

การวิเคราะห์พฤติกรรมระบบ โดยใช้ทฤษฎีภาวะเอกฐานและภาวะเอกฐานเชิงพลวัต

The Demonstration of Using Singularity Theory and Dynamic Singularities

^{1,2}เทียนสิริ เหลืองวิไล, ²ฮาวันเดอร์ ชิดดู และ ³มาร์ก เนลสัน

¹กองวิชาคอมพิวเตอร์และคณิตศาสตร์ โรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราช กรุงเทพฯ ประเทศไทย

²กองวิชาฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ สถิติ และสิ่งแวดล้อม โรงเรียนนายร้อยรวมเหล่าออสเตรเลีย

มหาวิทยาลัยแห่งรัฐนิวเซาท์เวลส์ มหานครแคนเบอร์รา ประเทศออสเตรเลีย

³มหาวิทยาลัยวูลองกอง รัฐนิว เซาท์ เวลส์ ประเทศออสเตรเลีย

¹E-mail: thiansiri@rtaf.mi.th

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการแนะนำกระบวนการใช้ทฤษฎีภาวะเอกฐานและภาวะเอกฐานเชิงพลวัต ในการวิเคราะห์พฤติกรรมทั่วไปของระบบต่าง ๆ ที่มีความซับซ้อนมาก ๆ เพื่อทำนายว่าจะเกิดพฤติกรรมแบบใดได้บ้าง การวิเคราะห์พฤติกรรมระบบแบบนี้เป็นแพร่หลายในอุตสาหกรรมวิศวกรรมสมัยใหม่ และงานวิจัย การวิเคราะห์แบบนี้ทำให้เห็นภาพรวมของระบบทั้งหมดก่อนที่จะดำเนินการทดลองจริง เป็นวิธีการที่ปลอดภัยและลดต้นทุนในการทำการทดลอง และป้องกันอุบัติเหตุต่าง ๆ ได้ด้วย ตัวอย่างเช่น การระเบิดของเตาปฏิกรณ์เมื่อตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเกินค่าที่รับได้ ซึ่งหากกองทัพอากาศนำไปใช้แล้วน่าจะเกิดประโยชน์อันสูงสุด ไม่ว่าจะเป็นนำไปสู่วิจัยเรื่องบินขับ วัตถุระเบิด ปีกเครื่องบิน และโครงสร้างเครื่องบิน ด้วยเหตุที่ต้นทุนต่ำกว่าการวิจัยวิธีอื่น ๆ

คำสำคัญ : ทฤษฎีภาวะเอกฐาน ทฤษฎีภาวะเอกฐานเชิงพลวัต

Abstract

The purpose of this article is to demonstrate the process of using Singularity theory and dynamic singularities to investigate the generic solution behaviour of dynamical systems. The idea of this technique is used to predict all possible solution behavior. It is widely used in many fields such as industry, engineering and research fields. This technique provides the overview solution behavior before doing real experiment. It is safer and less expensive for experimenters. Therefore, this method will be very useful for future research in Royal Thai Air Force. It can be used in many of RTAF research fields such as rocket fuel, explosive, airplane wing, airplane frame.

Keyword: Singularity theory , Dynamic singularities

1. บทนำ

บทความนี้เป็นคำแนะนำกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์หาพฤติกรรมพื้นฐานที่เป็นไปได้ทั้งหมดของระบบต่าง ๆ กระบวนการนี้เรียกว่า กระบวนการใช้ทฤษฎีภาวะเอกฐาน (Singularity Theroty) และภาวะเอกฐานเชิงพลวัต (Dynamics Singularities) กระบวนการใช้สองทฤษฎีนี้แม้จะมีการเริ่มใช้มาเพียงประมาณ 30 ปี แต่ได้มีการพัฒนาที่ก้าวกระโดดและกว้างขวางมากขึ้นอย่างรวดเร็ว

กระบวนการใช้สองทฤษฎีนี้ได้นำมาใช้อย่างแพร่หลายมากขึ้น หลังจากที่นักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อ Golubitsky & Schaeffer [1] โดยได้นำวิธีการนี้มาใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของถังปฏิกรณ์เคมี (Continuous stirred-tank reactor : CSTR) ในการวิเคราะห์ได้พิจารณาถึงอุณหภูมิภายในของเตาปฏิกรณ์ที่เปลี่ยนแปลงและปริมาณสารต่าง ๆ ที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงส่วนผสมต่าง ๆ ขนาดของถังอัตราการหมุนของถัง

หลังจากนั้น Balakotaiah & Luss [2] ได้นำวิธีการนี้ไปเพิ่มเติมพัฒนาให้ครอบคลุมมากขึ้น และได้นำไปใช้วิเคราะห์ระบบต่าง ๆ มากมายทั้งระบบที่เกี่ยวข้องกับปฏิกิริยาเคมีและระบบที่เกี่ยวข้องกับปฏิกิริยาชีวภาพทำให้กระบวนการนี้เกิดความแพร่หลายมากขึ้นทั้งในวงการวิศวกรรมศาสตร์และคณิตศาสตร์ประยุกต์

อันดับแรกจะกล่าวถึงทฤษฎีภาวะเอกฐาน ภาวะเอกฐานในเงื่อนไขแต่ละชนิดเพื่อเป็นการสร้างความเข้าใจ และการนำไปใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมที่เปลี่ยนไปของระบบ จากนั้นจะอธิบายทฤษฎีภาวะเอกฐานเชิงพลวัตต่อไป

ทฤษฎีภาวะเอกฐาน และตัวแปรชนิดต่าง ๆ

หลักการใช้ทฤษฎีภาวะเอกฐาน อันดับแรกต้องสร้างฟังก์ชันภาวะเอกฐานขึ้นมาก่อน โดยการรวมระบบสมการต่าง ๆ เข้าไว้เป็นสมการเดียวดังตัวอย่างด้านล่าง

$$G(x, \lambda, p) = 0. \quad (1)$$

ในสมการที่ (1) นี้จะให้ ฟังก์ชันภาวะเอกฐาน เท่ากับ 0 และมีตัวแปรต่าง ๆ ดังนี้ x คือตัวแปรระบบ (State Variable) คือ ตัวแปรที่ต้องการศึกษาในการเปลี่ยนแปลงของระบบต่าง ๆ เช่น อุณหภูมิ ปริมาณสาร ปริมาณกรด ฯลฯ ตัวแปรต่อไปคือตัวแปรหลัก λ (Primary Variable) คือตัวแปรที่ควบคุมได้ง่ายในการเปลี่ยนแปลงแต่ละครั้ง ส่วนตัวแปรตัวสุดท้ายนั้นคือ p ซึ่งเรียกว่าตัวแปรรอง (Secondary Variable) สามารถมีมากกว่าหนึ่งตัวได้ เป็นตัวแปรที่นำมาศึกษาว่าถ้าหากเปลี่ยนค่าของตัวแปรชนิดนี้แล้วพฤติกรรมของระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) ซึ่งเป็นพฤติกรรมของระบบที่สภาวะคงที่ คือ การปล่อยให้มีการเปลี่ยนแปลงไปเรื่อย ๆ จนระบบหยุดการเปลี่ยนแปลงเอง เพื่อดูว่าระบบจะเปลี่ยนไปในรูปแบบใด

การประยุกต์ทฤษฎีของภาวะเอกฐานและภาวะเอกฐานเชิงพลวัตจะนำตัวแปรรองมาวาดเป็นกราฟต่าง ๆ ที่สำคัญในการวิเคราะห์ลักษณะมี 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 กราฟของตัวแปร (Parameter Plane) เป็นกราฟที่นำเงื่อนไขต่าง ๆ ของทฤษฎีภาวะเอกฐาน และภาวะเอกฐานเชิงพลวัตมาวาดรวมกัน กราฟชนิดนี้เปรียบได้กับแผนที่ของระบบทั้งหมด เหมือนเปลี่ยนค่าตัวแปรจากจุดหนึ่งใน Parameter Plane จะได้พฤติกรรมระบบแบบหนึ่ง แต่เมื่อเปลี่ยนค่าของตัวแปรไปยังพื้นที่อื่น พฤติกรรมระบบก็จะเปลี่ยนไป กราฟชนิดนี้เปรียบเสมือนแผนที่แสดงสิ่งที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดในแต่ละระบบ ซึ่งจะช่วยให้สามารถคาดการณ์ได้

แบบที่ 2 กราฟของพฤติกรรมระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) เป็นกราฟของระบบที่สภาวะคงที่ คือ การปล่อยให้ระบบมีการเปลี่ยนแปลงไปเรื่อย ๆ จนหยุดการเปลี่ยนแปลงเอง

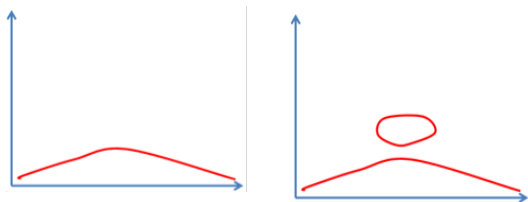
เงื่อนไขของทฤษฎีภาวะเอกฐาน ชนิดต่าง ๆ นั้นจะอธิบายในส่วนต่อไป ตามด้วยเงื่อนไขต่าง ๆ ของภาวะเอกฐานเชิงพลวัต

1) Isola Singularity

เงื่อนไขนี้เรียกว่า Isola Singularity เหตุผลที่ชื่อนี้ เพราะว่าพฤติกรรมในสภาวะคงที่ (Steady-State Solution) จะมีลักษณะเปลี่ยนที่มีการแยกตัวเป็นสองส่วน เงื่อนไขของ Isola Singularity นั้นอยู่ในสมการที่ (2)

$$\begin{aligned} G &= G_x = G_\lambda = 0, \\ \text{with } G_{xx} &\neq 0 \\ \text{and } G_{xx}G_{\lambda\lambda} - (G_{x\lambda})^2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของระบบนั้น จะใช้เงื่อนไขนี้วาดเส้นกราฟในระนาบพารามิเตอร์ (Parameter Plane) หรือแผนที่ จากนั้นเลือกค่าตัวแปรลงในระนาบพารามิเตอร์ (Parameter Plane) เพื่อมาวาดกราฟของระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) โดยใช้ค่าของตัวแปรทางด้านหนึ่งของเส้น Isola Singularity จะได้กราฟของระบบในสภาวะคงที่ กราฟใดกราฟหนึ่งในตัวอย่างด้านล่าง ดังรูปที่ 1 จากนั้นเมื่อเลือกตัวแปรอีกด้านหนึ่งของเส้นกราฟ Isola Singularity กราฟของระบบในสภาวะคงที่ จะเปลี่ยนไป อีกด้านหนึ่งในสองกราฟ ดังรูปที่ 1



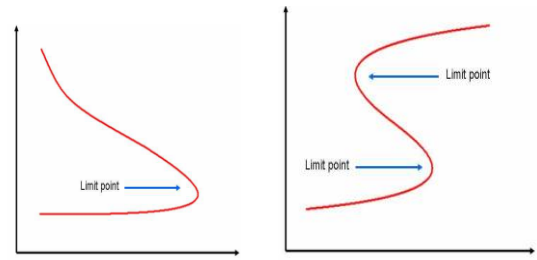
รูปที่ 1 ตัวอย่างของพฤติกรรมระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) เมื่อมีการข้ามเส้น Isola Singularity ในกราฟแผนที่ตัวแปร (Parameter Plane)

2) Cusp singularity

เงื่อนไขของ Cusp singularity นั้นแสดงอยู่ในสมการที่ (3)

$$\begin{aligned} G &= G_x = G_{xx} = 0, \\ \text{with } G_\lambda &\neq 0 \text{ and } G_{xxx} \neq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

โดยเงื่อนไขนี้ จะใช้ในการตรวจหาพฤติกรรมของระบบที่สภาวะคงที่ เมื่อกราฟข้ามเส้น ภาวะเอกฐานชนิดนี้จะมีการเปลี่ยนลักษณะโดยการหักงอเพิ่มขึ้นหรือลดลง เพราะฉะนั้นระบบที่สภาวะคงที่ จะมี จุดวิกฤต (Limit Point) หรือจุดวกกลับเพิ่มหรือลดจากเดิม (ขึ้นอยู่กับทิศทางที่ข้ามเส้นกราฟในระนาบพารามิเตอร์) ดังรูปที่ 2



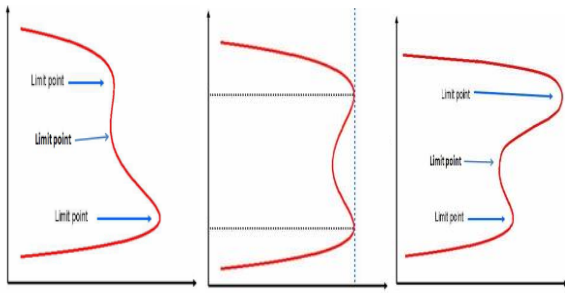
รูปที่ 2 ตัวอย่างของพฤติกรรมระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) เมื่อมีการข้ามเส้น Cusp Singularity ในกราฟแผนที่ตัวแปร (Parameter Plane)

3) Double-limit point singularity

เงื่อนไขของ ภาวะเอกฐาน ชนิดนี้แสดงอยู่ในสมการที่ (4)

$$\begin{aligned} G(x_1, \lambda, p) &= G(x_2, \lambda, p) = 0, \text{ with } x_1 \neq x_2, \\ G_x(x_1, \lambda, p) &= G_x(x_2, \lambda, p) = 0, \text{ with } x_1 \neq x_2, \\ G_{xx}(x_i, \lambda, p) &\neq 0, \quad G_\lambda(x_i, \lambda, p) \neq 0 \text{ for } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

โดยเงื่อนไขของภาวะเอกฐานชนิดนี้ เมื่อวาดเส้นกราฟในระนาบพารามิเตอร์ จะสามารถใช้ในการค้นหาพฤติกรรมของระบบที่สภาวะคงที่ ที่มีจุดวกกลับเกิดขึ้นพร้อมกัน 2 จุดที่ ค่าตัวแปรหลักตัวเดียวกัน ดังตัวอย่างดังรูปที่ 3 รูปกลาง (กราฟด้านซ้ายมือและขวามือเป็นพฤติกรรมของระบบก่อนและหลัง Double-Limit Point Singularity)



รูปที่ 3 ตัวอย่างของพฤติกรรมระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) เมื่อมีการข้ามเส้น Double-Limit Point ภาวะเอกฐาน ในกราฟแผนที่ตัวแปรรอง (Parameter Plane)

4) Quadratic fold point singularity

เงื่อนไขชนิดนี้เป็นการหาจุดที่เชื่อมกันของพื้นที่ในระนาบพารามิเตอร์ ที่เส้นของ Cusp Singularity Line ตัดกับเส้น Double-Limit Point Singularity และเงื่อนไขของ ภาวะเอกฐาน ชนิดนี้อยู่ในสมการที่ (5)

$$G = G_x = G_{xx} = G_{xxx} = 0,$$

$$G_{xxx} \neq 0, G_\lambda \neq 0.$$

(5)

ในบางระบบนั้น พบว่าการหาเส้นของ Double-Limit Point Singularity ในระนาบพารามิเตอร์ นั้นมีความยาก แต่สามารถใช้ Quadratic Fold Point Singularity มาตรวจสอบก่อนว่า Double-Limit Point Singularity นั้นสามารถเกิดขึ้นได้ในระบบหรือไม่ เพราะหาก Double-Limit Point Singularity สามารถเกิดขึ้นได้แล้ว เงื่อนไขของ Quadratic Fold Point Singularity ในสมการ (5) นั้นจะต้องเป็นจริง ในพื้นที่ของในกราฟ Parameter Plane ที่สนใจได้

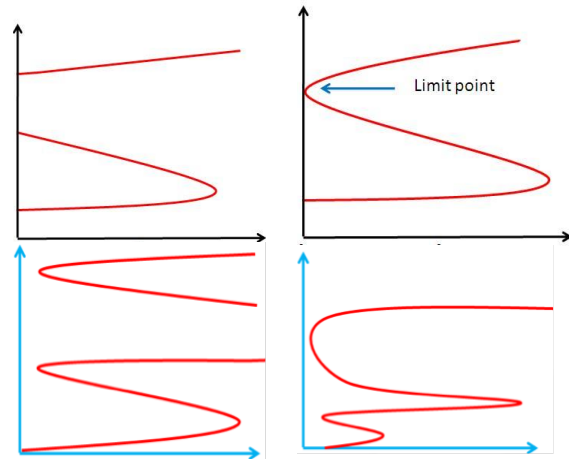
5) Boundary limit set singularity

เงื่อนไขของภาวะเอกฐาน ชนิดนี้ ตามสมการที่ (6) ใช้หาพฤติกรรมของระบบที่จะเกิดจุดวกกลับใหม่ (Limit Point) ที่ขอบเขตของตัวแปรหลัก (Primary Variable) ที่มีค่าเท่ากับ 0 และ ∞ ดังรูปที่ 4 สองรูปซ้ายมือแสดงตัวอย่างของการเกิดจุดวกกลับที่ตัวแปร

หลักเท่ากับ 0 และ สองรูปขวามือแสดงตัวอย่างของการเกิดจุดวกกลับเพิ่มขึ้นที่ตัวแปรหลักเท่ากับ ∞

$$G = G_x = 0 \text{ at } \lambda = \lambda_a.$$

(6)



รูปที่ 4 ตัวอย่างของพฤติกรรมระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) เมื่อมีการข้ามเส้น Boundary Limit Set Singularity ในกราฟแผนที่ตัวแปรรอง (Parameter Plane)

ในทฤษฎีภาวะเอกฐาน นั้นไม่ได้มีแค่เงื่อนไขทั้ง 5 ที่นำมาแสดงในหัวข้อนี้ แต่หากมีเงื่อนไขอื่น ๆ อีกมากมาย หากแต่ว่า Golubitsky & Schaeffer [1] และ Balakotaiah & Luss [2] วิเคราะห์แล้วว่า เงื่อนไขทั้ง 5 ชนิดนี้มีความสำคัญที่สุดในการศึกษาพฤติกรรมระบบ และพบได้บ่อย หัวข้อต่อไปจะอธิบาย เงื่อนไขต่าง ๆ ของทฤษฎี ภาวะเอกฐานเชิงพลวัต

ทฤษฎี ภาวะเอกฐานเชิงพลวัต

ในหัวข้อที่แล้วทำให้ทราบว่าทฤษฎีภาวะเอกฐาน มีเงื่อนไขการใช้ภาวะเอกฐานฟังก์ชันในสมการที่ 1 มาคิด แต่ในหัวข้อนี้ จะไม่นำสมการของระบบทั้งหมดมา รวมกันเป็นสมการเดี่ยวเหมือนในหัวข้อที่แล้ว แต่จะนำสมการทั้งหมดมาหาเมทริกซ์จacobian (Jacobian) ของระบบ โดยใช้เมทริกซ์จacobianนี้จะสามารถใช้ดีเทอร์มิแนนต์ (Det) และเทรซ (Trace) มาตรวจสอบว่า พฤติกรรมของระบบที่สภาวะคงที่ นั้นมีการแกว่งของ

ตัวแปรระบบ (State Variable) หรือไม โดยเมทริกซ์จาโคเบียน นั้นแสดงในสมการที่ (7)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{(x=x_c, y=y_c)}, \quad (7)$$

ทั้งนี้เงื่อนไขภาวะเอกฐานเชิงพลวัตมี 4 แบบ ได้แก่

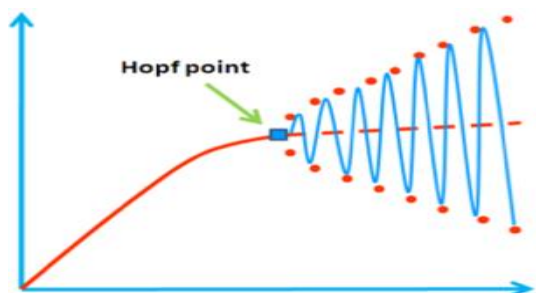
1) Hopf bifurcation

เงื่อนไขของภาวะเอกฐานเชิงพลวัต ตัวแรกนั้นคือ Hopf Bifurcation เงื่อนไขนี้ หากเป็นจริงในขอบเขตตัวแปรสองตัวที่สนใจหรือในพื้นที่ของ ระบายตัวแปรสองตัวแล้วนั้น แสดงว่าพฤติกรรมของระบบที่สถานะคงที่นั้น มีการแกว่งตัวไปมา โดยเงื่อนไขของภาวะเอกฐานเชิงพลวัต ชนิดนี้นั้นแสดงอยู่ในสมการที่ (7) และ (8) ส่วนตัวอย่างของกราฟของระบบที่สถานะคงที่ นั้นแสดงอยู่ดังรูปที่ 5

$$f = g = \text{tr } J = 0 ,$$

$$\frac{d(\text{tr } J)}{d\lambda} \neq 0 \text{ and } \det J > 0.$$

(8)



รูปที่ 5 ตัวอย่างของพฤติกรรมระบบที่สถานะคงที่ (Steady-State Solution) เมื่อมีการข้ามเส้น Hopf Bifurcation ในกราฟแผนที่ตัวแปรสองตัว (Parameter Plane)

จากรูปที่ 5 กราฟเดิมทีนั้นเป็นเส้นโค้งเส้นเดียว แต่ถ้าเงื่อนไขในสมการที่ (8) เป็นจริงแล้ว จะมีจุด Hopf เกิดขึ้น จุด Hopf นี้คือจุดที่ พฤติกรรมของระบบเริ่มแกว่งตัวขึ้นลงไม่คงที่

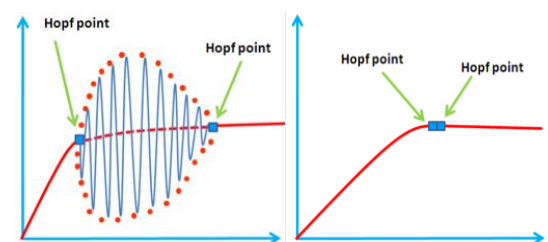
2) Double Hopf Bifurcation

เงื่อนไขต่อมาอันนี้คือเงื่อนไขที่ค่าของตัวแปรสองตัวในระนาบพารามิเตอร์ ที่ทำให้พฤติกรรมของระบบที่สถานะคงที่มีจุดที่ Hopf สองจุดแยกออกจากกัน หรือมาบรรจบ โดยเงื่อนไขนั้นแสดงอยู่ในสมการที่ (9) และรูปที่ 6 ด้านล่าง

$$f = g = \text{tr } J = 0 ,$$

$$\frac{d(\text{tr } J)}{d\lambda} = 0 \text{ and } \det J > 0.$$

(9)



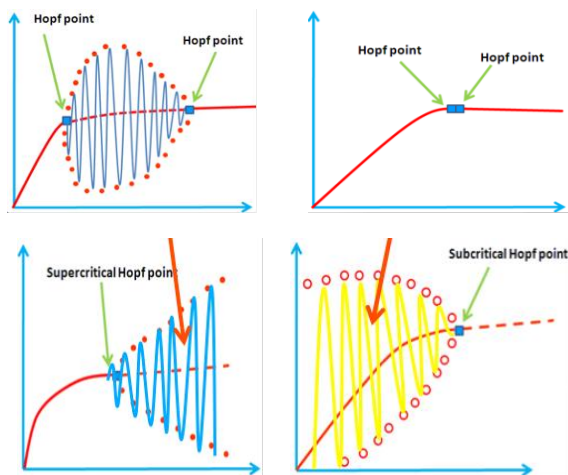
รูปที่ 6 ตัวอย่างของพฤติกรรมระบบที่สถานะคงที่ (Steady-State Solution) เมื่อมีการข้ามเส้น Double Hopf Bifurcation ในกราฟแผนที่ตัวแปรสองตัว (Parameter Plane)

3) Bautin bifurcation

เงื่อนไขที่ 3 นั้น ใช้ในการหาค่าตัวแปรสองตัวในระนาบตัวแปรสองตัว ที่ทำให้พฤติกรรมของระบบที่สถานะคงที่นั้นมีการเปลี่ยนแปลงจาก Supercritical Hopf Point มาเป็น Subcritical Hopf Point หรือในทางกลับกันโดย

Supercritical Hopf Point หรือ Stable Hopf Point นั้นเป็นจุด Hopf ที่มีการแกว่งตัวของพฤติกรรมของระบบที่มีเสถียร นั้นหมายความว่า ถ้าตั้งค่าตัวแปรทุกตัวให้ พฤติกรรมของระบบมีการแกว่งตัวนั้น มันจะแกว่งตัวไปเรื่อย ๆ ไม่หยุด เพราะว่ามันมีความเสถียร ดังในกราฟซ้ายมือ ดังรูปที่ 7

Subcritical Hopf Point หรือ Unstable Hopf Point นั้นเป็นจุด Hopf ที่ขาดความเสถียร นั้นหมายความว่า พฤติกรรมของระบบอาจจะมีการแกว่งขึ้นลงบ้าง แต่ถ้าปล่อยเวลาไปนาน ๆ ระบบจะค่อย ๆ นิ่งและคงที่ในที่สุด ดังในกราฟขวามือ ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 ตัวอย่างของพฤติกรรมระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) เมื่อมีการข้ามเส้น Bautin Bifurcation ในกราฟแผนที่ตัวแปรสอง (Parameter Plane)

4) Double-zero Eigenvalue (DZE)

เงื่อนไขสุดท้ายนี้คือเงื่อนไขที่ Hopf Point นั้นแยกออกหรือมาบรรจบกลับจุดวกกลับ (Limit Point) เพราะฉะนั้น เงื่อนไขนี้จะเป็นตัวบ่งชี้ว่าจุด Hopf นั้นจะต้องเพิ่มขึ้น 1 จุดหรือลดลง 1 จุดทุก ๆ ครั้งที่ข้ามเส้นเงื่อนไขชนิดนี้ใน Parameter Plane และเงื่อนไขชนิดนี้แสดงอยู่ในสมการที่ (10)

$$f = g = \text{tr } J = \det J = 0$$

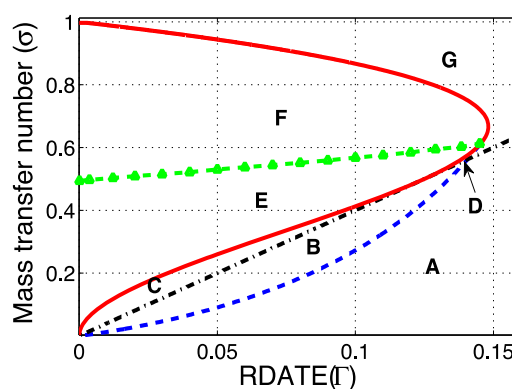
$$\text{and } \frac{d(\text{tr } J)}{d\lambda} \neq 0.$$

(10)

ในหัวข้อนี้ได้แนะนำ ภาวะเอกฐานเชิงพลวัต ที่สำคัญ ๆ ไปแล้ว 4 ชนิด ในหัวข้อต่อไปจะใช้เงื่อนไขทั้ง 5 ของทฤษฎี ภาวะเอกฐาน และอีก 4 ชนิดของ ภาวะเอกฐานเชิงพลวัต มาวาดเส้นกราฟต่าง ๆ บนกราฟ Parameter Plane เพื่อแบ่งพื้นที่ของกราฟเป็นส่วน ๆ โดยแต่ละช่องนั้นจะมีพฤติกรรมของระบบที่สภาวะคงที่ต่างกัน

ตัวอย่างการวิเคราะห์ระบบ

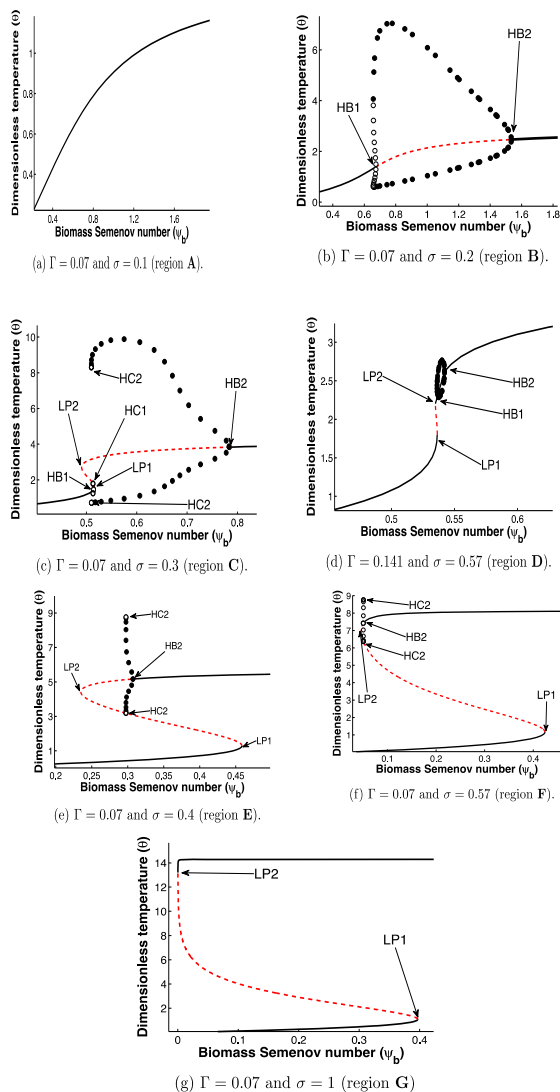
ในหัวข้อนี้จะดำเนินการใช้ทฤษฎีทั้งสองมาหาคำตอบของสมการหรือพฤติกรรมของระบบที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) โดยตัวอย่างที่นำมาแสดงให้ดูนั้น เป็นโมเดลคณิตศาสตร์ในบทความที่ได้รับการพัฒนาโดย Nelson et. al [3] โดยโมเดลนี้เป็นการจำลองปฏิกิริยาเคมีและปฏิกิริยาชีวภาพในกองขยะชีวมวล ซึ่งกระบวนการมีความซับซ้อนมาก โดยสามารถดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่ Luangwilai et. al. [4], Luangwilai et. al. [2010B] และ Luangwilai et. al. [5]



รูปที่ 8 กราฟแผนที่ตัวแปรสอง (Parameter Plane) สำหรับกรณีศึกษา โดยกำหนดให้ กราฟสีแดงเป็นกราฟของ Cusp Singularity กราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟของ Double Hopf Bifurcation กราฟสีเขียวเป็นกราฟ Bautin Bifurcation และกราฟสีแดงเป็นกราฟของ Double-Zero Eigenvalues (DZE)

หลังจากที่ใช้เงื่อนไขทั้งหมดจากทั้งสองทฤษฎีมาวาดกราฟตัวแปรสอง (Parameter Plane) พบว่าเงื่อนไขที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ในกรณีนี้คือ Isola Singularity, Double-Limit Point Singularity และ Boundary Limit Set Singularity ส่วนเงื่อนไขอื่น ๆ นั้นแสดงอยู่ในกราฟรูปที่ 8 โดยเงื่อนไขเหล่านั้นได้แบ่งพื้นที่ของกราฟรูปที่ 8 ออกเป็นพื้นที่ย่อย ๆ ทั้งหมด 7 พื้นที่ โดยตั้งชื่อพื้นที่เหล่านั้นเป็น A - G โดยถ้าหากเลือกค่าของตัวแปรในแต่ละพื้นที่ในกราฟของตัวแปรสองนี้ จะได้กราฟพฤติกรรมที่สภาวะคงที่ (Steady-State Solution) ที่แตกต่างกันไป ดังรูปที่ 9 โดยรายละเอียดของ

พฤติกรรมเหล่านี้ ในแต่ละพื้นที่สามารถอ่านเพิ่มเติมได้ที่ Luangwilai et. al. [5]



รูปที่ 9 กราฟของพฤติกรรมระบบที่สภาวะคงที่ ของแต่ละพื้นที่ของกราฟตัวแปรรอง (Parameter) โดยแสดงค่าของตัวแปร Γ และ σ ในพื้นที่ A - G ของกราฟในรูป 8

สรุป

ในบทความนี้ได้แนะนำวิธีการใช้ทฤษฎีภาวะเอกฐาน และภาวะเอกฐานเชิงพลวัต มาเป็นเครื่องมือวิเคราะห์พฤติกรรมของระบบ โดยวิธีการนี้จะช่วยให้เห็นภาพรวมของระบบต่าง ๆ ว่าสามารถมีเหตุการณ์ใดเกิดขึ้นได้บ้าง หรือว่าเมื่อเกิดเหตุการณ์หนึ่ง สามารถมีอะไรเกิดตามมาได้บ้าง หรือว่าวิธีแก้ต้องเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรตัวใด หวังว่าสิ่งเหล่านี้จะเป็นประโยชน์

ต่อกองทัพอากาศโดยการประยุกต์ไปใช้กับระบบต่าง ๆ ที่กองทัพอากาศทำงานวิจัยอยู่ อย่างเช่น การออกแบบของปีกเครื่องบิน ดินปืน ดินขับจรวด

การออกแบบปีกเครื่องบินนั้น การที่ปีกเครื่องบินสั่นแบบไม่หยุด (Oscillatory Behaviour) นั้นเป็นสิ่งที่ไม่ต้องการอย่างยิ่งเพราะจะทำให้ปีกเครื่องบินเสียหายได้ ดังนั้นการศึกษาโมเดลของปีกเครื่องบินด้วยวิธีการนี้จะช่วยให้ป้องกันสิ่งเหล่านี้ได้หรือกรณีศึกษาเกี่ยวกับการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงเครื่องบินและทรสเตอร์ที่ได้ ออกมาจากการเผาไหม้ สามารถใช้วิธีการเหล่านี้เพื่อประยุกต์ใช้ได้พลังงานสูงสุดด้วยเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุด กล่าวคือสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีเหล่านี้กับงานวิจัยต่าง ๆ ของกองทัพอากาศได้ง่าย ซึ่งจะเป็นการให้ผลที่สูงด้วยต้นทุนที่ต่ำ เพราะว่าจะลดต้นทุนในการทำทดลองจริงลงไปได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] V.Balakotaiah and D.Luss. Global analysis of the multiplicity features of multi-reaction lumped-parameter systems, Chemical Engineering Science, 39: 865—881, 1984.
- [2] M.Golubitsky and D.Schaeffer. The classification theorem, in Singularities and Groups in Bifurcation Theory, 1st Edition, Vol 1, Chap IV, Springer, Berlin, Germany: 196-202, 1985.
- [3] T.Luangwilai, H.S. Sidhu, M.I. Nelson and X.D. Chen. The Semenov Formulation of the Biological Self-Heating Process in Compost Piles, Proceedings of the 9th Biennial Engineering Mathematics and Applications Conference, EMAC-2009, ANZIAM J., 51: C425-C445, 2010.
- [4] T.Luangwilai, H.S.Sidhu and M.I.Nelson. Biological self-heating in compost piles: A Semenov formulation, Chemical Engineering Science, 10: 533–542, 2013.
- [5] M.I.Nelson, H.S. Sidhu and X.D.Chen. A Spatially Uniform Model of Oxidative Self-Heating in Compost Piles, In proceedings of the 35th Australian Chemical Engineering Conference, CHEMECA 2007: 1673 -1683, 2007.