

On two Diophantine equations  $p^4 + 2q^4 = z^2$  and  $p^4 - 2q^4 = z^2$   
where  $p$  and  $q$  are Prime numbers

\*Sirichan Vesarachasart, Wanitcha Chomcherd and Kevalin Yeesan  
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,  
Thammasat University

\*Corresponding author: sirichan@mathstat.sci.tu.ac.th

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| Received   | Reviewed   | Revised    | Accepted   |
| 09/07/2023 | 24/07/2023 | 29/08/2023 | 31/08/2023 |

---

**Abstract**

In this paper, we are interested to study two Diophantine equations  $p^4 + 2q^4 = z^2$  and  $p^4 - 2q^4 = z^2$  where  $p, q$  are prime numbers. The results of this study, we found that the Diophantine equation  $p^4 - 2q^4 = z^2$  has only one non-negative integer solution, that is  $(p, q, z) = (3, 2, 7)$  for the Diophantine equation  $p^4 + 2q^4 = z^2$  has no solution.

**Keyword:** Diophantine equation, Non-negative integer solution, Prime number

สมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 + 2q^4 = z^2$  และ  $p^4 - 2q^4 = z^2$   
เมื่อ  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ

\*ศิริจันทร์ เวสารัชชาต, วณิชชา โฉมเชิด และเกวณีน หยีสัน

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

\*ผู้นิพนธ์หลัก : sirichan@mathstat.sci.tu.ac.th

**บทคัดย่อ**

ในบทความวิจัยนี้สนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 + 2q^4 = z^2$  และ  $p^4 - 2q^4 = z^2$  เมื่อ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ จากผลการศึกษาพบว่า สมการ  $p^4 - 2q^4 = z^2$  มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ  $(p, q, z) = (3, 2, 7)$  ส่วนสมการ  $p^4 + 2q^4 = z^2$  ไม่มีผลเฉลย

**คำสำคัญ:** สมการไดโอแฟนไทน์, ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ, จำนวนเฉพาะ

## บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นข้อหัวที่มีผู้ให้ความสนใจศึกษากันมาเป็นเวลายาวนานและมีการต่อยอดงานวิจัยทางด้านนี้เป็นจำนวนมาก มีการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ในหลากหลายรูปแบบหลากหลายวิธีในการหาผลเฉลยของสมการ เช่น ในปี ค.ศ. 2012 Sroysang ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์  $3^x + 5^y = z^2$  ซึ่งพบว่าสมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ  $(x, y, z)$  เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ  $(1, 0, 2)$  ในปีถัดมา Rabago ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์  $3^x + 19^y = z^2$  และ  $3^x + 91^y = z^2$  ผลจากการศึกษาเขาพบว่า สมการ  $3^x + 19^y = z^2$  มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ  $(x, y, z)$  คือ  $(1, 0, 2)$  และ  $(4, 1, 10)$  ส่วนสมการ  $3^x + 91^y = z^2$  มีผลเฉลยเป็น  $(1, 0, 2)$  และ  $(2, 1, 10)$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2017 Burshtein ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์  $p^x + q^y = z^4$  เมื่อ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ โดยเขาได้ศึกษาเฉพาะกรณีที่  $y = 1$  ซึ่งพบว่า สำหรับกรณี  $x$  เป็นจำนวนเต็มคู่ สมการนี้มีผลเฉลย  $(p, q, x, z)$  เพียงแค่สองผลเฉลย ได้แก่  $(2, 17, 6, 3)$  และ  $(3, 7, 2, 2)$  ส่วนกรณี  $x$  เป็นจำนวนเต็มคี่ สมการไดโอแฟนไทน์นี้มีผลเฉลยจำนวนมากมาย

ปี ค.ศ. 2018 Burshtein ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์  $x^4 - y^2 = z^2$  เมื่อ  $y$  เป็นจำนวนเฉพาะ จากการศึกษาเขาพบว่าสมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียง 3 ผลเฉลย ได้แก่  $(x, y, z) = (5, 7, 24), (29, 41, 840)$  และ  $(169, 239, 28560)$

ในปีเดียวกันนี้เขายังได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์อีกสองสมการ คือ  $p^3 + q^3 = z^2$  และ  $p^3 - q^3 = z^2$  เมื่อ  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งเขาพบว่า กรณีที่  $q = 2$  ทั้งสองสมการนี้ไม่มีผลเฉลย ส่วนกรณี  $3 \leq q < p \leq 101$  พบว่า  $(p, q, z) = (37, 11, 228)$  และ  $(p, q, z) = (71, 23, 588)$  เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ  $p^3 + q^3 = z^2$  และ  $p^3 - q^3 = z^2$  ตามลำดับ

และต่อมาเขาได้หาผลเฉลยสมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 + q^4 = z^2$  เมื่อ  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะที่  $2 \leq p < q$  และสมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 - q^4 = z^2$  เมื่อ  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะที่  $2 \leq q < p < 2100$  ผลจากการศึกษาของเขาพบว่า ทั้งสองสมการนี้ไม่มีผลเฉลย

สำหรับงานวิจัยนี้เราสนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 + 2q^4 = z^2$  และ  $p^4 - 2q^4 = z^2$  เมื่อ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $z$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ โดยเราจะเริ่มจากการพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 + 2q^4 = z^2$  ก่อน ซึ่งจากการศึกษาเราพบว่า สมการนี้ไม่มีผลเฉลย ส่วนสมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 - 2q^4 = z^2$  จะมีเพียงผลเฉลย  $(p, q, z)$  เพียงผลเฉลยเดียว สำหรับการพิสูจน์จะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

## ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^4 + 2q^4 = z^2$

พิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^4 + 2q^4 = z^2 \quad (1)$$

เมื่อ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $z$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่จำนวนลบ ในหัวข้อนี้เราจะแสดงว่าสมการ (1) ไม่มีผลเฉลย ดังจะพิสูจน์ให้เห็นในทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1** สมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 + 2q^4 = z^2$  ไม่มีผลเฉลย  $(p, q, z)$  ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ

**พิสูจน์** เห็นได้ชัดเจนว่า ถ้า  $p = q$  แล้วจาก (1) จะได้  $3p^4 = z^2$  นั่นคือ  $z = \sqrt{3}p^2$  ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง จึงได้  $p \neq q$  เราแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ  $p < q$  หรือ  $q < p$

**กรณี 1** ถ้า  $p < q$  เราจะแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณีย่อย ได้แก่ กรณี  $p = 2$  และกรณี  $p > 2$

กรณี 1.1. ถ้า  $p = 2$  แล้วจาก (1) จะได้ว่า

$$16 + 2q^4 = z^2 \quad (3)$$

จาก (3) เราได้ว่า  $z$  เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น  $z = 2a$  สำหรับบางจำนวนเต็มบวก  $a$  จึงทำให้ได้  $q^4 = 2(a^2 - 4)$  แต่เนื่องจาก  $q > 2$  ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นสำหรับกรณี 1.1. นี้สมการ (1) ไม่มีผลเฉลย

กรณี 1.2. ถ้า  $p > 2$  แล้วจาก (1) จะได้

$$2q^4 = (z - p^2)(z + p^2) \quad (4)$$

เนื่องจาก  $z - p^2 < z + p^2$  ทำให้สามารถแบ่งการพิจารณา (4) ได้เป็น 5 กรณี ดังนี้

กรณี 1.2.1.  $z - p^2 = 1$  และ  $z + p^2 = 2q^4$  จะได้  $2q^4 = z + z - 1 = 2z - 1$  เนื่องจาก  $2q^4$  เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 1.2.2.  $z - p^2 = 2$  และ  $z + p^2 = q^4$  จะได้  $q^4 = z + z - 2 = 2z - 2$  เนื่องจาก  $q > 2$  ทำให้  $q^4$  เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 1.2.3.  $z - p^2 = 2q$  และ  $z + p^2 = q^3$  จะได้  $q^3 = z + z - 2q = 2z - 2q$  เนื่องจาก  $q > 2$  ทำให้  $q^4$  เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 1.2.4.  $z - p^2 = q$  และ  $z + p^2 = 2q^3$  จะได้  $2q^3 = z + z - q = 2z - q$  เนื่องจาก  $q > 2$  จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 1.2.5.  $z - p^2 = q^2$  และ  $z + p^2 = 2q^2$  จะได้  $2z = 3q^2$  เนื่องจาก  $q > 2$  จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นสำหรับกรณี 1.2. สมการ (1) ไม่มีผลเฉลย

**กรณี 2** ถ้า  $q < p$  ในทำนองเดียวกันเราแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ กรณี  $q = 2$  หรือ กรณี  $q > 2$

กรณี 2.1. ถ้า  $q = 2$  แล้วจาก (1) จะได้

$$p^4 + 2^5 = z^2 \quad (5)$$

จาก (5) ทำให้ได้

$$2^5 = (z - p^2)(z + p^2) \quad (6)$$

เนื่องจาก  $z - p^2 < z + p^2$  สามารถแบ่งกรณีย่อยที่ทำให้ (6) เป็นไปได้เพียง 3 กรณี ได้แก่

กรณี 2.1.1.  $z - p^2 = 1$  และ  $z + p^2 = 2^5$  จะได้  $2^5 = 2z - 1$  ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 2.1.2.  $z - p^2 = 2$  และ  $z + p^2 = 2^4$  จะได้  $p^2 = 7$  จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 2.1.3.  $z - p^2 = 2^2$  และ  $z + p^2 = 2^3$  จะได้  $p^2 = 2$  จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ทำให้กรณีนี้สมการ (1) ไม่มีผลเฉลย

กรณี 2.2. ถ้า  $q > 2$  แล้วจาก (1) ทำให้ได้  $2q^4 = (z - p^2)(z + p^2)$  ในทำนองเดียวกันกับกรณี 1.2. จะเกิดข้อขัดแย้งขึ้นทุกกรณีย่อย ดังนั้นสมการ (1) จึงไม่มีผลเฉลย

**บทแทรก 1** สมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 + 2q^4 = z^4$  ไม่มีผลเฉลย เมื่อ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $z$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่จำนวนลบ

**พิสูจน์** เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 1

**ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 - 2q^4 = z^2$**

พิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^4 - 2q^4 = z^2 \quad (7)$$

เมื่อ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $z$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ

ผลที่ได้จากการศึกษาเราพบว่า สมการ (7) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ  $(p, q, z)$

เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ  $(3, 2, 7)$  ซึ่งได้ทำการพิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบท 2

**ทฤษฎีบท 2** สมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 - 2q^4 = z^2$  เมื่อ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ  $(p, q, z) = (3, 2, 7)$

**พิสูจน์**

ถ้า  $p = q$  แล้วจาก (7) จะได้  $z^2 = -q^4 < 0$  จึงเกิดข้อขัดแย้ง ในทำนองเดียวกัน ถ้า  $p < q$  จาก (7) จะได้ว่า  $z^2 < 0$  ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นสมมติให้  $q < p$  เราจะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ  $q = 2$  หรือ  $q > 2$

**กรณี 1** ถ้า  $q = 2$  จาก (7) จะได้

$$2^5 = (p^2 - z)(p^2 + z) \quad (8)$$

เนื่องจาก  $p^2 - z < p^2 + z$  ทำให้แบ่งการพิจารณา (8) ที่เป็นไปได้เพียง 3 กรณีย่อย ดังนี้

กรณี 1.1.  $p^2 - z = 1$  และ  $p^2 + z = 2^5$  จึงได้ว่า  $z = \frac{31}{2}$  ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 1.2.  $p^2 - z = 2$  และ  $p^2 + z = 2^4$  จึงได้  $p^2 = 9$  นั่นคือ  $p = 3$  และทำให้  $z = 7$  สำหรับกรณีนี้สมการ (7) มีผลเฉลย คือ  $(p, q, z) = (3, 2, 7)$

กรณี 1.3.  $p^2 - z = 2^2$  และ  $p^2 + z = 2^3$  จึงได้  $p^2 = 6$  ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นสำหรับกรณี  $q = 2$  สมการ (7) มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ  $(p, q, z) = (3, 2, 7)$

**กรณี 2** ถ้า  $q > 2$  แล้ว  $p > 2$  และจาก (7) ทำให้  $z^2$  เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงได้ว่า  $z = 2b + 1$  สำหรับบางจำนวนเต็ม  $b$  เมื่อแทนลงใน (7) จะได้  $p^4 - 1 = 4b^2 + 4b + 2q^4$  ทำให้ได้

$$(p-1)(p+1)(p^2+1) = 2(2b^2 + 2b + q^4) \quad (9)$$

เนื่องจาก  $p > 2$  ทำให้  $p-1, p+1$  และ  $p^2+1$  เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงได้ว่า  $p-1 = 2m, p+1 = 2n$  และ  $p^2+1 = 2t$  สำหรับบางจำนวนเต็มบวก  $m, n$  และ  $t$  เมื่อแทนลงใน (9) ทำให้

$$q^4 = 2(2mnt - b^2 - b) \quad (10)$$

เนื่องจาก  $q > 2$  ได้ว่า  $q^4$  เป็นจำนวนเต็มคี่ ซึ่งทำให้ (10) เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นในกรณีนี้สมการ (7) จึงไม่มีผลเฉลย

**บทแทรก 2** สมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 - 2q^4 = z^4$  ไม่มีผลเฉลย เมื่อ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $z$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

**พิสูจน์** เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 2

### สรุปผลการวิจัย

ผลจากการศึกษาเราพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 + 2q^4 = z^2$  เมื่อ  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ส่วนสมการไดโอแฟนไทน์  $p^4 - 2q^4 = z^2$  เมื่อ  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ มีผลเฉลย  $(p, q, z)$  ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ  $(3, 2, 7)$

## References

- Sroysang, B., (2012). On the Diophantine equation  $3^x + 5^y = z^2$ . *Int. J. Pure Appl. Math.*, 81, (605-608).
- Rabago, J.F.T., (2013). On two Diophantine equations  $3^x + 19^y = z^2$  and  $3^x + 91^y = z^2$ . *Int. J. Math. Sci. Comput.*, 3(1), (28-29).
- Burshtein, N. (2018). On Solutions to the Diophantine Equations  $x^4 - y^2 = z^2$ . *Pure Appl. Math.*, 18(1), (79-81).
- Burshtein, N. (2018). On Solutions of the Diophantine Equations  $p^3 + q^3 = z^2$  and  $p^3 - q^3 = z^2$  when  $p$  and  $q$  are Primes. *Pure Appl. Math.*, 18(1), (51-57).
- Burshtein, N. (2018). On Solutions of the Diophantine Equations  $p^4 + q^4 = z^2$  and  $p^4 - q^4 = z^2$  when  $p$  and  $q$  are Primes. *Pure Appl. Math.*, 19(1), (1-5).
- Burshtein, N. (2017). On solution of the Diophantine equation  $p^x + q^y = z^4$ . *Ann. Pure Appl. Math.*, 13, (143-149).
- Vesarachasart S., Sakornthai K., Phumiphong N. and Lueangsubthawee W. (2019). All Solutions of the Diophantine equation  $p^x + q^2 = z^4$  where  $p$  and  $q$  are Prime numbers. *Thai Journal of Science and Technology*, 9(2), (207-210).
- Patthanangkoor, T. (2007). *Elementary of number theory*. Pathum Thani: Thammasat University Press.