SciTech Research Journal, 7(3) : September-December 2024
(ปีที่ 7 ฉบับที่ 3 กันยายน-ธันวาคม 2567)

On the Diophantine equation $(\boldsymbol{p}-\mathbf{1})^{x}-\boldsymbol{p}^{y}=\boldsymbol{z}^{2}$, when $\boldsymbol{p}$ is a prime

*Suton Tadee
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Thepsatri Rajabhat University
*Corresponding author: suton.t@lawasri.tru.ac.th

Received	Reviewed	Revised	Accepted
14/05/2024	03/12/2024	09/12/2024	11/12/2024

Abstract

In this paper, the non-negative integer solutions (x, y, z) of the Diophantine equation $(p-1)^{x}-p^{y}=z^{2}$, when p is a prime, are investigated. The results of this research, we showed that if $p=2$, then the non-negative integer solutions of the equation are $(x, y, z) \in\{(t, 0,0)\}$, when t is a non-negative integer. If $p \equiv 1(\bmod 4)$, then the equation has the unique non-negative integer solution, which is $(x, y, z)=(0,0,0)$. If $p=3$, then all non-negative integer solutions (x, y, z) of the equation are $(0,0,0)$, $(1,0,1)$ and $(2,1,1)$. Moreover, if $p \neq 3$ and $p \equiv 3(\bmod 4)$, then the non-negative integer solutions of the equation are $(x, y, z)=(0,0,0)$ and $(x, y, z)=(1,0, \sqrt{p-2})$, when $\sqrt{p-2}$ is an integer.

Keyword: Diophantine equation; Congruence; Quadratic residue

สมการไดโอแฟนไทน์ $(\boldsymbol{p}-\mathbf{1})^{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}$ เมื่อ $\boldsymbol{p}$ เป็นจำนวนเฉพาะ

*สุธน ตาดี
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี
*ผู้นิพนธ์หลัก: suton.t@lawasri.tru.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x,y,z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x-p^y=z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ผลการวิจัยพบว่า ถ้า $p=2$ แล้ว ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการดังกล่าว คือ $(x,y,z)\in\{(t,0,0)\}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และถ้า $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ แล้ว สมการดังกล่าวมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z)=(0,0,0)$ และถ้า $p=3$ แล้ว ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x,y,z) ทั้งหมดของสมการคือ $(0,0,0),(1,0,1)$ และ $(2,1,1)$ นอกจากนี้ ถ้า $p\neq 3$ และ $p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ แล้ว ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ คือ $(x,y,z)=(0,0,0)$ และ $(x,y,z)=\left(1,0,\sqrt{p-2}\right)$ เมื่อ $\sqrt{p-2}$ เป็นจำนวนเต็ม

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์; สมภาค; ส่วนตกค้างกำลังสอง

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) เป็นสมการที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง โดยสมการดังกล่าวจะพิจารณาเฉพาะผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 2020 Burshtein (2020) ได้ศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 5^y = z^2$ และ $19^x - 5^y = z^2$ พบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (2, 2, 12)$ สมการไดโอแฟนไทน์ $19^x - 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก และในปีเดียวกัน Buosi et al. (2020) ได้ค้นพบผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x - 2^y = z^2$ เมื่อ $p = k^2 + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะและ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ นอกจากนี้ Elshahed and Kamarulhaili (2020) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $(4^n)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้ $\{(x, y, z, p)\} = \{(k, 1, 2^{nk} - 1, 2^{nk+1} - 1)\} \cup \{(0, 0, 0, p)\}$

และต่อมา Thongnak, Chuayjan and Kaewong ได้พิสูจน์ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x - 5^y = z^2$ (Thongnak et al., 2021), $15^x - 13^y = z^2$ (Thongnak et al., 2023a) และ $55^x - 53^y = z^2$ (Thongnak et al., 2023b) และในปี ค.ศ. 2023 Tadee and Laomalaw (2023) ได้ขยายผลงานวิจัยของ Thongnak, Chuayjan and Kaewong โดยการแสดงว่า ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p + 2)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 24)$ มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และเมื่อไม่นานมานี้ Tadee and Wannaphan (2024) ได้ศึกษาและค้นพบเงื่อนไขที่ทำให้ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p + a)^x - p^y = z^2$ และ $p^x - (p + a)^y = z^2$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะขยายผลการวิจัยของ Thongnak, Chuayjan and Kaewong (2019) ซึ่งได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสามผลเฉลย ได้แก่ $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ และ $(2, 1, 1)$ โดยผู้วิจัยจะศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์

$$(p - 1)^x - p^y = z^2 \tag{1}$$

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

และเนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ผู้วิจัยจึงแยกพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้ กรณีที่หนึ่ง $p = 2$ (จะพิสูจน์ในทฤษฎีบท 2) กรณีที่สอง $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ (จะพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3) และสุดท้ายกรณีที่สาม $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ (จะพิสูจน์ในทฤษฎีบท 4)

วิธีการวิจัย

ก่อนที่จะดำเนินการวิจัยจะขอทบทวนนิยามและสมบัติของส่วนตกค้างกำลังสอง (Quadratic residue) (Burton, 2010, p. 171) ดังนี้

บทนิยาม 1 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $\gcd(a, p) = 1$ ถ้า $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$ มีผลเฉลย แล้วจะเรียก a ว่า เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p และ ถ้า $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$ ไม่มีผลเฉลย จะเรียก a ว่า ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p

ทฤษฎีบท 1 (Euler's criterion) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $\gcd(a, p) = 1$ จะได้ว่า a เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p ก็ต่อเมื่อ $a^{(p-1)/2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$

ต่อไปจะศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ (1)

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $p = 2$ แล้ว สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) \in \{(t, 0, 0)\}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1) และเนื่องจาก $p = 2$ จะได้ว่า

$$1 - 2^y = z^2 \qquad (2)$$

และเนื่องจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $1 - 2^y \geq 0$ เพราะฉะนั้น $y = 0$ และจากสมการ (2) จะได้ว่า $z^2 = 0$ เพราะฉะนั้น $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) \in \{(t, 0, 0)\}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 3 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1)

กรณีที่ 1 $x = 0$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$1 - p^y = z^2 \qquad (3)$$

และเนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p > 1$ และจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $1 - p^y \geq 0$ จะได้ว่า $y = 0$ และจากสมการ (3) ดังนั้น $z^2 = 0$ เพราะฉะนั้น $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0,0,0)$

กรณีที่ 2 $x > 0$ และเนื่องจาก $p \equiv 1(\text{mod } 4)$ เพราะฉะนั้น $(p-1)^x \equiv 0(\text{mod } 4)$ และ $p^y \equiv 1(\text{mod } 4)$ ดังนั้น $(p-1)^x - p^y \equiv 0 - 1 \equiv -1 \equiv 3(\text{mod } 4)$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv 3(\text{mod } 4)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1(\text{mod } 4)$

ดังนั้นจากกรณีที่ 1 และ 2 สรุปได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0,0,0)$

ทฤษฎีบท 4 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \equiv 3(\text{mod } 4)$ จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ดังนี้

1) ถ้า $p = 3$ แล้ว $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1), (2,1,1)\}$

2) ถ้า $p \neq 3$ แล้ว $(x, y, z) = (0,0,0)$ และ $(x, y, z) = \left(1, 0, \sqrt{p-2}\right)$

เมื่อ $\sqrt{p-2}$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1)

กรณีที่ 1 $y = 0$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$(p-1)^x - 1 = z^2 \tag{4}$$

กรณีที่ 1.1 $x = 0$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $z^2 = 0$ ดังนั้น $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0,0,0)$

กรณีที่ 1.2 $x = 1$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $z^2 = p - 2$ ดังนั้น $z = \sqrt{p-2}$ นั่นคือ $(x, y, z) = \left(1, 0, \sqrt{p-2}\right)$ เมื่อ $\sqrt{p-2}$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 1.3 $x \geq 2$ และเนื่องจาก $p \equiv 3(\text{mod } 4)$ ดังนั้น $(p-1)^x \equiv 2^x \equiv 0(\text{mod } 4)$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $z^2 \equiv 0 - 1 \equiv 3(\text{mod } 4)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $z^2 \equiv 0, 1(\text{mod } 4)$

กรณีที่ 2 $y \geq 1$ เพราะฉะนั้น $p^y \equiv 0(\text{mod } p)$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $(p-1)^x \equiv z^2(\text{mod } p)$ ดังนั้น $(p-1)^x$ เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p และจากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}((p-1)^x)^{(p-1)/2} &\equiv 1(\text{mod } p)\\ \left((p-1)^{(p-1)/2}\right)^x &\equiv 1(\text{mod } p)\\ \left((-1)^{(p-1)/2}\right)^x &\equiv 1(\text{mod } p)\end{aligned}$$

และเนื่องจาก $p \equiv 3(\text{mod } 4)$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ h ซึ่งทำให้ $p = 4h + 3$ ดังนั้น $(p-1)/2 = 2h + 1$ เพราะฉะนั้น $(p-1)/2$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $(-1)^{(p-1)/2} \equiv -1(\text{mod } p)$

ดังนั้น $(-1)^x \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ นั่นคือ x เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$(p-1)^{2k} - z^2 = p^y$$

$$[(p-1)^k - z][(p-1)^k + z] = p^y$$

และเนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้

$$(p-1)^k - z = p^u \qquad (5)$$

$$(p-1)^k + z = p^{y-u} \qquad (6)$$

จากสมการ (5) และ (6) จะได้ว่า $y - u \geq u$ หรือ $y \geq 2u$

และ

$$2(p-1)^k = p^{y-u} + p^u = p^u(p^{y-2u} + 1) \qquad (7)$$

และจาก $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ จะได้ว่า $\gcd(p, 2) = 1$ และเนื่องจาก $\gcd(p, p-1) = 1$ เพราะฉะนั้น $\gcd(p, 2(p-1)^k) = 1$ ดังนั้น $p \nmid 2(p-1)^k$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (7) จะได้ว่า $u = 0$ และ

$$2(p-1)^k = p^y + 1 \qquad (8)$$

จากสมการ (8) จะได้ว่า

$$2(-1)^k \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p)$$

สมมติว่า k เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p)$ เพราะฉะนั้น $p|1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น k เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $-2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p)$ เพราะฉะนั้น $p|3$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p = 3$ และจากสมการ (8) จะได้ว่า

$$2^{k+1} = 3^y + 1 \qquad (9)$$

และเนื่องจาก k เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ l ซึ่งทำให้ $k = 2l + 1$ และจากสมการ (9) จะได้ว่า

$$2^{2l+2} - 1 = 3^y$$

$$(2^{l+1} - 1)(2^{l+1} + 1) = 3^y$$

และเนื่องจาก 3 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้

$$2^{l+1} - 1 = 3^v \qquad (10)$$

$$2^{l+1} + 1 = 3^{y-v} \qquad (11)$$

จากสมการ (10) และ (11) จะได้ว่า $y - v \geq v$ หรือ $y \geq 2v$

และ $2^{l+2} = 3^{y-v} + 3^v = 3^v(3^{y-2v} + 1)$

เพราะฉะนั้น $v = 0$ และ

$$2^{l+2} = 3^y + 1 \qquad (12)$$

จากสมการ (9) และ (12) จะได้ว่า $l+2 = k+1 = 2l+2$ ดังนั้น $l = 0$ และ $y = 1$ เพราะฉะนั้น $k = 1$ และ $x = 2$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z = 1$ นั่นคือ $(x,y,z) = (2,1,1)$ เมื่อ $p = 3$ ดังนั้นจากกรณีที่ 1 และ 2 สรุปได้ว่า

1) ถ้า $p = 3$ แล้ว $(x,y,z) \in \{(0,0,0),(1,0,1),(2,1,1)\}$

2) ถ้า $p \neq 3$ แล้ว $(x,y,z) = (0,0,0)$ และ $(x,y,z) = \left(1,0,\sqrt{p-2}\right)$

เมื่อ $\sqrt{p-2}$ เป็นจำนวนเต็ม

สรุปผลการวิจัย

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2 – 4 ทำให้ทราบผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x,y,z) ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งในการพิสูจน์ได้ใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น สมภาคและส่วนตกค้างกำลังสอง เป็นต้น และสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาครั้งต่อไป คือ การพิจารณาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p-a)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ a เป็นจำนวนเต็มบวก

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

References

Buosi, M., Lemos, A., Porto, A.L.P. and Santiago, D.F.G. (2020). On the exponential Diophantine equation $p^x - 2^y = z^2$ with $p = k^2 + 2$, a prime number. *Southeast-Asian Journal of Sciences*, 8(2), 103-109.

Burshtein, N. (2020). All the solutions of the Diophantine equations $13^x - 5^y = z^2$, $19^x - 5^y = z^2$ in positive integers x, y, z. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 22(2), 93-96.

Burton, D.M. (2010). *Elementary Number Theory*. 7th ed., New York: McGraw-Hill.

Elshahed, A. and Kamarulhaili, H. (2020). On the Diophantine equation $(4^n)^x - p^y = z^2$. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 19, 349-352.

Tadee, S. & Laomalaw, N. (2023). On the Diophantine equation $(p+2)^x - p^y = z^2$, where p is prime and $p \equiv 5(\text{mod } 24)$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 18(2), 149-152.

Tadee, S. & Wannaphan, C. (2024). On the Diophantine equations $(p+a)^x - p^y = z^2$ and $p^x - (p+a)^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 19(2), 459-465.

Thongnak, S., Chuayjan, W. & Kaewong, T. (2019). On the exponential Diophantine equation $2^x - 3^y = z^2$. *Southeast-Asian Journal of Sciences*, 7(1), 1-4.

Thongnak, S., Chuayjan, W. & Kaewong, T. (2021). The solution of the exponential Diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$. *Mathematical Journal*, 66(703), 62-67.

Thongnak, S., Chuayjan, W. & Kaewong, T. (2023a). On the Diophantine equation $15^x - 13^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 27(1), 23-26.

Thongnak, S., Kaewong, T. and Chuayjan, W. (2023b). On the Diophantine equation $55^x - 53^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 27(1), 27-30.