อนุพันธ์ (f, g) ของพีชคณิต BCC
On $(f, g)-$ Derivation of BCC-algebras

[1]เอกวิทย์ ลำพาย [1]วีรพงษ์ วงศ์พินิจ [1]อัฐชัย ชฎา [1]เชาวน์วัฒน์ มั่นยืน [1*]บรรชา นันจรัส
[1]Ekkawit Lampai, [1]Weerapong Wongpinit, [1]Atthchai chada, [1]Chaowat Mantyuen,
[1*]Bancha Nanjaras
[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
[1]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology Rajabhat Maha Sarakham University
*ผู้นิพนธ์หลัก: bancha464@gmail.com
*Corresponding author: bancha464@gmail.com

Received	Reviewed	Revised	Accepted
06/11/2022	09/11/2022	24/12/2022	30/12/2022

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เราจะแนะนำแนวคิดของ อนุพันธ์ $(l,r)-(f,g)$ อนุพันธ์ $(r,l)-(f,g)$ และอนุพันธ์ (f,g) ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของอนุพันธ์ f และ อนุพันธ์ของพีชคณิต BCC และศึกษาสมบัติบางประการของอนุพันธ์ (f,g) ของพีชคณิต BCC นอกจากนี้ยังอธิบายลักษณะเฉพาะของเซต $Fix(X)$ และ $Ker\ d$ โดยการใช้อนุพันธ์ (f,g)

คำสำคัญ: พีชคณิต, พีชคณิต BCC, อนุพันธ์ (f,g) ของพีชคณิต BCC

Abstract

In this paper, we introduce the concept of $(l,r)-(f,g)$ –derivation, $(r,l)-(f,g)$-derivation and (f,g) –derivation which is a generalization of f-derivation and derivation of a BCC-algebra and study some properties of (f,g)-derivation of a BCC-algebra. Also, we characterize the set $Ker\ d$ by (f,g) – derivation.

Keyword: Algebras, BCC – algebras, (f,g) – derivation of BCC – algebras

บทนำ

แนวคิดอนุพันธ์ของทฤษฎีของริงได้เข้ามามีบทบาทสำคัญเป็นอย่างมากในการศึกษาอนุพันธ์ของพีชคณิตต่าง ๆ ได้แก่ พีชคณิต BCI พีชคณิต BCK และพีชคณิต BCC เป็นต้น ใน (Jun and Xin, 2004) ได้ประยุกต์ใช้แนวคิดของอนุพันธ์ของริงมาศึกษาบนพีชคณิต BCI และได้สมบัติบางประการของอนุพันธ์ของพีชคณิต BCI ต่อมา (Hamza and Al-Shehri, 2006) ได้ศึกษาอนุพันธ์ของพีชคณิต BCK ใน (Komori, 1983) ได้แนะนำแนวคิดของพีชคณิต BCC ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของพีชคณิต BCK ต่อมาใน (Prabpayak and Lerrawat, 2009) ได้แนะนำแนวคิดอนุพันธ์ของพีชคณิต BCC และได้ศึกษาสมบัติบางประการของอนุพันธ์ของพีชคณิต BCC ต่อมาใน (Lee, et al., 2012) ได้ขยายแนวคิดของอนุพันธ์ของพีชคณิต BCC เป็น อนุพันธ์ f ของพีชคณิต BCC ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของอนุพันธ์ของพีชคณิต BCC และได้ศึกษาสมบัติบางประการของอนุพันธ์ f ของพีชคณิต BCC นอกจากนี้ได้นิยามเซต $Ker\ d$ และ $Fix(X)$ โดยอนุพันธ์ f ของพีชคณิต BCC

ในบทความนี้ เราจะขยายแนวคิดของอนุพันธ์ f ของพีชคณิต BCC เป็น อนุพันธ์ (f,g) ของพีชคณิต BCC ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของอนุพันธ์ f ของพีชคณิต BCC และศึกษาสมบัติของอนุพันธ์ (f,g) ของพีชคณิต BCC นอกจากนี้จะอธิบายลักษณะเฉพาะ $Ker\ d$ และ $Fix(X)$ โดยอนุพันธ์ (f,g)

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 1 ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และ 0 เป็นค่าคงตัว จะเรียก $(X,*,0)$ ว่าเป็น *พีชคณิต BCC* (BCC - algebra) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับทุก $x,y,z \in X$

(1) $((x*y)*(z*y))*(x*z)=0$

(2) $x*x=0$

(3) $0*x=0$

(4) $x*0=x$

(5) ถ้า $x*y=0$ และ $y*x=0$ แล้ว $x=y$

ต่อไปจะกำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ บน X โดยที่ $x\leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x*y=0$ สำหรับทุก $x,y\in X$ เพื่อความสะดวกต่อไปนี้จะเขียน X แทน $(X,*,0)$ และจะเขียน $x\wedge y$ แทน $y*(y*x)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

ตัวอย่าง 1 ให้ $X=\{0,1,2\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X ซึ่งกำหนดโดยตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	1	0

จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต BCC

บทนิยาม 2 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ $\emptyset \neq S \subseteq X$ จะเรียก S ว่าเป็น*พีชคณิตย่อย* (subalgebra) ของ X ถ้า $x * y \in S$ สำหรับทุก $x, y \in S$

บทนิยาม 3 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC จะเรียก X ว่ามี *สมบัติสลับที่* (commutative) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับทุก $x, y \in S$

$$x * (x * y) = y * (y * x) \text{ หรือ } y \wedge x = x \wedge y$$

บทนิยาม 4 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC จะเรียกฟังก์ชัน $f: X \rightarrow X$ ว่าเป็น *อันตรสัณฐาน* (endomorphism) ของ X ถ้า $f(x * y) = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

หมายเหตุ 1 จากบทนิยาม 4 จะเห็นว่า $f(0) = f(0 * 0) = f(0) * f(0) = 0$

บทนิยาม 5 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC

(1) จะเรียก $d: X \rightarrow X$ ว่าเป็น*อนุพันธ์* (l, r) ((l, r)-derivation) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d(x * y) = (d(x) * y) \wedge (x * d(y)) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

(2) จะเรียก $d: X \rightarrow X$ ว่าเป็น*อนุพันธ์* (r, l) ((r, l)-derivation) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d(x * y) = \big(x * d(y)\big) \wedge (d(x) * y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

(3) จะเรียก d ว่าเป็น*อนุพันธ์* (derivation) ของ X ถ้า d เป็นทั้ง อนุพันธ์ (l, r) และอนุพันธ์ (r, l) ของ X

ตัวอย่าง 2 ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X ซึ่งกำหนดโดยตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	1	0

จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต BCC กำหนดฟังก์ชัน $d: X \rightarrow X$ โดยที่ $d(0) = 0, d(1) = 1$ และ $d(2) = 2$ จะได้ว่า d เป็นอนุพันธ์ของ X

บทนิยาม 6 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ f เป็นอันตรสัณฐานของ X

(1) จะเรียก $d: X \rightarrow X$ ว่าเป็น*อนุพันธ์* $(l, r) - f$ ($(l, r) - f$-derivation) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d(x * y) = (d(x) * f(y)) \wedge (f(x) * d(y)) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

(2) จะเรียก $d: X \to X$ ว่าเป็น*อนุพันธ์* $(r, l) - f$ ($(r, l) - f$-derivation) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d(x * y) = \big(f(x) * d(y)\big) \wedge (d(x) * f(y)) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

(3) จะเรียก d ว่าเป็น*อนุพันธ์* f (f-derivation) ของ X ถ้า d เป็นทั้ง อนุพันธ์ $(l, r) - f$ และอนุพันธ์ $(r, l) - f$ ของ X

ตัวอย่าง 3 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X ซึ่งกำหนดโดยตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	3	1	0

จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต BCC กำหนดฟังก์ชัน $d: X \to X$ โดยที่

$$d(x) = \begin{cases} 0\,; x = 0, 1, 2 \\ 3\,; x = 3 \end{cases}$$

และกำหนดฟังก์ชัน $f: X \to X$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 0\,; x = 0, 1 \\ 3\,; x = 2, 3 \end{cases}$$

จะได้ว่า d เป็นอนุพันธ์ f ของ X

ทฤษฎีบทหลัก

บทนิยาม 7 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ f และ g เป็นอันตรสัณฐานของ X

(1) จะเรียก $d: X \to X$ ว่าเป็น*อนุพันธ์* $(l, r) - (f, g)$ ($(l, r) - (f, g)$-derivation) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d(x * y) = (d(x) * f(y)) \wedge (g(x) * d(y)) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

(2) จะเรียก $d: X \to X$ ว่าเป็น*อนุพันธ์* $(r, l) - (f, g)$ ($(r, l) - (f, g)$-derivation) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d(x * y) = \big(f(x) * d(y)\big) \wedge (d(x) * g(y)) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

(3) จะเรียก d ว่าเป็น*อนุพันธ์* (f, g) ((f, g)-derivation) ของ X ถ้า d เป็นทั้ง อนุพันธ์ $(l, r) - (f, g)$ และอนุพันธ์ $(r, l) - (f, g)$ ของ X

ตัวอย่าง 4 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X ซึ่งกำหนดโดยตารางต่อไปนี้

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	1	2	0	0
3	3	3	1	0

จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต BCC กำหนดฟังก์ชัน $d: X \to X$ โดยที่

$$d(x) = \begin{cases} 0\,; x = 0, 1, 2 \\ 3\,; x = 3 \end{cases}$$

กำหนดฟังก์ชัน $f: X \to X$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 0\,; x = 0 \\ 1\,; x = 1 \\ 3\,; x = 2, 3 \end{cases}$$

และกำหนดฟังก์ชัน $g: X \to X$ โดยที่

$$g(x) = \begin{cases} 0\,; x = 0, 1 \\ 3\,; x = 2, 3 \end{cases}$$

จะได้ว่า d เป็นอนุพันธ์ (f, g) ของ X

ทฤษฎีบท 1 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f, g) ของ X แล้ว $d(0) = 0$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f, g) ของ X

เนื่องจาก f และ g เป็นอันตรสัณฐาน จะได้ว่า $f(0) = 0$ และ $g(0) = 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned} d(0) &= d(0 * 0) \\ &= \big(d(0) * f(0)\big) \wedge (g(0) * d(0)) \\ &= (d(0) * 0) \wedge (0 * d(0)) \\ &= d(0) \wedge 0 \\ &= 0 * (0 * d(0)) \\ &= 0 * 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(0) = 0$ ∎

ทฤษฎีบท 2 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า d เป็นอนุพันธ์ $(l, r) - (f, g)$ ของ X แล้ว $d(x) = d(x) \wedge g(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

(2) ถ้า d เป็นอนุพันธ์ $(r, l) - (f, g)$ ของ X แล้ว $d(x) = f(x) \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต BCC

(1) สมมติว่า d เป็นอนุพันธ์ $(l, r) - (f, g)$ ของ X

เนื่องจาก f และ g เป็นอันตรสัณฐานจะได้ว่า $f(0) = 0$ และ $g(0) = 0$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ $d(0) = 0$ ให้ $x \in X$

พิจารณา
$$\begin{aligned} d(x) &= d(x * 0) \\ &= \big(d(x) * f(0)\big) \wedge (g(x) * d(0)) \\ &= (d(x) * 0) \wedge (g(x) * 0) \\ &= d(x) \wedge g(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x) = d(x) \wedge g(x)$

(2) สมมติว่า d เป็นอนุพันธ์ $(r, l) - (f, g)$ ของ X ให้ $x \in X$

พิจารณา $d(x) = d(x * 0)$

$$= \big(f(x) * d(0)\big) \wedge (d(x) * g(0))$$
$$= (f(x) * 0) \wedge (d(x) * 0)$$
$$= f(x) \wedge d(x)$$

ดังนั้น $d(x) = f(x) \wedge d(x)$ ■

บทนิยาม 8 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X และกำหนดเซต $Fix(X)$ โดยที่

$$Fix(X) = \{x \in X \mid d(x) = f(x) = g(x)\}$$

ทฤษฎีบท 3 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X จะได้ว่า $Fix(X)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X จาก $d(0) = f(0) = g(0)$ ได้ว่า $0 \in Fix(X)$ ดังนั้น $Fix(X) \neq \emptyset$ ให้ $x,y \in Fix(X)$ จะได้ว่า $d(x) = f(x) = g(x)$ และ $d(y) = f(y) = g(y)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x * y) &= \big(d(x) * f(y)\big) \wedge \big(g(x) * d(y)\big) \\ &= (f(x) * f(y)) \wedge (f(x) * f(y)) \\ &= (f(x) * f(y)) * ((f(x) * f(y)) * (f(x) * f(y))) \\ &= \big(f(x) * f(y)\big) * 0 \\ &= f(x) * f(y) \\ &= f(x * y) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} d(x * y) &= \big(d(x) * f(y)\big) \wedge \big(g(x) * d(y)\big) \\ &= (g(x) * g(y)) \wedge (g(x) * g(y)) \\ &= (g(x) * g(y)) * ((g(x) * g(y)) * (g(x) * g(y))) \\ &= \big(g(x) * g(y)\big) * 0 \\ &= g(x) * g(y) \\ &= g(x * y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x * y) = f(x * y) = g(x * y)$ นั่นคือ $x * y \in Fix(X)$ จึงสรุปได้ว่า $Fix(X)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X ■

ทฤษฎีบท 4 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X ถ้า $x,y \in Fix(X)$ แล้ว $x \wedge y \in Fix(X)$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X

ให้ $x,y \in Fix(X)$ จะได้ว่า $d(x) = f(x) = g(x)$ และ $d(y) = f(y) = g(y)$

จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $y * x \in Fix(X)$ นั่นคือ $d(y * x) = f(y * x) = g(y * x)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x \wedge y) &= d(y * (y * x)) \\ &= \big(d(y) * f(y * x)\big) \wedge (g(y) * d(y * x)) \\ &= \big(f(y) * f(y * x)\big) \wedge (f(y) * f(y * x)) \\ &= (f(y) * f(y * x)) * ((f(y) * f(y * x)) * (f(y) * f(y * x))) \\ &= (f(y) * f(y * x)) * 0 \\ &= f(y) * f(y * x) \\ &= f(y * (y * x)) \\ &= f(x \wedge y) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} d(x \wedge y) &= d(y * (y * x)) \\ &= \big(d(y) * f(y * x)\big) \wedge (g(y) * d(y * x)) \\ &= \big(g(y) * g(y * x)\big) \wedge (g(y) * g(y * x)) \\ &= (g(y) * g(y * x)) * ((g(y) * g(y * x)) * (g(y) * g(y * x))) \\ &= (g(y) * g(y * x)) * 0 \\ &= g(y) * g(y * x) \\ &= g(y * (y * x)) \\ &= g(x \wedge y) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $d(x \wedge y) = f(x \wedge y) = g(x \wedge y)$

ดังนั้น $x \wedge y \in Fix(X)$ ■

บทนิยาม 9 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f, g) ของ X นิยามเซต $Ker\ d$ โดย

$$Ker\ d = \{x \in X \mid d(x) = 0\}$$

ทฤษฎีบท 5 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f, g) ของ X แล้ว $Ker\ d$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f, g) ของ X จาก $d(0) = 0$ ได้ว่า $0 \in Ker\ d$ ดังนั้น $Ker\ d \neq \emptyset$ ให้ $x, y \in Ker\ d$ จะได้ว่า $d(x) = 0$ และ $d(y) = 0$

พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x * y) &= (d(x) * f(y)) \wedge (g(x) * d(y)) \\ &= (0 * f(y)) \wedge (g(x) * 0) \\ &= 0 \wedge g(x) \\ &= g(x) * ((g(x) * 0) \\ &= g(x) * (g(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x * y \in Ker\ d$ ■

ทฤษฎีบท 6 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f, g) ของ X ถ้า $y \in Ker\ d$ แล้ว $x \wedge y \in Ker\ d$ สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f, g) ของ X

ให้ $x \in X$ สมมติว่า $y \in Ker\ d$ จะได้ว่า $d(y) = 0$ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x \wedge y) &= d(y * (y * x)) \\ &= (d(y) * f(y * x)) \wedge (g(y) * d(y * x)) \\ &= (0 * f(y * x)) \wedge (g(y) * d(y * x)) \\ &= 0 \wedge (g(y) * d(y * x)) \\ &= (g(y) * d(y * x)) * (g(y) * d(y * x)) * 0) \\ &= (g(y) * d(y * x)) * (g(y) * d(y * x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y \wedge x \in Ker\ d$ ■

ทฤษฎีบท 7 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC สลับที่ และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X ถ้า $x \leq y$ และ $y \in Ker\, d$ แล้ว $x \in Ker\, d$ สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต BCC สลับที่ และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X
ให้ $x, y \in$ X สมมติว่า $x \leq y$ และ $y \in Ker\, d$ จะได้ว่า $x * y = 0$ และ $d(y) = 0$
พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x) &= d(x * 0) \\ &= d(x * (x * y)) \\ &= d(y * (y * x)) \\ &= (d(y) * f(y * x)) \wedge (g(y) * d(y * x)) \\ &= (0 * f(y * x)) \wedge (g(y) * d(y * x)) \\ &= 0 \wedge (g(y) * d(y * x)) \\ &= (g(y) * d(y * x)) * (g(y) * d(y * x)) * 0) \\ &= (g(y) * d(y * x)) * (g(y) * d(y * x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \in Ker\, d$ ■

ทฤษฎีบท 8 ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X ถ้า $x \in Ker\, d$ แล้ว $x * y \in Ker\, d$ สำหรับทุก $y \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต BCC และ d เป็นอนุพันธ์ (f,g) ของ X
ให้ $x, y \in X$ สมมติ $x \in Ker\, d$ จะได้ว่า $d(x) = 0$
พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x * y) &= (d(x) * f(y)) \wedge (g(x) * d(y)) \\ &= (0 * f(y)) \wedge (g(x) * d(y)) \\ &= 0 \wedge (g(x) * d(y)) \\ &= (g(x) * d(y)) * ((g(x) * d(y)) * 0) \\ &= (g(x) * d(y)) * (g(x) * d(y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x * y \in Ker\, d$ ■

References

Hamza, A.S.A., & Al-Shehri, N.O. (2006). Some results on derivations of BCI-algebras. *Coden Jnsmac*, *46*, 13-19.

Jun, Y.B. & Xin, X.L. (2004). On derivations of BCI-algebras. *Information Sciences, 159*, 167-176.

Komori, Y. (1983). The variety generated by BCC-algebras is finitely based, *Reports Faculty of Science, Shizuoka University*, *17*, 13-16.

Lee, S. M. and Kim, K. H. (2012). A Note on f-derivation of BCC-algebras, *Pure Mathemtical Sciences*, *1*(2), 87-93.

Prabpayak, C. and Lerrawat, U. (2009). On derivations of BCC-algebras, *Kasetsart Journal* (*Natural Science*), *43*, 398-401.