเทียบรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งและค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากวิธีคันทูโรวิชและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่ารูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งที่ได้จากวิธีคันทูโรวิชมีลักษณะเช่นเดียวกับรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังแสดงในตารางที่ 1 ส่วนค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากวิธีคันทูโรวิชมีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เท่ากับร้อยละ 0.606 ดังแสดงในตารางที่ 2 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสามารถนำวิธีคันทูโรวิชมาหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบครอสพาย ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่นได้

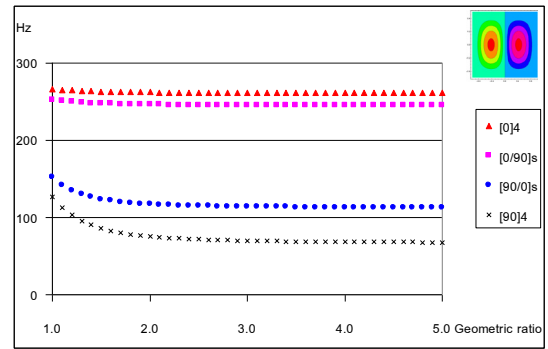
(2) จากการศึกษารูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเหมือนกัน แต่มีจำนวนชั้นและอัตราส่วนทางเรขาคณิต

ต่างกัน พบว่าจำนวนชั้นและอัตราส่วนทางเรขาคณิตไม่ส่งผลต่อรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งแต่ส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีจำนวนชั้น 8 ชั้น จะมีค่าความถี่ธรรมชาติสูงกว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีจำนวนชั้น 6 ชั้น และ 4 ชั้น ตามลำดับ และแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตมากจะมีค่าความถี่ธรรมชาติต่ำกว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตน้อย ดังแสดงในรูปที่ 5-8 เนื่องจากแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีจำนวนชั้น 8 ชั้น จะมีความหนาแน่นกว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีจำนวนชั้น 6 ชั้น และ 4 ชั้น ทำให้ค่าสตีเฟนของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ (D_{ij}) ที่มีจำนวนชั้น 8 ชั้น มีค่าสูงกว่า ส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีจำนวนชั้น 8 ชั้น มีค่าสูงกว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีจำนวนชั้น 6 ชั้น และ 4 ชั้น ตามลำดับ ส่วนแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีอัตราส่วนทางเรขาคณิตมาก จะทำให้แผ่นวัสดุเชิงประกอบมีมวลมากซึ่งเป็นผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าลดลง

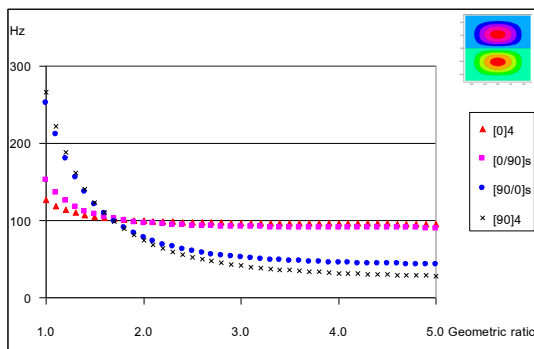
(3) จากการศึกษารูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ ที่มีจำนวนชั้นเท่ากันแต่มีการเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิตต่างกัน พบว่าการเรียงตัวของเส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิตไม่ส่งผลต่อรูปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้งแต่ส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_4$ จะมีค่าความถี่ธรรมชาติสูงกว่าแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_8$, $[90/0]_8$ และ $[90]_4$ ตามลำดับ เมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่ามากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 9-13 เนื่องจากแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ เป็นการเรียงตัวของเส้นใยตามแนวแกน y เมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่ามากขึ้น จะทำให้แผ่นวัสดุเชิงประกอบมีความยาวทางด้าน y มากขึ้น จึงทำให้ความยาวของเส้นใยในแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[90]_4$ ยาวขึ้น เป็นผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าลดลง



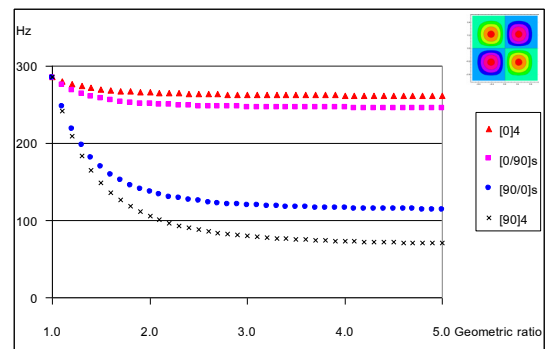
รูปที่ 9 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ
ที่มีจำนวนชั้น 4 ชั้น รูปปร่างการสั่นสะเทือนแบบ
(1, 1)



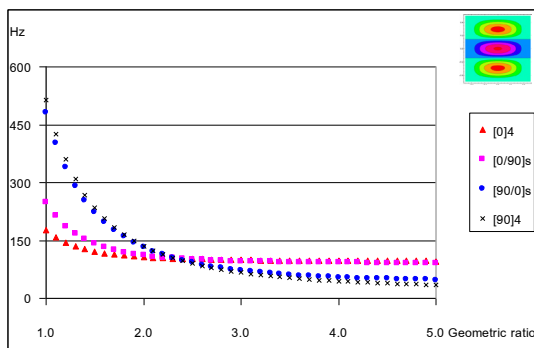
รูปที่ 12 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ
ที่มีจำนวนชั้น 4 ชั้น รูปปร่างการสั่นสะเทือนแบบ
(2, 1)



รูปที่ 10 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ
ที่มีจำนวนชั้น 4 ชั้น รูปปร่างการสั่นสะเทือนแบบ
(1, 2)



รูปที่ 13 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ
ที่มีจำนวนชั้น 4 ชั้น รูปปร่างการสั่นสะเทือนแบบ
(2, 2)



รูปที่ 11 ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ
ที่มีจำนวนชั้น 4 ชั้น รูปปร่างการสั่นสะเทือนแบบ
(1, 3)

5. สรุปผลการศึกษา

(1) ลักษณะการเรียงตัวของเส้นใย ความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบและอัตราส่วนทางเรขาคณิต ไม่ส่งผลต่อรูปปร่างการสั่นสะเทือนแบบดัดโค้ง แต่จะส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบครอสพาย ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น

(2) แผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบครอสพาย ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น กรณีที่การเรียงตัวของเส้นใยไม่มีลักษณะเหมือนกัน แต่ความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบและอัตราส่วนทางเรขาคณิตต่างกัน แผ่นวัสดุเชิงประกอบจะมีค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้นเมื่อแผ่นวัสดุเชิงประกอบมีความหนาเพิ่มขึ้นและมีอัตราส่วนทางเรขาคณิตลดลง

(3) แผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบครอสพาย ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น กรณีที่ความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบมีค่าเท่ากัน แต่มีการเรียงตัวของ

เส้นใยและอัตราส่วนทางเรขาคณิตต่างกัน แผ่นวัสดุเชิงประกอบจะมีค่าความถี่ธรรมชาติลดลงเมื่อการเรียงตัวของเส้นใยขนานกับด้านที่เพิ่มอัตราส่วนทางเรขาคณิต

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณ โครงการยกระดับปริญญาโทเป็นงานวิจัยตีพิมพ์ งานสร้างสรรค์ และงานบริการวิชาการสู่ชุมชน ประจำปี 2557 ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงที่ได้ให้การสนับสนุนงบประมาณตลอดโครงการวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- [1] จิรวัฒน์ วรณโรจน์ และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2550. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน ภายใต้การสั่นสะเทือนแบบอิสระ เมื่อมีการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ. วิศวกรรมสาร มข. 34 พฤษภาคม-มิถุนายน: หน้า 375-390.
- [2] ชิตพล คงศิลา และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. 2550. เส้นโค้งการเปลี่ยนของพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานของคานและแผ่นบางที่มีปลายอิสระทุกด้าน กรณีศึกษาการแปรผันค่าคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ. วิศวกรรมสาร มข. 34 กรกฎาคม-สิงหาคม: หน้า 415-429.
- [3] Reddy JN. 2004. Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis (2nd ed). CRC Press, Boca Raton.
- [4] Kullasup Phongsrisuk, Prasong Ingsuwan, Wetchayan Rangsi and Wiwat Klongpanich. 2010. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite rectangular plates using extended Kantorovich method. Maejo International Journal of Science and Technology. 4(03): 512-532.
- [5] Kullasup Phongsrisuk, Prasong Ingsuwan, Wetchayan Rangsi and Wiwat Klongpanich. 2009. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite square clamped plate using the extended Kantorovich method. Proceeding of the 23rd conference of the mechanical engineering network of Thailand, Chiangmai, Thailand, Nov 4-7, 2009. 74.
- [6] Timoshenko S and Woinowsky-Krieger S. 1959. Theory of Plates and Shells (2nd ed). McGraw-Hill, New York.
- [7] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข และ สรายุทธ จำปาทอง. 2558. ศึกษาความคล้ายระหว่างการสั่นของแผ่นบางและการสั่นของคาน. วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. 22(1) มกราคม-เมษายน: หน้า 68-77.
- [8] Kullasup Phongsrisuk, Prasong Ingsuwan, Wetchayan Rangsi and Wiwat Klongpanich. 2009. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite square plate using the extended Kantorovich method. Proceedings of the 23rd conference of the mechanical engineering network of Thailand, Chiangmai, Thailand, Nov 4-7, 2009. 87.